基于直流模型的安全约束公式化：原始-对偶内点法视角

ZhiYuan Bao，*IEEE* 学生会员，Zechun Hu，*IEEE* 高级会员，Asad Mujee b

arXiv:2303.01810v1 [math.OC] 3 Mar 2023

摘要——**直流网络安全约束已在众多电力系统问题中得到广泛研究，例如最优潮流（OPF）、安全约束经济调度（SCED）和安全约束机组组合（SCUC）。线性移相因子，即功率转移分布因子（PTDF），被广泛用于替代直流潮流约束。然而，PTDF 矩阵极其稠密，导致安全约束优化问题难以求解。本文从原始-对偶内点法（IPM）的稀疏结构角度，分析并探讨基于 PTDF 的安全约束在计算效率方面的问题。此外，本文提出一种矩阵变换方法，以恢复内点法迭代过程中线性系统的稀疏性。结果表明，该变换方法等价于求解以纯电压相角形式表达的原始优化问题，能够保留稀疏结构，但会引入数量相当于母线总数一至两倍的额外变量和约束。常规的 B-θ 公式化也是所提出变换方法的一种变体。数值研究表明，对于求解凸二次问题（QP），即最优潮流和安全约束经济调度问题，稀疏性比变量和约束的规模更能影响求解速度。相较之下，求解混合整数问题（MIP）时，稀疏性的重要性较低，例如安全约束机组组合问题；在此类问题中，重新优化技术重要得多，且通常采用对偶单纯形法，而非内点法。**

索引词—**安全约束、原始-对偶内点法、功率转移分布因子、稀疏结构、经济调度。**

I. 引言

POWER 潮流安全约束是众多电力系统优化问题的基础组成部分，包括最优潮流（OPF）、安全约束经济调度（SCED）和安全约束机组组合（SCUC）。在由独立系统运营商（ISOs）监管的大多数电力市场中，必须在五分钟以内求解实时安全约束经济调度（RT-SCED）问题。随着可再生能源占比逐步提高以及运行不确定性不断增加，运营商必须实时监控各种运行场景相关的风险 [1]。鉴于实时运行决策的时间窗口很短，必须对安全约束进行细粒度分析，以提高求解速度。

由于潮流安全约束数量庞大，它已成为求解安全约束机组组合和安全约束经济调度问题的瓶颈。目前，人们采用三种策略来加快计算速度。第一种是识别无效约束，以缩小安全约束的规模，如 [2], [3] 所示。第二种是将安全约束视为一类惰性约束 [4]。这意味着在初始阶段，这些约束会被松弛，在优化过程中不予施加。只有在生成违反安全约束的潜在解时，才会强制施加这些约束。此时，将该约束/切平面添加到问题中，并重复优化过程，直到找到满足所有约束的可行解为止[5]。如今，机器学习方法也被用于加速计算，如参考文献 [6] 所示。

直流潮流的安全约束最初采用 B-θ 的形式表示。为了降低建模难度并减少变量和约束的数量，越来越多的文献倾向于使用功率转移分布因子（PTDF）来表示安全约束 [7], [8]。PTDF 是一种线性转移因子，用于评估节点功率注入变化所导致的线路有功潮流变化。在 MISO 电力市场中，实时安全约束经济调度的安全约束基于 PTDF 表示 [9]。一些已发表的论文对这两种建模形式进行了计算比较，例如 [7], [10], [11]。人们认为，基于 PTDF 的公式减少了决策变量和约束的数量，因此优化速度会快得多。

自 1984 年 Karmarkar 的投影算法发表以来 [11]，，内点法得到了广泛研究。原始-对偶内点法被认为是最成功的实用技术之一 [12]。一般而言，单纯形法通常更适合求解中小规模问题，而内点法通常在大规模问题中效率更高 [13]。内点法的整体性能 [14] 主要取决于稀疏线性代数求解器。基于 PTDF 的公式会生成一组稠密约束，而在内点法中处理这些更稠密的约束通常需要付出大量额外工作，因此难以求解安全约束优化问题。

据作者所知，目前尚无文献利用基于 PTDF 的公式的稀疏结构。在基于 PTDF 的公式中，安全约束仅纳入有功功率；而纯电压相角公式则仅将电压相角纳入安全约束。本文所称的混合公式，即常规的 B-θ 公式，同时在安全

Z. Bao、Z. Hu 和 A. Mujeeb 任职于中国北京 100084 清华大学电气工程系（baozy19@mails.tsinghua.edu.cn；zechhu@tsinghua.edu.cn；asd20@mails.tsinghua.edu.cn）。

同时满足约束。

具体而言，本文的主要贡献如下。

1）据作者所知，本文首次利用了原始-对偶内点技术中网络安全约束的稀疏性。在内点法迭代中，我们进一步采用矩阵变换技术，以恢复线性系统的稀疏性。

2）本文证明，该变换方法等价于求解以纯电压相角表示的原始优化问题；这种表示保留了稀疏结构，但会增加额外的变量和约束。采用这种电压相角公式后，我们可以专注于公式本身，而无需深入探讨求解器的具体实现。

3）我们进行了大量数值算例。结果表明，混合公式的求解速度与纯电压相角公式相近，但数值稳定性显著更好。此外，对于最优潮流（OPF）和安全约束经济调度（SCED），无论是原始问题还是大多数外逼近问题，混合公式都比 PTDF 公式更快。

II. 基础

A. 基于 *PTDF* 的安全约束

直流网络的基于 PTDF 的安全约束通常形式如下

$$-\underline{f_k} \le \sum_{g\in\mathcal{G}} G_{kg}p_g - \sum_{d\in\mathcal{D}} D_{kd}p_d \le \overline{f_k}, \forall k \in \mathcal{L} \quad (1)$$

其中，第 k 条支路的正向和反向最大输电功率限值分别表示为 f_k 和 f_k。第 g 台发电机和第 $\overline{d}$ 个负荷的注入转移因子分别表示为 G_{kg} 和 D_{kd}。分支、发电机和负荷的集合分别表示为 $\mathcal{L}$、$\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{D}$。

公式 (1) 可以更简洁地表示为:

$$-\underline{f} \le PTDF \cdot p_{bus} \le \overline{f} \quad (2)$$

其中，$\overline{f}$ 和 $\underline{f}$ 是表示 n_l 条支路输电功率限值的向量。p_{bus} 是 n_b 个母线的有功功率向量，$PTDF$ 矩阵存储从每个母线到每条支路的注入转移因子，其形状为 (n_l, n_b)。

形式上，$PTDF$矩阵可由关联矩阵 C 和对角支路电抗矩阵$X = diag\{x_k, \forall k \in \mathcal{L}\}$构成

$$PTDF = B_f B_{bus}^{-1} \quad (3)$$

其中，$B_f := X^{-1}C$ 是电压相角到支路潮流的系数。$B_{bus} := C^T X^{-1} C$ 是节点导纳矩阵。为使 B_{bus}成为满秩矩阵，通过消去参考节点构造矩阵 C和 X。注意，B_f 和 B_{bus} 都是稀疏矩阵。然而，由于 B_{bus}的逆矩阵，PTDF高度稠密。

B. 凸二次规划问题的原始-对偶内点法

对于以下二次规划问题

$$\begin{aligned} &\min \tfrac{1}{2}x^T G x + c^T x \\ &s.t. Ax \ge b \end{aligned} \quad (4)$$

如果矩阵 G 是半正定的，则该优化问题称为凸二次规划问题。通过引入松弛变量 y 和对偶变量 λ，可以推导出 Karush–Kuhn–Tucker（KKT）条件如下:

$$Gx - A^T\lambda + c = 0 \quad (5a)$$
$$Ax - y - b = 0 \quad (5b)$$
$$y_i\lambda_i = 0, \forall i \quad (5c)$$
$$\lambda \ge 0, y \ge 0 \quad (5d)$$

其中，(5c)为逐元素乘积。

目标是求解（x^*，y^*，λ^*），使其满足 KKT 条件 (5)。为此，原始-对偶内点法对 (5a)–(5c) 应用牛顿法的一种变体，并在每次迭代中调整搜索方向和步长，以确保严格满足不等式 (5d)。

给定一个迭代点（x_0，y_0，λ_0），通过求解以下线性系统，得到下一个纯牛顿方向（Δx，Δy，$\Delta\lambda$）：

$$\begin{bmatrix} G & -A^T & 0 \\ A & 0 & -I \\ 0 & Y & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d \\ -r_p \\ -r_{\lambda y} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中，对偶残差 $r_d = Gx_0 - A^T\lambda_0 + c$，原始残差 $r_p = Ax_0 - y_0 - b$, $r_{\lambda y} = \Lambda Y e$, $\Lambda = diag(\lambda_0)$, $Y = diag(y_0)$, $e = [1, ..., 1]^T$。

消去 Δy后，增广系统的形式为

$$\begin{bmatrix} G & A^T \\ A & -\Lambda^{-1}Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ -\Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d \\ -r_p - \Lambda^{-1}r_{\lambda y} \end{bmatrix} \quad (7a)$$
$$\Delta y = A\Delta x + r_p \quad (7b)$$

由于该线性系统的系数矩阵既稀疏又对称，因此可通过稀疏 LU 分解高效求解。此外，如果矩阵 G 也同样稀疏，我们可以采用高斯消元生成后续系统8，并以更高效率求解。

$$(G + A^TY^{-1}\Lambda A)\Delta x = -r_d - A^TY^{-1}\Lambda(r_p + \Lambda r_{\lambda y}) \quad (8a)$$
$$\Delta y = A\Delta x + r_p \quad (8b)$$
$$\Delta\lambda = -Y^{-1}(r_{\lambda y} + \Lambda\Delta y) \quad (8c)$$

系数 $G + A^TY^{-1}\Lambda A$ 既稀疏又为半正定。该线性系统可使用修正稀疏乔列斯基分解求解。

在某些实际算法中，例如 Mehrotra 的预测项-校正项方法 [15], ，会考虑预测项、校正项和中心化项，以提高内点法的收敛速度。这种修改仅限于线性系统的右端，不会影响系数矩阵的矩阵分解。

$$\left[\begin{array}{cc}\left[\begin{array}{cc}G_{pp} & G_{xp}^T\\ G_{xp} & G_{xx}\end{array}\right] & -\left[\begin{array}{ccc}B_{bus}^{-T}B_f^T & -B_{bus}^{-T}B_f^T & M^T\\ J^T & K^T & L^T\end{array}\right]\\ \left[\begin{array}{cc}B_fB_{bus}^{-1} & J\\ -B_fB_{bus}^{-1} & K\\ M & L\end{array}\right] & \Lambda^{-1}Y\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}\Delta p_{bus}\\ \Delta x_{aux}\end{array}\right]\\ \left[\begin{array}{c}\Delta\lambda_1\\ \Delta\lambda_2\\ \Delta\lambda_3\end{array}\right]\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}-r_{d1}\\ -r_{d2}\end{array}\right]\\ \left[\begin{array}{c}-r_{p1}\\ -r_{p2}\\ -r_{p3}\end{array}\right]+\Lambda^{-1}\left[\begin{array}{c}-r_{\lambda y1}\\ -r_{\lambda y2}\\ -r_{\lambda y3}\end{array}\right]\end{array}\right] \tag{11a}$$

$$\left[\begin{array}{c}\Delta y_1\\ \Delta y_2\\ \Delta y_3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}B_fB_{bus}^{-1} & J\\ -B_fB_{bus}^{-1} & K\\ M & L\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\Delta p_{bus}\\ \Delta x_{aux}\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}r_{p1}\\ r_{p2}\\ r_{p3}\end{array}\right] \tag{11b}$$

III. 内点法中的基于功率传输分布因子的安全约束问题

A. 将内点法应用于基于功率传输分布因子的安全约束问题

单时段、基于功率传输分布因子的安全约束经济调度和最优潮流问题可表示为一个二次规划问题

$$\begin{aligned}&\min\quad \tfrac{1}{2}\left[\begin{array}{cc}p_{bus}^T & x_{aux}^T\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}G_{pp} & G_{xp}^T\\ G_{xp} & G_{xx}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}p_{bus}\\ x_{aux}\end{array}\right]\\ &+c_1^Tp_{bus}+c_2^Tx_{aux}\\ &s.t.\quad \left[\begin{array}{cc}B_fB_{bus}^{-1} & J\\ -B_fB_{bus}^{-1} & K\\ M & L\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}p_{bus}\\ x_{aux}\end{array}\right]\geq\left[\begin{array}{c}b_1\\ b_2\\ b_3\end{array}\right]\end{aligned} \tag{9}$$

其中， x_{aux} 包含除母线有功功率 p_{bus}之外的所有决策变量。 b_1, b_2, b_3, c_1, c_2 为常数向量，而G_{pp}, G_{xx}, G_{xp}, J, K, L, M为稀疏常数矩阵。

式（9）的KKT条件可写为式（10）

$$\begin{aligned}&\left[\begin{array}{cc}G_{pp} & G_{xp}^T\\ G_{xp} & G_{xx}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}p_{bus}\\ x_{aux}\end{array}\right]-\\ &\left[\begin{array}{cc}B_fB_{bus}^{-1} & J\\ -B_fB_{bus}^{-1} & K\\ M & L\end{array}\right]^T\left[\begin{array}{c}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}c_1\\ c_2\end{array}\right]=0\\ &\left[\begin{array}{cc}B_fB_{bus}^{-1} & J\\ -B_fB_{bus}^{-1} & K\\ M & L\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}p_{bus}\\ x_{aux}\end{array}\right]-\left[\begin{array}{c}y_1\\ y_2\\ y_3\end{array}\right]-\left[\begin{array}{c}b_1\\ b_2\\ b_3\end{array}\right]=0\\ &Y\Lambda=0\\ &\lambda\geq 0, y\geq 0\end{aligned} \tag{10}$$

纯牛顿方向可通过高斯消元求解线性方程（11）得出。

式（11）中的常数参数可按式（12）计算：

$$\begin{aligned}&\left[\begin{array}{c}r_{d1}\\ r_{d2}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}G_{pp} & G_{xp}^T\\ G_{xp} & G_{xx}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}p_{bus}\\ x_{aux}\end{array}\right]-\\ &\qquad\left[\begin{array}{cc}B_fB_{bus}^{-1} & J\\ -B_fB_{bus}^{-1} & K\\ M & L\end{array}\right]^T\left[\begin{array}{c}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}c_1\\ c_2\end{array}\right]\\ &\left[\begin{array}{c}r_{p1}\\ r_{p2}\\ r_{p3}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}B_fB_{bus}^{-1} & J\\ -B_fB_{bus}^{-1} & K\\ M & L\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}p_{bus}\\ x_{aux}\end{array}\right]-\left[\begin{array}{c}y_1\\ y_2\\ y_3\end{array}\right]-\left[\begin{array}{c}b_1\\ b_2\\ b_3\end{array}\right]\\ &\left[\begin{array}{c}r_{\lambda y1}\\ r_{\lambda y2}\\ r_{\lambda y3}\end{array}\right]=\Lambda Ye\\ &\Lambda=diag(\lambda), Y=diag(y), e=[1,...,1]^T\end{aligned} \tag{12}$$

$B_fB_{bus}^{-1}$ 的计算会产生一个高度稠密的矩阵，这给使用传统稀疏分解方法求解由此得到的线性系统带来了挑战。由于矩阵分解是内点法每次迭代的主要任务，这会降低算法的效率。

B. 通过矩阵变换恢复稀疏性

为了恢复 (11a) 的稀疏性，我们寻找一种矩阵变换方法来实现这一目的。以下示例可供参考：考虑下面的线性方程 (13)。

$$\left[\begin{array}{cc}G & B_{bus}^{-T}B_f^T\\ B_fB_{bus}^{-1} & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\Delta x\\ \Delta\lambda\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}a\\ b\end{array}\right] \tag{13}$$

这等价于求解 (14)。

$$\left[\begin{array}{cc}B_{bus}^TGB_{bus} & B_f^T\\ B_f & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}B_{bus}^{-1}\Delta x\\ \Delta\lambda\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}B_{bus}^Ta\\ b\end{array}\right] \tag{14}$$

(14) 的系数矩阵是稀疏的，这是因为 $B_{bus}^TGB_{bus}$ 具有稀疏性。通过这种矩阵变换，稀疏性得以恢复。

对 (11a) 应用矩阵变换方法，可得到 (11) 的等价表达式，如 (15) 所示。由于 $B_{bus}^TGB_{bus}$ 具有稀疏性，系数矩阵的稀疏性得以恢复。由于 $B_{bus}^TGB_{bus}$ 既稀疏又半正定，因此可以使用修正稀疏乔列斯基分解高效求解所得线性系统。

$$\begin{bmatrix} B_{bus}^T G_{pp} B_{bus} & B_{bus}^T G_{xp}^T & B_f^T & -B_f^T & B_{bus}^T M^T \\ G_{xp} B_{bus} & G_{xx} & J^T & K^T & L^T \\ B_f & J & -\Lambda_1^{-1} Y_1 & 0 & 0 \\ -B_f & K & 0 & -\Lambda_2^{-1} Y_2 & 0 \\ M B_{bus} & L & 0 & 0 & -\Lambda_3^{-1} Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta x_{aux} \\ -\Delta\lambda_1 \\ -\Delta\lambda_2 \\ -\Delta\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{bus}^T r_{d1} \\ -r_{d2} \\ -r_{p1} - \Lambda_1^{-1} r_{\lambda y1} \\ -r_{p2} - \Lambda_2^{-1} r_{\lambda y2} \\ -r_{p3} - \Lambda_3^{-1} r_{\lambda y3} \end{bmatrix} \tag{15a}$$

$$\Delta p_{bus} = B_{bus} \Delta\theta \tag{15b}$$

$$(11b) \tag{15c}$$

C. 安全约束建模形式

修改成熟求解器中的内点法迭代是一项颇具挑战且不切实际的任务。此外，安全约束经济调度是一个多阶段问题，其结构更为复杂，因此进一步增加了变换后方程 (15) 的构造难度。

注意，方程 (15b) 表示对 p_{bus} 梯度的线性映射。对原问题 (9) 执行相同的 p_{bus} 线性映射后，可得到新公式 (16)，该公式以纯电压相角 θ 而非节点注入 p_{bus} 为变量。显然可以验证，(16) 的牛顿步也由方程 (15) 给出。

$$\begin{aligned} &\min \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta^T & x_{aux}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{bus}^T G_{pp} B_{bus} & B_{bus}^T G_{xp}^T \\ G_{xp} B_{bus} & G_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x_{aux} \end{bmatrix} \\ &+ c_1^T B_{bus} \theta + c_2^T x_{aux} \\ &s.t. \begin{bmatrix} B_f & J \\ -B_f & K \\ M B_{bus} & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x_{aux} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

将所有节点注入变量转换为电压相角后，即可求解基于 PTDF 的安全约束经济调度和最优潮流问题。然而，在大多数安全约束经济调度和最优潮流问题中，约束（例如发电机的上下功率限值）和目标函数通常涉及发电机功率 p_g，而非节点净注入 p_{bus}，如式 (17) 所示。

PTDF 公式：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{g \in \mathcal{G}} \left(a_g {p_g}^2 + b_g p_g + c_g \right) \\ \text{s.t} \quad & \underline{p_g} \leq p_g \leq \overline{p_g}, \quad \forall g \in \mathcal{G} \\ & \text{Security Constraints (1)} \end{aligned} \tag{17}$$

其中，a_g、b_g 和 c_g 是发电机成本函数的系数。p_g 和 p_g 分别是第 g 台发电机的发电机功率限值。

本文提出了两种技术，用于将标准 PTDF 公式 (17) 转换为式 (16) 的形式。本文分别将它们称为纯电压相角公式和混合公式。

纯电压相角公式完整保留了（16）的结构。在该公式中，节点注入功率是发电机功率与本地负荷的总和。发电机功率约束可方便地转换为等价的节点注入功率约束。此外，多个发电机的凸成本函数可合并为一个等价的凸节点成本函数，并可对其进行分段线性化。

优化过程完成后，可根据各发电机的边际成本和功率约束，将节点净注入功率分解到各个发电机。

当母线上仅连接一台发电机时，节点成本函数可以表示为节点净注入 p_b 的二次函数。以下公式化假设每条母线至多连接一台发电机，以便公平比较二次规划的效率。

纯电压相角公式：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{b \in \mathcal{B}} \left[a_b (B_{bus,b} \theta)^2 + b_b B_{bus,b} \theta + c_b \right] \\ \text{s.t} \quad & \underline{p_b} \leq B_{bus,b} \theta \leq \overline{p_b}, \quad \forall b \in \mathcal{B} \\ & -\underline{f} \leq B_f \theta \leq \overline{f} \end{aligned} \tag{18}$$

其中，$B_{bus,\,b}$ 表示矩阵的第 b 行。如果第 b 条母线上的发电机出力和负荷分别为 p_g 和 p_d，则成本系数为 $a_b = a_g$、$b_b = b_g + 2a_g p_d$ 和 $c_b = c_g + b_g p_d + a_g p_d^2$。节点功率限值为 $p_b = p_g + p_d$ 和 $p_b = p_g + p_d$。

混合公式化在优化问题中同时保留了电压相角和发电机出力。电压相角表示安全约束，而发电机出力表示其余约束和目标。不过，由于该问题并未完全转化为电压相角问题，因此必须将电压相角与节点净注入 $p_{bus} = B_{bus}\theta$ 之间的关系作为约束纳入其中。这种公式化也称为 B-θ 公式化。

混合公式：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{g \in \mathcal{G}} \left(a_g {p_g}^2 + b_g p_g + c_g \right) \\ \text{s.t} \quad & \underline{p_g} \leq p_g \leq \overline{p_g}, \quad \forall g \in \mathcal{G} \\ & -\underline{f} \leq B_f \theta \leq \overline{f} \\ & \sum_{g \in \mathcal{G}_b} p_g - \sum_{d \in \mathcal{D}_b} p_d = B_{bus,b} \theta, \quad \forall b \in \mathcal{B} \end{aligned} \tag{19}$$

其中，$\mathcal{G}_b$ 和 $\mathcal{D}_b$ 分别表示母线 b上的发电机和负荷集合。

表I给出了上述建模形式下单时段最优潮流问题的比较结果。

IV. 数值结果

本节介绍三种公式的数值结果。首先，我们概述每种公式的系数矩阵结构。接下来，我们展示最优潮流和安全约束经济调度问题的案例研究。我们还利用外逼近评估这些建模形式处理安全约束的能力。最后，我们讨论其局限性

表 I 单时段最优潮流问题三种公式的比较

	PTDF 公式化	纯电压相角公式	混合公式化
变量	$\|\mathcal{G}\|$	$\|\mathcal{B}\|$	$\|\mathcal{G}\|+\|\mathcal{B}\|$
约束	$2\|\mathcal{L}\|+2\|\mathcal{G}\|$	$2\|\mathcal{L}\|+2\|\mathcal{B}\|$	$2\|\mathcal{L}\|+2\|\mathcal{G}\|+\|\mathcal{B}\|$
稀疏性	×	√	√

* 仅统计与安全约束和发电功率限制约束相关的变量和约束数量。** 单个等式约束计为一个约束。

在混合整数问题（如安全约束机组组合问题）中的局限性。本研究使用的所有源代码均已发布在 GitHub [16] 上。

A. 实现细节

我们将每台发电机的成本建模为凸二次函数。测试案例包含内置数据，包括各母线上的有功负荷、发电机状态、发电机出力的最小值和最大值限制，以及各支路的潮流限制。对于没有潮流限制数据的支路，安全约束不会考虑这些支路。每个算例的详细参数见 [16]。

在单时段最优潮流问题中，目标函数旨在最小化单个时段内当前运行的发电机成本。约束包括发电机有功出力和支路潮流的限值。为了使三种公式具有可比性，位于同一母线的发电机将通过设置相同类型的参数合并为一台发电机。关于节点净注入的成本函数可以写成凸二次函数。

在安全约束经济调度问题中，我们将一天划分为 24 个时段，每个时段持续一小时。目标函数是最小化未来 24 个时段运行的发电机总成本。除了最优潮流问题中的约束外，还应满足每台发电机的爬坡约束。每个时段的母线负荷在原始负荷的 0.95 至 1.05 倍之间随机设定。

在安全约束机组组合问题中，我们纳入安全约束经济调度中使用的参数，以及固定的启动和停机成本、占总负荷 0.1 的备用率，以及 4 小时的最小启动和停机持续时间。安全约束机组组合公式还在安全约束经济调度问题的基础上增加了其他约束，例如备用约束和最小启动/停机持续时间约束。

本研究使用的算例均为 MATPOWER [17] 内置的测试案例，包含超过 1000 个母线，其中包括 ACTIV 合成电网测试案例 [18], 、波兰电力系统测试案例、PEGASE 欧洲电力系统测试案例 [19], [20], 以及 RTE法国系统测试算例[19]。

使用 MATPOWER 函数*makePTDF* 和 *makeBdc* 计算 $PTDF$、B_{bus}和 B_f。SCUC 是混合整数二次规划问题，而 OPF 和 SCED 是凸二次规划问题。使用 YALMIP（版本：R20200930）对这些问题进行编码，并在 MATLAB R2019a 中运行，使用 Gurobi 9.0.3 求解，并在配备 8 个线程和 32 GB 内存的英特尔 i7-9700 处理器上执行。

B. 系数矩阵的稀疏结构

本节讨论基于 PTDF 的公式化对系数矩阵稀疏性以及内点法效率的影响。

为说明这一点，我们分析一个简单的 IEEE 39 节点电力系统，该系统包含 39 个母线、10 台发电机和 46 条输电线路。图 1 展示了单时段最优潮流问题中三种不同建模形式的系数矩阵结构。

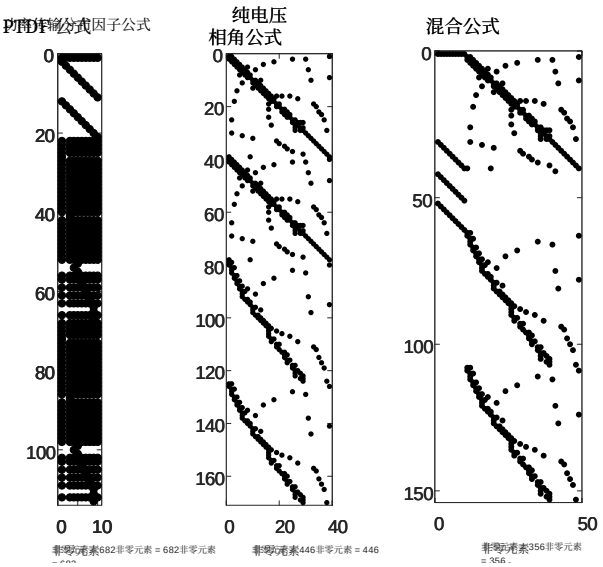


图 1. IEEE 39 节点电力系统最优潮流问题所用三种公式中系数矩阵非零元素分布示意图。这些矩阵是在预处理过程之前获得的。

在 PTDF 公式中，变量数量为 $|\mathcal{G}|$ =10，约束数量为 $2|\mathcal{L}|+2|\mathcal{G}|=112$。由于 PTDF 矩阵密度较高，非零元素数量为 682。在纯电压相角公式中，变量数量为 $|\mathcal{B}|=39$，约束数量为 $2|\mathcal{L}|+2|\mathcal{B}|=170$，非零元素数量为 446。在混合公式中，变量数量为 $|\mathcal{G}|+|\mathcal{B}|=49$，约束数量为 $2|\mathcal{L}|+2|\mathcal{G}|+|\mathcal{B}|=151$，非零元素数量为 356。显然，就系数矩阵规模而言，$PTDF < Pure \approx Mixed$；而就系数矩阵密度而言，$PTDF > Pure > Mixed$。

为了确认上述结论在更大型的测试案例中仍然成立，并验证稠密系数矩阵会拖慢内点法，我们评估了在表 II 的五个大型测试案例中求解单时段最优潮流的性能。

表 II 展示了三种不同公式化方案在有无预处理过程下的结果。值得注意的是，三种公式化方案的最优值完全相同。为比较各方案的规模，前两列分别显示每种方案中的约束和变量数量。第三列和第四列分别从非零系数矩阵 A 元素的数量及其占比两个方面表示公式化方案的密度。第

表 II 求解单时段最优潮流问题时三种公式的规模、密度和求解时间比较

		基于 PTDF 的公式							
		约束	变量	A NZ	A 非零元素（%）	AA^T 非零元素	分解运算	求解器时间（秒）	障碍法时间（秒）
不使用预求解	case1951rte	**4231**	**358**	9.23E+05	60.92%	9.23E+05	3.63E+08	0.77	0.49
	case6470rte	**6989**	**634**	3.07E+06	69.19%	3.07E+06	2.09E+09	2.35	1.56
	case6515rte	**6893**	**563**	2.72E+06	70.11%	2.72E+06	1.64E+09	2.29	1.57
	case_ACTIVSg10k	**22231**	**1455**	2.46E+07	76.18%	2.46E+07	3.74E+10	26.98	20.60
	ACTIVSg25k 算例	**49521**	**2753**	1.07E+08	78.64%	1.07E+08	3.05E+11	554.55	522.92
With 预求解	case1951rte	**192**	**386**	6.78E+04	91.50%	1.83E+04	2.38E+06	0.99	0.24
	case6470rte	**426**	**728**	2.68E+05	86.43%	9.05E+04	2.59E+07	1.54	0.41
	case6515rte	**470**	**663**	2.62E+05	84.20%	1.10E+05	3.47E+07	1.91	0.56
	case_ACTIVSg10k	**769**	**783**	5.36E+05	89.03%	2.95E+05	1.52E+08	8.24	2.03
	ACTIVSg25k 算例	**3746**	**3872**	1.03E+07	71.08%	7.01E+06	1.75E+10	64.81	35.12
		纯电压相角公式							
		约束	变量	A NZ	A 非零元素（%）	AA^T 非零元素	分解运算	求解器时间（秒）	障碍法时间（秒）
不使用预求解	case1951rte	8100	1951	2.18E+04	0.14%	1.49E+05	1.56E+07	0.31	0.22
	case6470rte	19160	6470	5.76E+04	0.05%	3.05E+05	4.72E+07	0.44	**0.25**
	case6515rte	19292	6515	5.80E+04	0.05%	3.06E+05	4.88E+07	0.48	0.27
	case_ACTIVSg10k	40488	10000	1.10E+05	0.03%	6.25E+05	1.48E+08	1.55	0.91
	ACTIVSg25k 算例	96660	25000	2.64E+05	0.01%	1.38E+06	5.07E+08	6.32	2.81
With 预求解	case1951rte	1812	2170	6.58E+03	0.17%	1.79E+04	1.18E+06	0.31	**0.17**
	case6470rte	3680	4314	1.51E+04	0.10%	4.09E+04	5.47E+06	0.47	0.21
	case6515rte	3512	4075	1.45E+04	0.10%	3.98E+04	5.08E+06	0.39	**0.20**
	case_ACTIVSg10k	9948	10648	3.61E+04	0.03%	1.03E+05	2.16E+07	1.04	0.35
	ACTIVSg25k 算例	22190	24943	8.35E+04	0.02%	2.15E+05	9.43E+07	3.55	0.74
		混合公式							
		约束	变量	A NZ	A 非零元素（%）	AA^T 非零元素	分解运算	求解器时间（秒）	障碍法时间（秒）
不含预求解	case1951rte	6867	2309	**1.65E+04**	0.10%	8.11E+04	6.36E+06	0.18	**0.12**
	case6470rte	13960	7104	**3.76E+04**	0.04%	1.43E+05	1.62E+07	0.33	**0.25**
	case6515rte	13905	7078	**3.75E+04**	0.04%	1.43E+05	1.66E+07	0.34	**0.26**
	case_ACTIVSg10k	33400	11455	**8.12E+04**	0.02%	3.14E+05	6.49E+07	1.08	**0.45**
	ACTIVSg25k 算例	77168	27753	**1.90E+05**	0.01%	6.95E+05	2.51E+08	2.31	**1.48**
With 预求解	case1951rte	1080	1434	**4.67E+03**	0.30%	1.02E+04	1.01E+06	0.30	**0.17**
	case6470rte	2402	3033	**1.18E+04**	0.16%	2.86E+04	4.19E+06	0.32	**0.18**
	case6515rte	2391	2951	**1.16E+04**	0.16%	2.84E+04	4.16E+06	0.35	**0.20**
	case_ACTIVSg10k	7727	8425	**3.01E+04**	0.05%	7.17E+04	2.24E+07	0.49	**0.33**
	case_ACTIVSg25k 算例	18293	21044	**7.46E+04**	0.02%	1.71E+05	8.86E+07	0.96	**0.70**

5 列显示了每次内点法迭代中需要进行分解的非零矩阵元素数量。具体而言，Gurobi 会计算 AA^T的下三角矩阵中的非零元素数量，第 6 列则表示对其进行因式分解所需的浮点运算次数。通常，当前处理器的单个核心每秒可执行约5×10^9 次浮点运算，且大多数问题在不超过 50 次内点法迭代后即可收敛，因此可以估算求解时间。最后两列显示求解器时间，其中包括障碍时间以及 Gurobi 与 YALMIP 之间的数据转换时间。

表 II 显示，与另外两种建模形式相比，PTDF 公式的问题规模小得多、密度更高，求解速度也更慢。例如，以 *ACTIVSg25k* 算例 为例，PTDF 公式的规模约为纯相角公式和混合公式的 $1/20$ 。然而，矩阵 A 中的非零元素数量超过其 100 倍，而且 PTDF 公式中非零元素的占比超过 70%，远高于其他建模形式的 0.02%。因此，PTDF 公式在每次内点法迭代中的矩阵分解过程需要执行超过 100 倍的浮点运算量，障碍时间也比其他建模形式长 50 倍。

纯电压相角公式与混合公式的性能差异微不足道。然而，经过预求解后，混合公式的规模和非零元素数量显著减少，因此求解速度更快。由于纯电压相角方法要求求解器确认目标函数（16）中的二次项矩阵为半正定矩阵，因此可以使用凸二次规划算法求解。然而，在某些情况下，求解器无法判定矩阵是否半正定，因此会错误地采用非凸二次规划技术。因此，我们坚信混合公式优于纯电压相角公式。因此，下一节我们将只关注功率传输分布因子和混合表述。

C. 性能比较

表 III 展示了安全约束经济调度问题中功率传输分布因子建模形式和混合表述的求解时间。图2 展示了解决优化问题时的详细时间构成

表 III 安全约束经济调度问题中 PTDF 与混合公式的详细时间对比

	基于 PTDF 的公式					混合公式				
	离线（秒）	公式化	求解器	障碍	分解运算	离线	公式化	求解器	障碍	分解运算
case1354pegase	0.30	7.09	8.44	5.31	4.26E+09	0.00	12.76	1.85	**1.50**	9.96E+08
case1951rte	0.53	13.10	11.24	6.05	1.22E+10	0.00	25.50	2.07	**1.73**	2.32E+09
case3375wp	1.82	28.71	28.47	15.14	1.90E+10	0.00	53.46	5.30	**4.80**	5.25E+09
case6470rte	8.26	55.25	334.93	315.11	2.19E+12	0.00	190.12	7.36	**6.68**	1.59E+10
case6515rte	8.35	47.57	331.84	314.74	2.42E+12	0.00	165.72	7.30	**6.65**	1.60E+10

*所有结果均通过预处理过程获得。

。离线时间是指构造 $PTDF$、 B_{bus} 和 B_f 矩阵所需的时间。建模时间是指使用 YALMIP 对优化问题进行建模所需的时间。求解器时间是指调用求解器到收到最终结果之间的时长。障碍时间表示执行内点法所需的时长。分解运算是指单次迭代中进行矩阵分解所需的浮点运算次数。通过创建预编译模型，可以忽略模型建模时间。

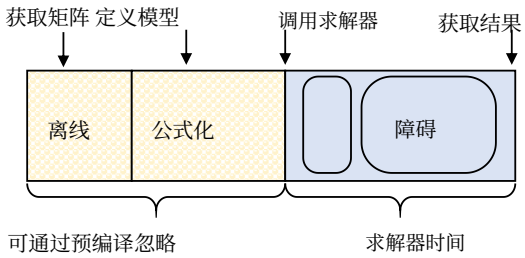


图2。求解优化问题的时间构成。通过预编译，可以忽略离线时间和建模时间。求解器时间的主要组成部分是障碍时间，这对于衡量各种建模形式的效能至关重要。

结果表明，随着变量和约束数量的增加，混合公式的建模时间也会增加。然而，通过预编译模型可以忽略这部分时间。另一方面，与 PTDF 公式相比，求解时间显著缩短。如图3所示，随着测试案例中用于最优潮流问题的母线数量增加，并进行预处理，内点法算法的障碍时间和系数矩阵中的非零元素数量都会增加。随着母线数量增加，PTDF 的障碍时间和非零元素数量呈超线性增长，而混合公式的相应指标则近似呈线性增长。因此，在处理规模较大的问题时，混合公式具有更大的比较优势。

D. 安全约束外逼近的性能

安全约束中的许多支路约束都是冗余的。针对排除冗余支路约束的技术，已有大量研究。移除冗余约束后，得到的优化问题将成为原问题的外逼近。本文采用两种策略来获得外逼近

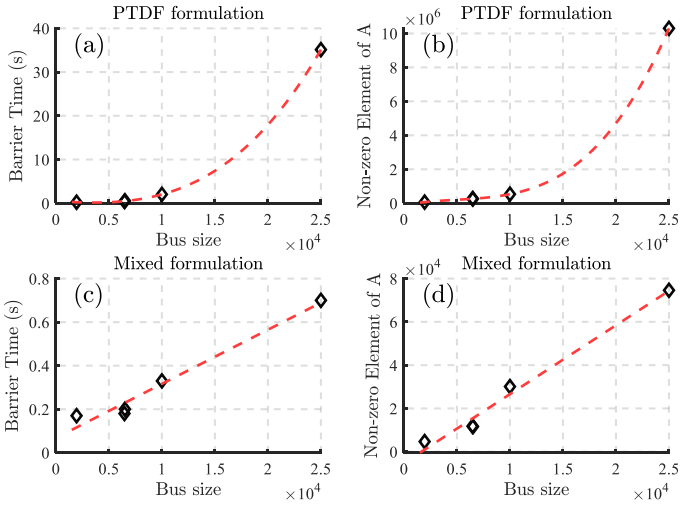


图3. PTDF 公式和混合公式中，随着母线数量变化的障碍时间和非零元素数量。红色虚线为拟合曲线。

，适用于功率传输分布因子（PTDF）和混合两种形式的安全约束经济调度问题：1）随机移除未拥塞支路约束；2）依次移除拥塞程度最低的支路约束。结果见表 IV。

采用这两种技术时，随着删除支路比例的增加，两种公式的求解时间均会缩短。然而，由于 PTDF 公式的密度会随着每次删除而降低，其问题求解时间比密度保持不变的混合公式缩短得更快。此外，随着支路约束数量减少，混合公式中的 $P_{bus} = B_{bus}\theta$ 约束保持不变，因此，当所有支路约束均被删除后，PTDF 公式的求解时间会短于混合公式。如图4所示，采用优先消除最非拥塞支路的方法时，当删除比例超过98%，PTDF 的求解时间短于混合公式；而在98%之前，混合公式始终更优。根据文献 [2], 的研究结果，快速识别方法可检测出约85%的非活跃安全约束。

E. 关于混合整数问题中约束的讨论

一般而言，在求解安全约束机组组合时，求解器通常采用分支定界或分支割平面框架，依次向松弛问题中添加线性约束。

时间（秒） / Case	延迟比	基于 PTDF 的公式							混合公式						
		20%	50%	70%	90%	95%	98%	99%	20%	50%	70%	90%	95%	98%	99%
删除随机分支	case1354pegase	6.40	5.48	3.64	1.33	**0.60**	**0.46**	**0.38**	**1.48**	**1.16**	**1.13**	**0.80**	0.70	0.63	0.63
	case1951rte	9.16	6.11	3.44	1.20	**0.61**	**0.44**	**0.40**	**1.76**	**1.59**	**1.26**	**1.05**	0.86	0.84	0.80
	case3375wp	25.92	24.44	17.89	3.21	**1.44**	**0.70**	**0.52**	**5.54**	**6.80**	**7.27**	**3.04**	3.73	2.48	2.50
	case6470rte	398.86	183.44	67.05	9.02	4.53	**2.70**	**2.39**	**7.16**	**6.71**	**5.05**	**4.20**	**4.17**	4.11	3.96
	case6515rte	256.62	165.53	72.80	11.91	4.52	**2.79**	**2.02**	**7.34**	**5.56**	**4.97**	**3.78**	**3.50**	3.25	3.33
删除非拥塞分支	case1354pegase	6.53	5.30	7.35	2.41	0.91	**0.53**	**0.38**	**1.66**	**2.10**	**1.24**	**0.99**	0.79	0.89	0.77
	case1951rte	8.99	7.52	5.10	1.75	**1.29**	**0.60**	**0.45**	**1.79**	**1.64**	**1.47**	**1.17**	1.72	1.17	1.01
	case3375wp	24.96	25.01	20.07	7.98	**4.11**	**1.48**	**0.97**	**5.84**	**6.82**	**8.39**	**3.54**	4.22	3.17	3.11
	case6470rte	322.01	233.51	164.37	63.07	20.98	7.63	**3.14**	**8.37**	**8.17**	**6.84**	**5.57**	**5.71**	**6.06**	6.02
	case6515rte	265.71	281.22	176.11	57.51	18.49	4.96	**2.51**	**8.33**	**7.89**	**7.03**	**6.06**	**5.48**	**4.94**	4.86

*所有结果均为五次测试的平均值。** 时间采用求解器时间（从调用求解器到获得最终结果）

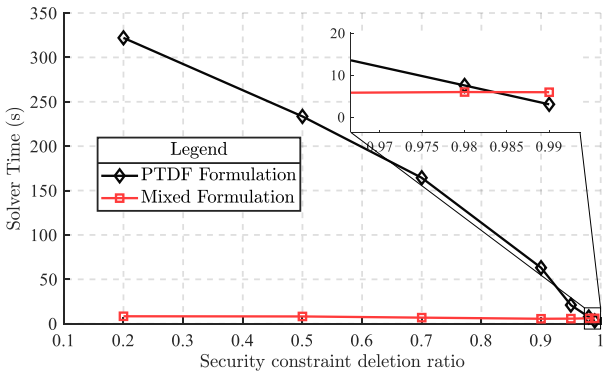


图4. 在 case6470rte 中移除最不拥塞的支路时，安全约束删除比例变化对应的求解时间。

内点法无法利用上一个最优点进行热启动，但对偶单纯形法可以。由于对偶单纯形法对系数密度的敏感度低于内点法，但对问题规模的敏感度更高，因此求解安全约束机组组合时总是优先采用 PTDF 公式，而非混合公式，因为前者能缩小问题规模。

实验结果表明，对于中等规模的算例，如果在分支定界框架中使用默认的求解方法，即对偶单纯形法，求解松弛问题，那么 PTDF 公式在节点探索速度和混合整数规划间隙的收敛速度方面都明显快于混合公式。此外，如果使用 IPM 求解松弛问题，则数小时内都难以找到可行解，其求解速度也远慢于对偶单纯形法。

五、结论

为了减轻 PTDF 公式（纯发电机功率公式）在原始-对偶内点法每次迭代过程中生成的稠密矩阵所带来的影响，我们采用矩阵变换技术来恢复线性系统的稀疏性。此外，我们发现，这种矩阵变换技术等价于使用纯电压相角公式改写并求解该问题，而我们基于纯电压相角公式得到了混合公式（B-θ 公式化）。经过大量数值实验，我们发现，混合公式的求解速度与纯电压相角公式相近，但数值稳定性更好。在最优潮流问题和安全约束经济调度问题中，混合公式的求解速度快于 PTDF 公式，而且模型规模越大，速度优势越明显。在安全约束机组组合问题中，建议采用 PTDF 公式，因为重新优化技术重要得多，并且在混合整数问题中通常采用对偶单纯形法，而非 IPM。这些结论同样适用于线性规划公式。

参考文献

[1] W. Chen、S. Park、M. Tanneau 和 P. Van Hentenryck，“学习大规模安全约束经济调度的优化代理模型”，《*Electric Power Systems Research*》，第 213 卷，第 108566 页，2022年。[2] Q. Zhai、X. Guan、J. Cheng 和 H. Wu，“快速识别安全约束机组组合问题中的非活跃安全约束”，*IEEE Transactions on Power Systems*，第 25 卷，第 4 期，第 1946–1954 页，2010年。[3] Z. Ma、H. Zhong、Q. Xia、C. Kang、Q. Wang 和 X. Cao，“识别网络约束机组组合中非活跃输电约束的高效方法”，《*CSEE Journal of Power and Energy Systems*》，2020年。[4]IBM，“什么是用户割和惰性约束”，2021年，https://www.ibm.com/docs/en/icos/12.10.0?topic=pools-what-are-user-cuts-lazy-constraints，访问日期：2023年2月23日。[5] Y. Fu 和 M. Shahidehpour，“面向大规模电力系统的快速安全约束机组组合”，*IEEE Transactions on power systems*，第 22 卷，2151，2007年 4，2144 no. pp. – 。[6] ´A. S. Xavier、F. Qiu 和 S. Ahmed，“学习求解大规模安全约束机组组合问题”，《*INFORMS Journal on Computing*》，第 33 卷，第 2 期，第 739–756 页，2021年。[7] M. Sahraei-Ardakani 和 K. W. Hedman，“具有移相因子结构的直流最优潮流中 FACTS设定值的计算高效调整方法”，*IEEE Transactions on Power Systems*，第 32 卷，第 3 期，第 1733–1740 页，2016年。[8] X. Li 和 K. W. Hedman，“采用校正性输电切换策略的增强型能源管理系统——第一部分：方法论”，*IEEE Transactions on Power Systems*，第 34 卷，第 6 期，第 4490–4502 页，2019年。[9] X. Ma、Y. Chen 和 J. Wan，“基于美国中西部独立系统运营商联合优化的实时调度以及能源和辅助服务定价”，载于 *2009*年 *IEEE*电力与能源学会年会。IEEE，2009年，第 1–6 页。[10] S. Zhang 和 K. W. Hedman，“分布式机组组合中基于功率传输分布因子和基于相角的网络约束建模形式的计算比较”，《*Energy Systems*》，第 1–26 页，2021年。

[11] V. H. Hinojosa 和 G. Guti´errez-Alcaraz，“处理机组组合问题中输电网络约束的两种数学建模形式的计算比较”，*InternationalTransactions on Electrical Energy Systems*，第 27 卷，第 8 期，第 e2332 页，2017年。[12] I. J. Lustig、R. E. Marsten 和 D. F. Shanno，“线性规划的内点法：计算技术现状”，*ORSA Journal on Computing*，第 6 卷，第 1 期，第 1–14 页，1994年。[13] J. Nocedal 和 S. J. Wright，《数值优化》。Springer，1999年。[14] J. Kardo˘s、D. Kourounis 和 O. Schenk，“结构利用型内点法”，载于 *Parallel Algorithms in Computational Science and Engineering*。Springer，2020年，第 63–93 页。[15] S. Mehrotra，“原始-对偶内点法的实现”，*SIAM Journal on optimization*，第 2 卷，601，1992年 4，575 no. pp. – 。[16] Z. Bao，“GitHub代码仓库：安全约束内点法”，2023年，https: //github.com/Busy-Bob/Security-Constraints-IPM。[17] R. D. Zimmerman、C. E. Murillo-S´anchez 和 R. J. Thomas，“MATPOWER：面向电力系统研究与教育的稳态运行、规划和分析工具”，*IEEE Transactions on power systems*，第 26 卷，第 1 期，第 12–19 页，2010年。[18] A. B. Birchfield、T. Xu、K. M. Gegner、K. S. Shetye 和 T. J. Over-bye，“电网结构特征作为合成网络的验证标准”，*IEEE Transactions on power systems*，第 32 卷，第 4 期，第 3258–3265 页，2016年。[19] C. Josz、S. Fliscounakis、J. Maeght 和 P. Panciatici，“MATPOWER 和 QCQP格式中的交流潮流数据：iTesla、RTE快照和 PEGASE”，*arXiv*预印本 *arXiv:1603.01533*，2016 年。[20] S. Fliscounakis 、 P. Panciatici 、 F. Capitanescu 和 L. Wehenkel，“考虑不确定性、预防性措施和校正性措施的超大型电力系统过载相关事故排序”，*IEEE Transactions on Power Systems*，第 28 卷，第 4 期，第 4909–4917 页，2013年。