# 基于液膜流动类孤立波动力学的储备池计算：概念验证

Ivan S. Maksymov[1] 和 Andrey Pototsky[2]

[1] 澳大利亚新南威尔士州巴瑟斯特 *2795*，查尔斯特大学人工智能与网络未来研究所[2] 澳大利亚维多利亚州霍索恩 *3122*，斯威本科技大学数学系

arXiv:2303.01801v1 [physics.flu-dyn] 3 Mar 2023

**摘要** ——多项理论研究表明，孤子——即在传播过程中能够保持形状和速度恒定的波——可用作物理计算储备池。这一概念以呈现非线性动力学行为的模拟物理系统，取代为数字计算机设计的机器学习算法。在此，我们提出并通过实验验证了一种新型储备池计算（RC）系统。该系统首次利用在倾斜表面上流动的液膜表面传播的类孤立波（SL波）。我们证明，类孤立波储备池计算系统（SLRC）能够预测混沌时间序列，并成功通过关键基准测试，包括记忆容量测试和 Mackey-Glass 模型测试。

**引言。–** 储备池计算（RC） [1] 和
i其基础概念涉及对回响输入上下文的
h历史 [2], 液态机（LSM） [3] 和回声
S状态网络（ESN） [4] 构成了一类重要的
m机器学习（ML）算法的基础，这类算法能够执行某些
t生物大脑的功能 [3]并且能够
t经过训练以识别模式并预测响应
o混沌行为的非线性动力系统
h为 [5]。这一功能使储备池计算系统得以应用
i在科学和技术的许多领域，包括物理学，
p心理学和金融学 [6, 7]。

储备池计算系统执行复杂预测的能力
c其结构组织源于任务
[图 1(a)] ，将快速的线性读出层与
a 速度慢得多的人工神经网络（称为储备池）
[4]。储备池由随机连接的
n人工神经元网络组成，并将随时间变化的
i输入转换为神经元激活的时空模式
t然后使用以下方法将其转换为实际输出
r读出层转换为实际输出。虽然读出层针对具体任务而设计，
m 通用储备池并非没有记忆，它基于非线性动力系统的原理，并具有一定的记忆能力 [8]。这种结构使得由相对少量人工神经元组成的储备池，在解决某些实际问题时，比运行于超级计算机上的计算机程序更高效。因此，我们可以将储备池与某些生物大脑 [3], 相类比，包括果蝇和蚊子的大脑；它们平均仅有约 200,000 个神经元（相比之下，哺乳动物大脑拥有数百亿个神经元），却能让这些昆虫在导航和觅食时完成复杂任务 [9]。

尽管在液态状态机（LSM）框架中，储备池与液体之间的类比是在较为抽象的层面上建立的 [3], 后续研究表明，物理液体本身具备构建储备池所需的所有特性 [10–16]。此外，已有基于光孤子的储备池计算系统的理论构想 [17–20] [21]。然而，目前尚无基于孤子的储备池计算系统的实验演示。

本文通过实验展示了一种物理储备池计算系统，该系统利用孤子状（SL）波的动力学 [图 1(b)] ；这些波源于液膜在倾斜表面上流动时的时空演化[22–24]。我们采用多种标准测试协议验证了基于 SL 波的储备池计算（SLRC）系统的可行性，这些协议旨在对实现储备池计算概念的计算机程序进行基准测试。SL 波在自然界中普遍存在，在许多日常情境中都能轻易观察到 [图 1(c)]。因此，本文展示的 SLRC 原理应可应用于众多能够产生滚波的物理系统 [24, 25],，包括微流控器件 [26]。

**算法储备池计算。–** 我们作为参考所采用的标准回声状态网络算法 [图 1(a)]使用以下非线性更新方程：

$$\mathbf{x}_n = (1-\alpha)\mathbf{x}_{n-1} + \alpha \tanh(\mathbf{W}^{in}\mathbf{u}_n + \mathbf{W}\mathbf{x}_{n-1}), \qquad (1)$$

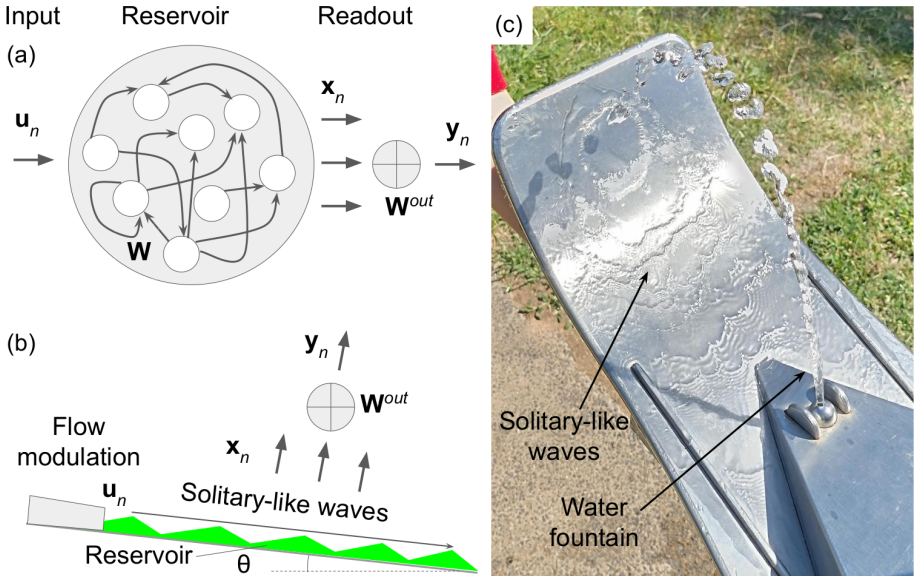



图 1：（a）基于 ESN 的 RC 算法。（b）所提出的 SLRC 示意图。（c）饮水喷泉喷水时，喷泉碗中可见的自然形成的 SL 波照片。

其中，$n$ 是表示等间隔离散时刻 $t_n$的索引，$\mathbf{u}_n$ 是由 $N_u$ 输入值组成的向量，$\mathbf{x}_n$ 是储备池的 $N_x$ 神经元激活向量，运算符 tanh(·) 是神经元的双曲正切函数，$\mathbf{W}^{in}$ 是包含 $N_x \times N_u$ 个元素的输入矩阵，$\mathbf{W}$ 是由 $N_x \times N_x$个元素组成的循环权重矩阵，而 $\alpha \in (0, 1]$ 是控制储备池时间动态的参数。

通过求解线性方程组 $\mathbf{Y}^{target} = \mathbf{W}^{out}\mathbf{X}$ 来计算输出权重 $\mathbf{W}^{out}$，其中 X 和 $\mathbf{Y}^{target}$ 分别是状态矩阵和目标矩阵，它们以 $\mathbf{x}_n$ 和目标输出向量 $\mathbf{y}_n^{target}$作为列，按每个离散时间瞬间 $t_n$构造。解的形式为 $\mathbf{W}^{out} = \mathbf{Y}^{target}\mathbf{X}^\top(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top + \beta \mathbf{I})^{-1}$，其中 I 是单位矩阵，$\beta \geq 0$ 是正则化系数，$\mathbf{X}^\top$ 是 X 的转置 [4]。然后，对新的输入数据 $\mathbf{u}_n$ 求解方程（1），并使用恒定偏置以及拼接项 $[\mathbf{u}_n; \mathbf{x}_n]$计算输出向量 $\mathbf{y}_n = \mathbf{W}^{out}[1; \mathbf{u}_n; \mathbf{x}_n]$。

**类孤立波物理储备池系统**。–图 1(b) 展示了实验装置示意图，其中，沿着与地面成 $\theta = 3^o$ [27] 角倾斜的金属板传播的 SL 波被用作计算储备池。通过电子调制泵流量来控制液膜的厚度，并在其表面生成 SL 波。向液体（自来水）中添加有机荧光染料并用紫外光照射，可产生绿色荧光；我们测量由 SL 波引起的荧光强度变化。使用俯拍高速数码相机（每秒 210 帧）记录光强分布，然后使用定制软件 [27] 进行处理。

为验证 SLRC，我们采用测试 ESN 计算机程序预测混沌时间序列（TS）能力的方法 [5, 8, 15]。首先，通过一次测量记录 SL 波对足够长数据集的响应。然后，将输入数据集的前半部分用于训练储备池计算系统，后半部分则留作测试。因此，利用前半部分输入数据计算 $\mathbf{W}^{out}$，而数据集的后半部分 $\mathbf{u}_n$ 则生成神经元激活 $\mathbf{x}_n$，以便将输出计算为 $\mathbf{y}_n = \mathbf{W}^{out}[1; \mathbf{u}_n; \mathbf{x}_n]$。

作为首个旨在测试 SLRC 记忆容量的时间序列（TS），我们使用随机生成的二进制向量，其值为“0”或“1”。该数据向量通过数字函数发生器转换为电信号，其中持续 0.25 秒的方波脉冲对应“1”状态，而脉冲之间持续 0.25 秒的间隔则代表“0”状态。该电信号调制泵流量 [图 1(b)]: TS 的“1”状态通过短暂改变流量来实现，从而产生一个 SL 波；而“0”状态则对应不对流量进行调制。例如，输入数据子集“10101”表示为三个持续 0.25 秒的脉冲，中间隔着两段持续 0.25 秒且没有流量调制的时段；而“111001111”则对应一个持续 0.75 秒的脉冲，其后间隔 0.5 秒的无流量调制时段，再接一个持续 1 秒的脉冲。脉冲及其间隔时段的持续时间均依据 [27] 中确定的 SL 波最佳生成参数选取。

图2展示了随机时间序列训练部分所产生的 SL 波。周期性方波脉冲信号对应规则的“101010...”二进制序列，会产生间距相等的 SL 波模式（此处未展示，相关讨论见 [27] ）；而

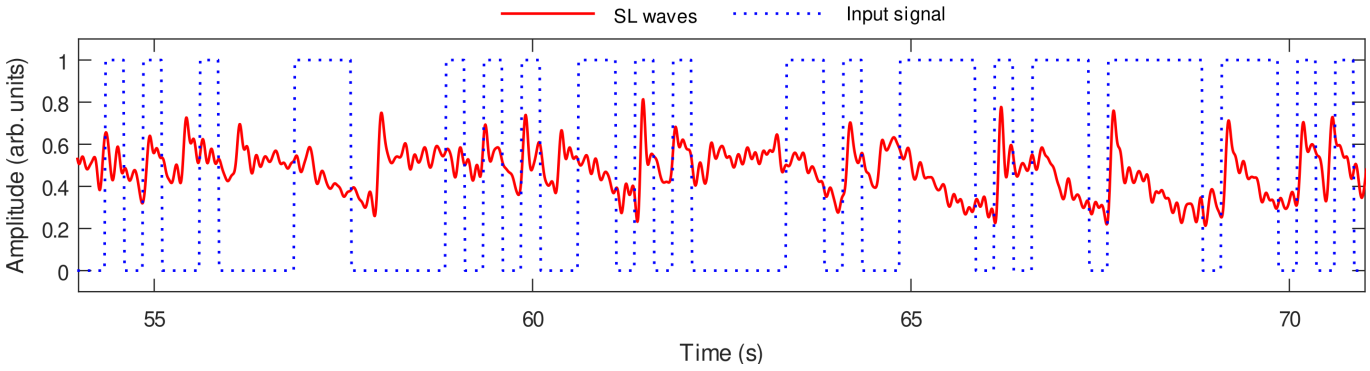



图 2：随机生成的二进制输入信号经过一段较短的训练后产生的 SL 波，其中每个“1”和“0”值分别表示为时长 0.25 秒的方波脉冲和时长 0.25 秒的间隔。

图2中的 SL 波形态遵循输入时间序列的随机模式。SL 波并未精确复现训练脉冲，这正是物理储备池计算系统训练阶段的典型现象 [15,28]。算法储备池计算系统也已证实 [8], ，储备池的响应不能是训练信号的复制，因为在这种情况下，训练后的储备池计算系统将无法产生与目标时间序列相似的输出。

图 2 中的 SL 波信号对应储备池的一次神经元激活。为生成更多神经元激活，我们按照 [28], 中所述的步骤，以较小的离散时间步对该信号进行采样，从而产生 40 个神经元激活。我们将由此获得的激活排列成状态矩阵 $\mathbf{X}$ ，并按照标准回声状态网络算法 [图 1(a)]，用它计算$\mathbf{W}^{out}$ 。

作为第二项测试，我们采用与上述相同的训练方法，让 SLRC 预测 Mackey-Glass 时间序列（MGTS）。由于 MGTS 具有非线性混沌行为 [15,29,30] ，因此常被用于测试储备池计算系统；它由时滞微分方程 [31]产生。

$$\dot{x}_{MG}(t) = \beta_{MG}\frac{x_{MG}(\tau_{MG}-t)}{1+x_{MG}^{q}(\tau_{MG}-t)} - \gamma_{MG}x_{MG}(t)\,, \quad (2)$$

其中我们选择 $\tau_{MG}=17$ 并设定 $q=10$、 $\beta_{MG}=0.2$ 和 $\gamma_{MG}=0.1$。生成的时间序列会调制实验中的液体流动。然而，与方波脉冲不同，MGTS 调制是连续的。我们注意到，所选的 MGTS 参数集常用于测试标准机器学习算法的性能，包括自回归移动平均（ARMA） [29]。众所周知，算法储备池计算系统在混沌时间序列预测方面优于 ARMA [32]。因此，我们也使用 MGTS 测试来验证 SLRC 是否能够胜过 ARMA。

**基准测试。**– 记忆容量。适用于储备池计算的储备池应具备内部记忆 [8]。我们使用施加于随机二进制时间序列的 $k$ 延迟任务测试 SLRC 的记忆容量，计算延迟目标信号 $\mathbf{y}_{n-k}^{target}$ 与使用该训练数据训练的储备池计算系统所产生的预测输出 $\mathbf{y}_{k,n}$ 之间的相关系数 $r(\mathbf{y}_{n-k}^{target},\mathbf{y}_{k,n})$，训练数据 $\mathbf{u}_{k,n}$ ，离散时间延迟为 $k$ [8]。函数 $r^2(\mathbf{y}_{n-k}^{target},\mathbf{y}_{k,n})$ 的取值范围为 0 到 1，其中 0 表示相关性完全丧失，1 表示正确目标数据与储备池计算系统做出的预测之间具有 100% 的相关性。将 $r^2$ 作为离散延迟时间 $k$ 的函数进行计算后，我们将记忆容量（MC）确定为

$$MC = \sum_{k=1}^{k_{max}} r^2(\mathbf{y}_{n-k}^{target},\mathbf{y}_{k,n})\,, \quad (3)$$

即 $k_{max}$ 分析中考虑的最大延迟。

图 3(a) 绘制了 $r^2$ 在 $k_{max}=20$ 下的结果，并得到 $MC$ =13。4 比特。我们观察到， $r^2$的最后一个非零值对应于 $k=40$ ，这表明具有 $N=40$ 个神经元的 SLRC 能够保留过去输入的一些记忆，直至算法储备池计算系统的理论基本极限 $MC=N$ [8]。然而，实际上，在算法储备池计算系统中， $MC\approx 0.3N$ ，这是由于网络更新方程中舍入误差的累积效应所致[8]。通过为 SLRC 得到 $N/MC\approx 0.35$ ，我们得出结论：实验装置的不完善，以及用于检测 SL 波的图像处理技术的不完善，在算法储备池计算系统中起到了舍入误差的作用。

图 3(a) 中报告的 MC 值比 [18], 中报告的数值高一个数量级；在该文献中，理论上提出了一种光学孤立波储备池计算系统。我们推测，SL 波在储备池计算领域中的应用可能具有优势，因为它们拥有其他物理性质的孤立波所不具备的独特非线性特性。事实上，SL 波能够合并[22] ，而不是彼此穿过；后者是众所周知的光学 [21] 和物质 [33] 孤立波的情形。我们推测，这种特性可能会增强 SLRC 对过去输入的记忆。

为支持我们的论述，我们首先参考有关储备池计算系统记忆容量的文献，并确认图 3(a) 中观察到的 $r^2$ 行为与由具有高度非线性激活函数的人工神经元组成的储备池 [34,35]非常相似。我们还让 SLRC 接受奇偶校验测试

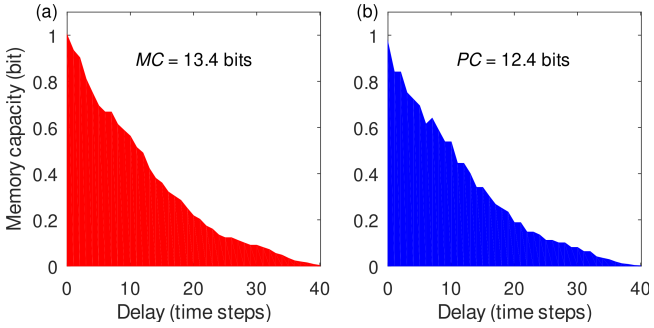



图 3：使用 (a) $k$- 延迟任务和 (b) 奇偶校验任务测得的 SLRC 记忆容量。

该测试用于评估在近似混沌动力学状态下运行的循环神经网络的性能[36]。在此测试中，储备池计算系统预测一个定义为 $PARITY(\mathbf{u}_{n-k}、\mathbf{u}_{n-k-1}、\mathbf{u}_{n-k-2})$ 的时间序列（TS），其中延迟逐渐增加$k$。由此生成的时间序列本身是一个二进制序列，对于任何储备池计算系统而言，其预测都是一项具有挑战性的任务，因为奇偶函数不是线性可分的，而要对其进行预测，储备池必须具备记忆能力。与公式 (3) 类似，我们通过将奇偶校验值求和至最大延迟 $k_{max}$ 来计算奇偶校验记忆容量。

图 3(b) 展示了奇偶校验测试的结果，该测试产生 $PC = 12.4$ 比特。在有关物理储备池计算系统的文献中，$PC$ 的值通常略小于 $MC$的值，且一般达到 2 比特 [16,28,37,38]。算法储备池计算系统的 $PC$ 值高于物理储备池计算系统 [36]。虽然对于 SLRC， $PC$ 的值也略小于 $MC$，但它是本文用作参照的物理储备池计算系统典型值的六倍。

对这一差异的一种合理解释是，标准算法储备池的相空间经过特定设计，不包含多个周期性或混沌吸引子或不动点，因为它们的存在可能会破坏回声状态特性 [30]。物理储备池计算系统的设计也常遵循这一原则。然而在实践中，许多具有复杂动力学的物理储备池计算系统不仅能够复现具有回声状态特性的算法储备池计算系统的行为，还能以更高效率解决复杂的非线性问题 [15, 36]。由于 SL 波表现出复杂的非线性行为 [22], , 与 [15, 36] 中讨论的储备池计算系统类似，SLRC 应当能够高效解决一些复杂的非线性问题。

我们还注意到，在图 3(b) 中，延迟为零时，奇偶校验得到的记忆约为 0.96 bit，而不是理论上预期的 1 bit（对应 100% 的相关性）。在我们的原理验证实验中，这一差异的确切成因尚不清楚。不过，以下解释或许合理。首先，这可能是一种伪影，因为在 MC 测试中并未观察到这种情况。其次，在算法储备池计算系统中，已知这种情况源于储备池中的长期混响，这会削弱对紧邻过去输入的回忆能力 [2, 8]。在 SLRC 中，混响可能由入口夹具的技术缺陷以及 SL 从倾斜板下游边缘产生的微小反射引起，这两者都是已有充分证据支持的事实 [27]。

*Mackey-Glass*时间序列。 我们通过单步预测任务测试 SLRC 预测 MGTS 的能力。该任务常用于检验神经网络模型的准确性 [6, 39, 40]。在此任务中，将某一时间步 $t_n$ 的时间序列值映射到未来时间步 $t_{n+1}$，并将所得预测与预期目标信号进行比较，以计算储备池的准确性。

按照 [15], 中概述的方法，我们对 MGTS 信号进行重采样，使其傅里叶频谱中的主峰频率达到 2 赫兹，这与相关实验研究中考察的 SL 波频率相同[27]。图 4(a) 展示了训练MGTS信号的一段片段，以及由该信号产生的 SL 波轨迹。与图 2 中的方波脉冲一样，我们观察到 SL 波模式会跟随训练 MGTS，但并不能与之完全吻合，这表明训练后的储备池计算系统能够泛化已学习的输入信号模式 [8]。

在图 4(b) 中，我们可以看到，SLRC 正确预测了目标 MGTS。我们计算了归一化均方误差（NMSE），这是衡量算法储备池计算系统准确性的标准指标 [4], ，其定义为

$$NMSE(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{target}) = \frac{\left\langle \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^{target}\|^2 \right\rangle}{\left\langle \|\mathbf{y}_n - \langle \mathbf{y}_n^{target} \rangle\|^2 \right\rangle}, \qquad (4)$$

其中， $\|\cdot\|$ 是范数， $\langle\cdot\rangle$ 表示对时间取平均。 $NMSE = 0$ 意味着储备池计算系统能够做出 100% 准确的预测，而 $NMSE = 1$则意味着储备池计算系统完全无法预测目标数据。我们得到 $NMSE_{SLRC} \approx 6.6 \times 10^{-4}$。随后，我们使用实现了式（1）中 ESN 模型 [30] 的软件来预测 MGTS，得到 $NMSE_{ESN} \approx 1.75 \times 10^{-7}$。SLRC 与 ESN 的 NMSE 相差三个数量级，这对我们的分析并无影响；这一差异归因于 SLRC 测量中存在的噪声。我们还使用实现了 ARMA 模型 [41] 的软件，在单步预测机制下预测 MGTS。我们得到$NMSE_{ARMA} \approx 1.5 \times 10^{-3}$，这表明 ARMA 的准确性低于储备池计算系统，这是已被证实的事实 [32]。

**理论分析**。– 研究表明，当系统对混沌时间序列中的一个脉冲作出的响应尚未完全衰减、下一个脉冲就已到来时，物理储备池计算系统能够实现相当大的记忆容量；这使系统能够保留其对输入时间序列中连续多个脉冲作出的响应痕迹 [28]。SLRC 具有类似的记忆机制，其基础是振幅更高的 SL 波会追上并吸收振幅

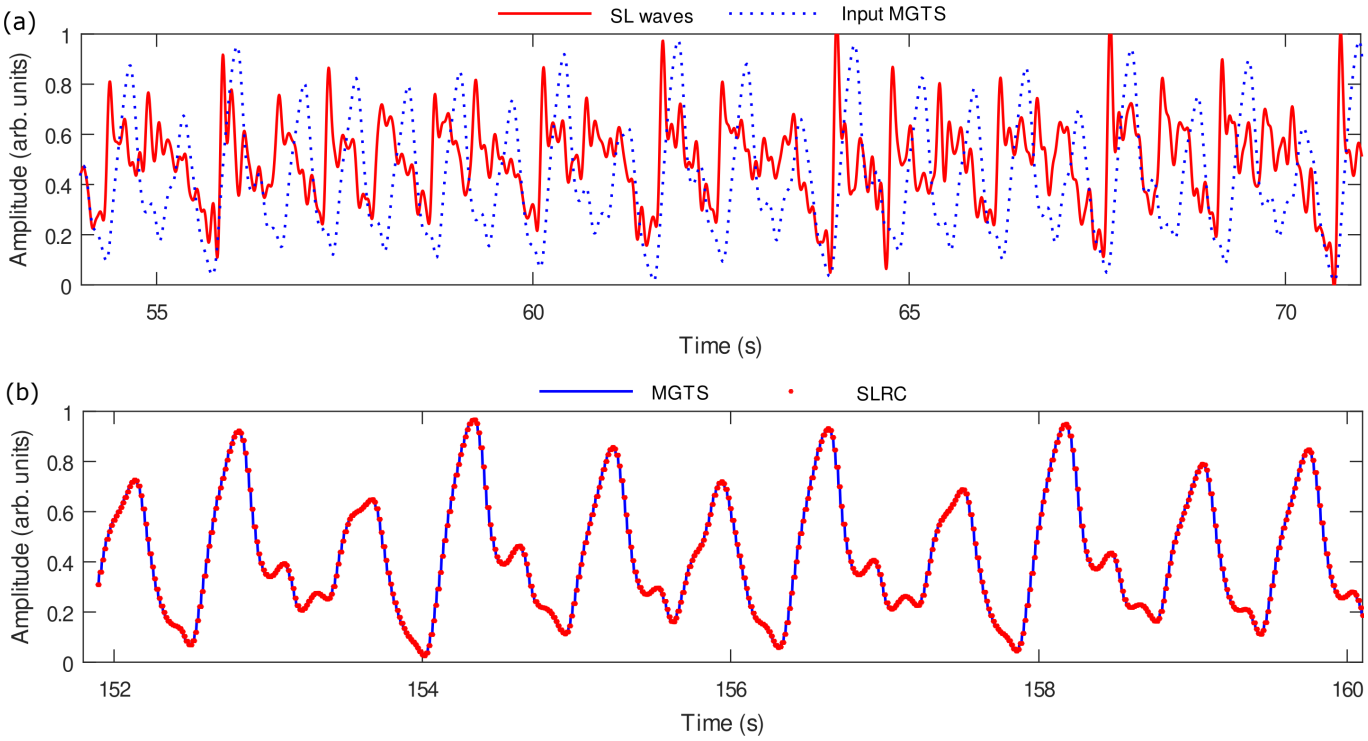



图 4：SLRC 的 MGTS 测试。(a) 由一段较短的 MGTS 输入信号训练段产生的 SL 波。(b) SLRC 所作的单时间步超前预测（圆点）与预期目标信号（曲线）的对比。请注意，绘制训练阶段和预测阶段数据时所用的时间尺度不同。

更低的 SL 波 [22]。我们通过一个模型对这一机制进行理论研究；为便于说明，我们使用三个方波脉冲激发 SL 波。

我们采用一种简化的水动力学 Shkadov 模型，该模型基于抛物线纵向速度剖面假设下的纳维-斯托克斯方程边界层近似 [42, 43]，并以两个耦合方程表示局部液膜厚度 $h(x,t)$ 和流层中的流体通量$q(x,t)$

$$\begin{aligned} \rho\left[\partial_t q + \frac{6}{5}\partial_x\left(\frac{q^2}{h}\right)\right] &= -\frac{3\mu q}{h^2} + \sigma h\partial_x^3 h \\ &- \rho g\cos(\theta)h\partial_x h + \rho g\sin(\theta)h, \\ \partial_t h + \partial_x q &= f(x,t), \end{aligned} \tag{5}$$

其中，$\theta$ 为倾角，$\mu$ 为动力黏度，$\sigma$ 为液气表面张力。在方程组（5）的第二个方程中，引入项 $f(x,\ t)$，以模拟入口引起的流体时间依赖流入量。我们采用一个高斯函数 $f(x,\ t) = \exp(-a(x-x_0)^2)s(t)$，其中心位于入口位置 $x_0$，参数$a$ 取足够大的值，以确保高斯函数的宽度显著小于表面波的典型长度。引入二值函数 $s(t) = f_a\{0,1\}$ 来描述流体流入量的时间调制，$f_a$ 表示流入量的振幅。我们在总长度为 $2L = 400$ cm 的（$-L \le x \le L$）域内，采用周期性边界对方程组（5）进行数值积分。入口位于 $x_0 = 100$ cm 处。相对较大的域长度使我们能够在最长 15 秒的时间段内观测波的动力学过程，之后波将传播过 $2L$的距离。

为展示不同振幅波的相互作用与碰撞，我们在厚度为 0.7 mm 的水膜上，通过三个振幅逐渐增大的流量调制阶段激发三个 SL 波。每个阶段持续 0.5 秒，阶段之间间隔 0.5 秒，期间不进行流量调制 [图 5(a)]。激发波的时空图见图 5(b)，其中标记为 (1,2,3) 的箭头指示了三个 SL 波的传播方向。如预期所示，第一个振幅较小的波比第二个振幅较大的波传播得慢。这两个波最终在下游约 100 cm 处碰撞，形成一个轮廓复杂的新波。这种相互作用情形称为非弹性波碰撞[22]。三个波 (1,2,3) 最终汇聚成一个紧凑结构，该结构由许多较小的波组成，位于入口下游约 150 cm 处。

因此，我们可以看到，当在非常靠近入口处检测到 SL 波时，它们没有足够的时间发展和相互作用，这反过来意味着 SLRC 的记忆容量较低。当在下游很远处检测到 SL 波时，记忆容量也会较低，因为波形发生显著变化，这意味着储备池记忆输入信号的能力会

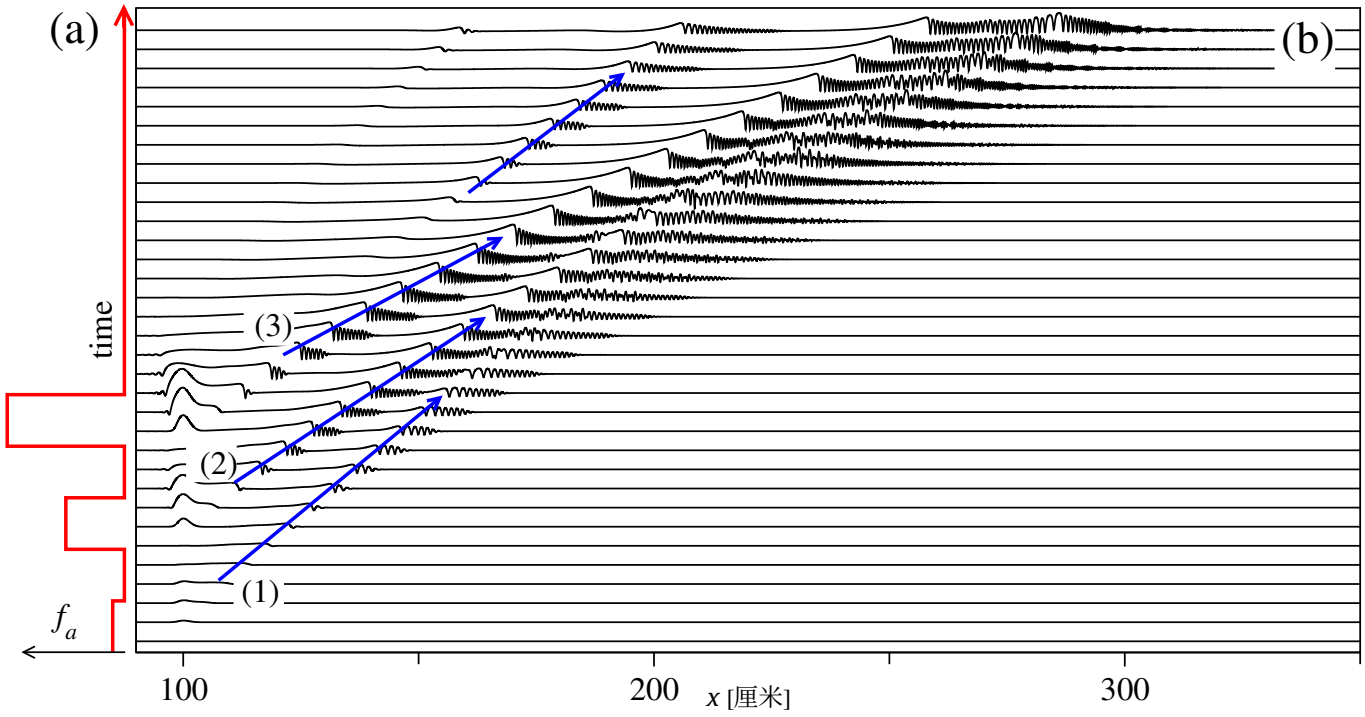



图 5：（a）用于激发三个具有不同振幅的 SL 波的调制函数 $s(t)$。（b）三个 SL 波随时间演化的时空图，箭头（1、2、3）标示了这些波；这些波由（a）图所示的调制函数激发。第一个较小的波（1）比第二个和第三个较大的波（2、3）传播得慢。第二个波在下游约 100 厘米处与第一个波发生非弹性碰撞。

受到损害。因此，合理推测，当在入口与下游远端 SL 波合并区域之间的中点检测到 SL 波时，记忆容量将达到最佳；本研究的实验采用了这一方法。

**讨论**。– 在结束之前，我们讨论 SLRC 未来可以进行的若干潜在改进。首先，本研究所用的实验装置具有进一步扩展的潜力，从而支持这样的测量：RC 系统可以使用自身的预测作为输入数据，生成新的 TS。这种运行模式称为生成模式，而无论对于物理储备池计算系统还是算法储备池计算系统，实现这一模式都是一项具有挑战性的任务 [8, 15, 30]。具体而言，生成模式要求引入反馈电路，在每个离散时间步将读出层的输出转换为新的输入数据。然而，将数据从读出层（通常其本身就是一个计算机程序）传输到 RC 系统的输入层，会引入时间延迟，其量级可能比储备池动态的时间尺度大几个数量级。例如，如果储备池的固有频率在数 GHz 量级 [28]，，那么所有读出计算都必须以 GHz 或更高的速率完成。对于 SLRC，SL 波的频率在数赫兹量级，因此可以使用激光测振技术检测 SL 波 [44]，再利用超快光电子学和光子学系统处理光信号；这些系统已应用于机器学习领域 [45, 46]。与 SL 波的时间动态相比，这种处理方案引入的时间延迟可以忽略不计。

除了生成模式下的运行外，在储备池的输出与输入之间引入时间延迟，可能有助于提高储备池计算系统的记忆容量 [28, 47, 48]，，同时还可使储备池仅使用一个人工神经元运行 [49]。然而，在流体动力学领域，引入反馈控制已被用于稳定液膜流动 [50]，这也可能有助于提升 SLRC 的性能。

**结论**。– 我们通过实验展示了一种物理储备池计算系统，该系统利用在倾斜表面上流动的液体薄膜表面传播的类孤立波实现。基于光学孤子和物质波孤子的计算储备池虽已在理论上得到预测，但尚未经过实验验证；而液膜的孤立波动力学具有独特特性，我们首次将其应用于机器学习领域。我们训练并利用类孤立波储备池执行了若干用于评估为数字计算机设计的机器学习算法性能的重要基准测试。结果表明，类孤立波储备池具有可观的记忆容量，并且与某些标准算法机器学习模型相比，能够更高效地预测混沌时间序列。

## 参考文献


[1] Nakajima K. 和 Fisher I., *Reservoir Computing* (Springer, 柏林) 2021. [2] Kirby K. G., *Proc. Florida AI Research Symposium (FLAIRS)* 1991 66 , ( ) .

[3] Maass W., Natschläger T.和 Markram H., *Neural Comput.* **14** 2002 2531 , ( ) .

[4] Lukoševičius M. 和 Jaeger H., *Comput. Sci. Rev.*, 3 (2009) 127.

[5] Gauthier D. J., Bollt E., Griffith A. 和 Barbosa W. A. S. *Nat. Commun.* **12** 2021 5564 , , ( ) .

[6] Marcellino M., Stock J. H. 和 Watson M. W., *J. Econom.* **135** 2006 499 , ( ) .

[7] Small M., *Applied Nonlinear Time Series Analysis: Applications in Physics, Physiology and Finance* (World Sci- entific, 新加坡) 2005. [8] Jaeger H., *A tutorial on training recurrent neural net-works, covering BPPT, RTRL, EKF and the "echo statenetwork" approach* (GMD Report 159, 德国国家信息技术研究中心) 2005. [9] Raji J. I. 和 Potter C. J., *PLOS ONE*, 16 (2021) 1. [10] Fernando C. 和 Sojakka S., *Pattern recognition in a bucket* 见《 *Advances in Artificial Life*会议录》, 由 Banzhaf W., Ziegler J., Christaller T., Dittrich P. Kim J. T. 2003 588 597 和 编, (Springer, 柏林) 第 – 页。[11] Jones B., Stekel D., Rowe J. 和 Fernando C., *Is there a liquid state machine in the bacterium escherichia coli?* 见《 *2007 IEEE Symposium on Artificial Life* 2007 187 191 会议录》第 – 页。

[12] Nakajima K. 和 Aoyagi T., *IEICE Tech. Rep.*, 115 (2015) 109.

[13] Nakajima K., *Jpn. J. Appl. Phys.*, 59 (2020) 060501. [14] Goto K., Nakajima K. 和 Notsu H., *N. J. Phys.*, 23 (2021) 063051.

[15] Maksymov I. S., Pototsky A. 和 Suslov S. A., *Phys. Rev. E* **105** 2021 044206 , ( ) .

[16] Matsuo T., Sato D., Koh S.-G., Shima H., Naitoh Y. Akinaga H. Itoh T. Nokami T. , , , , Kobayashi M. Kinoshita K. *ACS Appl. Mater. Interfaces* **14** 和 , , (2022) 36890. [17] Jiang J. 和 Lai Y.-C., *Phys. Rev. Research*, 1 (2019) 033056. [18] Zeng Q., Wu Z., Yue D., Tan X., Tao J.和 Xia G., *Appl. Opt.* **59** 2020 6932 , ( ) .

[19] Marcucci G., Pierangeli D. 和 Conti C., *Phys. Rev. Lett.* **125** 2020 093901 , ( ) .

[20] Silva N. A., Ferreira T. D. 和 Guerreiro A., *New J. Phys.* **23** 2021 023013 , ( ) .

[21] Kivshar Y. S. 和 Agrawal G. P., *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (Academic Press, 纽约) 2003.

[22] Liu J. 和 Gollub J. P., *Phys. Fluids*, 6 (1994) 1702.

[23] Chang H.-C., *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 26 (1994) 103.

[24] Kalliadasis S., Ruyer-Quil C., Scheid B. 和 Velarde M. G. , *Falling Liquid Films* (Springer-Verlag, 伦敦) 2012.

[25] Balmforth N. J. 和 Mandre S., *J. Fluid Mech.*, 514 (2004) 1.

[26] Hu X. 和 Cubaud T., *Phys. Rev. Lett.*, 21 (2018) 044502.

[27] Maksymov I. S.和 Pototsky A., *Appl. Sci.*, 13 (2022) 1888。[28] Watt S.和 Kostylev M., 《 *Phys. Rev. Appl.*》, 13 (2020) 034057。[29] Thissen U.、 van Brakel R.、 de Weijer A. P.、 Melssen W. J. Buydens L. M. C. *Chemom. In-* 和《 *tell. Lab. Syst.* **69** 2003 35

[30] Lukoševičius M.、 *A practical guide to applying echo state networks* 》, 载于 *Neural Networks: Tricks of the Trade*、 *Reloaded* , 由 Montavon G.、 Orr G. B. 和Müller K.-R.编辑 (Springer, 柏林), 2012年, 第659–686页。[31] Mackey M. C. 和 Glass L., 《 *Science*》, 197 (1977) 287。[32] Maciel L.、 Gomide F.、 Santos D. 和 Ballini R., 《 *Exchange rate forecasting using echo state networks for trading strategies* *2014 IEEE Conference on* 》, 载于 *Computational Intelligence for Financial Engineering and Economics (CIFEr)* 2014 40 47 会议论文集, 第

[33] Remoissenet M., *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments* 1994 页 (Springer)。

[34] Ganguli S.、 Huh D. 和 Sompolinsky H., 《 *PNAS*》, 105 (2008) 18970。[35] Verzelli P.、 Alippi C. 和 Livi L., 《 *Sci. Reps.*》, 9 (2019) 13887。[36] Bertschinger N. 和 Natschläger T., 《 *Neural Comput.* **16** 2004 1413 》 (

[37] Furuta T.) 。 Fujii K.、 Nakajima K.、 Tsunegi S.、 Kubota H. Suzuki Y. Miwa S. *Phys. Rev. Appl.* **10** , 以及《

[38] Liao Z.、 Wang Z.、 Yamahara H. 和 Tabata H.》, *Chaos Solitons Fract.* **153** 2021 111503 (2018) 034063。[39] Rodan A. 和 Tino P., 《 *IEEE Trans. Neural Netw.*》, 22 (2011) 131。[40] Morales G. B.、 Mirasso C. R. 和 Soriano M. C., 《 》 *Neurocomputing* **461** 2021 705 [41] Khan S.、*Least Mean Square* *Mackey Glass Time Series Prediction Using* 2023 (MATLAB中央文件交换) 。[42] Shkadov V. Y.、 *Izv. Akad. Nauk SSSR*、 *Mekh. Zhidk. Gaza* **1** 1967 43 , 《 [43] Shkadov V. Y.》。 *Izv. Akad. Nauk SSSR*、 *Mekh. Zhidk. Gaza* **2** 1968 20 , 《 [44] Maksymov I. 》。 Pototsky A.和 *Phys. Rev. E*, 100 (2019) 。 [45] Sorokina M.、 *J. Phys. Photonics*, 2 (2020) 044006。 [46] Chembo Y. K.、 *Chaos*, 30 (2020) 013111。[47] Riou M.、 Torrejon J.、 Garitaine B.、 Araujo F. A.、 Bortolotti P. Cros V. Tsunegi S. Yakushiji K. , 《 Fukushima A. Kubota H. Yuasa S. Querlioz D. 、 Stiles M. D. Grollier J. *Phys. Rep. Appl.* **12** 和 [48] Kondrashov A. V.》, (2019) 024049。 Nikitin A. A.、 Nikitin A. A. Kostylev M. Ustinov A. B. 、 *J. Magn. Magn. Mater.* **563** 2022 169968 , 以及 [49] Appeltant L., 《 Soriano M. C.》 ( der Sande G. V.) 。 Danckaert J. Massar S. Dambre J. Schrauwen、 B. Mirasso C. R. Fischer I. *Nat. Commun.* **2** 、

[50] Thompson A. B.、 Gomes S. N., 《 Pavliotis G. A. 、 Papageorgiou D. T.和 *Phys. Fluids*》, (2011) 468。