arXiv:2303.01834v1 [physics.plasm-ph] 3 Mar 2023

等离子体物理中未受重视的交叉螺度效应：发电机和动量输运中的反扩散效应

Nobumitsu Yokoi[1,2*]

[1*]东京大学工业科学研究所，驹场，目黑，东京，153-8505，日本。[2]斯德哥尔摩大学和皇家理工学院理论物理北欧研究所，Hannes Alfv´en v¨ag，斯德哥尔摩，106 91，瑞典。

通讯作者。电子邮箱：nobyokoi@iis.u-tokyo.ac.jp；

摘要

本文借助多尺度重整化微扰展开分析，研究磁流体力学（MHD）湍流中交叉螺度（速度—磁场相关性）对磁场感应和动量输运的影响。该分析是针对强非线性非均匀湍流的理论框架。本文结合速度和磁场之间交叉相互作用响应函数的作用，概述了这一理论。在此框架下，推导了湍流通量的表达式：平均感应方程中的湍流电动势（EMF），以及动量方程中的雷诺应力和湍流麦克斯韦应力。结合电动势的表达式，本文讨论了交叉螺度对发电机的影响及其他发电机效应的物理起源。发电机效应和动量输运的特性由湍流的时空分布决定。为理解湍流交叉螺度的实际作用，本文考察了其输运方程，并通过示例讨论了交叉螺度的若干产生机制。在此基础上，本文探讨了交叉螺度产生机制对恒星发电机的影响。此外，本文还讨论了交叉螺度在动量输运和整体流动生成中的作用。在磁场感应和整体流动生成中，交叉螺度效应均发挥重要作用的情形之一，是湍流磁

重联。本文回顾了快速重联中湍流效应的典型特征，并特别强调交叉螺度在局域化有效电阻率方面的作用。最后，简要介绍一种阐明极强湍流中结构生成与维持的方法。我们需要为反扩散效应建立恰当的公式表述，因为该效应与通常的扩散效应相反。本文还将基于这种解析公式的湍流建模方法与传统的启发式建模进行比较和讨论。此外，本文也强调了采用自洽框架处理平均场与湍流之间非线性相互作用的重要性。

关键词：湍流闭合、交叉螺度、发电机、流动生成

1 引言

天体物理、地球物理和等离子体物理中的诸多现象，例如巨行星上的喷流形成、太阳活动十一年周期、地球磁性的生成、星际介质中的大尺度涡旋与磁场结构，以及来自大质量黑洞的喷流，都以极大范围的时空尺度间的相互作用过程为特征。因此，这些令人惊叹的现象几乎无一例外都具有极强湍流的特征。磁流体力学（MHD）为理解这种湍流提供了良好框架，其中流体流动与磁场相互作用。然而，由于其尺度范围极广，从最大含能尺度到由黏性和电阻率决定的最小耗散尺度均包含在内，因此，即便使用针对大规模并行计算机优化的最先进算法，也根本无法直接计算湍流天体物理和地球物理流动。此外，由于不同模态或尺度之间存在强非线性耦合，我们无法期待强湍流中出现明显的尺度分离。因此，要理解湍流磁流体力学流动的本质，发展精密的统计解析理论，并以理论结果为基础对湍流进行建模，至关重要。本文将介绍一种发展此类理论的方法。与传统的启发式湍流建模相比，这种理论将对构建湍流模型产生重大影响，使其能够预测我们在天体物理学、地球物理学和等离子体物理中所观察到的各种非凡现象的性质。

在大尺度结构形成的理论表述中，镜像对称性的破缺起着至关重要的作用。这类破缺由赝标量表示，例如动能螺度、磁螺度（电流螺度）、交叉螺度以及其他广义螺度。另一篇综述论文（Pouquet& Yokoi，2022）回顾了螺旋湍流的统计性质及其影响，本文不再讨论这些内容。此外，交叉螺度的基本特征，包括守恒性、拓扑解释、赝标量

性质、界限性以及与 Alfv´én 波的关系等已在另一篇文章中讨论过（Yokoi, 2013），因此本文不再重复介绍这些特征。本文将重点关注湍流磁流体力学输运中两个至关重要的方面：磁场感应（发电机）以及线动量和角动量输运（整体流动生成）。

发电机研究的主要课题之一，是探究湍流对平均感应方程的影响。这类研究通常称为平均场发电机理论，在历史发展过程中逐渐衍生出若干不同的含义，包括：(i) 运动学方法；(ii) 对湍流电动势（EMF）表达式采用假设；(iii) 将发电机系数视为常数或预先设定的参数；(iv) 将 α–Ω 发电机情景作为发电机过程的唯一情景；(v) 以方位角平均代替系综平均；以及 (vi) 对湍流运动采用不可压缩处理。这些处理方法中，有些曾用于简化发电机的研究。然而，它们都不是平均场发电机理论的基本组成部分。下文将逐一简要介绍这些处理方法（假设和近似）。

(i) 运动学方法：在运动学方法中，感应方程中的速度场被视为给定量。磁场的演化遵循速度固定时的感应方程。磁场通过洛伦兹力 $\mathbf{j} \times \mathbf{b}$ 对动量方程中速度的反馈被忽略 [$\mathbf{b}$：磁场，$\mathbf{j}(= \nabla \times \mathbf{b})$：电流密度]。这种发电机的运动学方法历史悠久，为理解发电机作用的基本特性提供了很好的工具，尤其适用于一些简单的构型（Tobias，2021年）。然而，现实世界中的发电机过程通常是非线性的，生成的磁场对速度场的反作用在湍流生成以及由此产生的发电机过程中起着关键作用。例如，在磁旋转不稳定性（MRI）的背景下，人们强调了这种反馈的重要性。即使是非常微弱的磁场，只要与特定的旋转构型相结合，也能促进湍流生成（Balbus与Hawley，1998）。因此，至少在磁旋转不稳定性过程的发展阶段，发电机的特性由湍流运动决定。从这个意义上说，运动学方法与发电机过程的相关性有限。

(ii) 湍流电动势（EMF）的假设：平均场发电机研究中常采用的另一项假设是，湍流电动势 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$ 与平均磁场 $\mathbf{B}$ 及其空间导数呈线性关系（$\mathbf{u}'$：速度涨落，$\mathbf{b}'$：磁场涨落）。这一假设基于涨落磁场 $\mathbf{b}'$ 与平均磁场 $\mathbf{B}$ 呈线性关系的假定，结合运动学处理，大大降低了平均磁场演化的复杂性。然而，为了在湍流完全非线性区间中得到湍流电动势 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$ 的表达式，我们必须

4 未受重视的交叉螺度效应

直接处理速度涨落和磁场涨落方程，u′和 b′。这些涨落场不仅取决于平均磁场 B 及其空间导数，还取决于平均速度 U 及其空间导数。此外，在存在涨落洛伦兹力时，u′ 和 b′ 的方程组完全是非线性的。正如这些考量所表明的，基于假设的发电机论证过于简单，其适用范围仅限于非常特定的简单情形，例如磁雷诺数极低时的运动学情形（$Rm = UL/\eta$、 U：特征速度， L：特征长度尺度， η：磁扩散率或电阻率）。这一点将在第3.1节中详细论述。

（iii）将发电机系数视为常数或预设参数：与上文提到的假设有关，平均磁场 B 及其导数的比例系数， α、 η_{T}等，常被视为可调参数。然而，这不过是最粗略的近似。湍流通量的输运系数必须反映湍流的统计性质。因此，这些输运系数并非常数，而是会随空间和时间变化，以反映湍流统计量的时空分布，例如湍流能量、湍流螺度、湍流交叉螺度、能量耗散率等。

(iv) α–Ω框架：通常的平均场发电机模型是在 α–Ω发电机框架下构建的。在这一框架中，湍流电动势被假定由与平均磁场 B 成正比的 α 效应，以及与 B 的旋度成正比的湍流磁扩散率 η_{T} 效应构成。另一个关键要素是非均匀平均速度，它会诱导出垂直于原始磁场的平均磁场分量（Ω效应）。如第3.1节稍后将讨论的，平均速度的非均匀性不仅会改变平均磁场分量，也会改变涨落场的性质。速度涨落 u′和磁场涨落 b′ 的方程取决于平均速度剪切。如果在 u′ 和 b′ 方程中保留这些平均速度剪切，那么 u′ 与 b′之间的交叉关联函数，或湍流交叉螺度 $\langle \mathrm{u}' \cdot \mathrm{b}' \rangle$，就会作为平均速度剪切的系数出现在湍流电动势表达式中。我们可以看到，这种交叉螺度效应与通常的 α效应有显著区别；后者由速度涨落与涡量涨落之间的关联函数 $\langle \mathrm{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$ [$\boldsymbol{\omega}'(= \nabla \times \mathrm{u}')$表示：涡量涨落]，以及磁场涨落与电流 $\langle \mathrm{b}' \cdot \mathrm{j} \rangle$ [$\mathrm{j}'(=\nabla \times \mathrm{b}')$之间的关联函数：电流密度涨落]，二者与平均磁场 B 耦合。交叉螺度发电机效应基于速度涨落和磁场涨落对平均速度剪切的依赖，或可为拓展平均场发电机理论在非均匀湍流中的适用性铺平道路。

(v) 方位角平均：在平均场发电机研究中，通常采用方位角平均来替代系综平均。这有时会严重限制平均场理论在非轴对称全局结构发挥关键作用的情形下的适用性

发电机过程（Sch¨ussler & Ferriz-Mas，2003年）。除方位角平均外，还可以采用另一种平均方法，即采用亚网格尺度（SGS）滤波，以保留大尺度非轴对称结构。

（vi）湍流的不可压缩处理：平均场发电机研究中另一项普遍采用的假设是湍流不可压缩。不可压缩湍流处理的一项依据是，磁感应方程并不显式依赖密度。然而，不可压缩情形与可压缩情形下湍流的统计性质和动力学行为本质上不同。对于密度方差较大的现象，发电机研究没有理由忽略可压缩性 $\langle \rho'^2 \rangle$（ρ'：密度涨落）Yokoi，2018a，b）。密度方差较大对应于高马赫数情形。我们经常会遇到马赫数较高的天体物理现象，包括星际介质中的恒星形成区以及大质量恒星的内部。

上述假设或近似都不是平均场发电机理论的内在条件。下文中，“平均场发电机”理论这一术语包含了上述某些含义，容易使人误解该理论的适用范围。因此，在下文中，我们更倾向于使用“湍流发电机”而非“平均场发电机”这一术语。

天体物理和地球物理等离子体背景下，湍流磁流体力学输运的另一个重要方面是湍流动量通量。湍流引起的线动量和角动量输运由雷诺应力 $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle = \{\langle u'^i u'^j \rangle\}$ 以及湍流麦克斯韦应力 $\langle \mathbf{b}'\mathbf{b}' \rangle = \{\langle b'^i b'^j \rangle\}$ 表示。它们是平均动量方程中直接体现线动量和角动量输运的唯一量。在天体物理、地球物理以及聚变等离子体流动现象中，湍流被认为在角动量输运中发挥着重要作用。例如，吸积盘围绕着黑洞等大质量天体运行。旋转等离子体气体要吸积到中心天体，角动量就必须由湍流输运（Shakura & Sunyaev，1973年）。

恒星对流中的角动量输运是另一个重要课题。近来人们认识到，当前的数值模拟未能再现太阳对流的一些基本特征。日震学观测到的大水平尺度上的对流速度振幅，远小于全球对流模拟所预测的振幅（Hanasoge、Duvall 和 Sreenivasan，2012；Hanasoge、Gizon 和 Sreenivasan，2016；Proxauf，2021年）。全球数值模拟得到的差分自转剖面并不现实：在模拟采用太阳光度（能量传输率）和自转速率的情况下，赤道区域的方位角旋转速度并未呈现太阳式的顺行剖面（与高纬度区域相同），而是呈现逆行剖面。此外，如果

6 未受重视的交叉螺度效应

大尺度对流运动实际上很微弱，那么如此微弱的流动如何传输太阳光度，并产生日震学观测到的平均差分自转率？数值模拟与观测之间的这些差异被称为对流难题（Schumacher & Sreenivasan，2020）。

在恒星对流问题中，基于梯度扩散近似的湍流通量（湍流动量、热量和质量通量）的传统表达式被认为并不恰当，因为它们会对通量产生过强的破坏性或耗散效应。从湍流通量理论研究的角度来看，解决这一对流难题或许有几种可能的途径。一种可能的方法是在对流湍流中引入相干脉动运动的效应，例如羽流、热泡和喷流。人们认为，将相干结构效应纳入对流湍流建模，对于捕捉湍流的输运特性至关重要（Rast，1998；Brandenburg，2016；Green, Vlaykov, Mellado, et al.，2020）。近期，在恒星对流湍流建模的背景下，有研究指出，沿羽流运动的湍流非平衡效应值得关注（Yokoi, Masada& Takiwaki，2022）。沿相干脉动运动产生的非平衡效应会改变湍流的长度尺度和时间尺度，因此会直接影响湍流的输运特性。

第二种可能的途径是引入旋转或整体涡量效应。研究认为，旋转会抑制对流运动，并增强相对较小尺度上的热输运（Vasil, Julien & Featherstone, 2021）。将旋转效应纳入线动量和角动量输运的一项研究，是通过动能螺度的非均匀性实现的。研究发现，在雷诺应力表达式中，绝对涡度 $\Omega_*(=\Omega + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}})$ [$\Omega(=\nabla\times\mathrm{U})$：平均涡量，$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$：旋转] 与湍流螺度的非均匀性相耦合，而湍流螺度的非均匀性由其梯度表示，$\nabla\langle\mathrm{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'\rangle$（Yokoi & Yoshizawa, 1993）。不同于涡黏效应——它源于湍流能量与平均速度应变率（平均速度剪切的对称部分）相耦合，并通过强有效黏度破坏大尺度非均匀流动结构——这种非均匀湍流螺度效应源于非均匀动能螺度与平均绝对涡量（平均速度剪切的反对称部分）的耦合。后一种效应有望促成并维持非平凡的大尺度流动结构，例如太阳对流区中的顺行差分旋转（Yokoi, 2023）。由于湍流螺度的生成机制之一，是旋转与沿旋转轴分布的能量、密度等非均匀性相耦合，因此，在旋转球形构型中，非均匀湍流螺度（其空间分布与分异）普遍存在（Duarte, Wicht, Browning, et al., 2016; Ranjan & Davidson, 2023）。从这个意义上说，非均匀螺度效应预计会在恒星对流区的角动量输运中发挥重要作用。

第三种可能的途径是将磁剪切效应纳入雷诺应力和湍流麦克斯韦应力。在这种效应中，输运系数由湍流交叉螺度 $\langle \mathrm{u}' \cdot \mathrm{b}' \rangle$ 表示。磁涨落 b' 与速度涨落 u' 存在统计关联，这正是这种交叉螺度效应在角动量和线动量输运中发挥作用的关键因素。

这些理论考量表明，除了与平均速度应变耦合的常规涡黏效应、与涨落的相干分量（羽流、热泡和喷流）耦合的非平衡效应、与平均绝对涡量（旋转和大尺度涡旋运动）耦合的非均匀螺度效应，以及与平均磁场应变耦合的交叉螺度效应外，其他因素也可能在角动量和线动量输运中发挥作用。以往关于恒星对流中湍流通量的研究并未充分探讨这些效应。前两种效应已在其他论文中提出：恒星对流中沿羽流运动的非平衡效应见Yokoi, Masada & Takiwaki(2022)，以及Yokoi & Yoshizawa(1993)；Yokoi & Brandenburg (2016)；Yokoi(2023)讨论了非均匀湍流螺度效应。本文将在第 6 节进一步讨论动量输运中与全局磁场剪切耦合的交叉螺度效应。

本文的组织结构如下。引言之后，第2节介绍非均匀磁流体力学湍流的理论表述。我们简要概述理论框架——双尺度直接相互作用近似，即多尺度重整化微扰展开理论，并特别指出简单自响应格林函数与交叉相互作用格林函数之间的区别。作为该理论的应用实例，本文给出了平均磁感应方程中的湍流电动势，以及平均动量方程中的雷诺应力和湍流麦克斯韦应力的解析表达式。第3节讨论发电机中的交叉螺度效应。首先阐述交叉螺度效应的物理起源，并讨论动能螺度效应、电流螺度效应以及湍流磁扩散率效应与之相对应的情形。文中还给出了交叉螺度效应及相关发电机的若干数值验证。交叉螺度发电机的性质取决于湍流交叉螺度的时空演化。为了更好地理解交叉螺度的演化，第4节讨论湍流交叉螺度的输运方程，并重点说明导致交叉螺度生成的场构型，以展示湍流交叉螺度的代表性生成机制。此外，本文通过推导交叉螺度耗散率方程，给出了交叉螺度耗散率的评估。第5节将交叉螺度效应应用于振荡型恒星发电机。与动能螺度和电流螺度不同，交叉螺度预计会在磁场反转时改变符号。本文在平均场发电机方程的框架下，全面考察了交叉螺度的这一性质。

8 未受重视的交叉螺度效应

第6节讨论交叉螺度效应的另一个重要方面，即其对动量方程的贡献。在存在非平凡平均磁场构型时，湍流交叉螺度在线动量和角动量输运中发挥重要作用。本文结合涨落洛伦兹力在动量方程中的作用，讨论流动生成的物理起源。湍流交叉螺度的这两种效应——磁感应和流动生成——预计都会出现在磁重联现象中。第7节探讨磁重联中的湍流效应。交叉螺度抵消湍流磁扩散率效应，有助于有效扩散率的局域化，从而促成快速重联。第8节给出总结，重点阐述湍流电动势以及雷诺应力和湍流麦克斯韦应力中的反扩散效应。

2 理论表述

本节介绍多尺度重整化微扰展开理论——双尺度直接相互作用近似（TSDIA）的基本步骤（Yoshizawa，1984；Yokoi，2020）。具体而言，我们讨论不可压缩磁流体力学（MHD）湍流（Yoshizawa，1990年；Hamba& Sato，2008；Yokoi，2013），因为它有助于呈现磁流体力学湍流输运的基本性质。不过应当指出，以下表述也可轻易推广到强可压缩磁流体力学湍流。相关计算虽然繁琐，但过程直接明了（Yokoi，2018a，b）。

2.1 基本方程

为展示流体等离子体湍流的基本理论表述，我们在此给出不可压缩流体或密度不变流体的磁流体力学基本方程。

在密度不变的情况下，等离子体流体遵循不可压缩磁流体力学方程组，该方程组由动量方程构成：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{b} - \nabla p_{\mathrm{M}} - 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}\times\mathbf{u} + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \tag{1}$$

磁感应方程：

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{b} = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \eta\nabla^2\mathbf{b}, \tag{2}$$

以及速度和磁场的无散条件：

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{b} = 0, \tag{3}$$

其中，u 表示速度，b 表示磁场， $p_{\mathrm{M}}(=p+\mathrm{b}^2/2)$表示磁流体力学压力（$p$：气体压力）， $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$ 表示旋转的角速度， ν 表示运动黏度， η 表示磁扩散率。此处，磁场以 Alfv´en 速度单位表示，该单位定义为 $\mathrm{b}=\mathrm{b}_*/(\mu_0\rho)^{1/2}$ （b_*：以自然单位表示的磁场， μ：磁导率， ρ：流体密度）。

2.2 多尺度分析中的平均与涨落

2.2.1 平均与涨落

为了了解湍流效应对平均场的影响，我们将场量f 分为平均值 F 及其周围的涨落 f'，如下所示:

$$f = F + f', \quad F = \langle f \rangle \tag{4}$$

with

$$f = (\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{j}), \tag{5a}$$

$$F = (\mathbf{U}, \mathbf{B}, P, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{J}), \tag{5b}$$

$$f' = (\mathbf{u}', \mathbf{b}', p', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{j}'). \tag{5c}$$

这里， $\boldsymbol{\omega}$（$=\nabla\times\mathrm{u}$）是涡量，j（$=\nabla\times\mathrm{b}$）是电流密度， $\langle\cdots\rangle$ 表示系综平均。

在这种分解下，平均速度 U 和平均磁场 B 的方程写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}} - \nabla P_{\mathrm{M}} - 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}\times\mathbf{U} + \nu\nabla^2\mathbf{U}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{U} - \langle(\mathbf{u}'\cdot\nabla)\mathbf{b}'\rangle + \langle(\mathbf{b}'\cdot\nabla)\mathbf{u}'\rangle + \eta\nabla^2\mathbf{B}, \tag{7}$$

满足无散条件

$$\nabla\cdot\mathbf{U} = \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \tag{8}$$

或者，平均磁场方程（7）可改写为旋度形式:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{U}\times\mathbf{B}) + \nabla\times\mathbf{E}_{\mathrm{M}} + \eta\nabla^2\mathbf{B}. \tag{9}$$

In（6），$\boldsymbol{\mathcal{R}}=\{\mathcal{R}^{ij}\}$ 是雷诺应力和湍流麦克斯韦应力，其定义为 y

$$\mathcal{R}^{ij} \equiv \langle u'^i u'^j - b'^i b'^j \rangle \tag{10}$$

且 P_{M}是总磁流体力学压力 $p_{\mathrm{M}}\equiv p+\mathrm{b}^2/2$ 的平均部分，定义为

$$P_{\mathrm{M}} = P + \mathbf{B}^2/2 + \langle \mathbf{b}'^2 \rangle/2. \tag{11}$$

10 未受重视的交叉螺度效应

在（9）中，$\mathbf{E}_{\mathrm{M}}$ 是定义如下的湍流电动势（EMF）

$$\mathbf{E}_{\mathrm{M}} \equiv \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle. \tag{12}$$

另一方面，速度涨落 $\mathbf{b}'$ 和磁场涨落 $\mathbf{b}'$ 的方程可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} &+ (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{u}' = -(\mathbf{u}'\cdot\nabla)\mathbf{U} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{b}' + (\mathbf{b}'\cdot\nabla)\mathbf{B} \\ &- (\mathbf{u}'\cdot\nabla)\mathbf{u}' + (\mathbf{b}'\cdot\nabla)\mathbf{b}' + \nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}} - \nabla p'_{\mathrm{M}} - 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}\times\mathbf{u}' + \nu\nabla^2\mathbf{u}', \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} &+ (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{b}' = -(\mathbf{u}'\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u}' + (\mathbf{b}'\cdot\nabla)\mathbf{U} \\ &- (\mathbf{u}'\cdot\nabla)\mathbf{b}' + (\mathbf{b}'\cdot\nabla)\mathbf{u}' + \langle(\mathbf{u}'\cdot\nabla)\mathbf{b}'\rangle - \langle(\mathbf{b}'\cdot\nabla)\mathbf{u}'\rangle + \eta\nabla^2\mathbf{b}' \end{aligned} \tag{14}$$

满足无散条件

$$\nabla\cdot\mathbf{u}' = \nabla\cdot\mathbf{b}' = 0. \tag{15}$$

在（13）中，p'_{M} 是定义为 $p'_{\mathrm{M}} = p_{\mathrm{M}} - P_{\mathrm{M}}$ 的涨落磁流体力学压力。

2.2.2 多尺度分析

考虑到平均场在大尺度上变化缓慢，而涨落在小尺度上快速变化，我们引入两种尺度：慢变量和快变量，定义如下

$$\boldsymbol{\xi}(=\mathbf{x}),\ \mathbf{X}(=\delta\mathbf{x}),\ \tau(=t),\ T(=\delta t), \tag{16}$$

其中 δ 是尺度参数。如果 δ 很小，$\mathbf{X}$ 和 T 只有在 $\mathbf{x}$ 和 t 显著变化时才会发生显著变化。从这个意义上说，$\mathbf{X}$ 和 T 适合描述缓慢且大尺度的变化，因此称为慢变量。另一方面，$\boldsymbol{\xi}$ 和 τ 称为快变量。尺度参数 δ 不一定很小，但如果 δ 很小（$\delta \ll 1$），慢变量和快变量之间就存在较大的尺度分离。由于引入了由（16）定义的两个尺度，空间导数和时间导数可表示为

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} + \delta\nabla_{\mathbf{X}};\quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \delta\frac{\partial}{\partial T}. \tag{17}$$

这意味着，对慢变量 $\mathbf{X}$ 和 T 求导时会带有尺度参数 δ。关于 δ 的展开称为导数展开。利用这些慢变量和快变量，场量 f 可表示为

$$f(\mathbf{x};\ t) = F(\mathbf{X};\ T) + f'(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X};\ \tau, T). \tag{18}$$

请注意，涨落场 f' 不仅取决于慢变量 $\mathbf{X}$ 和 T，还取决于快变量 $\boldsymbol{\xi}$ 和 τ。涨落场对慢变量的这种依赖

对于描述非均匀湍流至关重要。

2.2.3 平均场与涨落场方程

在这种双尺度表述中，脉动速度 u' 的方程写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'^i}{\partial \tau} + U^j\frac{\partial u'^i}{\partial \xi^j} + \frac{\partial}{\partial \xi^j}(u'^j u'^i - b'^j b'^i) + \frac{\partial p'_{\mathrm{M}}}{\partial \xi^i} - \nu\frac{\partial^2 u'^i}{\partial \xi^j \partial \xi^j} - B^j\frac{\partial b'^i}{\partial \xi^j} \\ = \delta\left[b'^j\frac{\partial B^i}{\partial X^j} - u'^j\left(\frac{\partial U^i}{\partial X^j} + \epsilon^{jik}\Omega_0^k\right) + B^j\frac{\partial b'^i}{\partial X^j} - \frac{\widetilde{D}u'^i}{DT}\right. \\ \left. -\frac{\partial}{\partial X^j}\left(u'^j u'^i - b'^j b'^i - \langle u'^j u'^i - b'^j b'^i\rangle\right) - \frac{\partial p'_{\mathrm{M}}}{\partial X^i}\right], \end{aligned} \tag{19}$$

以及无散条件:

$$\frac{\partial u'^j}{\partial \xi^j} + \delta\frac{\partial u'^j}{\partial X^j} = 0. \tag{20}$$

涨落磁场 b' 的对应方程写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial b'^i}{\partial \tau} + U^j\frac{\partial b'^i}{\partial \xi^j} + \frac{\partial}{\partial \xi^j}(u'^j b'^i - b'^j u'^i) - \eta\frac{\partial^2 b'^i}{\partial \xi^j \partial \xi^j} - B^j\frac{\partial u'^i}{\partial \xi^j} \\ = \delta\left[u'^j\frac{\partial B^i}{\partial X^j} + b'^j\left(\frac{\partial U^i}{\partial X^j} + \epsilon^{jik}\Omega_0^k\right) + B^j\frac{\partial u'^i}{\partial X^j} - \frac{\widetilde{D}b'^i}{DT}\right. \\ \left. -\frac{\partial}{\partial X^j}\left(u'^j b'^i - b'^j u'^i - \langle u'^j b'^i - b'^j u'^i\rangle\right)\right], \end{aligned} \tag{21}$$

以及无散条件:

$$\frac{\partial b'^j}{\partial \xi^j} + \delta\frac{\partial b'^j}{\partial X^j} = 0. \tag{22}$$

这里，为了使物质导数保持客观性，我们采用共转导数

$$\frac{\widetilde{D}u'^i}{DT} = \frac{\partial u'^i}{\partial t} + U^j\frac{\partial u'^i}{\partial x^j} + \epsilon^{jik}\Omega_0^k u'^i \tag{23}$$

with

$$\boldsymbol{\Omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}/\delta, \tag{24}$$

取代拉格朗日导数或平流导数

$$\frac{Du'^i}{DT} = \frac{\partial u'^i}{\partial t} + U^j\frac{\partial u'^i}{\partial x^j}, \tag{25}$$

它相对于旋转并非客观。请注意，脉动方程中的平均速度梯度：

$$\frac{\partial U^i}{\partial X^j}+\epsilon^{jik}\Omega_0^k=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U^i}{\partial X^j}+\frac{\partial U^j}{\partial X^i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U^i}{\partial X^j}-\frac{\partial U^j}{\partial X^i}+2\epsilon^{jik}\Omega_0^k\right) \tag{26}$$

由于应变率张量和绝对涡度张量都是客观的，因此该量也是客观的（Thiffeault, 2001年; Hamba, 2006）。

场量 $f'(\boldsymbol{\xi},\mathbf{X};\ \tau,T)$ 关于快空间变量 $\boldsymbol{\xi}$ 进行傅里叶变换，得到

$$f'(\boldsymbol{\xi},\mathbf{X};\ \tau,T)=\int d\mathbf{k}f(\mathbf{k},\mathbf{X};\ \tau,T)\exp[-i\mathbf{k}\cdot(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{U}\tau)], \tag{27}$$

其中，快变量的傅里叶变换是在随局部平均速度 U 一同运动的参考系中进行的。此后，为了简化记号，省略涨落场 $f(\boldsymbol{\xi},\mathbf{X};\ \tau,T)$ 中慢变量的自变量，并简记为 $f(\boldsymbol{\xi};\ \tau)$。

我们对（27）式中的（19）式和（21）式，以及无散条件（20）式和（22）式进行傅里叶变换，得到如下双尺度微分方程组

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u^i(\mathbf{k};\ \tau)}{\partial\tau}+\nu k^2u^i(\mathbf{k};\ \tau)\\
&\quad-iM^{ijl}(\mathbf{k})\iint d\mathbf{p}d\mathbf{q}\ \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})\times\\
&\qquad\qquad\left[u^j(\mathbf{p};\ \tau)u^l(\mathbf{q};\ \tau)-b^j(\mathbf{p};\ \tau)b^l(\mathbf{q};\ \tau)\right]\\
&\quad+ik^jB^jb^i(\mathbf{k};\ \tau)\\
&\quad=\delta\left[-D^{ij}(\mathbf{k})\frac{\widetilde{D}u^j(\mathbf{k};\ \tau)}{DT_{\mathrm{I}}}-D^{ij}(\mathbf{k})u^m(\mathbf{k};\ \tau)\left(\frac{\partial U^j}{\partial x^m}+\epsilon^{mjl}\Omega_0^l\right)\right.\\
&\qquad\left.+B^j\frac{\partial b^i(\mathbf{k};\ \tau)}{\partial X_{\mathrm{I}}^j}+b^j(\mathbf{k};\ \tau)\frac{\partial B^i}{\partial x^j}\right],
\end{aligned} \tag{28}$$

$$-ik^ju^j(\mathbf{k};\ \tau)+\delta\frac{\partial u^j(\mathbf{k};\ \tau)}{\partial X^j}=0, \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial b^i(\mathbf{k};\ \tau)}{\partial\tau}+\eta k^2b^i(\mathbf{k};\ \tau)\\
&\quad+iN^{ijl}(\mathbf{k})\iint d\mathbf{p}d\mathbf{q}\ \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})\times\\
&\qquad\qquad\left[b^j(\mathbf{p};\ \tau)u^l(\mathbf{q};\ \tau)-u^j(\mathbf{p};\ \tau)b^l(\mathbf{q};\ \tau)\right]\\
&\quad+ik^jB^ju^i(\mathbf{k};\ \tau)
\end{aligned}$$

$$= \delta \left[-D^{ij}(\mathbf{k}) \frac{\widetilde{D} b^j(\mathbf{k};\ \tau)}{DT_{\mathrm{I}}} - D^{ij}(\mathbf{k};\ \tau) b^m(\mathbf{k};\ \tau) \left(\frac{\partial U^j}{\partial x^m} + \epsilon^{mj\ell} \Omega_0^\ell \right) \right.$$
$$\left. + B^j \frac{\partial u^i(\mathbf{k};\ \tau)}{\partial X_{\mathrm{I}}^j} + u^j(\mathbf{k};\ \tau) \frac{\partial B^i}{\partial X^j} \right], \tag{30}$$

$$- ik^j b^j(\mathbf{k};\ \tau) + \delta \frac{\partial b^j(\mathbf{k};\ \tau)}{\partial X^j} = 0, \tag{31}$$

其中

$$\left(\nabla_{\mathbf{X}_{\mathrm{I}}}, \frac{D}{DT_{\mathrm{I}}} \right) = \exp\left(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}\tau\right) \left(\nabla_{\mathbf{X}}, \frac{D}{DT} \right) \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}\tau\right) \tag{32}$$

是相互作用表象中的微分算子。此处在（28）和（30）中,

$$M^{ijk}(\mathbf{k}) = k^j D^{ik}(\mathbf{k}) + k^k D^{ij}(\mathbf{k}), \tag{33}$$

采用无散投影算子

$$D^{ij}(\mathbf{k}) = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2}, \tag{34}$$

and

$$N^{ijk}(\mathbf{k}) = k^j \delta^{ik} - k^k \delta^{ij}. \tag{35}$$

它们表示不同模态之间的非线性相互作用。

2.3 场方程

2.3.1 尺度参数展开

我们将场 $f(\boldsymbol{\xi};\ \tau)$ 对尺度参数 δ 进行展开，并进一步按照外场（在本例中为平均磁场）对每个场进行展开。

$$f^i(\mathbf{k};\ \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n f_n^i(\mathbf{k};\ \tau) - \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{n+1} i \frac{k^i}{k^2} \frac{\partial}{\partial X_{\mathrm{I}}^j} f_n^j(\mathbf{k};\ \tau)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \delta^n f_{nm}^i(\mathbf{k};\ \tau) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \delta^{n+1} i \frac{k^i}{k^2} \frac{\partial}{\partial X_{\mathrm{I}}^j} f_{nm}^j(\mathbf{k};\ \tau). \tag{36}$$

在这种双尺度表述中，非均匀性和各向异性通过尺度参数 δ 以及高阶场中的外部参数 B 引入。最低阶场 f_{00} 对应于均匀各向同性湍流。

14 未受重视的交叉螺度效应

利用展开式（36），我们将各阶方程写成矩阵形式。采用谱积分的简写形式

$$\int_{\Delta} = \iint d\mathbf{p}d\mathbf{q}\ \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}), \tag{37}$$

方程 $f_{00}(\mathbf{k};\ \tau)$ 表示为

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\nu k^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\eta k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i_{00}(\mathbf{k};\ \tau) \\ b^i_{00}(\mathbf{k};\ \tau) \end{pmatrix} \\
&+i \begin{pmatrix} -M^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_{\Delta} u^j_{00}(\mathbf{p};\ \tau) & M^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_{\Delta} b^j_{00}(\mathbf{p};\ \tau) \\ N^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_{\Delta} b^j_{00}(\mathbf{p};\ \tau) & -N^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_{\Delta} u^j_{00}(\mathbf{p};\ \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{\ell}_{00}(\mathbf{q};\ \tau) \\ b^{\ell}_{00}(\mathbf{q};\ \tau) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{38}$$

方程 $f_{01}(\mathbf{k};\ \tau)$ 表示为

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\nu k^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\eta k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i_{01}(\mathbf{k};\ \tau) \\ b^i_{01}(\mathbf{k};\ \tau) \end{pmatrix} \\
&+i \begin{pmatrix} -2M^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_{\Delta} u^j_{00}(\mathbf{p};\ \tau) & 2M^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_{\Delta} b^j_{00}(\mathbf{p};\ \tau) \\ N^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_{\Delta} b^j_{00}(\mathbf{p};\ \tau) & -N^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_{\Delta} u^j_{00}(\mathbf{p};\ \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{\ell}_{01}(\mathbf{q};\ \tau) \\ b^{\ell}_{01}(\mathbf{q};\ \tau) \end{pmatrix} \\
&= -ik^j B^j \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i_{00}(\mathbf{k};\ \tau) \\ b^i_{00}(\mathbf{k};\ \tau) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F^i_{01u} \\ F^i_{01b} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{39}$$

以及 $f_{10}(\mathbf{k};\ \tau)$ 方程为

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\nu k^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\eta k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i_{10}(\mathbf{k};\ \tau) \\ b^i_{10}(\mathbf{k};\ \tau) \end{pmatrix} \\
&+i \begin{pmatrix} -2M^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_{\Delta} u^j_{00}(\mathbf{p};\ \tau) & 2M^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_{\Delta} b^j_{00}(\mathbf{p};\ \tau) \\ N^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_{\Delta} b^j_{00}(\mathbf{p};\ \tau) & -N^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_{\Delta} u^j_{00}(\mathbf{p};\ \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{\ell}_{10}(\mathbf{q};\ \tau) \\ b^{\ell}_{10}(\mathbf{q};\ \tau) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= B^j \frac{\partial}{\partial X_{\mathrm{I}}^j} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00}^i(\mathbf{k}) \\ b_{00}^i(\mathbf{k}) \end{pmatrix} - D^{ij}(\mathbf{k}) \frac{\widetilde{D}}{DT_{\mathrm{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00}^j(\mathbf{k}) \\ b_{00}^j(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -D^{ij}(\mathbf{k}) \left(\dfrac{\partial U^j}{\partial X^\ell} + \epsilon^{\ell jn} \Omega_0^n \right) & D^{ij}(\mathbf{k}) \dfrac{\partial B^j}{\partial X^\ell} \\ -D^{ij}(\mathbf{k}) \dfrac{\partial B^j}{\partial X^\ell} & D^{ij}(\mathbf{k}) \left(\dfrac{\partial U^j}{\partial X^\ell} + \epsilon^{\ell jn} \Omega_0^n \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00}^\ell(\mathbf{k};\ \tau) \\ b_{00}^\ell(\mathbf{k};\ \tau) \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} F_{10u}^i \\ F_{10b}^i \end{pmatrix}, \qquad (40)
\end{aligned}
$$

其中，F_{01u}、F_{01b}、F_{10u}和 F_{10b} 分别表示（39）和（40）右端第二项（r.h.s.）的各个分量。它们可视为 f_{01}（$\mathbf{k}$；τ）和 f_{10}（$\mathbf{k}$；τ）演化方程的强迫项。

2.3.2 格林函数引言

为了求解这些微分方程，我们引入格林函数。我们考察速度和磁场对速度和磁场的无穷小扰动 $\delta\mathbf{u}$ 和 $\delta\mathbf{b}$ 的响应。这类无穷小扰动源自外部搅拌力 $\delta\mathbf{F}$，例如，对于速度扰动 $\delta\mathbf{u}$，有

$$
\delta u^i = \int d\mathbf{k}' \int_{-\infty}^{t} dt'\ \mathcal{G}^{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}';\ t, t')\ \delta F^j(\mathbf{k}';\ t') \qquad (41)
$$

其中包含波数空间中的格林函数。正如这种形式所示，格林函数本身是一个随机变量，会随着 $\mathbf{u}$ 的不同实现而变化。

由（38）可知，无穷小扰动的方程可以写成

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \tau} + \nu k^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial \tau} + \eta k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{00}^i(\mathbf{k};\ \tau) \\ \delta b_{00}^i(\mathbf{k};\ \tau) \end{pmatrix} \\
&+ i \begin{pmatrix} -2M^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_\Delta u_{00}^j(\mathbf{p};\ \tau) & 2M^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_\Delta b_{00}^j(\mathbf{p};\ \tau) \\ N^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_\Delta b_{00}^j(\mathbf{p};\ \tau) & -N^{ij\ell}(\mathbf{k}) \displaystyle\int_\Delta u_{00}^j(\mathbf{p};\ \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{00}^\ell(\mathbf{q};\ \tau) \\ \delta b_{00}^\ell(\mathbf{q};\ \tau) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (42)
\end{aligned}
$$

16 未受重视的交叉螺度效应

这里需要注意，（38）中的非线性卷积项导致了如下形式的线性贡献

$$\widehat{\mathbf{uu}} \;\rightarrow\; 2\widehat{\mathbf{u}\delta\mathbf{u}}, \quad \widehat{\mathbf{bb}} \;\rightarrow\; 2\widehat{\mathbf{b}\delta\mathbf{b}}. \tag{43}$$

为了处理速度和磁场之间的相互作用，我们考虑四个格林函数：格林函数 G_{uu} 表示速度场 u 对速度扰动 u 的响应， G_{ub} 表示 u 对磁扰动 b 的响应， G_{bu} 表示 b 对速度扰动 u 的响应，而 G_{bb} 表示磁场 b 对磁扰动 b 的响应。

根据等式 (42) 的左端（l.h.s.），我们构造表示对无穷小强迫响应的方程组。因此，这四个格林函数应由其演化方程定义如下：

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\nu k^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\eta k^2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} G^{ij}_{uu} & G^{ij}_{ub} \\ G^{ij}_{bu} & G^{ij}_{bb} \end{pmatrix} \\
&+i\begin{pmatrix} -2M^{ikm}\displaystyle\int_\Delta u^k_{00} & 2M^{ikm}\displaystyle\int_\Delta b^k_{00} \\ N^{ikm}\displaystyle\int_\Delta b^k_{00} & -N^{ikm}\displaystyle\int_\Delta u^k_{00} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} G^{mj}_{uu} & G^{mj}_{ub} \\ G^{mj}_{bu} & G^{mj}_{bb} \end{pmatrix} \\
&=\delta^{ij}\delta(\tau-\tau')\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{44}$$

反映磁流体力学方程的结构和场展开 (36)，(39) 和 (40) 的左端（l.h.s.），即作用于 $f_{01}(\mathbf{k};\ \tau)$ 和 $f_{10}(\mathbf{k};\ \tau)$ 场的微分算子，与无穷小扰动 (42) 下涨落方程的形式相同。考虑到 (39) 和 (40) 的右端（r.h.s.）是力项，我们借助格林函数形式上求解 f_{01} 和 f_{10} 场。 f_{01} 场表示为

$$\begin{pmatrix} u^i_{01} \\ b^i_{01} \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \begin{pmatrix} G^{ij}_{uu} & G^{ij}_{ub} \\ G^{ij}_{bu} & G^{ij}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^j_{01u} \\ F^j_{01b} \end{pmatrix}, \tag{45}$$

或显式写为

$$\begin{aligned}
u^i_{01}(\mathbf{k};\ \tau) &= \int d\tau_1 G^{ij}_{uu}F^j_{01u} + \int d\tau_1 G^{ij}_{ub}F^j_{01b} \\
&= \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 G^{ij}_{ub}(\mathbf{k};\ \tau,\tau_1)\left[-ik^m B^m b^j_{00}(\mathbf{k};\ \tau)\right],
\end{aligned} \tag{46}$$

$$b^i_{01}(\mathbf{k};\,\tau) = \int d\tau_1\; G^{ij}_{bu}F^j_{01u} + \int d\tau_1\; G^{ij}_{bb}F^j_{01b}$$
$$= \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 G^{ij}_{bu}(\mathbf{k};\,\tau,\tau_1)\left[-ik^m B^m u^j_{00}(\mathbf{k};\,\tau)\right]. \tag{47}$$

注意，$\mathbf{u}_{01}$ 和 $\mathbf{b}_{01}$ 分别由 $\mathbf{b}_{00}$ 和 $\mathbf{u}_{00}$ 与平均磁场 B 耦合表示。因此，以外积方式将 $\mathbf{u}_{01}$ 和 $\mathbf{b}_{01}$ 分别与 $\mathbf{b}_{00}$ 和 $\mathbf{u}_{00}$ 相乘，不会对电动势产生贡献。

另一方面， f_{10} 场表示为

$$\begin{pmatrix} u^i_{10} \\ \\ b^i_{10} \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \begin{pmatrix} G^{ij}_{uu} & G^{ij}_{ub} \\ \\ G^{ij}_{bu} & G^{ij}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^j_{10u} \\ \\ F^j_{10b} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

或明确写作

$$u^i_{10}(\mathbf{k};\,\tau) = \int d\tau_1\; G^{ij}_{uu}F^j_{10u} + \int d\tau_1\; G^{ij}_{ub}F^j_{10b}$$
$$= \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1\; G^{ij}_{uu}(\mathbf{k};\,\tau,\tau_1)\left[-D^{jk}(\mathbf{k})\frac{\widetilde{D}u^k_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)}{DT_{\mathrm{I}}}\right.$$
$$-D^{jk}(\mathbf{k})\left(\frac{\partial U^k}{\partial X^m} + \epsilon^{mkn}\Omega^n_0\right)u^m_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)$$
$$\left. + B^k\frac{\partial b^i_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)}{\partial X^k_{\mathrm{I}}} + D^{jk}(\mathbf{k})\frac{\partial B^k}{\partial X^m}b^m_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)\right]$$
$$+\int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1\; G^{ij}_{ub}(\mathbf{k};\,\tau,\tau_1)\left[B^k\frac{\partial u^i_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)}{\partial X^k_{\mathrm{I}}} - D^{jk}(\mathbf{k})\frac{\partial B^k}{\partial X^m}u^m_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)\right.$$
$$\left. -D^{jk}(\mathbf{k})\frac{\widetilde{D}b^k_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)}{DT_{\mathrm{I}}} + D^{jk}(\mathbf{k})\left(\frac{\partial U^k}{\partial X^m} + \epsilon^{mkn}\Omega_0\right)b^m_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)\right], \tag{49}$$

$$b^i_{10}(\mathbf{k};\,\tau) = \int d\tau_1 G^{ij}_{bu}F^j_{10u} + \int d\tau_1 G^{ij}_{bb}F^j_{10b}$$
$$= \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1\; G^{ij}_{bu}(\mathbf{k};\,\tau,\tau_1)\left[-D^{jk}(\mathbf{k})\frac{\widetilde{D}u^k_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)}{DT_{\mathrm{I}}}\right.$$
$$-D^{jk}(\mathbf{k})\left(\frac{\partial U^k}{\partial X^m} + \epsilon^{mkn}\Omega^n_0\right)u^m_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)$$
$$\left. + B^k\frac{\partial b^i_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)}{\partial X^k_{\mathrm{I}}} + D^{jk}(\mathbf{k})\frac{\partial B^k}{\partial X^m}b^m_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)\right]$$
$$+\int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1\; G^{ij}_{bb}(\mathbf{k};\,\tau,\tau_1)\left[B^k\frac{\partial u^i_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)}{\partial X^k_{\mathrm{I}}} - D^{jk}(\mathbf{k})\frac{\partial B^k}{\partial X^m}u^m_{00}(\mathbf{k};\,\tau_1)\right.$$

$$-D^{jk}(\mathbf{k})\frac{\widetilde{D}b_{00}^{k}(\mathbf{k};\ \tau_1)}{DT_{\mathrm{I}}}+D^{jk}(\mathbf{k})\left(\frac{\partial U^{k}}{\partial X^{m}}+\epsilon^{mkn}\Omega_0\right)b_{00}^{m}(\mathbf{k};\ \tau_1)\Bigg]. \quad (50)$$

2.3.3 关于基本场的统计假设

我们假设基本场或最低阶场是均匀且各向同性的。

$$\frac{\left\langle\vartheta_{00}^{i}(\mathbf{k};\ \tau)\chi_{00}^{j}(\mathbf{k}';\ \tau')\right\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')}=D^{ij}(\mathbf{k})Q_{\vartheta\chi}(\mathbf{k};\ \tau,\tau')+\frac{i}{2}\frac{k^{\ell}}{k^{2}}\epsilon^{ij\ell}H_{\vartheta\chi}(\mathbf{k};\ \tau,\tau'), \quad (51)$$

其中，$\boldsymbol{\vartheta}_{00}$ 和 $\boldsymbol{\chi}_{00}$ 分别表示 $\mathbf{u}_{00}$ 和 $\mathbf{b}_{00}$, 中的一个，而指标 ϑ 和 χ 分别取 u 和 b中的一个。格林函数写作

$$\langle G_{\vartheta\chi}^{ij}(\mathbf{k};\ \tau,\tau')\rangle=D^{ij}(\mathbf{k})G_{\vartheta\chi}(\mathbf{k};\ \tau,\tau'). \quad (52)$$

谱函数 Q_{uu}、Q_{bb}、Q_{ub}、H_{uu}、H_{bb}、H_{ub}和 H_{bu}与基本场或最低阶场的湍流统计量（湍动能、磁能、交叉螺度、动能螺度、电流螺度，以及速度和磁场之间的扭转相关性）相关，具体如下：

$$\int d\mathbf{k}\ Q_{uu}(k;\ \tau,\tau)=\langle{\mathbf{u}'_{00}}^{2}\rangle/2, \quad (53)$$

$$\int d\mathbf{k}\ Q_{bb}(k;\ \tau,\tau)=\langle{\mathbf{b}'_{00}}^{2}\rangle/2, \quad (54)$$

$$\int d\mathbf{k}\ Q_{ub}(k;\ \tau,\tau)=\langle\mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{b}'_{00}\rangle, \quad (55)$$

$$\int d\mathbf{k}\ H_{uu}(k;\ \tau,\tau)=\langle\mathbf{u}'_{00}\cdot\boldsymbol{\omega}'_{00}\rangle, \quad (56)$$

$$\int d\mathbf{k}\ H_{bb}(k;\ \tau,\tau)=\langle\mathbf{b}'_{00}\cdot\mathbf{j}'_{00}\rangle, \quad (57)$$

$$\int d\mathbf{k}\ H_{ub}(k;\ \tau,\tau)=\langle\mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{j}'_{00}\rangle, \quad (58)$$

$$\int d\mathbf{k}\ H_{bu}(k;\ \tau,\tau)=\langle\mathbf{b}'_{00}\cdot\boldsymbol{\omega}'_{00}\rangle. \quad (59)$$

2.4 电动势的计算

湍流电动势（EMF）可表示为速度场和磁场的波数表示形式：

$$E_{\mathrm{M}}^{i}\equiv\epsilon^{ijk}\langle u'^{j}b'^{k}\rangle=\epsilon^{ijk}\int d\mathbf{k}\ \langle u^{j}(\mathbf{k};\ \tau)b^{k}(\mathbf{k}';\ \tau)\rangle/\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \quad (60)$$

利用（45）至（50）的结果，我们将速度–磁场相关性计算到 $f_{01}g_{00}$ 和 $f_{10}g_{00}$ 阶，得到

$$\langle u^{j}b^{k}\rangle=\langle u_{00}^{j}b_{00}^{k}\rangle+\langle u_{01}^{j}b_{00}^{k}\rangle+\langle u_{00}^{j}b_{01}^{k}\rangle+\delta\langle u_{10}^{j}b_{00}^{k}\rangle+\delta\langle u_{00}^{j}b_{10}^{k}\rangle+\cdots. \quad (61)$$

在直接相互作用近似（DIA）形式中，最低阶谱函数 Q_{uu}、Q_{bb}、Q_{ub}、H_{uu}、H_{bb}、H_{ub} 和 H_{bu}，以及最低阶格林函数 G_{uu}、G_{bb}、G_{ub} 和 G_{bu}，分别由其精确对应项 $\tilde{Q}_{uu}$、$\tilde{Q}_{bb}$、$\cdots$ 和 $\tilde{G}_{uu}$、$\tilde{G}_{bb}$、$\cdots$ 取代，即

$$\begin{aligned}
&Q_{uu} \to \widetilde{Q}_{uu},\ \ Q_{bb} \to \widetilde{Q}_{bb},\ \ Q_{ub} \to \widetilde{Q}_{ub},\\
&H_{uu} \to \widetilde{H}_{uu},\ \ H_{bb} \to \widetilde{H}_{ub},\ \ H_{ub} \to \widetilde{H}_{ub},\ \ H_{bu} \to \widetilde{Q}_{bu}\\
&G_{uu} \to \widetilde{G}_{uu},\ \ G_{bb} \to \widetilde{G}_{bb},\ \ G_{ub} \to \widetilde{G}_{ub},\ \ G_{bu} \to \widetilde{G}_{bu}.
\end{aligned} \tag{62}$$

对传播子（谱函数和响应函数）进行这一重整化过程后，可计算出重要的湍流关联函数。为简便起见，下文省略表示精确传播子的波浪号。也就是说，精确传播子将不带波浪号表示。

这里给出湍流电动势的最终结果：

$$\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle = \alpha \mathbf{B} - (\beta + \zeta) \nabla \times \mathbf{B} - (\nabla \zeta) \times \mathbf{B} + \gamma \nabla \times \mathbf{U}, \tag{63}$$

其中，输运系数 α、β、ζ 和 γ 表示为

$$\alpha = \frac{1}{3} \left[-I\{G_{bb}, H_{uu}\} + I\{G_{uu}, H_{bb}\} - I\{G_{bu}, H_{ub}\} + I\{G_{ub}, H_{bu}\} \right], \tag{64}$$

$$\beta = \frac{1}{3} \left[I\{G_{bb}, Q_{uu}\} + I\{G_{uu}, Q_{bb}\} - I\{G_{bu}, Q_{ub}\} - I\{G_{ub}, Q_{bu}\} \right], \tag{65}$$

$$\zeta = \frac{1}{3} \left[I\{G_{bb}, Q_{uu}\} - I\{G_{uu}, Q_{bb}\} + I\{G_{bu}, Q_{ub}\} - I\{G_{ub}, Q_{bu}\} \right], \tag{66}$$

$$\gamma = \frac{1}{3} \left[I\{G_{bb}, Q_{ub}\} + I\{G_{uu}, Q_{bu}\} - I\{G_{bu}, Q_{uu}\} - I\{G_{ub}, Q_{bb}\} \right] \tag{67}$$

其中采用谱与时间积分的简写形式

$$I\{A, B\} = \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 A(k;\ \tau, \tau_1) B(k;\ \tau, \tau_1). \tag{68}$$

2.5 雷诺应力与湍流麦克斯韦应力

平均动量方程中的雷诺应力和湍流麦克斯韦应力定义为

$$\mathcal{R}^{ij} = \langle u'^i u'^j \rangle - \langle b'^i b'^j \rangle. \tag{69}$$

与湍流电动势 $\mathrm{E_M}$ 的计算方式类似，R 可由 $\mathbf{u}'$ 和 $\mathbf{b}'$ 计算得出：

$$\langle u^j u^k \rangle = \langle u_{00}^j u_{00}^k \rangle + \langle u_{01}^j u_{00}^k \rangle + \langle u_{00}^j u_{01}^k \rangle + \delta \langle u_{10}^j u_{00}^k \rangle + \delta \langle u_{00}^j u_{10}^k \rangle + \cdots, \tag{70}$$

$$\langle b^j b^k \rangle = \langle b_{00}^j b_{00}^k \rangle + \langle b_{01}^j b_{00}^k \rangle + \langle b_{00}^j b_{01}^k \rangle + \delta \langle b_{10}^j b_{00}^k \rangle + \delta \langle b_{00}^j b_{10}^k \rangle + \cdots. \tag{71}$$

R 的表达式为

$$\langle u'^i u'^j - b'^i b'^j \rangle_{\mathrm{D}} = -\nu_{\mathrm{K}} \mathcal{S}^{ij} + \nu_{\mathrm{M}} \mathcal{M}^{ij} + [\Gamma^i \Omega_*^j + \Gamma^j \Omega_*^i]_{\mathrm{D}}, \tag{72}$$

其中 $\Omega_*(= \nabla \times \mathrm{U} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}})$ 是绝对涡度（相对涡度与旋转角速度之和），平均速度的应变率 $\mathrm{S} = \{\mathcal{S}^{ij}\}$以及平均磁场的应变率 $\mathrm{M} = \{\mathcal{M}^{ij}\}$ 分别定义为

$$\mathcal{S}^{ij} = \frac{\partial U^j}{\partial x^i} + \frac{\partial U^i}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\delta^{ij} \nabla \cdot \mathbf{U}, \tag{73}$$

$$\mathcal{M}^{ij} = \frac{\partial B^j}{\partial x^i} + \frac{\partial B^i}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\delta^{ij} \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B^j}{\partial x^i} + \frac{\partial B^i}{\partial x^j}, \tag{74}$$

张量的偏差部分由后缀 D 表示，其定义为

$$\mathcal{A}^{ij}_{\mathrm{D}} = \mathcal{A}^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij} \mathcal{A}^{\ell\ell}. \tag{75}$$

输运系数 ν_{K}， ν_{M}和 $\boldsymbol{\Gamma}$ 在（72）中表示为

$$\nu_{\mathrm{K}} = \frac{7}{5}\beta = \frac{7}{15}\left[I\{G_{bb}, Q_{uu}\} + I\{G_{uu}, Q_{bb}\} - I\{G_{bu}, Q_{ub}\} - I\{G_{ub}, Q_{bu}\}\right], \tag{76}$$

$$\nu_{\mathrm{M}} = \frac{7}{5}\gamma = \frac{7}{15}\left[I\{G_{bb}, Q_{ub}\} + I\{G_{uu}, Q_{bu}\} - I\{G_{bu}, Q_{uu}\} - I\{G_{ub}, Q_{bb}\}\right], \tag{77}$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{15}\left(I_{-1}\{G_{uu} + G_{bb}, \nabla H_{uu}\} - I_{-1}\{G_{ub}, \nabla H_{bu}\}\right). \tag{78}$$

这里， ν_{K} 是与平均速度应变耦合的涡黏性$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\mathcal{S}^{ij}\}$，如最右侧方程（76）的前两项所示，它主要由湍流磁流体能量决定。另一方面， ν_{M} 与平均磁场应变$\boldsymbol{\mathcal{M}} = \{\mathcal{M}^{ij}\}$耦合，如最右侧方程（77）的前两项所示，它主要由湍流交叉螺度 $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$ 决定。输运系数 $\boldsymbol{\Gamma}$ 与绝对涡度Ω_*耦合，并由湍流螺度 $\langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle$的梯度决定。

表达式$\boldsymbol{\mathcal{R}}$ (72) 表明，除了与平均速度应变（平均速度剪切的对称部分）相关的涡黏度或湍流黏度 ν_{K} 之外，雷诺应力和湍流麦克斯韦应力中还存在其他效应。其中一个是与平均磁场应变相关的交叉螺度效应 ν_{M}，另一个是与平均绝对涡量（平均速度剪切的反对称部分）相关的非均匀动能螺度效应 $\boldsymbol{\Gamma}$。

雷诺应力和湍流麦克斯韦应力的作用，以及表达式(72) 的结果，将在后文第 6 节和第 7 节中进一步讨论，特别是关于大尺度流动生成以及线动量和角动量输运。

2.6 对称和反对称响应函数效应

2.6.1 标准自相互作用响应函数效应

在我们的表述中，有四个格林函数，G_{uu}、G_{bb}、G_{ub}和G_{bu}，其定义见演化方程（44）。如果我们假设交互作用格林函数 G_{ub} 和 G_{bu} 趋于零，则

$$G_{ub} = G_{bu} = 0, \tag{79}$$

可压缩湍流的通常电动势得以恢复。作为电动势的最简单可能模型，除模型常数外，我们有

$$\alpha = -\tau_b \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle + \tau_u \langle \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle \equiv \alpha_{\mathrm{S}}, \tag{80}$$

$$\beta = \tau_b \langle \mathbf{u}'^2 \rangle / 2 + \tau_u \langle \mathbf{b}'^2 \rangle / 2 \equiv \beta_{\mathrm{S}}, \tag{81}$$

$$\zeta = \tau_b \langle \mathbf{u}'^2 \rangle / 2 - \tau_u \langle \mathbf{b}'^2 \rangle / 2 \equiv \zeta_{\mathrm{S}}, \tag{82}$$

$$\gamma = (\tau_b + \tau_u) \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle \equiv \gamma_{\mathrm{S}}, \tag{83}$$

其中，τ_u 和 τ_b 是与格林函数 G_{uu} 和G_{bb}相关联的时间尺度，并且它们的取值为

$$\tau_u f(\mathbf{k}, \tau) \sim \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \; G_{uu}(\mathbf{k};\, \tau, \tau') f(\mathbf{k};\, \tau'), \tag{84}$$

$$\tau_b f(\mathbf{k}, \tau) \sim \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \; G_{bb}(\mathbf{k};\, \tau, \tau') f(\mathbf{k};\, \tau'), \tag{85}$$

分别地。特别强调最简单的发电机模型时，我们用后缀 S 表示这些输运系数，即 α_{S}、β_{S}、ζ_{S}和 γ_{S}，如（80）—（83）的最右侧所示。

α效应 $\alpha\mathbf{B}$，即（63）中的第一项，取决于动能螺度密度 $\langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$ 和电流螺度密度 $\langle \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle$。动能螺度效应和电流螺度效应的物理起源将在下一节（第3节）中讨论。方程（80）表明，如果动能螺度 $\langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$ 和电流螺度 $\langle \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle$ 具有相同的符号，那么它们的效应会相互抑制。这就是为什么电流螺度效应常被认为是对**α**效应的修正，从而导致**α**效应受到抑制或达到饱和。然而，如果动能螺度和电流螺度分别由大尺度非均匀性引起的各自产生机制产生，情况就并非如此。这一点将在第3节中讨论。需要注意的是，与动能螺度贡献相关的时间尺度是磁时间尺度 τ_b，而与电流螺度相关的对应时间尺度则是动能时间尺度 τ_u。

湍流磁扩散率效应与平均电流密度耦合$\mathbf{J}(=\nabla\times\mathbf{B})$（式63中的第二项）源于湍流

动能和磁能。由于磁能 $\langle \mathbf{b}'^2 \rangle$ 在 β 和 ζ 中的贡献彼此完全抵消，磁扩散率 $\beta + \zeta$仅取决于湍动能 $\langle \mathbf{u}'^2 \rangle$。理论上已经指出，在各向异性湍流中（Rogachevskii& Kleeorin，2001年）以及存在可压缩性的情况下（Yokoi，2018a），湍流磁能 $\langle \mathbf{b}'^2 \rangle$ 会对湍流磁扩散率产生贡献。

磁泵效应 $-(\nabla\zeta) \times \mathbf{B}$，式（63）中的第三项，取决于磁流体力学剩余能量的梯度 $\langle \mathbf{u}'^2 - \mathbf{b}'^2 \rangle/2$。对于相同的平均磁场 $\mathbf{B}$，泵效应的方向会随 $\nabla\zeta$ 的方向而改变。

交叉螺度效应 $\gamma\Omega_*$，式（63）中的第四项，源于湍流交叉螺度 $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$。预计在平均绝对涡量 $\Omega_* (= \nabla \times \mathbf{U} + 2\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F})$ ($\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F}$：旋转角速度）所代表的全局涡旋运动或旋转存在时，这种效应会在发电机过程中发挥重要作用。

2.6.2 交叉相互作用响应函数的效应

若保留交叉相互作用格林函数 G_{ub}和 G_{bu} 对每个式子（64）—（64）中第三项和第四项的贡献，则会对发电机输运系数 α、β、ζ和 γ 产生额外贡献。为了清楚了解交叉相互作用格林函数，我们首先考察 Els¨asser 变量表述中的交叉相互作用对应项（Yoshizawa，1990年；Yokoi，2013）。

在具有 ¨asser 变量的表述中，使用 $\boldsymbol{\phi} = \mathrm{u} + \mathrm{b}$ 和 $\boldsymbol{\psi} = \mathrm{u} - \mathrm{b}$，我们引入四个格林函数 $G_{\phi\phi}$、$G_{\psi\psi}$、$G_{\phi\phi}$、$G_{\phi\psi}$ 和 $G_{\psi\phi}$。在此表述中，湍流电动势的输运系数表示为

$$\alpha = -I\{G_\mathrm{S}, H_{uu}\} + I\{G_\mathrm{S}, H_{bb}\} - I\{G_\mathrm{A}, H_{ub}\} + I\{G_\mathrm{A}, H_{bu}\}, \tag{86}$$

$$\beta = I\{G_\mathrm{S}, Q_{uu}\} + I\{G_\mathrm{S}, Q_{bb}\} - I\{G_\mathrm{A}, Q_{ub}\} - I\{G_\mathrm{A}, Q_{bu}\}, \tag{87}$$

$$\zeta = I\{G_\mathrm{S}, Q_{uu}\} - I\{G_\mathrm{S}, Q_{bb}\} + I\{G_\mathrm{A}, Q_{ub}\} - I\{G_\mathrm{A}, Q_{bu}\}, \tag{88}$$

$$\gamma = I\{G_\mathrm{S}, Q_{ub}\} + I\{G_\mathrm{S}, Q_{bu}\} - I\{G_\mathrm{A}, Q_{uu}\} - I\{G_\mathrm{A}, Q_{bb}\}, \tag{89}$$

其中，G_S 和 G_A 分别表示 $G_{\phi\phi}$ 和 $G_{\psi\psi}$的镜面对称部分和反镜面对称部分，定义为

$$G_\mathrm{S} = \frac{G_{\phi\phi} + G_{\psi\psi}}{2}, \tag{90}$$

$$G_\mathrm{A} = \frac{G_{\phi\phi} - G_{\psi\psi}}{2}, \tag{91}$$

分别为。

比较（86）—（89）与（64）—（67）可见，自相互作用部分G_{uu} 和 G_{bb} 对应于对称部分，G_S，而交叉相互作用部分 G_{ub} 和 G_{bu}则构成反对称部分，G_A。由（91）可见，反对称部分 G_A 与以下两者之差有关：

与沿磁场反平行和正平行方向传播的阿尔芬波相关的时间尺度。反向传播和正向传播的阿尔芬波之间的不平衡导致非零的湍流交叉螺度。这些观点表明，非零的 G_{ub} 和 G_{bu} 与湍流交叉螺度有关联。

根据上述考虑，发电机系数 $d=(\alpha,\beta,\zeta,\gamma)$由 $d_{\rm S}$ 和 $d_{\rm X}$ 构成，如下所示

$$d = d_{\rm S} + d_{\rm X}, \tag{92}$$

其中 $d_{\rm S}$ 是标准的 d 系数，定义见式（80）-（83）。发电机系数中的交叉相互作用部分，$\alpha_{\rm X}$，$\beta_{\rm X}$，$\zeta_{\rm X}$和$\gamma_{\rm X}$，由式（64）-（67）中的第三项和第四项表示为

$$\alpha_{\rm X} = \frac{1}{3}\left[-I\{G_{bu},H_{ub}\}+I\{G_{ub},H_{bu}\}\right], \tag{93}$$

$$\beta_{\rm X} = \frac{1}{3}\left[-I\{G_{bu},Q_{ub}\}-I\{G_{ub},Q_{bu}\}\right], \tag{94}$$

$$\zeta_{\rm X} = \frac{1}{3}\left[+I\{G_{bu},Q_{ub}\}-I\{G_{ub},Q_{bu}\}\right], \tag{95}$$

$$\gamma_{\rm X} = \frac{1}{3}\left[-I\{G_{bu},Q_{uu}\}+I\{G_{ub},Q_{bb}\}\right]. \tag{96}$$

这些交叉相互作用发电机系数可以建模为

$$\alpha_{\rm X} = -\tau_{{\rm X}bu}\Upsilon\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{j}'\rangle + \tau_{{\rm X}ub}\Upsilon\langle\boldsymbol{\omega}'\cdot\mathbf{b}'\rangle, \tag{97}$$

$$\beta_{\rm X} = -\tau_{{\rm X}bu}\Upsilon\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle - \tau_{{\rm X}ub}\Upsilon\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle, \tag{98}$$

$$\zeta_{\rm X} = +\tau_{{\rm X}bu}\Upsilon\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle - \tau_{{\rm X}ub}\Upsilon\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle, \tag{99}$$

$$\gamma_{\rm X} = -\tau_{{\rm X}bu}\Upsilon\langle\mathbf{u}'^2\rangle + \tau_{{\rm X}ub}\Upsilon\langle\mathbf{b}'^2\rangle, \tag{100}$$

其中，$\tau_{{\rm X}bu}$ 和 $\tau_{{\rm X}ub}$ 分别是与格林函数 G_{bu}和 G_{ub}相关的时间尺度。

例如，输运系数 $\alpha_{\rm X}$ 以及 $\alpha_{\rm S}$ 都是赝标量。由于 $\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{j}'\rangle$ 和 $\langle\boldsymbol{\omega}'\cdot\mathbf{b}'\rangle$ 都是真标量，因此我们需要在Υ （97）中引入一个赝标量因子。这直接源于格林函数G_{bu} 和 G_{ub} 是赝标量函数，正如其定义（44）所示。作为最简单的候选量，我们采用一个定义如下的无量纲赝标量：

$$\Upsilon = \frac{\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle}{\langle\mathbf{u}'^2+\mathbf{b}'^2\rangle/2}, \tag{101}$$

或者我们也可以采用

$$\Upsilon = \frac{\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle}{\sqrt{\langle\mathbf{u}'^2\rangle\langle\mathbf{b}'^2\rangle}}. \tag{102}$$

24 未受重视的交叉螺度效应

该 α_{X} 表达式（93）及其模型（97）表明，这种交叉相互作用响应效应要发挥作用，需要满足一些条件。首先必须指出，扭转交叉相关 $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{j}' \rangle$ 与 $\langle \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$ 彼此相关，关系如下：

$$-\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{j}' \rangle + \langle \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{b}' \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle. \tag{103}$$

在均匀湍流中，式（103）右端为零，因此我们有

$$\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{j}' \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{b}' \rangle. \tag{104}$$

在这种情况下，对于 $\tau_{bu} = \tau_{ub}$，我们对 α_{X} 没有贡献。这表明交叉相互作用响应函数发挥作用的条件：
(i) 即使不存在时间尺度差异（$\tau_{bu} = \tau_{ub}$），该量的通量也非零
穿过边界的湍流电动势 $\nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$ 可能会产生有限的 α_{X}；
(ii) 即使在均匀湍流中，$\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{j}' \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$，如果存在
τ_{bu} 与 τ_{ub}之间的时间尺度差异，我们就会得到非零的 α_{X}；
(iii) 与时间尺度 τ_{bu} 和 τ_{ub} 耦合的赝标量因子 Υ 应代表 G_{bu} 和 G_{ub}。扭转交叉相关可视为交叉螺度与螺度的组合，如下所示

$$\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{j}' \rangle \propto \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle \langle \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle, \tag{105}$$

$$\langle \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{b}' \rangle \propto \langle \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{u}' \rangle \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle, \tag{106}$$

这表明，交叉螺度与电流螺度共存，以及交叉螺度与动能螺度共存，可能是交互作用响应效应的有利条件 α_{X}。从这个意义上说，湍流交叉螺度可能在这种交互作用效应中发挥关键作用。作为一种重要的可能性，α 效应，α_{X}中的交互作用响应效应，在非平衡或非定常湍流中进行了研究，参见Mizerski、Yokoi 和 Brandenburg(2023)。

我们应当指出，这种交叉相互作用效应源于采用响应函数的表述。除速度涨落、磁场涨落及其相关函数外，响应的方程也得到了处理。由于这种表述，速度涨落对磁扰动的响应以及磁场涨落对速度扰动的响应进入了湍流通量的表达式。这种表述的结构值得进一步探索。

这些交叉相互作用效应在某些条件下可能尤为显著，例如湍流处于非平衡、非定常状态，且某些对称性遭到破坏时。不过，这些条件相当特殊，因此以下各节仅讨论标准的自相互作用响应函数效应。这并不否认交叉相互作用效应可能具有的重要性。

3 发电机中的交叉螺度效应

在上一节中，借助非均匀湍流的解析公式——多尺度重整化微扰展开理论，推导出了平均感应方程中的湍流电动势（EMF）$\langle \mathrm{u}' \times \mathrm{b}' \rangle$，以及平均动量方程中的雷诺应力和湍流麦克斯韦应力 $\langle \mathrm{u}'\mathrm{u}' - \mathrm{b}'\mathrm{b}' \rangle$ 的表达式。湍流交叉螺度效应进入与非均匀平均速度耦合的 $\langle \mathrm{u}' \times \mathrm{b}' \rangle$ 表达式，也进入与非均匀平均磁场耦合的 $\langle \mathrm{u}'\mathrm{u}' - \mathrm{b}'\mathrm{b}' \rangle$ 表达式。本节讨论交叉螺度效应对平均磁场感应的影响。接下来将在第4节讨论交叉螺度演化，并在第5节讨论交叉螺度效应在恒星发电机中的作用。第6节将讨论交叉螺度效应对动量方程的影响。

3.1 发电机中的交叉螺度与全局流动效应

平均磁感应方程写作

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \nabla \times \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \tag{107}$$

或者等价地

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{U} - (\nabla \cdot \mathbf{U})\mathbf{B} + \nabla \times \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \tag{108}$$

右端第一项（r.h.s.）（108）表示差分旋转效应。若平均速度$\mathbf{U}$ 沿平均磁场 $\mathbf{B}$（$\mathbf{B} \cdot \nabla$）$\mathbf{U}$方向呈非均匀分布，则它会促使平均磁场分量沿平均速度方向生成（图1）。这种差分旋转效应在发电机过程中发挥重要作用，称为 Ω（Omega）效应。人们认为，非均匀平均速度效应可使平均磁场的纬向或极向分量转化为方位向或环向分量（反之亦然）。

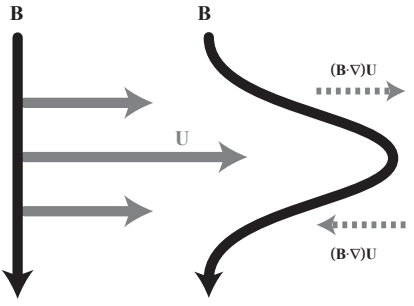


图1 差分旋转效应（Ω效应）。

公式（107）右端第二项以及公式（108）右端第三项包含湍流电动势（EMF）的贡献，其定义为

$$\mathbf{E}_{\mathrm{M}} \equiv \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle. \tag{109}$$

这是$\mathbf{E}_{\mathrm{M}}$平均磁感应方程中唯一的（直接）湍流效应 [（107）和（108）]，，也是湍流发电机研究中至关重要的量。

不同于对 Ω效应的处理，在考虑湍流时，非均匀或非均匀平均速度效应一直被忽略。正如我们在（13）和（14）中所看到的，脉动速度和磁场的方程表示为

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{u}' = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{b}' + (\mathbf{b}'\cdot\nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{u}'\cdot\nabla)\mathbf{U} + \cdots, \tag{110}$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{b}' = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u}' - (\mathbf{u}'\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{b}'\cdot\nabla)\mathbf{U} + \cdots, \tag{111}$$

电动势由脉动速度和磁场的方程 [（110）和（111）]求得。我们分别以向量积的形式将（110）和（111）乘以$\mathbf{b}'$和$\mathbf{u}'$，然后将它们相加。取系综平均后，可得到电动势的演化方程：

$$\begin{aligned}\frac{DE^i_{\mathrm{M}}}{Dt} = &\left\langle \frac{1}{\overline{\rho}} b'^k \epsilon^{ijk} \frac{\partial b'^j}{\partial x^\ell} - u'^k \epsilon^{ijk} \frac{\partial u'^j}{\partial x^\ell} \right\rangle B^\ell - \left\langle u'^\ell u'^k + \frac{b'^\ell b'^k}{\mu_0 \overline{\rho}} \right\rangle \mu_0 \epsilon^{ijk} \frac{\partial B^j}{\partial x^\ell} \\ &+ \left\langle u'^\ell b'^k + b'^\ell u'^k \right\rangle \epsilon^{ijk} \frac{\partial U^j}{\partial x^\ell} + \mathrm{H.T.},\end{aligned} \tag{112}$$

含有非均匀平均速度的方程（112）或去掉 $\nabla\mathbf{U}$项对应于如下假设：电动势表示为平均磁场及其导数的形式，例如

$$\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle^i = \alpha^{i\ell} B^\ell + \beta^{ij\ell} \frac{\partial B^j}{\partial x^\ell} + \cdots, \tag{113}$$

其中 $\alpha^{i\ell}$ 和 $\beta^{ij\ell}$ 是输运系数。换句话说，采用通常的假设相当于假定电动势中不存在平均速度非均匀性效应。如（110）和（111）所示，速度和磁场涨落取决于速度的大尺度非均匀性。若考虑平均速度非均匀性效应，电动势表达式中应出现三阶或 $\nabla\mathbf{U}$项。

在第2节中，我们以详尽的形式推导出了湍流电动势（63）。然而，为了直观地了解发电机效应的物理起源，这里我们采用更为简化的论证，并假设湍流具有最简单的统计特性。若假设湍流场是均匀且各向同性的，则两点、两时刻的湍流

vel速度和磁场相关性可表示为如下通用形式

$$\begin{aligned}&\langle\phi'^{i}(\mathbf{x};\,t)\psi'^{j}(\mathbf{x}';\,t')\rangle=\langle\phi'^{i}(\mathbf{0};\,t)\psi'^{j}(\mathbf{r};\,t')\rangle\\&=g(r;\,t,t')\delta^{ij}+\frac{f(r;\,t,t')-g(r;\,t,t')}{r^2}r^ir^j+h(r;\,t,t')\epsilon^{ij\ell}\frac{r^\ell}{r},\end{aligned}\tag{114}$$

其中，$r=\|\mathbf{r}\|$（$\mathbf{r}=\mathbf{x}'-\mathbf{x}$）是两点间的距离，$\boldsymbol{\phi}'$和$\boldsymbol{\psi}'$分别表示速度和磁场中的任一项，即$\mathbf{u}'$和$\mathbf{b}'$。这里，$g$、$f$和$h$分别是纵向、横向和交叉相关函数。

如果将（114）中的$\boldsymbol{\phi}'$和$\boldsymbol{\psi}'$分别替换为$\mathbf{u}'$和$\mathbf{b}'$，代入（112），可得

$$\begin{aligned}&\frac{DE^i_{\mathrm{M}}}{Dt}=\frac{1}{3}\left\langle\frac{1}{\overline{\rho}}b'^k\epsilon^{k\ell j}\frac{\partial b'^j}{\partial x^\ell}-u'^k\epsilon^{k\ell j}\frac{\partial u'^j}{\partial x^\ell}\right\rangle B^i\\&-\frac{1}{3}\left\langle u'^ku'^k+\frac{b'^kb'^k}{\mu_0\overline{\rho}}\right\rangle\mu_0\epsilon^{i\ell j}\frac{\partial B^j}{\partial x^\ell}+\frac{2}{3}\left\langle u'^kb'^k\right\rangle\epsilon^{i\ell j}\frac{\partial U^j}{\partial x^\ell}+\mathrm{H.T.},\end{aligned}\tag{115}$$

这表明电动势可表示为

$$\mathbf{E}_{\mathrm{M}}=\alpha\mathbf{B}-\beta\mu_0\mathbf{J}+\gamma\boldsymbol{\Omega}.\tag{116}$$

输运系数α、β和γ可表示为

$$\alpha=\tau_\alpha H,\tag{117}$$

$$\beta=\tau_\beta K,\tag{118}$$

$$\gamma=\tau_\gamma W.\tag{119}$$

此处，H、K和W分别是湍流剩余螺度、湍流磁流体能量和湍流交叉螺度，其定义如下

$$H=\left\langle-\mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'+\mathbf{b}'\cdot\mathbf{j}'/\overline{\rho}\right\rangle,\tag{120}$$

$$K=\left\langle\mathbf{u}'^2+\mathbf{b}'^2/(\mu_0\overline{\rho})\right\rangle/2,\tag{121}$$

$$W=\left\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\right\rangle,\tag{122}$$

以及τ_α、τ_β和τ_γ分别是与湍流剩余螺度、湍流磁流体能量和湍流交叉螺度相关的时间尺度。方程（116）表明，在存在非均匀平均速度时，除了通常的螺度或W相关项和能量或H相关项外，还应在电动势的表达式中加入交叉螺度或K相关项。

请注意，与上述简单论证相比，采用更精细的发电机理论可以得到更全面、详细的电动势表达式，例如借助112，并采用均匀各向同性假设（114）。然而，这里的关键在于：在脉动速度和磁场中保留非均匀平均速度效应后，与平均涡旋运动耦合的湍流交叉螺度便会出现在电动势表达式中。

3.2 发电机中湍流效应的物理起源 s

如果湍流具有某些统计性质，与湍流相关的有效通量便会通过湍流电动势，在与平均场构型耦合的过程中，为发电机相关输运作出贡献。接下来，我们将逐项考察速度和磁场涨落演化方程中的各项，以探究这些湍流效应的本质物理过程。当然，使用这种论证时应当谨慎，因为它只考虑了某一个特定项。其他项可能会完全或大幅抵消该效应。不过，这种论证确实有助于我们把握该效应的物理起源。

3.2.1 α 效应：动能螺度和电流螺度效应

让我们考虑一个在平均磁场中发生涨落的流体微团 $\mathbf{B}$（图 2）。在此，我们假设湍流中具有正的动能螺度，$\langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle > 0$。也就是说，脉动速度和磁场涨落在统计意义上彼此对齐。在平均磁场 $\mathbf{B}$存在的情况下，与脉动涡量相关的速度涨落沿着 $\mathbf{B}$变化。由于 $\mathbf{u}'$ 沿平均磁场 $\mathbf{B}$变化，根据（111）右端的第一项，磁场涨落 $\delta\mathbf{b}'$ 被诱导为

$$\delta \mathbf{b}' = \tau_b (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}', \tag{123}$$

其中，τ_b 是 $\mathbf{b}'$ 演化的时间尺度。由此效应产生的电动势（EMF）表示为

$$\langle \mathbf{u}' \times \delta \mathbf{b}' \rangle = \tau_b \langle \mathbf{u}' \times (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}' \rangle, \tag{124}$$

其方向与正湍流动能螺度 $\langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle > 0$对应的平均磁场 B 方向相反。负湍流动能螺度 $\langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle < 0$对应的电动势方向则与 B 平行。

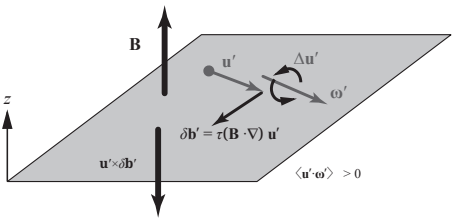


图 **2** α： 湍流动能螺度产生的效应。

另一方面，如果我们假设湍流中具有正的电流螺度，$\langle \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle > 0$，则涨落磁场$\mathbf{b}'$ 在统计上与电流密度$\mathbf{j}'$ （图3）对齐。与

如上所述的湍流动能螺度效应类似，与脉动电流密度 j′相关联时，涨落磁场沿平均磁场 B 变化。由第一项或 (B · ∇)b′可诱导出脉动速度 δu′，如下所示：

$$\delta \mathbf{u}' = \tau_u (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}', \tag{125}$$

其中， τ_u 是由该平均磁场效应引起的 u′ 演化的时间尺度。在这种情况下，我们也可以考虑与平均磁场 B 相关的涨落洛伦兹力 j′×B 的作用。诱导产生的脉动速度 δu′ 为

$$\delta \mathbf{u}' = \tau_u \mathbf{j}' \times \mathbf{B}. \tag{126}$$

这等价于（125）。这一诱导的速度涨落 δb′ 与涨落磁场 b′ 共同构成电动势：

$$\langle \delta \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle^i = \tau_u \langle (\mathbf{j}' \times \mathbf{B}) \times \mathbf{b}' \rangle^i = \tau_u \langle \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle B^i. \tag{127}$$

这里，我们略去了沿平均磁场 B 的涨落所产生的贡献，即 $-\langle$(b′ ·B)j′$\rangle = -\langle b'_{\|B} \mathbf{j}' \rangle \|\mathbf{B}\|$，其中 $b'_{\|B} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{B}/\|\mathbf{B}\|$ 是 b′ 沿 B 方向的分量。湍流电流螺度 $\langle \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle > 0$为正时，电动势的方向与平均磁场 B 平行；湍流电流螺度 $\langle \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle < 0$为负时，则与 B 反平行。Pouquet、Frisch 和 L´eorat（1976年）基于借助涡耗散准正态马尔可夫化（EDQNM）近似对磁流体力学湍流进行的闭合计算，首次指出了这种对 α 发电机的电流螺度效应。在推导中，动能螺度效应的时间尺度 τ_b (124) 与电流螺度效应的时间尺度 τ_u (127) 并未加以区分。

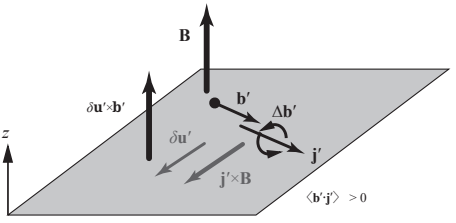


图 **3** α 湍流电流螺度产生的效应。

这些物理图像表明，如果湍流动能螺度与电流螺度的符号相同，这两种螺度效应就会相互抵消。从这个意义上说，常有人认为， α 发电机中的电流螺度所产生的磁修正，代表了磁场效应导致的 α 发电机饱和。然而，电流螺度的符号也可能与动能螺度相反。在这种情况下，电流螺度效应可能会增强动能螺度效应所产生的磁场。在现实世界中普遍存在的非均匀湍流情况下，

电流螺度的时空演化 ⟨b′ ·j′⟩取决于与平均场非均匀性直接相关的电流螺度产生率。实际上，有报道称，在太阳对流区的数值模拟中，某些深层区域的湍流电流螺度幅值显著大于湍流动能螺度的对应幅值。这表明，即使该深度处不存在湍流动能螺度，电流螺度效应仍可产生平均磁场。对此类论述，应以动能螺度和电流螺度的演化方程为依据。

3.2.2 湍流磁扩散率：湍流能量效应

考虑一个位于平均电流密度 **J**中的流体微团（图 3.4）。在这种情况下，该流体微团在与平均电流密度 **J**相关联的非均匀平均磁场中发生涨落。由于式 −（$\mathbf{u}' \cdot \nabla$）$\mathbf{B}$ 右侧的第二项，即式 111中的项，磁场涨落 $\delta\mathbf{b}'$ 会沿非均匀 $\mathbf{B}$ 的方向感生，但其方向会抵消 $\mathbf{B}$ 的增加，即

$$\delta\mathbf{b}' = -\tau_b(\mathbf{u}' \cdot \nabla)\mathbf{B}. \tag{128}$$

由非均匀平均磁场产生的电动势表示为

$$\langle \mathbf{u}' \times \delta\mathbf{b}' \rangle^i = -\tau_b \langle \mathbf{u}' \times [(\mathbf{u}' \cdot \nabla)\mathbf{B}] \rangle^i = -\tau_b \langle u'^j u'^\ell \rangle \epsilon^{ijk} \frac{\partial B^k}{\partial x^\ell}. \tag{129}$$

如果假设速度涨落是各向同性的，即 $\langle u'^j u'^\ell \rangle = \langle \mathbf{u}'^2 \rangle \delta^{j\ell}/3$，则式 129可化简为

$$\langle \mathbf{u}' \times \delta\mathbf{b}' \rangle^i = -\frac{1}{3}\tau_b \langle \mathbf{u}'^2 \rangle \epsilon^{i\ell k} \frac{\partial B^k}{\partial x^\ell} = -\frac{1}{3}\tau_b \langle \mathbf{u}'^2 \rangle (\nabla \times \mathbf{B})^i. \tag{130}$$

存在速度涨落时，由非均匀平均磁场 ∇B 产生的湍流电动势（EMF）方向与平均电流密度 J(= ∇ ×B) 反平行。输运系数与涨落强度或湍动能 ⟨u′²⟩ 成正比。

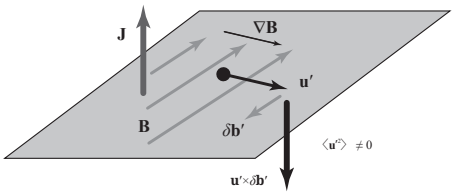


图4 由于速度涨落产生的湍流磁扩散率。

以类似的方式，我们讨论磁涨落对湍流磁扩散率的影响。首先，我们考虑在非均匀平均磁场 $\mathbf{b}'$ 中的磁场涨落湍流 $\mathbf{B}$ （图 5）。在平均电流密度 $\mathbf{J}$ （$= \nabla \times \mathbf{B}$）存在时，流体微团受到与平均电流密度相关的涨落洛伦兹力 $\mathbf{J} \times \mathbf{b}'$的作用。随后，由于 $\delta\mathbf{u}'$ 受到 $\mathbf{J}$ 的作用而诱导出的涨落速度为

$$\delta\mathbf{u}' = \tau_u \mathbf{J} \times \mathbf{b}'. \tag{131}$$

在存在 J 的情况下，由磁场涨落引起的电动势表示为

$$\langle \delta\mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle = \langle \tau_u (\mathbf{J} \times \mathbf{b}') \times \mathbf{b}' \rangle = -\tau_u \langle \mathbf{b}'^2 \rangle \mathbf{J}. \tag{132}$$

这里，我们忽略了平行于平均电流密度的涨落磁场分量所作的贡献，$\tau_u(\mathbf{b}' \cdot \mathbf{J})\mathbf{b}' = \tau_u \langle b'_{\|J} \mathbf{b}' \rangle \|\mathbf{J}\|$，其中 $b'_{\|J} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{J}/\|\mathbf{J}\|$ 是沿平均电流密度方向的涨落磁场分量 $\mathbf{J}$。式（132）表明，磁场涨落 $\mathbf{b}'$ 以及速度涨落 $\mathbf{u}'$ 都会对与平均电流密度 $\mathbf{J}$耦合的湍流磁扩散率作出贡献。

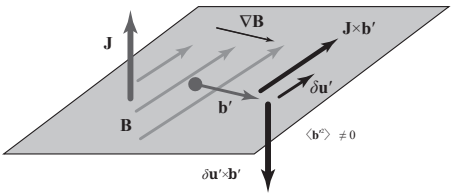


图 5 磁涨落引起的湍流磁扩散率。

然而，关于这种磁涨落效应，我们应注意以下一点。如上所见，在存在平均电流密度 J 的情况下，涨落洛伦兹力 J ×b′ 中的部分会诱导出脉动速度δ u′，由于涨落磁场，这对湍流磁扩散率起着关键作用。然而，这种效应至少可被涨落洛伦兹力的另一部分 j′ ×B 部分抵消。如果磁涨落具有如图6所示的空间分布，与 b′相关的涨落电流密度 Δj 也呈现空间分布。相关电流密度 Δj′ 在相对于 b′而言 J × b′平行的一侧（平行侧），其方向会增强原始平均电流密度 J；而在相对于 b′而言 J ×b′ 反平行的一侧（反平行侧）， Δj′ 的方向会减弱 J。由于这种 Δj′ 效应，平行侧的磁压力高于反平行侧。换言之，由涨落洛伦兹力 Δj′ ×B 诱导的速度涨落 δu 会使平行侧的等离子体密度增加，而由涨落洛伦兹力 δu′ = τ_uΔj′ ×B 引起的流动则会使反平行侧的等离子体密度降低。这种由磁涨落 b′ 和非均匀平均磁场共同作用产生的磁压力效应

$\mathbf{B}$，抵消了洛伦兹力 $\mathbf{J}\times\mathbf{b}'$ 的效应。从这个意义上说，磁场涨落 $\mathbf{b}'$ 对湍流磁扩散率的影响，并不像速度涨落 $\mathbf{u}'$ 的对应效应那样明显。实际上，详细的解析计算表明，在无散湍流中，湍流磁扩散率并不依赖于磁涨落能量 $\langle\mathbf{b}'^2\rangle$。在可压缩湍流（Yokoi，2018a）和各向异性情形（Rogachevskii & Kleeorin，2001年）中，磁场涨落能量与湍流磁扩散率有关。

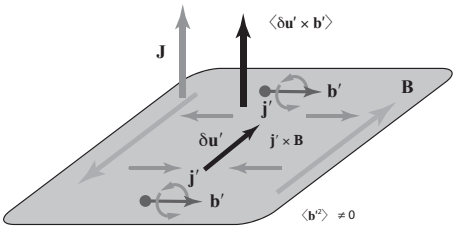


图 6 磁压力效应导致湍流磁能效应的抵消。

3.2.3 湍流交叉螺度效应

我们考虑一个处于平均涡量场 $\Omega(=\nabla\times\mathbf{U})$ 中涨落的流体微团（图 7）。我们假设湍流具有正交叉螺度 $\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle>0$，即脉动速度和磁场在统计上彼此对齐。由于局部角动量守恒，流体会受到类科里奥利力的作用。因此，平均涡旋运动 Ω 会诱导出速度涨落，其表达式为

$$\delta\mathbf{u}'=\tau_u\mathbf{u}'\times\mathbf{\Omega}. \tag{133}$$

由此诱导的 $\delta\mathbf{u}'$ 与平行于磁场 $\mathbf{b}'$ 的脉动磁场分量构成的电动势表示为

$$\langle\delta\mathbf{u}'\times\mathbf{b}'\rangle=\langle\tau_u(\mathbf{u}'\times\mathbf{\Omega})\times\mathbf{b}'\rangle=\tau_u\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle\mathbf{\Omega}. \tag{134}$$

这里，我们省略了沿平均涡量方向的磁涨落贡献 $-\tau_u\langle\mathbf{u}'(\mathbf{b}'\cdot\Omega)\rangle=-\tau_u\langle b_{\|\Omega}\rangle\|\Omega\|$，其中 $b'_{\|\Omega}$ 是平行于 Ω 的 $\mathbf{b}'$ 分量，定义为 $\mathbf{b}'\cdot\Omega/\|\Omega\|$，因为预期 $b'_{\|\Omega}\mathbf{u}'$ 的统计平均为零。方程（134）表明，交叉螺度产生的电动势与平均涡量 Ω 同向。电动势的方向由湍流交叉螺度的符号决定。湍流交叉螺度 $\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle>0$为正时，电动势与平均涡量 Ω 平行；湍流交叉螺度 $\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle<0$为负时，电动势与 Ω 反平行。

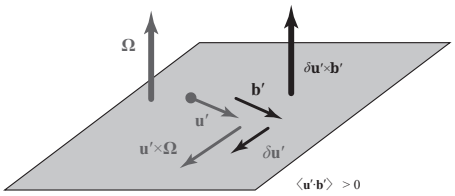


图 7 速度涨落引起的湍流交叉螺度效应。

接下来，我们考虑一个流体微团在非均匀平均速度 $\mathbf{b}'$中的运动 $\nabla\mathbf{U}$（图 8）。同样在这种情况下，我们假设湍流中的交叉螺度为正（$\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle$）；湍流速度 $\mathbf{u}'$与湍流磁场 $\mathbf{b}'$ 在统计意义上彼此对齐且平行。由方程（ τ_b110）右侧的第三项，即 $'\cdot\nabla(\mathbf{b})\mathbf{U}$ 可知，磁涨落 $\mathbf{b}$的产生方式如下:

$$\delta\mathbf{b}' = \tau_b(\mathbf{b}'\cdot\nabla)\mathbf{U}. \tag{135}$$

这种诱导的磁涨落 $\delta\mathbf{b}'$ 的方向平行于 $\mathbf{U}$ ，如果非均匀的 $\mathbf{U}$ 随涨落磁场 $\mathbf{b}'$ 增大。按照向量积的方式将脉动速度 $\mathbf{u}'$ 乘以式（135），并进行系综平均，得到

$$\langle\mathbf{u}'\times\delta\mathbf{b}'\rangle^i = \langle\mathbf{u}'\times\tau_b(\mathbf{b}'\cdot\nabla)\mathbf{U}\rangle^i = \left\langle\epsilon^{ijk}u'^j\tau_b b'^\ell\frac{\partial U^k}{\partial x^\ell}\right\rangle = \tau_b\langle u'^j b'^\ell\rangle\epsilon^{ijk}\frac{\partial U^k}{\partial x^\ell}. \tag{136}$$

若假设速度与磁场相关性为各向同性，则$\langle u'^j b'^\ell\rangle = \langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle\delta^{j\ell}/3$，(136) 可简化为

$$\langle\mathbf{u}'\times\delta\mathbf{b}'\rangle^i = \tau_b\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle\epsilon^{ijk}\frac{\partial U^k}{\partial x^j} = \tau_b\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle(\nabla\times\mathbf{U})^i = \tau_b\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle\Omega^i. \tag{137}$$

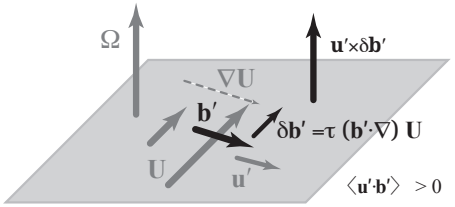


图 8 磁涨落引起的湍流交叉螺度效应。

由于平均涡量 $\Omega = \nabla\times\mathbf{U}$ 在局部等同于旋转 $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F} = \Omega/2$ 的角速度，因此完全可以应用同样的论证

于旋转系统中的流体微团。因此，我们可以用平均绝对涡量 $\Omega_* \equiv \Omega + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$ 替换平均涡量 Ω。

方程（132）和（137）表明，在存在平均绝对涡量 Ω_*时，湍流电动势（EMF）可表示为

$$\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle_\gamma = \gamma \boldsymbol{\Omega}_*, \tag{138}$$

其中，γ 是由湍流交叉螺度和与交叉螺度相关的湍流时间尺度 τ_γ 决定的输运系数，其表达式为

$$\gamma = \tau_\gamma \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle, \tag{139}$$

而 Ω_* 是定义为以下形式的平均绝对涡量

$$\boldsymbol{\Omega}_* \equiv \boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}} \tag{140}$$

其中，平均相对涡量为 $\Omega = \nabla \times \mathrm{U}$，系统旋转的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$。

3.3 交叉螺度效应的数值验证

3.3.1 施加均匀磁场的柯尔莫哥洛夫流

为验证发电机问题中的交叉螺度效应，我们对施加均匀磁场的三维周期盒中的受迫磁流体力学（MHD）湍流进行了直接数值模拟（DNS）（图 9）（Yokoi & Balarac，2011）。盒子的尺寸为（L_x，L_y，L_z）。施加的强迫沿 x 方向：

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ext}} = (f^x, f^y, f^z) = (f^x, 0, 0) \tag{141}$$

并且沿 y 方向呈非均匀分布：

$$f^x(y) = f_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right). \tag{142}$$

在此设置中，湍流由正弦强迫（141）所产生的速度剪切生成并维持，其中（142）。由于强迫作用，湍流的统计特性在 y 方向上是非均匀的，但在 x和 z 方向上是均匀的。各物理量的统计特性通过在均匀的（x-z）方向上取平均来表示。这种配置称为柯尔莫哥洛夫湍流。为了考察与发电机及其输运相关的湍流特性，我们进一步在非均匀方向，即 y 方向上施加均匀平均磁场，其形式为

$$\mathbf{B}_0 = (B_0^x, B_0^y, B_0^z) = (0, B_0, 0). \tag{143}$$

流向速度的等值线如图9所示。反映正弦强迫（141）的形式，流向速度分量在区域上半部（$y > 0$）和区域下半部（$y < 0$）分别为正值和负值。

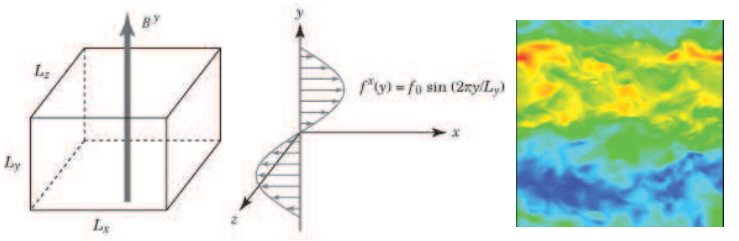


图 9 带有外加均匀磁场的柯尔莫哥洛夫流。沿非均匀方向（y 方向）施加均匀磁场的三重周期构型（左）。用于非均匀速度剪切的正弦强迫（中）。流向速度的等值线（右）。

利用这一设置，我们计算与平均场发电机相关的湍流关联和平均场量。湍流电动势（EMF）的表达式已在第2节中通过理论推导得到，并建模为

$$\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle = \alpha \mathbf{B} - \beta \mathbf{J} + \gamma \mathbf{\Omega}, \tag{144}$$

其中，输运系数 α、β 和 γ 用湍流剩余螺度、湍流能量和湍流交叉螺度表示。

如（144）所示，相关的平均场包括平均磁场 $\mathbf{B}$、平均电流密度 $\mathbf{J}(= \nabla \times \mathbf{B})$、平均相对涡量$\mathbf{\Omega}(= \nabla \times \mathbf{U})$。另一方面，相关的湍流关联包括湍流磁流体能量 K、其耗散率 $\varepsilon_K(\equiv \varepsilon)$、湍流剩余螺度 H以及湍流交叉螺度 W。它们定义如下：

$$K = \langle \mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2 \rangle / 2, \tag{145}$$

$$\varepsilon_K = \nu \left\langle \left(\frac{\partial u'^j}{\partial x^i} \right)^2 \right\rangle + \eta \left\langle \left(\frac{\partial b'^j}{\partial x^i} \right)^2 \right\rangle \equiv \varepsilon, \tag{146}$$

$$H = \langle -\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle, \tag{147}$$

$$W = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle. \tag{148}$$

用这些湍流统计量表示，主要的发电机输运系数为

$$\alpha = \tau H, \tag{149}$$

$$\beta = \tau K, \tag{150}$$

$$\gamma = \tau W, \tag{151}$$

其中， τ 是按以下方式计算的湍流时间尺度

$$\tau = K/\varepsilon. \tag{152}$$

利用直接数值模拟结果，我们绘制了图 10 中电动势 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$ 的 x 分量以及式（144）右端各项 αB、 βJ 和 $\gamma\Omega$ 的空间（y）分布，其中各项采用式（149）—（152）计算。电动势 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle^x$ 的直接数值模拟结果显示，其沿 y 方向呈正弦分布； $y < 0$ 处为负值， $y > 0$ 处为正值。在模型各项中，与其他项 $-\beta$J 和 $\gamma\Omega$ 相比，$(\alpha \mathbf{B})^x$ 在整个区域内的贡献几乎可以忽略。另一方面，湍流扩散率 βJ 项在构成电动势方面起主导作用。 $-\beta$J 的空间（y）分布大致呈正弦形； $y < 0$ 处为负值， $y > 0$ 处为正值。湍流磁扩散率 $-\beta$J 的主要平衡项是交叉螺度效应 $\gamma\Omega$。其空间分布基本上在 $y < 0$ 处为正，在 $y > 0$ 处为负。值得注意的是，湍流磁扩散率与交叉螺度效应之和 $-\beta$J $+\gamma\Omega$ 的空间分布，大致与电动势 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$ 的对应分布一致。这一直接数值模拟结果表明，在这种配置下，湍流电动势由湍流磁扩散率 βJ 和交叉螺度效应 $\gamma\Omega$ 构成，而湍流螺度或 α 效应在湍流输运中不起实质性作用。电动势的剖面符号与 $\gamma\Omega$ 相反，与 βJ 的对应剖面相似。这表明，在本次模拟中，湍流电动势整体上会增强有效扩散率，而非驱动发电机。不过，值得注意的是，湍流磁扩散率 βJ 所导致的输运增强或磁场破坏，确实受到交叉螺度引起的发电机效应或磁场生成／维持效应的抑制。

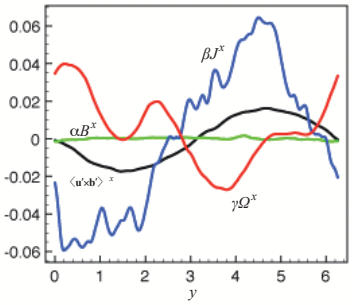


图 10 在施加均匀磁场的柯尔莫哥洛夫流中，湍流电动势（EMF）与模型项 αB、 βJ 和 $\gamma\Omega$ 的比较。比较了 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle^x$ （黑色）相对于非均匀方向（y 方向）的空间分布，以及 αB^x （绿色）、βJ^x （蓝色）和 $\gamma\Omega^x$ （红色）。

这项数值验证有助于诠释发电机实验的结果。在液态钠发电机实验中，首次通过同时测量直接测得湍流电动势 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$

测量速度和磁场的三个分量（Rahbarnia、Brown、Clark 等人，2012）。通过与平均电流密度项进行比较，研究表明，电动势倾向于抵消局部平均电流，且平均磁场 $\mathbf{B}$ 趋向于垂直于电动势的方向。这一实验结果还表明，螺度或 α 效应（表示为 $\alpha\mathbf{B}$）不会对湍流电动势产生贡献。这一实验结果与湍流输运的数值结果（图 11）一致；该结果显示，湍流磁扩散率占主导地位，而螺度或 α 效应与发电机作用无关。需要指出的是，在这项液态钠实验中，还观测到了大尺度旋转或极向运动。由于存在平均涡旋运动，且测量了速度和磁场的三维数据，因此重新考察湍流交叉螺度 $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$与平均涡旋运动 $\Omega($ $= \nabla \times \mathbf{U}$）耦合而成的 $\gamma\Omega$。

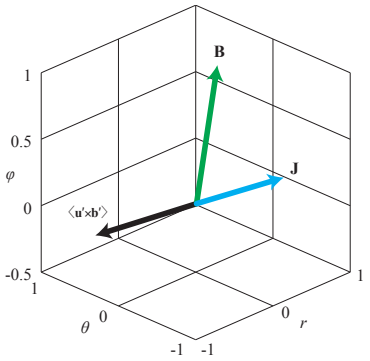


图 11 测得的湍流电动势（EMF）与发电机项的比较，$\alpha\mathbf{B}$、$\beta\mathbf{J}$和 $\gamma\Omega$ 在施加均匀磁场的柯尔莫哥洛夫流中的表现。沿非均匀方向（y 方向）的 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle^x$ （黑色）空间分布与 αB^x （绿色）和 βJ^x （蓝色）进行比较。改绘自Rahbarnia、Brown、Clark 等人（2012）。

3.3.2 Archontis流

在 Archontis流构型中还进行了另一次数值验证，该构型是阿诺德–贝尔特拉米–柴尔德雷斯流的一种推广，但省略了余弦项（Sur & Brandenburg，2009）。在这种设置下，Archontis流构型是非螺度流，适合研究交叉螺度效应引发的发电机作用。不稳定性会产生符号任意的净交叉螺度，而交叉螺度的符号取决于初始条件。对这种流动进行的直接数值模拟表明，交叉螺度有助于诱导产生呈指数增长的大尺度磁场。结果表明，为了评估交叉螺度对发电机作用的影响，还应考虑平均场效应。这自然引出一个问题：湍流交叉螺度在多大程度上、又如何由平均场效应产生

38 未受重视的交叉螺度效应

。这是第4节的主题。

3.3.3 球壳中的交叉螺度与差异旋转效应

在第3.1节中，我们讨论了发电机中的交叉螺度和全局流动效应。我们发现，在 Ω（差分旋转）效应与湍流之间，对全局流动非均匀性的处理存在明显差异。如果我们也考虑湍流中的速度剪切效应，交叉螺度效应就不可避免地会出现。由于 Ω效应和交叉螺度效应都取决于非均匀的大尺度流，因此这些效应在磁场生成过程中的相对重要性，是发电机中交叉螺度效应的一个有趣研究主题。

图中以等值线绘出了模拟太阳的球壳直接数值模拟中总交叉螺度、平均交叉螺度和涨落交叉螺度的空间分布，见图12。其中，总交叉螺度根据瞬时速度和磁场计算，平均交叉螺度通过方位角平均计算，而涨落交叉螺度则通过用总交叉螺度减去平均交叉螺度得到。交叉螺度的空间分布基本上关于中平面呈反对称。这反映了交叉螺度的赝标量性质。我们还看到，在每个半球中，平均交叉螺度和涨落交叉螺度的符号彼此相反。鉴于交叉螺度不是正定量，其符号可以随尺度改变，这并不令人意外。

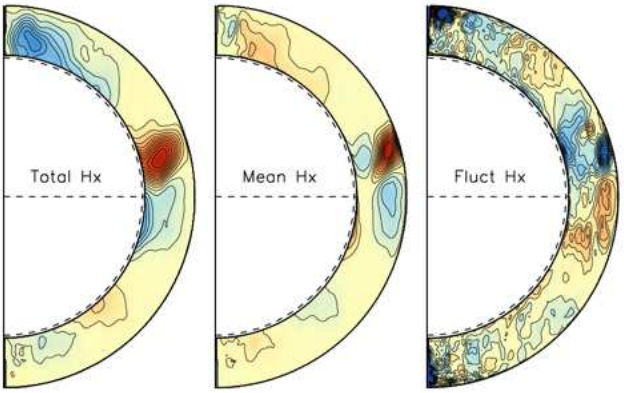


图 12 经向面上的交叉螺度空间分布。总交叉螺度（左）、平均交叉螺度（中）和涨落交叉螺度（右）。由 Mark Miesch 提供。

正如第4节将要提及的，我们有湍流和平均场交叉螺度的输运方程。将交叉螺度的数值数据与球壳几何全局模拟中湍流和平均场交叉螺度的产生、耗散及输运率进行比较，

将有助于理解决定湍流交叉螺度时空分布的物理机制。

接下来，我们通过计算以下内容，评估交叉螺度效应相对于平均感应方程中差分旋转效应的重要性

$$\frac{(\text{cross-helicity effect})}{(\text{differential-rotation effect})} = \frac{\|\nabla \times (\gamma \nabla \times \mathbf{U})\|}{\|\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B})\|}. \tag{153}$$

该比值随半径的变化绘于 r 图 13中。该图表明

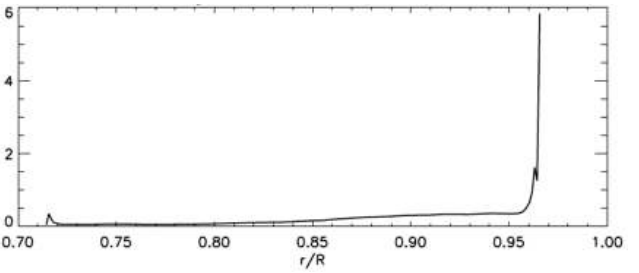


图 13 交叉螺度效应 $\|\nabla \times(\gamma\nabla \times \mathrm{U})\|$ 相对于差分旋转效应 $\|\nabla \times (\mathrm{U} \times \mathrm{B})\|$ 的相对大小。此处，R 为太阳半径， r 为径向坐标。由 Mark Miesch 提供。

交叉螺度效应相对于差分旋转效应的重要性在较深区域（$0.7 < r/R \lesssim 0.85$）微不足道，但在中上层（$0.85 \lesssim r/R \lesssim 0.96$）则变得$\sim 0.5$ 。在近表层（$0.96 \lesssim r/R$），该比值升至 1，甚至远高于 1。这一增长是因为近表层的大尺度涡量变得强得多。结果表明，交叉螺度效应与差分旋转效应相当，在太阳中上层不可忽略。此外，该结果还表明，在近表层，交叉螺度效应在平均磁场感应中起主导作用。

比值（153）可估算为

$$\begin{aligned}&\frac{\|\nabla \times (\gamma \nabla \times \mathbf{U})\|}{\|\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B})\|} \\ &\sim \frac{\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle}{D(\partial U/\partial r) B^r} \frac{\tau_{\text{turb}}}{\tau_{\text{mean}}} \sim \frac{\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle}{\delta U B^r} Ro^{-1} = \frac{\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle}{\delta U B^r} \frac{K/\varepsilon}{D/\delta U},\end{aligned} \tag{154}$$

其中， D 为对流区的深度， B^r 为极向磁场，δU 为速度差速旋转的大小，Ro 为罗斯贝数。这表明，交叉螺度相对于差分旋转的重要性，可通过湍流交叉螺度 $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$ 和涡旋周转时间 $\tau_{\text{turb}}(= K/\varepsilon)$ 的数值，以及可观测量来评估

例如差分旋转速度 δU、极向磁场 B^r 和对流区深度 D。在若干种模拟条件下评估这一比值，或许是一个值得探索的课题。

4 湍流交叉螺度的演化

在上一节中，我们看到，湍流中存在交叉螺度时，与非均匀平均速度相关的平均绝对涡量（旋转和平均相对涡量）能够产生电动势。然而，湍流中存在多少交叉螺度则是另一个问题。本节将通过考察交叉螺度的演化方程，探讨湍流交叉螺度是如何产生的。

4.1 交叉螺度的演化方程

众所周知，交叉螺度总量 $\int_V \mathrm{u}\cdot\mathrm{b}dV$、磁流体能量总量 $\int_V(\mathrm{u}'^2+\mathrm{b}'^2)/2dV$以及磁螺度的对应量 $\int_V \mathrm{a}\cdot\mathrm{b}dV$，都是不可压缩磁流体动力学方程的无粘不变量。其中，磁场以阿尔fv´én 速度为单位表示为 $\mathrm{b}=\mathrm{b}_*/(\mu_0\rho)^{1/2}$ (μ_0: 磁导率， ρ: 质量密度)，a 为磁势， $\int_V$ 表示在所考虑体积 V 上的积分。

我们将湍流磁流体能量和交叉螺度的局部密度分别定义为

$$K \equiv \langle \mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2 \rangle/2, \tag{155}$$

$$W \equiv \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle, \tag{156}$$

由于磁流体能量和交叉螺度总量具有守恒性质，湍流磁流体能量密度 K 和湍流交叉螺度密度 W 的演化方程可写成非常简洁的形式:

$$\frac{DF}{Dt} = (\mathbf{U}\cdot\nabla)\,F = P_F - \varepsilon_F + T_F, \tag{157}$$

其中 $F=(K$或 $W)$。在（157）中， P_F、 ε_F和 T_F分别是 F的产生率、耗散率和输运率。产生率 P_F 源于湍流关联与平均场非均匀性之间的耦合。 F 的耗散率 ε_F来自分子黏度和磁扩散率，或波相互作用等其他机制。输运率 T_F 表示穿过边界的通量。对于与守恒相关的量，这类通量可写成散度形式。

湍流磁流体能量 K 和湍流交叉螺度 W 的产生、耗散和输运率表示为

$$P_K = -\mathcal{R}^{ij}\frac{\partial U^j}{\partial x^i} - \mathbf{E}_\mathrm{M}\cdot\mathbf{J}, \tag{158}$$

$$\varepsilon_K = \nu\left\langle\left(\frac{\partial u'^j}{\partial x^i}\right)^2\right\rangle + \eta\left\langle\left(\frac{\partial b'^j}{\partial x^i}\right)^2\right\rangle \equiv \varepsilon, \tag{159}$$

$$T_K = \mathbf{B}\cdot\nabla W + \nabla\cdot\mathbf{T}'_K \equiv T_K^{(B)} + \nabla\cdot\mathbf{T}'_K, \tag{160}$$

$$P_W = -\mathcal{R}^{ij}\frac{\partial B^j}{\partial x^i} - \mathbf{E}_{\rm M}\cdot\boldsymbol{\Omega}, \tag{161}$$

$$\varepsilon_W = (\nu+\eta)\left\langle \frac{\partial u'^j}{\partial x^i}\frac{\partial b'^j}{\partial x^i}\right\rangle, \tag{162}$$

$$T_W = \mathbf{B}\cdot\nabla K + \nabla\cdot\mathbf{T}'_W \equiv T_W^{(B)} + \nabla\cdot\mathbf{T}'_W, \tag{163}$$

其中 $\mathbf{R}=\{\mathcal{R}^{ij}\}$ 是雷诺应力和湍流麦克斯韦应力，定义为

$$\mathcal{R}^{ij} = \langle u'^i u'^j - b'^i b'^j\rangle, \tag{164}$$

和$\mathbf{E}_{\rm M}$ 是由（109）定义的湍流电动势（EMF）。

产生率 P_K 和 P_W 分别与湍流磁流体能量和交叉螺度在大尺度与小尺度之间的传递有关。如果写出平均场磁流体动力学能量 $\mathcal{K}$ 和平均场交叉螺度 $\mathcal{W}$ 的演化方程（定义如下），这一点便显而易见:

$$\mathcal{K} = (\mathbf{U}^2+\mathbf{B}^2)/2, \tag{165}$$

$$\mathcal{W} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{B}, \tag{166}$$

分别。 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{W}$ 的方程写作

$$\frac{D\mathcal{F}}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\right)\mathcal{F} = P_{\mathcal{F}} - \varepsilon_{\mathcal{F}} + T_{\mathcal{F}}, \tag{167}$$

$$P_{\mathcal{K}} = +\mathcal{R}^{ij}\frac{\partial U^j}{\partial x^i} + \mathbf{E}_{\rm M}\cdot\mathbf{J} = -P_K, \tag{168}$$

$$\varepsilon_{\mathcal{K}} = \nu\left\langle\left(\frac{\partial U^j}{\partial x^i}\right)^2\right\rangle + \eta\left\langle\left(\frac{\partial B^j}{\partial x^i}\right)^2\right\rangle, \tag{169}$$

$$T_{\mathcal{K}} = \mathbf{B}\cdot\nabla\mathcal{W} + \nabla\cdot\mathbf{T}'_{\mathcal{K}} \equiv T_{\mathcal{W}}^{(B)} + \nabla\cdot\mathbf{T}'_{\mathcal{K}}, \tag{170}$$

$$P_{\mathcal{W}} = +\mathcal{R}^{ij}\frac{\partial B^j}{\partial x^i} + \mathbf{E}_{\rm M}\cdot\boldsymbol{\Omega} = -P_W, \tag{171}$$

$$\varepsilon_{\mathcal{W}} = (\nu+\eta)\left\langle \frac{\partial U^j}{\partial x^i}\frac{\partial B^j}{\partial x^i}\right\rangle, \tag{172}$$

$$T_{\mathcal{W}} = \mathbf{B}\cdot\nabla\mathcal{K} + \nabla\cdot\mathbf{T}'_{\mathcal{W}} \equiv T_{\mathcal{W}}^{(B)} + \nabla\cdot\mathbf{T}'_{\mathcal{W}}. \tag{173}$$

方程（168）和（171）表明，平均场磁流体能量的产生率 $\mathcal{K}$ 和平均场交叉螺度 $\mathcal{W}$ 的产生率，与湍流磁流体能量 K （158）和湍流交叉螺度 W （161）的对应产生率完全相同，但符号相反。因此，这些产生项不会影响该量的总量，即湍流量与平均场量之和 $\mathcal{K}+K$ 和 $\mathcal{W}+W$。它们只会促使该量在平均分量和湍流分量之间转移。如果某个湍流量的产生项为正（或

负），则该湍流量增加（或减少）。与此同时，在这种情况下，其平均场对应量的符号为负（或正），平均场量则减少（或增加）。这意味着，正产生率所导致的湍流量生成，是由平均场对应量的耗损或消耗提供的。从这个意义上说，K和W、P_K和P_W的产生率体现了湍流磁流体能量和交叉螺度的级联特性。

平均场磁流体能量和交叉螺度的耗散率$\varepsilon_{\mathcal{K}}$（169）以及$\varepsilon_{\mathcal{W}}$（172），分别对应于$\varepsilon_K$（159）和$\varepsilon_W$（162）。分子黏度$\nu$和磁扩散率$\eta$与平均场非均匀性$\nabla\mathbf{U}$和$\nabla\mathbf{B}$耦合后导致耗散。与小尺度上的非均匀性相比，$\nabla\mathbf{u}'$和$\nabla\mathbf{b}'$，这些大尺度非均匀性被认为较小。然而，在大尺度场非均匀性相当大的区域，例如近壁区和激波附近，与平均场非均匀性相关的这些耗散率可能会非常大，因而不可忽略。

与湍流对应项T_K和T_W一样，平均场量的输运率$T_{\mathcal{K}}$和$T_{\mathcal{W}}$表示穿过边界的通量。T_K（160）和T_W（163）中的第一项原本以散度形式写为

$$T_K^{(\mathrm{B})} = \nabla\cdot(W\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)W, \tag{174}$$

$$T_W^{(\mathrm{B})} = \nabla\cdot(K\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)K. \tag{175}$$

然而，为了明确表明它们与沿平均磁场方向的湍流非均匀性有关，将它们写成式（160）和（163）的首项。

(160) 或 (174) 的第一项$(\mathbf{B}\cdot\nabla)W$与沿平均磁场 B 传播的阿尔芬波有关。就阿尔芬波而言，正交叉螺度$W>0$表示反向传播的阿尔芬波占主导地位（传播方向与平均磁场反平行的阿尔芬波）。考虑一个由两个表面围成的区域（图 14）：一个是相对于平均磁场而言位于上游方向的表面（上通量边界），另一个是位于下游方向的表面（下通量边界）。如果湍流交叉螺度的大小沿平均磁场方向（下通量方向）增加，即$(\mathbf{B}\cdot\nabla)W>0$，那么在 B 的下通量边界处，反向传播的阿尔芬波比在上通量边界处更占主导地位。这意味着，下通量边界处流入的阿尔芬波比上通量边界处流出的阿尔芬波更占主导地位。因此，在这个有界区域内，阿尔芬波导致的总能量流入为正，从而使湍流磁流体能量增加。对于湍流交叉螺度为负的情形（沿与 B 平行的方向传播的阿尔芬波占主导地位），也可以作类似的论证。这些论证表明，在$(\mathbf{B}\cdot\nabla)W>0$的区域内湍流能量增加，而在$(\mathbf{B}\cdot\nabla)W<0$的区域内则减少。

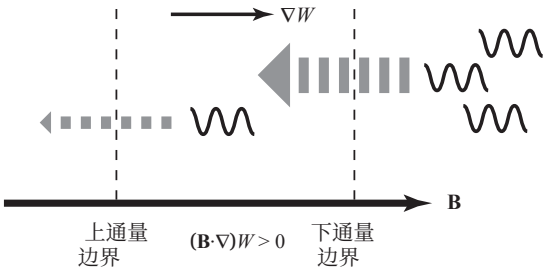


图 14 湍流交叉螺度的非均匀性和阿尔芬波传播不对称性导致的能量生成。

4.2 湍流交叉螺度的生成机制

湍流交叉螺度的演化方程 $W = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$ 表明W 在某些情况下，当湍流通量与平均场的大尺度结构相互耦合时，交叉螺度可以在局部生成。由 (158) 和 (160) 可知，湍流交叉螺度生成机制分为两类。一类源于产生率P_W (158)，另一类则源于输运率 T_W (160)。产生率 P_W 可分为两部分：一部分由雷诺应力和湍流麦克斯韦应力引起， $\mathcal{R}$ 另一部分由湍流电动势 $\mathbf{E}_{\mathrm{M}}$ 引起，如下所示

$$P_W = P_W^{(\mathrm{R})} + P_W^{(\mathrm{E})}, \tag{176}$$

其中

$$P_W^{(\mathrm{R})} = -\mathcal{R}_R^{ij} \frac{\partial B^j}{\partial x^i}, \tag{177}$$

$$P_W^{(\mathrm{E})} = -\mathbf{E}_{\mathrm{M}} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \tag{178}$$

4.2.1 速度应变和磁场应变引起的交叉螺度生成

将雷诺应力和湍流麦克斯韦应力的表达式代入 $P_W^{(\mathrm{R})}$ （177）后，可得

$$P_W^{(\mathrm{R})} = +\nu_{\mathrm{K}} \mathcal{S}^{ij} \mathcal{M}^{ij} - \nu_{\mathrm{M}} (\mathcal{M}^{ij})^2. \tag{179}$$

由于 $-\mathrm{M}^2 < 0$，第二项，即与 ν_{M} 相关的项，总是会导致湍流交叉螺度的幅值减小。第一项，即与 ν_{K} 相关的项，则可能有助于增大湍流交叉螺度。由于湍流黏度（或涡黏性）始终为正（$\nu_{\mathrm{K}} > 0$），湍流交叉螺度的生成取决于 S : M 的符号 $= \{\mathcal{S}^{ij} \mathcal{M}^{ij}\}$。如果 S : M 的符号为 > 0，则会生成正交叉螺度；而当 S : M 为 < 0 时，则会生成负的湍流

44 未被重视的交叉螺度效应

交叉螺度，表示为

$$\begin{cases} P_W^{(\mathrm{R})} > 0 & \text{for } \boldsymbol{\mathcal{S}} : \boldsymbol{\mathcal{M}} > 0, \\ P_W^{(\mathrm{R})} < 0 & \text{for } \boldsymbol{\mathcal{S}} : \boldsymbol{\mathcal{M}} < 0. \end{cases} \tag{180}$$

当动量以速度剪切的形式注入具有平均磁场剪切的构型时，这种交叉螺度产生机制便会发挥作用。聚变装置中沿环向进行的中性束注入（NBI）可能就是这种湍流交叉螺度生成的实例。如果中性束从外部注入中心小轴区域，则外半部（远侧）的湍流交叉螺度可能为正，而内半部区域（近侧）的湍流交叉螺度为负（图 15）。

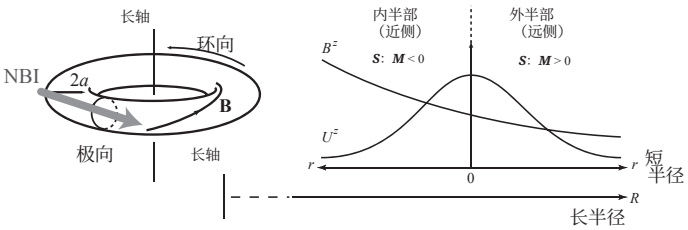


图 15 平均速度和磁场应变导致的交叉螺度生成。

4.2.2 涡量和电流导致的交叉螺度生成

若将湍流电动势的表达式（116）代入产生率 $P_W^{(\mathrm{E})}$ （178），则有

$$P_W^{(\mathrm{E})} = +\beta \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \alpha \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \gamma \boldsymbol{\Omega}^2. \tag{181}$$

第三个或与 γ 相关的项总是会减小交叉螺度的大小， W或 $\gamma(=\tau W)$，因为 $-\Omega^2 < 0$。第二个或与 α 相关的项表明，由 α 效应产生的磁场会使湍流交叉螺度增加或减小。取决于湍流剩余螺度 $\alpha(=\tau H)$ 的符号以及与之耦合的平均场结构 $\mathrm{B} \cdot \Omega$，湍流交叉螺度会因 α 效应而生成或消耗。交叉螺度与螺度之间的这种相互作用，在磁场和交叉螺度的振荡与反转过程中发挥重要作用。第 5 节将通过恒星振荡磁场中的交叉螺度发电机，进一步详细阐述这一点。第一个或与 β 相关的项预计在交叉螺度生成中起核心作用，因为即使不存在与 α 和 γ 相关的镜像对称性破缺，湍流磁扩散率 β 依然存在，并代表湍流的主要效应。由于

湍流磁扩散率始终为正（$\beta > 0$），交叉螺度生成的符号由 $\mathbf{J} \cdot \Omega$ 的符号决定。在圆柱形等离子体构型中，这种构型常用来近似环形等离子体构型，极向等离子体旋转由方位角或轴向平均涡量 Ω 表示，而环向等离子体电流由方位角或轴向平均电流 $\mathbf{J}$ 表示（图 16）。生成正交叉螺度还是负交叉螺度，取决于平均电流密度与平均涡量是正向对齐还是反向对齐。若平均电流密度与平均涡量平行，满足 $\mathbf{J} \cdot \Omega > 0$，则会生成正交叉螺度 $P_W^{(\mathrm{E})} > 0$；若两者反平行（$\mathbf{J} \cdot \Omega < 0$），则会生成负交叉螺度，具体如下：

$$\begin{cases} P_W^{(\mathrm{E})} > 0 \quad \text{for} \quad \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0, \\ P_W^{(\mathrm{E})} < 0 \quad \text{for} \quad \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0. \end{cases} \tag{182}$$

这表明，在环形或圆柱形等离子体构型中，极向旋转与等离子体电流耦合，会系统地产生正或负的湍流交叉螺度。

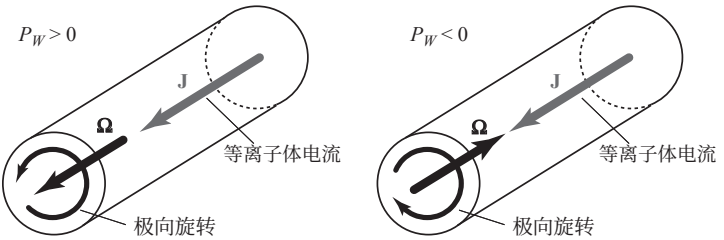


图 16 由平均涡量 Ω（极向旋转）和平均电流密度 J（环向等离子体电流）引起的交叉螺度生成。

正如我们将在第7节中看到的，这种基于平均涡量 Ω 与平均电流密度 J 耦合的产生机制，在湍流磁重联中的交叉螺度生成中发挥着主导作用。

4.2.3 沿平均磁场方向由湍流非均匀性引起的交叉螺度生成

除了与平均速度和磁场应变耦合相关的产生率 $P_W^{(\mathrm{R})} \sim \mathrm{S} : \mathrm{M}$，以及与平均涡量和电流密度耦合相关的产生率 $P_W^{(\mathrm{E})} \sim \Omega \cdot \mathrm{J}$ 外，沿平均磁场方向的湍流非均匀性 $(\mathrm{B} \cdot \nabla) K$ 也提供了一种产生正或负交叉螺度的可能性，具体取决于 $(\mathrm{B} \cdot \nabla) K$ 的符号。这种湍流交叉螺度生成机制与以下机制截然不同

46 未受重视的交叉螺度效应

上文给出的与产生率相关的机制 $P_W^{(\mathrm{R})}$ 和 $P_{(\mathrm{E})W}$。正如我们在（171）中所见，与产生率相关的机制 $P_{(\mathrm{R})W}$ 和 $P_W^{(\mathrm{E})}$ 在平均场交叉螺度 $\mathbf{U}\cdot\mathbf{B}$ 的方程中有相应的对应项，如下所示

$$P_{\mathcal{W}}^{(\mathrm{R})} = +\mathcal{R}^{ij}\frac{\partial B^j}{\partial x^i} = -P_W^{(\mathrm{R})}, \tag{183}$$

$$P_{\mathcal{W}}^{(\mathrm{E})} = +\mathbf{E}_{\mathrm{M}}\cdot\boldsymbol{\Omega} = -P_W^{(\mathrm{E})}. \tag{184}$$

这意味着，由 $P_W^{(\mathrm{R})}$ and$P_W^{(\mathrm{E})}$ 表示的湍流交叉螺度生成，源自平均场交叉螺度 $\mathbf{U}\cdot\mathbf{B}$ 向湍流交叉螺度 $\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle$ 的级联。湍流交叉螺度生成 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)K$ 并非如此。在平均场交叉螺度方程中，我们有 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathcal{K} = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\langle\mathbf{U}^2+\mathbf{B}^2\rangle/2$，而不是 $-(\mathbf{B}\cdot\nabla)K$ 的形式。这是因为这种机制并非源自交叉螺度的产生率，而是源于交叉螺度穿过边界的输运或通量率；在湍流交叉螺度方程中写作 $\nabla\cdot(K\mathbf{B})$，在平均场交叉螺度方程中写作 $\nabla\cdot(\mathcal{K}\mathbf{B})$。

由平均磁场方向上的湍流非均匀性导致的交叉螺度生成，即 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)K$，是输运率的一部分，可视为穿过边界的通量。该机制与阿尔芬波沿平均磁场 $\mathbf{B}$ 传播的不对称性直接相关。为便于讨论，我们假设湍流能量由一组阿尔芬波构成，这些波沿平均磁场 $\mathbf{B}$ 的平行和反平行方向传播。沿 $\mathbf{B}$ 的湍流非均匀性对应于阿尔芬波包沿 $\mathbf{B}$ 的非均匀分布。例如，如果阿尔芬波包的数量沿平均磁场方向增加，那么湍流能量也会沿 $\mathbf{B}$ 增加，即 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)K > 0$（图 17）。在该区域内，由于阿尔芬波包平行传播与反平行传播之间存在差异，沿 $\mathbf{B}$ 反平行方向传播的波多于沿平行方向传播的波。这种沿平均磁场反平行方向传播的阿尔芬波占优，会使该区域产生正交叉螺度。从这个意义上说，交叉螺度演化方程中输运率的这一部分，即 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)K$，表示与阿尔芬波不对称传播相关的湍流交叉螺度生成。平均场交叉螺度 $\mathbf{U}\cdot\mathbf{B}$ 的生成也是如此。如果反平行传播的阿尔芬波占主导地位，那么平均场交叉螺度输运率的这一部分，即 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathcal{K}$，将变为正值，并表示大尺度上的正交叉螺度生成。这使其与产生率 $P_W^{(\mathrm{R})}$ 和 $P_W^{(\mathrm{E})}$ 所关联的交叉螺度生成机制明显不同。

这种基于平均磁场方向上湍流非均匀性的交叉螺度生成机制，预计会在某些天体物理构型中发挥重要作用。如果全局磁场贯穿一个等离子体气体盘，且湍流强度随深度而变化，

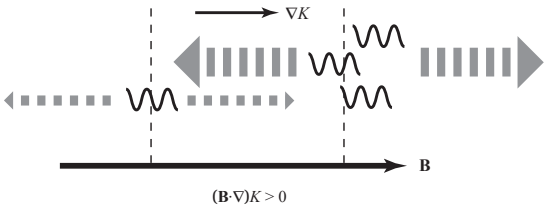


Fig. 17 湍流非均匀性和不对称性导致的交叉螺度生成的 Alfvén 波传播。

则会出现非零的 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)K$（图 18）。如果中平面区域的湍流水平高于外围平面（盘的北部和南部区域），那么盘的北半部和南半部便会分别形成正、负湍流交叉螺度的分布。预计这一机制可在天体物理盘中实现湍流交叉螺度的分离。

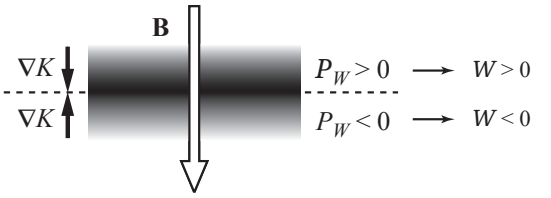


图18 由于沿全局磁场 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)K$ 方向的湍流非均匀性，通过交叉螺度产生机制导致湍流交叉螺度分离。

4.3 可压缩磁流体力学中的交叉螺度生成

在上一小节（第 4.2 节）中，我们列出了不可压缩磁流体湍流中的交叉螺度生成机制。它们是 $P_W^{(\mathrm{R})}$ (177)、$P_{(\mathrm{E})W}$(178)，以及 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)K$ (174)。考察这些产生机制可以发现，它们都要求存在平均磁场 $\mathbf{B}$。需要注意的是，$P_W^{(\mathrm{E})}$ (181) 中的第三项 $-\gamma\Omega^2$, 始终会使湍流交叉螺度的大小减小。

值得注意的是，正如我们在第3.2.1节和第3.2.2节中所看到的，α效应（$\alpha\mathrm{B}$）和湍流扩散效应（$\beta\nabla\times\mathrm{B}$）都需要存在平均磁场 B 及其由 $\mathrm{J}=\nabla\times\mathrm{B}$ 表示的空间变化，才能感应出磁场涨落 $\delta\mathrm{b}'$；这些涨落通过 $\langle\mathrm{u}'\times\delta\mathrm{b}'\rangle$构成湍流电动势。然而，生成输运系数 α 和 β 并不需要平均磁场 B 的存在。

正如湍流交叉螺度的生成机制 $P_W(=P_W^{(\mathrm{R})}+P_W^{(\mathrm{E})})$ 和 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)K$ 所示，在存在平均磁场 B 时，会产生湍流交叉螺度。随后，与平均绝对

48 未受重视的交叉螺度效应

涡量（相对涡度和旋转）耦合后，交叉螺度效应必然会影响湍流电动势（EMF）。从交叉螺度效应能够抵消湍流磁扩散率的角度来看，交叉螺度发电机可视为一种电池效应。若要使交叉螺度效应成为自激发电机，我们需要一种机制，能在不依赖平均磁场 B 存在的情况下产生湍流交叉螺度。放宽不可压缩性约束，或许是即使在没有平均磁场时也能产生交叉螺度的一种方法。

为了考察变密度的影响，我们不再使用以阿尔芬速度为单位测量的磁场，而改用以原始自然单位测量的磁场。我们将湍流交叉螺度定义为

$$W_* = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}'_* \rangle \tag{185}$$

其中，$\mathbf{b}_*$ 是以原始单位测量的磁场，而 $\mathbf{b}'(=\mathbf{b}'_*/(\mu_0\rho)^{1/2})$ 是以阿尔芬速度单位测量的磁场。可压缩磁流体力学中湍流交叉螺度 W_* 的演化方程写作

$$\begin{aligned}
\frac{DW_*}{Dt} \equiv & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\right) W_* \\
= & -\frac{1}{2}\left\langle u'^i u'^j - \frac{1}{\mu_0\overline{\rho}} b'^i_* b'^j_* \right\rangle \left(\frac{\partial B^j_*}{\partial x^i} + \frac{\partial B^i_*}{\partial x^j}\right) - \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}'_* \rangle \cdot \boldsymbol{\Omega} \\
& -(\gamma-1)\frac{1}{\overline{\rho}}\langle \rho' \mathbf{b}'_* \rangle \cdot \nabla E - (\gamma-1)\frac{1}{\overline{\rho}}\langle e' \mathbf{b}'_* \rangle \cdot \nabla \overline{\rho} - \frac{1}{\overline{\rho}}\langle \rho' \mathbf{b}'_* \rangle \cdot \frac{D\mathbf{U}}{Dt} \\
& -W_* \nabla\cdot\mathbf{U} + \mathbf{B}_* \cdot \nabla \left\langle \mathbf{u}'^2/2 \right\rangle + \langle \mathbf{f}' \cdot \mathbf{b}'_* \rangle \\
& -\varepsilon_{W_*} + T'_{W_*} + \text{R.T.},
\end{aligned} \tag{186}$$

其中，E 为平均内能，e' 为内能涨落，$\overline{\rho}$ 为平均密度，ρ' 为密度涨落，$\mathbf{f}'$ 为外力的涨落部分（若有）。在（186）中，最右侧的第一、第二项和第七项分别对应产生率 $P_W^{(\mathrm{R})}$（177）和 $P_W^{(\mathrm{E})}$（178），以及不可压情形下沿平均磁场方向的非均匀性相关输运率 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)K$（175）。第三至第五项是由可压缩性引起的产生率，并非直接源自平均磁场 B。它们表示为湍流通量 $\langle \rho' \mathbf{b}' \rangle$ 和 $\langle \rho' \mathbf{b}' \rangle$，分别与平均内能梯度 ∇E、平均密度梯度 $\nabla\overline{\rho}$以及沿流体运动方向的平均速度变化 $D\mathbf{U}/Dt$耦合。这些产生项预计会在强可压缩情形下的湍流交叉螺度生成中发挥重要作用。第六项 $-W\nabla\cdot\mathbf{U}$表示湍流交叉螺度生成中的平均膨胀效应，且不依赖于平均磁场。这表明，在平均

收缩情形（$\nabla \cdot \mathbf{U} < 0$）下会产生正的湍流交叉螺度，而在平均膨胀情形（$\nabla \cdot \mathbf{U} > 0$）下会产生负的交叉螺度。第八项 $\langle \mathbf{f}' \cdot \mathbf{b}'_* \rangle$ 表示外力导致的湍流交叉螺度生成。耗散项和除 $\mathbf{B} \cdot \nabla \langle \mathbf{u}'^2 \rangle / 2$ 之外的输运项分别记为 ε_{W_*} 和 T'_{W_*}，其详细表达式在此省略。最后的 R.T. 表示由高阶关联引起的余项。

作为可压缩性固有的产生项，我们有 $-(\gamma-1)/\overline{\rho}\langle \rho' \mathbf{b}'_* \rangle \nabla E$、$-(\gamma-1)/\overline{\rho}\langle e' \mathbf{b}' \rangle \nabla \overline{\rho}$ 和 $-1/\overline{\rho}\langle \rho' \mathbf{b}' \rangle D\mathbf{U}/Dt$。这些产生机制表明，在可压缩磁流体力学情形下，湍流通量与平均内能梯度、平均密度梯度等耦合，无需借助平均磁场，就能产生正或负的交叉螺度。

4.4 交叉螺度耗散率的评估

交叉螺度的耗散率由式 (4.18) 定义。我们可以根据脉动速度（13）和磁场（14）的方程形式上推导出交叉螺度方程。

$$
\begin{aligned}
\frac{D\varepsilon_W}{Dt} \equiv & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) \varepsilon_W \\
= & (\nu+\lambda) \left\langle \frac{\partial u'^a}{\partial x^c} \frac{\partial b'^b}{\partial x^c} - \frac{\partial b'^a}{\partial x^c} \frac{\partial u'^b}{\partial x^c} \right\rangle \frac{\partial U^a}{\partial x^b} \\
& + (\nu+\lambda) \left\langle \frac{\partial u'^a}{\partial x^c} b'^b - u'^b \frac{\partial b'^a}{\partial x^c} \right\rangle \frac{\partial^2 U^a}{\partial x^b \partial x^c} \\
& + (\nu+\lambda) \left\langle \frac{\partial u'^b}{\partial x^a} \frac{\partial^2 u'^b}{\partial x^a \partial x^c} + \frac{\partial b'^b}{\partial x^a} \frac{\partial^2 b'^b}{\partial x^a \partial x^c} \right\rangle B^c \\
& + (\nu+\lambda) \left\langle \frac{\partial u'^c}{\partial x^a} \frac{\partial u'^c}{\partial x^b} - \frac{\partial b'^c}{\partial x^a} \frac{\partial b'^c}{\partial x^b} \right\rangle \frac{\partial B^a}{\partial x^b} \\
& - (\nu+\lambda) \left\langle \frac{\partial u'^a}{\partial x^c} \frac{\partial u'^a}{\partial x^c} - \frac{\partial b'^a}{\partial x^c} \frac{\partial b'^a}{\partial x^c} \right\rangle \frac{\partial B^a}{\partial x^b} \\
& - (\nu+\lambda) \left\langle \frac{\partial u'^a}{\partial x^c} u'^b - \frac{\partial b'^a}{\partial x^c} b'^b \right\rangle \frac{\partial^2 B^a}{\partial x^b \partial x^c} \\
& - (\nu+\lambda) \left\langle \frac{\partial u'^b}{\partial x^a} \frac{\partial u'^c}{\partial x^a} \frac{\partial b'^b}{\partial x^c} \right\rangle - (\nu+\lambda) \left\langle \frac{\partial b'^b}{\partial x^a} \frac{\partial u'^c}{\partial x^a} \frac{\partial u'^b}{\partial x^c} \right\rangle \\
& + (\nu+\lambda) \left\langle \frac{\partial u'^b}{\partial x^a} \frac{\partial b'^c}{\partial x^a} \frac{\partial b'^b}{\partial x^c} \right\rangle + (\nu+\lambda) \left\langle \frac{\partial b'^b}{\partial x^a} \frac{\partial b'^c}{\partial x^a} \frac{\partial b'^b}{\partial x^c} \right\rangle \\
& - (\nu+\lambda) \left\langle (u'^c \pm b'^c) \frac{\partial}{\partial x^c} \left(\frac{\partial u'^b}{\partial x^a} \frac{\partial b'^b}{\partial x^a} \right) \right\rangle \\
& + (\nu+\lambda) \frac{\partial}{\partial x^c} \left\langle \frac{1}{2} b'^c \frac{\partial}{\partial x^a} \left(u'^b \pm b'^b \right) \right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(\nu+\lambda)\left\langle \frac{\partial b'^b}{\partial x^a}\frac{\partial^2 p'_{\mathrm{M}}}{\partial x^a \partial x^b}\right\rangle + (\nu+\lambda)\frac{\partial^2}{\partial x^c \partial x^c}\varepsilon_W \\
&-(\nu+\lambda)\frac{\partial}{\partial x^c}\left[\nu\left\langle \frac{\partial u'^b}{\partial x^a}\frac{\partial^2 b'^b}{\partial x^a \partial x^c}\right\rangle + \lambda\left\langle \frac{\partial b'^b}{\partial x^a}\frac{\partial^2 u'^b}{\partial x^a \partial x^c}\right\rangle\right] \\
&-(\nu+\lambda)^2\left\langle \frac{\partial^2 u'^b}{\partial x^a \partial x^c}\frac{\partial^2 b'^b}{\partial x^a \partial x^c}\right\rangle .
\end{aligned} \tag{187}
$$

这表明平均场及其非均匀性如何促成湍流交叉螺度的耗散，但与湍流交叉螺度的方程相比，该方程的结构非常复杂（157），其中（161）-（163）。这种复杂性的一个原因在于，与交叉螺度总量的情况不同，交叉螺度耗散率的总量 ε_W 完全不是守恒量。

4.4.1 交叉螺度耗散率的代数模型

面对难以处理的精确耗散方程（187），评估交叉螺度耗散率 ε_W 的一种方法是将其表示为代数形式：

$$
\varepsilon_W = C_W \frac{W}{\tau} = C_W \frac{\varepsilon}{K} W, \tag{188}
$$

其中，τ 是涡周转时间，C_W 是模型常数。对于涡周转时间，我们采用关于湍流能量 K 及其耗散率 ε 的最简单模型，即

$$
\tau = \frac{K}{\varepsilon}. \tag{189}
$$

在（188）中，我们认为湍流交叉螺度的耗散 W 与 W 除以湍流特征时间尺度 τ成正比。

交叉螺度耗散率及相关模型常数受到一些约束。首先，W的大小受到数学约束。由于 $(\mathbf{u}' \pm \mathbf{b}')^2 \geq 0$，$W$ 的大小受限于 K，即

$$
\frac{\|W\|}{K} = \frac{\|\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle\|}{\langle \mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2 \rangle / 2} \leq 1. \tag{190}
$$

根据这一关系，我们还可以对 ε_W 的大小施加约束。由（157），对于 K 和 W，可得

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\frac{W}{K} &= \frac{W}{K}\left(\frac{1}{W}\frac{DW}{Dt} - \frac{1}{K}\frac{DK}{Dt}\right) \\
&= \frac{W}{K}\left(\frac{1}{W}P_W - \frac{1}{K}P_K\right) - \frac{W}{K}\left(\frac{1}{W}\varepsilon_W - \frac{1}{K}\varepsilon\right) \\
&\quad + \frac{W}{K}\left(\frac{1}{W}T_W - \frac{1}{K}T_K\right).
\end{aligned} \tag{191}
$$

这是关于归一化交叉螺度 W/K 的一般方程，在任何情况下都应成立。对于没有产生和输运率的均匀湍流，（191）可简化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{W}{K} = -\left(\frac{1}{W}\varepsilon_W - \frac{1}{K}\varepsilon\right)\frac{W}{K}. \tag{192}$$

我们假设右侧括号中的量不依赖于W/K。如果采用最简单的能量耗散率和交叉螺度耗散率代数模型，情况便是如此：

$$\varepsilon = \frac{K}{\tau} \tag{193}$$

以及（188）。为了避免 W/K 随时间指数增长，并满足条件 $W/K \leq 1$，我们得到等式：

$$\frac{\|\varepsilon_W\|}{\varepsilon} > \frac{\|W\|}{K}, \tag{194}$$

whi这等价于对（ C_W 中的模型常数施加约束：188）

$$C_W > 1. \tag{195}$$

4.4.2 交叉螺度耗散率演化方程的建模

在均匀磁流体力学湍流中，关于交叉螺度的演化，人们曾提出这样的观点：正交叉螺度还是负交叉螺度占主导，取决于初始阶段哪种符号的交叉螺度占优势（Dobrowolny、Mangeney 和 Veltri，1980a；Dobrowolny、Mangeney 和 Veltri，1980b）。然而，进一步研究表明，磁流体力学湍流的可能情形要丰富得多，其中包括交叉螺度随尺度变化的行为（Ting、Montgomery 和 Matthaeus，1986年；Stribling 和 Matthaeus，1991年）。

在具有大尺度速度剪切和磁场剪切的非均匀湍流背景下，交叉螺度的演化取决于多种大尺度非均匀性，而交叉螺度耗散率也可能受到此类非均匀性效应的影响。本文通过构建湍流交叉螺度耗散率的演化方程，将此类非均匀性效应纳入考量。

借助多尺度重整化微扰展开理论，我们从理论上推导出交叉螺度耗散率方程。在多尺度重整化微扰展开理论的框架下，湍流交叉螺度 W 表示为

$$\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle = \int d\mathbf{k} \langle u'^{\ell}(\mathbf{k};\ \tau) b'^{\ell}(\mathbf{k};\ \tau) \rangle$$

$$= \int d\mathbf{k} \left[\langle {u'_{00}}^{\ell} {b'_{00}}^{\ell} \rangle + \langle {u'_{00}}^{\ell} {b'_{01}}^{\ell} \rangle + \langle {u'_{01}}^{\ell} {b'_{00}}^{\ell} \rangle + \cdots \right.$$
$$\left. + \delta \left(\langle {u'_{10}}^{\ell} {b'_{00}}^{\ell} \rangle + \langle {u'_{00}}^{\ell} {b'_{10}}^{\ell} \rangle + \cdots \right) + \cdots \right]. \quad (196)$$

根据分析，湍流交叉螺度表示为

$$W = 2I_0\{Q_{ub}\} - I_0 \left\{ G_{\mathrm{S}}, \frac{D}{Dt}(Q_{ub} + Q_{bu}) \right\}, \quad (197)$$

其中，我们采用了谱与时间积分的简写形式，其定义为

$$I_n\{A\} = \int d\mathbf{k}\ k^{2n} A(k, \mathbf{x};\ \tau, \tau, t), \quad (198)$$

$$I_n\{A, B\} = \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1\ k^{2n} A(k, \mathbf{x};\ \tau, \tau_1, t) B(k, \mathbf{k};\ \tau, \tau_1, t). \quad (199)$$

在（197）中，Q_{ub} 和 Q_{bu} 是谱关联函数，表示基本的或最低阶的场交叉螺度，而 G_{S} 是格林函数。

我们假设惯性区中的关联函数和格林函数表示为

$$Q_{ub}(k, \mathbf{x};\ \tau, \tau', t) = \sigma_W(\mathbf{k}, \mathbf{x};\ \tau) \exp[-\omega_W(k, \mathbf{x};\ t)\|\tau - \tau'\|], \quad (200)$$

$$G_{\mathrm{S}}(k, \mathbf{x};\ \tau, \tau', t) = \theta(\tau - \tau') \exp[-\omega_{\mathrm{S}}(k, \mathbf{x};\ t)(\tau - \tau')], \quad (201)$$

分别。这里，$\theta(\tau)$ 是 Heaviside阶跃函数 $[\theta(\tau),\ = 1$当 $\tau > 0$，且$\theta = 0$当 $\tau < 0]$。这里，$\sigma_W(k, \mathbf{x};\ \tau)$ 是交叉螺度W的功率谱，而 ω_W 和 ω_{S} 表示涨落的频率或时间尺度。对于 W 的谱以及湍流能量 K的谱，我们假设

$$\sigma_K = \sigma_{K0} \varepsilon^{2/3} k^{-11/3}, \quad (202)$$

$$\sigma_W = \sigma_{W0} \varepsilon^{-1/3} \varepsilon_W(\mathbf{x};\ t) k^{-11/3}, \quad (203)$$

以及对于时间尺度，

$$\omega_{\mathrm{S}}(k, \mathbf{x};\ t) = \omega_{\mathrm{S}0} \varepsilon^{1/3} k^{2/3} = \tau_{\mathrm{S}}^{-1}, \quad (204)$$

$$\omega_W(k, \mathbf{x};\ t) = \omega_{W0} \varepsilon_W^{1/3} k^{2/3} = \tau_W^{-1}, \quad (205)$$

其中，$\omega_{\mathrm{S}0}$、ω_{K0}和 ω_{W0} 为数值常数。表达式（203）基于以下假设：交叉螺度谱取决于波数 k、交叉螺度传输/耗散率 ε_W 和能量传输/耗散率 ε。或者，（202）和（203）基于以下假设：能谱与能量传输/耗散率之比 σ_K/ε，以及交叉螺度谱与交叉螺度

传递/耗散率之比 σ_W/ε_W，对能量传输/耗散率 ε 和波数 k 具有相同的依赖关系

$$\frac{\sigma_K}{\varepsilon} = \frac{\sigma_W}{\varepsilon_W} = \varepsilon^{-1/3}k^{-11/3}. \tag{206}$$

考虑到 $\varepsilon^{-1/3}k^{-2/3}$ 给出一个时间尺度，(206) 相当于假设能量 $K(=\int \sigma_K d\mathbf{k})$ 除以 ε 和 $W(=\int \sigma_W d\mathbf{k})$ 除以 σ_W 给出相同的时间尺度 $\tau \sim \varepsilon^{-1/3}k^{-2/3}$。

利用关联函数和格林函数 (200) 和 (201)， W 计算如下

$$\begin{aligned} W \;=\; & 2\int d\mathbf{k}\; \varepsilon^{-1/3}(\mathbf{x};\; t)\varepsilon(\mathbf{x};\; t)k^{-11/3} \\ & -2\int d\mathbf{k}\; \left[\frac{1}{\omega_{\mathrm{S}}+\omega_W}\frac{D\sigma_W}{Dt} - \frac{\sigma_W}{(\omega_{\mathrm{S}}+\omega_W)^2}\frac{D\omega_W}{Dt}\right]. \end{aligned} \tag{207}$$

根据惯性区间形式 (202)-(205)，可将其改写为

$$\begin{aligned} W \;=\; & 4\cdot 2\pi\varepsilon^{-1/3}\varepsilon_W \int_{\|\mathbf{k}\|\geq k_{\mathrm{C}}} dk\; k^{-5/3} \\ & -\; 4\cdot 2\pi\frac{\sigma_{W0}}{\omega_{\mathrm{sw}}\varepsilon_{\mathrm{sw}}^{1/3}} \int_{\|\mathbf{k}\|\geq k_{\mathrm{C}}} dk\; k^{4/3}\frac{D}{Dt}\left[\varepsilon^{-1/3}(\mathbf{x};\; t)\varepsilon_W(\mathbf{x};\; t)k^{-11/3}\right] \\ & +\; 4\cdot 2\pi\frac{\sigma_{W0}\omega_{W0}}{(\omega_{\mathrm{sw}}\varepsilon_{\mathrm{sw}}^{1/3})^2}\varepsilon^{-1/3}\varepsilon_W \int_{\|\mathbf{k}\|\geq k_{\mathrm{C}}} dk\; k^{-3}\frac{D}{Dt}\left[\varepsilon_W^{1/3}(\mathbf{x};\; t)k^{2/3}\right], \end{aligned} \tag{208}$$

其中 k_{C} 是截断波数。这里，我们引入了一个合成时间尺度 τ_{SW}，定义如下

$$\frac{1}{\tau_{\mathrm{SW}}} = \frac{1}{\tau_{\mathrm{S}}} + \frac{1}{\tau_W} = \left(\omega_{\mathrm{S}0}\varepsilon^{1/3} + \omega_{W0}\varepsilon_W^{1/3}\right)k^{2/3} \equiv \omega_{\mathrm{sw}}\varepsilon_{\mathrm{sw}}^{1/3}k^{2/3}. \tag{209}$$

值得注意的是， ω_{SW} 和 $\varepsilon_{\mathrm{SW}}$ 仅以组合 $\omega_{\mathrm{SW}}\varepsilon^{1/3}$ sw的形式出现，它表示一个时间尺度。 ω_{SW} 和 $\varepsilon_{\mathrm{SW}}$ 各自都没有明确的含义。鉴于这一点，以下我们记作

$$A_W(\omega_{\mathrm{S}0},\omega_{W0}) \equiv \frac{\omega_{W0}\varepsilon_W^{1/3}}{\omega_{\mathrm{sw}}\varepsilon_{\mathrm{sw}}^{1/3}} = \frac{\omega_{W0}\varepsilon_W^{1/3}}{\omega_{\mathrm{S}0}\varepsilon^{1/3}+\omega_{W0}\varepsilon_W^{1/3}} = \frac{\tau_{\mathrm{SW}}}{\tau_W} \tag{210}$$

以简化记号。

截断波数 k_{C} 在（208）中引入，它是谱积分的下限。该波数与湍流运动的最大涡旋尺度直接相关， ℓ_{C}，具体而言

$$\ell_{\mathrm{C}} = 2\pi/k_{\mathrm{C}}. \tag{211}$$

54 未受重视的交叉螺度效应

该长度尺度 ℓ_{C} 被认为是湍流磁流体能量和交叉螺度的主要贡献因素，并决定它们的大小。这里需要注意一点：交叉螺度的相关长度可能与磁流体能量的相关长度不同。湍流的特征长度代表最大湍流运动的尺度，对应于磁流体能量和交叉螺度谱幅值最大的尺度。磁流体能量与交叉螺度的长度尺度差异，源于某种特定机制，该机制会使能量和交叉螺度呈现出截然不同的谱形。例如，太阳风湍流就不存在这种情况。从这个意义上说，如 $\ell_K \sim \ell_W$（$\equiv \ell_{\mathrm{C}}$）所示，对能量和交叉螺度采用相同的相关长度并非不合理。与此相关，Matthaeus、Oughton、Pontius Jr. 等人（1994）；Hossain、Gray、Pontius Jr. 等人（1995）对相关长度尺度和时间尺度的深入讨论具有重要意义。

我们计算式（208）中的拉格朗日导数和谱积分。若将缩放波数记为

$$s = k/k_{\mathrm{C}}, \tag{212}$$

我们得到

$$\begin{aligned} W \;=\; & 4\cdot(2\pi)^{1/3}\sigma_{W0}\varepsilon^{-1/3}\varepsilon_W k_{\mathrm{C}}^{2/3}\int_{s\geq 1} ds\; s^{-5/3} \\ & -\; 4\cdot 2\pi\frac{\sigma_{W0}}{\omega_{\mathrm{sw}}\varepsilon_{\mathrm{sw}}^{1/3}}k_{\mathrm{C}}^{7/3}\int_{s\geq 1} ds\; s^{-7/3}\frac{D}{Dt}\left[\varepsilon^{-1/3}(\mathbf{x};\,t)\varepsilon_W(\mathbf{x};\,t)k_{\mathrm{C}}^{-11/3}\right] \\ & +\; 4\cdot 2\pi\frac{\sigma_{W0}\omega_{W0}}{(\omega_{\mathrm{sw}}\varepsilon_{\mathrm{sw}}^{1/3})^2}\varepsilon^{-1/3}\varepsilon_W k_{\mathrm{C}}^{-2}\int_{s\geq 1} ds\; s^{-7/3}\frac{D}{Dt}\left[\varepsilon_W^{1/3}(\mathbf{x};\,t)k_{\mathrm{C}}^{2/3}\right]. \end{aligned} \tag{213}$$

用 ℓ_{C} (211）表示时，可将其改写为

$$\begin{aligned} W \;=\; & 6\cdot(2\pi)^{1/3}\sigma_{W0}\varepsilon^{-1/3}\varepsilon_W\ell_{\mathrm{C}}^{2/3} \\ & +\;\frac{1}{(2\pi)^{1/3}}\frac{\sigma_{W0}}{\omega_{\mathrm{sw}}\varepsilon_{\mathrm{sw}}^{1/3}}\varepsilon^{-1/3}\varepsilon_W\ell_{\mathrm{C}}^{4/3}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\frac{D\varepsilon}{Dt}-[3-A_W(\omega_{\mathrm{S0}},\omega_{W0})]\frac{1}{\varepsilon_W}\frac{D\varepsilon_W}{Dt}\right. \\ & \left.+\,[11-2A_W(\omega_{\mathrm{S0}},\omega_{W0})]\frac{1}{\ell_{\mathrm{C}}}\frac{D\ell_{\mathrm{C}}}{Dt}\right\}. \end{aligned} \tag{214}$$

正如我们在（202）中所看到的，湍流能量的谱 K 被假定表示为耗散率 ε 和波数 k的函数。在流体力学湍流建模中，我们可以从以下任意两个变量的组合构建一个闭合系统的模型方程： K_u（$=\langle \mathbf{u}'^2\rangle/2$）、其耗散率 ε_u以及 ℓ_{C}（$=2\pi/k_{\mathrm{C}}$）。为了保持模型在这些变量之间的可迁移性， K_u、 ε_u和 ℓ_{C} 应通过代数关系相互关联。否则，我们无法期待模型变量之间具有任何可迁移性。磁流体力学湍流也是如此

建模。如果保留（214）中的第一项，我们可以得到湍流交叉螺度的代数表达式：

$$W = 6 \cdot (2\pi)^{1/3} \sigma_{W0} \varepsilon^{-1/3} \varepsilon_W \ell_{\mathrm{C}}^{2/3}, \tag{215}$$

或者等价地，

$$\ell_{\mathrm{C}} = 6^{-3/2} (2\pi)^{-1/2} \sigma_{W0}^{-3/2} \varepsilon^{1/2} \varepsilon_W^{-3/2} W^{3/2}. \tag{216}$$

方程（215），对应于谱表达式（203），确保了 W、ε_W、ε 和 ℓ_{C}（$= 2\pi/k_{\mathrm{C}}$）之间的代数关系。

利用（216），我们将用 ε、ε_W 和 ℓ_{C} 表示的表达式（W214）转换为用 ε_W、ε 和 W 表示的表达式。因此，我们有

$$\frac{D\varepsilon_W}{Dt} = C_1(\omega_{\mathrm{S}0}, \omega_{W0}) \frac{\varepsilon_W}{\varepsilon} \frac{D\varepsilon}{Dt} + C_2(\omega_{\mathrm{S}0}, \omega_{W0}) \frac{\varepsilon_W}{W} \frac{DW}{Dt} \tag{217}$$

with

$$C_1(\omega_{\mathrm{S}0}, \omega_{W0}) = \frac{13 - A_W(\omega_{\mathrm{S}0}, \omega_{W0})}{39 - 8A_W(\omega_{\mathrm{S}0}, \omega_{W0})}, \quad C_2(\omega_{\mathrm{S}0}, \omega_{W0}) = \frac{33 - 6A_W(\omega_{\mathrm{S}0}, \omega_{W0})}{39 - 8A_W(\omega_{\mathrm{S}0}, \omega_{W0})}. \tag{218}$$

如果与交叉螺度相关的时间尺度与格林函数的时间尺度相近，如

$$\omega_{\mathrm{S}0} \varepsilon^{1/3} \simeq \omega_{W0} \varepsilon_W^{1/3}, \tag{219}$$

$A_W(\omega_{\mathrm{S}0}, \omega_{W0})$估算为

$$A_W(\omega_{\mathrm{S}0}, \omega_{W0}) \simeq 1/2. \tag{220}$$

于是，我们得到模型系数 C_1 和 C_2 (4.62)，如下

$$C_1(\omega_{\mathrm{S}0}, \omega_{W0}) \simeq \frac{12}{35} \simeq 0.34, \quad C_2(\omega_{\mathrm{S}0}, \omega_{W0}) \simeq \frac{6}{7} \simeq 0.86. \tag{221}$$

最终，我们得到交叉螺度耗散的演化方程（ε_W方程），如下

$$\frac{D\varepsilon_W}{Dt} = C_{\varepsilon_W 1} \frac{\varepsilon_W}{K} P_K - C_{\varepsilon_W 2} \frac{\varepsilon_W}{K} \varepsilon + C_{\varepsilon_W 3} \frac{\varepsilon_W}{W} P_W - C_{\varepsilon_W 4} \frac{\varepsilon_W}{W} \varepsilon_W \tag{222}$$

与模型常数

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon_W 1} &= C_1 C_{\varepsilon 1} = 0.34 \times 1.4 = 0.48, \\ C_{\varepsilon_W 2} &= C_1 C_{\varepsilon 2} = 0.34 \times 1.9 = 0.65, \\ C_{\varepsilon_W 3} &= C_{\varepsilon_W 4} = C_2 = 0.86. \end{aligned} \tag{223}$$

这里我们使用了

$$C_{\varepsilon 1} = 1.4, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9 \tag{224}$$

来自标准的 ε 方程。

在本文的表述中，交叉螺度耗散（ε_W 方程）是根据对速度和磁场涨落的理论分析推导得出的。由于交叉螺度谱同时取决于 ε 和 ε_W (201)，因此，ε_W 方程取决于 W方程和 ε 方程，如式（215）和（220）所示。

根据代数关系（215），交叉螺度耗散率 ε_W 可写为

$$\varepsilon_W = 6^{-1} \cdot (2\pi)^{-1/3} \sigma_{W0}^{-1} \frac{W}{\tau} \tag{225}$$

with

$$\tau = \varepsilon^{-1/3} \ell_{\mathrm{C}}^{2/3}. \tag{226}$$

方程（225）对应于 ε_W (188) 的最简单代数模型。这意味着，该简单代数模型可视为在多尺度重整化扰动分析框架下对湍流交叉螺度 W 进行的最低阶评估（197）。

5 恒星发电机中的交叉螺度效应

5.1 振荡与迁移发电机

螺度或 α 效应与差分旋转（即 Ω 效应）的结合，已在太阳磁场极性反转的背景下得到研究。具有代表性的振荡发电机模型之一，是包含 $\alpha-\Omega$ 发电机（Parker，1955年）的帕克方程。Parker（1955年）研究了一种由非均匀旋转和小尺度旋涡状或龙卷风状流体运动构成的发电机机制。非均匀旋转将极向磁场转化为环向磁场（即所谓的 Ω 效应）。在旋涡流体运动的作用下，极向磁场以环状磁场的形式从环向磁场再生（α 效应）。这种机制称为 α，即螺度发电机；对此已有大量深入研究（Moffatt，1978年；Krause & R¨ adler，1980年；Moffatt & Dormy，2019年）。平均磁场方程写作

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \nabla \times (-\beta \nabla \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B}). \tag{227}$$

在帕克模型中，α 效应通过扭曲湍流运动（螺度），由环向（方位向）磁场分量产生极向（纬向和径向）磁场分量；如图 19所示，差分旋转则产生环向磁场分量。我们考虑一个局部笛卡尔坐标系（x，y，z），其中 x、y 和 z 分别对应余纬向 θ、方位向 ϕ和径向 r 方向。我们假设系统在方位向上是均匀的

方向 $\partial/\partial\phi \simeq \partial/\partial y = 0$，且平均速度仅沿方位向或环向，表示为

$$\mathbf{U} = (U^x, U^y, U^z) = (0, U, 0) \tag{228}$$

其中余纬向和径向的速度剪切分别为 $\partial U/\partial x \simeq (1/r)\partial U/\partial\theta$ 和 $\partial U/\partial z \simeq \partial U/\partial r$。磁场分解为环向（方位）分量和极向（径向和余纬向）分量，即

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{B}_{\rm tor} + \mathbf{B}_{\rm pol} \\ &= (0, B^y, 0) + \nabla \times (0, A^y, 0) \\ &= (0, B^y, 0) + \left(-\frac{\partial A^y}{\partial z}, 0, \frac{\partial A^y}{\partial x}\right).\end{aligned} \tag{229}$$

下文为简化记号，省略下标 y。同时求解表示极向磁场的方位磁矢势 $A^\phi(\equiv A)$ 的演化方程，以及表示环向或方位磁场的磁场方位分量 $B^\theta(\equiv B)$。

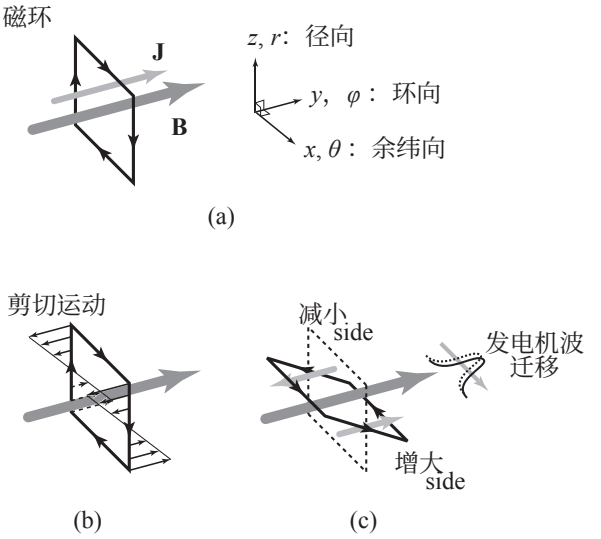


图19 发电机波迁移示意图。(a) 在局部笛卡尔坐标系（x、y、z）中，α 效应的作用产生磁场环。本图描绘的是 α 为正的情况。(b) 磁环因剪切运动而倾斜。(c) 磁场的迁移。

在这个笛卡尔坐标系中，最简单的帕克方程可以写为

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \beta\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \beta\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) + \alpha B, \tag{230}$$

58 未受重视的交叉螺度效应

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial z}. \tag{231}$$

这里，为简单起见，螺度或 α 效应 $\alpha\mathbf{B}$仅包含在极向场方程（230）中。这是因为我们假设 Ω 效应或差分旋转效应 $\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{U}$是环向场方程（231）的唯一生成机制。

这个最简单的方程组可能会产生振荡的极向和环向磁场。在太阳或恒星发电机的实际情况中，输运系数 α 和 β 取决于湍流的统计性质，而恒星系统中差分旋转 $G \equiv \partial U/\partial z$ 的强弱，则应由平均场与湍流之间的非线性相互作用决定。然而，为了理解方程组（230）和（231）的基本行为，考察 A 和 B 在将 α、 β 和 G 视为参数时的行为，将很有意义。适当选取参数 α、 β和 G，即可产生模拟太阳极性反转活动的振荡磁场。其行为取决于这些参数的取值。例如，通过考察一种旋涡型发电机波的行为，人们发现，若径向角速度梯度与 α 系数的乘积为负，发电机波就会从高纬度区域向低纬度区域迁移。鉴于太阳黑子随时间向赤道方向迁移，这表明太阳对流区中的角速度应满足

$$\alpha \frac{d\Omega}{dr} < 0 \quad \left(\alpha \frac{d\Omega}{dz} < 0 \right) \tag{232}$$

（帕克迁移发电机判据）。

在 $\alpha - \Omega$ 模型的框架下，这一判据的物理机制可以理解如下。在北半球，如果 α 系数为正（对应于负的动能螺度），则 α 效应会产生一个磁环，使得与该磁环相关的电流密度 J 可能与环向磁场 B 平行（而非反平行） [图19(a)]。自转速率沿径向向外方向递减（$d\Omega/dr < 0$）。由于 r 方向上的速度剪切，磁环较浅（ r较大）部分在环向或负 ϕ 方向上的移动速度快于较深（ r较小）部分，导致磁环发生倾斜 [图19(b)]。因此，磁场的环向或 ϕ分量在 θ 较小的区域减弱，而在 θ 较大的区域增强 [图19(c)]。于是，磁场的分布形态从高纬度（ θ较小）区域向低纬度（ θ较大）区域迁移。

5.2 交叉螺度效应下的振荡磁场

如第2.4节的（63）和第3.2.3节的（138）所示，在存在平均涡旋运动或旋转运动时，有限的湍流交叉螺度（$W \neq 0$）能够沿平均绝对涡量方向产生电动势（EMF）。若将这一交叉螺度效应纳入电动势表达式，则平均磁场方程可写为

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \nabla \times (-\beta \nabla \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} + \gamma \mathbf{\Omega}) . \tag{233}$$

其中，γ相关项表示电动势中的交叉螺度效应。湍流交叉螺度 W 本身预计会随平均磁场振荡并改变符号。因此，我们必须考虑交叉螺度的演化方程。根据湍流交叉螺度的演化方程，我们将输运系数 γ 的演化方程建模为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \beta \nabla^2 \gamma - \tau \mathbf{E}_{\mathrm{M}} \cdot \mathbf{\Omega} \\ &= \beta \nabla^2 \gamma - \alpha \tau \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Omega} + \beta \tau (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{\Omega} - \gamma \tau \mathbf{\Omega}^2 . \end{aligned} \tag{234}$$

此处，第一项或 $\beta \nabla^2 \gamma$ 源自交叉螺度输运率中的扩散项 $\nabla \cdot (\nu_{\mathrm{T}} / \sigma_W) \nabla W$。第四项或与 γ相关的项始终会减小 γ 的大小，因为 $-\tau \mathbf{\Omega}^2 < 0$。第三项或与 β 相关的项则通过平均电流与平均涡量的耦合，促使 γ 生成。

第二项或与 α相关的项 $-\alpha \tau \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Omega}$在交叉螺度的振荡中起着非常重要的作用。一旦极向磁场通过 α 效应由环向磁场生成，该项便使交叉螺度有可能生成。由于该项在交叉螺度的振荡中起着关键作用，我们将在太阳发电机的背景下进一步讨论该项的作用。

我们假定主导的发电机机制是交叉螺度效应，而 α效应是对参考态的扰动。我们将平均磁场和平均电流密度写为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \tag{235a}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_1, \tag{235b}$$

其中 $\mathbf{B}_0$ 和 $\mathbf{J}_0$ 是由交叉螺度效应产生的参考态，而$\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{J}_1$ 是由 α 效应产生的扰动场或调制场。将（235）代入平均感应方程，得到

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}_0 - \beta \mathbf{J}_0 + \gamma \mathbf{\Omega}), \tag{236}$$

60 未受重视的交叉螺度效应

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B_1} + \alpha \mathbf{B}_0 - \beta \mathbf{J}_1). \tag{237}$$

参考场方程 (236) 在稳态下有一个特殊解，如下所示

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\gamma}{\beta}\mathbf{U}. \tag{238}$$

将 (238) 代入 (239，可得调制场方程如下

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{U} \times \mathbf{B_1} + \frac{\alpha\gamma}{\beta}\mathbf{U} - \beta \mathbf{J}_1 \right). \tag{239}$$

这里，我们在极坐标系(r, θ, ϕ)中将平均速度 U 近似为环向速度，即 U $=(U^r, U^\theta, U^\phi) \simeq (0, 0, U^\phi)$。我们进一步假设 U 和 B 具有轴对称性。在低纬度区域，假设径向磁场较小（$B^r \simeq 0$），且环向速度的纬向梯度也较小（$\partial U^\phi/\partial\theta \simeq 0$）。在这些近似下，我们得到

$$\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}_1) \simeq \left(0, 0, B_1^r \frac{\partial U^\phi}{\partial r} + B_1^\theta \frac{1}{r} \frac{\partial U^\phi}{\partial \theta} \right) \simeq (0, 0, 0). \tag{240}$$

在这种情况下，调制场方程 (239) 在稳态下有一个近似的特殊解，如下所示

$$\mathbf{J}_1 = \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{B}_0 = \frac{\alpha\gamma}{\beta^2}\mathbf{U}. \tag{241}$$

该磁场对应于由环向场 B_0 通过 α 效应产生的调制极向磁场 B_1。

我们首先假设北半球的湍流交叉螺度为正（$\gamma > 0$）。在这种情况下，根据（241），调制电流密度 J_1 的方向由 α的符号决定。当 $\alpha > 0$时，它们与平均速度 U 平行；当 $\alpha < 0$时，则与 U 反平行。因此，调制磁场 B_1 在 $\alpha > 0$ [图20（a）] 中与 Ω 平行（$\mathrm{B}_1 \cdot \Omega > 0$），而在 $\alpha < 0$ [图20（b）]中与 Ω 反平行（$\mathrm{B}_1 \cdot \Omega < 0$）。无论 α 的符号如何，这都会导致 $P_W^{(\alpha)} = -\alpha \mathrm{B}_1 \cdot \Omega$ 恒为负

$$P_W^{(\alpha)} = -\alpha \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{\Omega} < 0 \quad \text{for} \quad \alpha \gtrless 0, \gamma > 0. \tag{242}$$

另一方面，如果北半球的交叉螺度为负（$\gamma < 0$），则无论 α 的符号如何，我们都有 $P_W^{\alpha} = -\alpha \mathrm{B}_1 \cdot \Omega > 0$

$$P_W^{(\alpha)} = -\alpha \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{\Omega} > 0 \quad \text{for} \quad \alpha \gtrless 0, \gamma < 0 \tag{243}$$

[图 20（c）和（d）]。

根据式（242）和（243），产生项 $P_W^{(\alpha)} = -\alpha \mathbf{B}_1 \cdot \Omega$ 总是产生符号与原有湍流交叉螺度符号相反的湍流交叉螺度。这可能导致交叉螺度振荡。

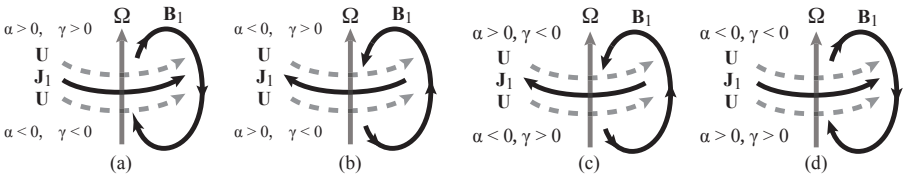


图2 由 α 效应引起的交叉螺度产生率 $P_W^{(\alpha)}$ 的符号。(a) 对于 $\alpha > 0$，$\mathrm{B}_1 \cdot \Omega > 0$；对于北半球，$\gamma > 0$（其他情况相同）；(b) 对于 $\alpha < 0$，$\mathrm{B}_1 \cdot \Omega < 0$，以及 $\gamma > 0$；(c) 对于 $\alpha > 0$，$\mathrm{B}_1 \cdot \Omega < 0$，以及 $\gamma < 0$；(d) 对于 $\alpha < 0$，$\mathrm{B}_1 \cdot \Omega > 0$，以及 $\gamma < 0$。

基于这一考虑，我们构建了一组由平均磁场方程和交叉螺度方程组成的演化方程。从式（233）和（234）可知，简化的发电机方程可写为如下形式

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) + \alpha B, \tag{244}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} = {} & \beta \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial U}{\partial z}\gamma - \frac{\partial U}{\partial x}\gamma - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\frac{\partial \gamma}{\partial z} \\ & - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial z}, \end{aligned} \tag{245}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = {} & \beta \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \right) - \alpha\tau \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial A}{\partial z} \right) \\ & + \beta\tau \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial z} \right) - \gamma\tau \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{246}$$

与（231）中一样，我们略去了环向磁场方程（245）中的 α 效应。注意，如果交叉螺度效应消失（$\gamma = 0$），该方程组就简化为标准的 Parker 方程（230）和（231）。

我们进一步假设，关于赤道存在某些对称性（$\theta = \pi/2$，$x = 0$），对于平均流速 U，α以及湍流磁扩散率 β：平均速度 U 关于赤道对称，螺度 α 反对称，并在 $\theta = \pi/2$处为零；$x = 0$湍流磁扩散率 β 在空间上均匀。对于 z 的径向或 A依赖关系，B以及 γ，我们假设其形式为 $\exp(ikz)$；对于平均速度，则假设为 $\partial U/\partial z = k_u U$。这样，方程组（244）—（245）可简化为形式大为简化的方程组，并对该简化方程组的正规模进行特征值分析。

图中绘出了（a）交叉螺度的空间分布 γ、（b）环向磁场 B^ϕ和（c）极向磁场 B^r 随时间的变化。图21中的（b）环向磁场 B^ϕ 和（c）极向磁场 B^r 的图表显示，磁场首先在高纬度区域生成，随后随着时间推移向低纬度区域迁移。

比较这三条等值线，可以清楚地看到 γ、 B^{ϕ}和 B^{r}之间的因果关系。首先生成正交叉螺度，随后由于交叉螺度效应，正环向磁场开始生成。接着，由于 α 效应，正极向磁场开始生成。正极向磁场生成后，正交叉螺度的幅值开始减小，最终出现负交叉螺度。负交叉螺度开始生成负环向磁场，从而使环向磁场发生反转。极性反转周期便如此进行。

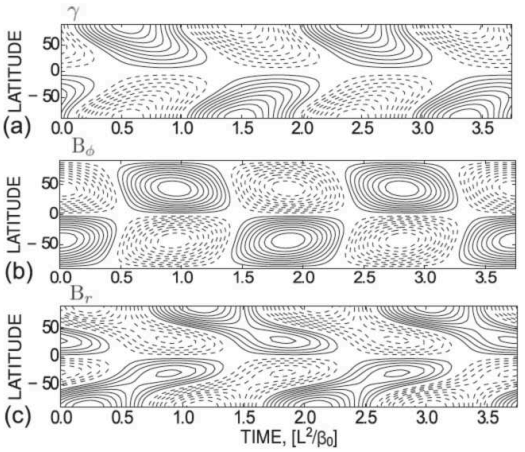


图21 纳入交叉螺度效应的简化发电机模型的蝴蝶图（交叉螺度与磁场的时空演化）。(a) 湍流交叉螺度的等值线由 γ [等值线范围为 -0.5、0。5], (b) 环向磁场 [-0.8、0。8], 和 (c) 极向磁场 [-0.2、0。2]表示。实线和虚线等值线分别表示正值和负值。改绘自Yokoi、Schmitt、Pipin 等 (2016)。

5.3 冷星中的交叉螺度效应

在标准 $\alpha - \Omega$发电机框架中，能否获得环向磁场及其在蝴蝶图中观测到的极性反转，取决于差分旋转的具体构型。若不存在差分旋转，这一框架便无法有效产生环向场。然而，已知一些全对流恒星的差分旋转非常微弱。观测表明，快速旋转且磁场强度达10千高斯的M型矮星，其表面差分旋转非常微弱（Donati、Morin、Petit 等人，2008；Morin、Donati、Petit 等人，2008）。直接数值模拟（DNS）表明，在产生磁场的全对流恒星中，差分旋转会受到强烈抑制（Browning，2008）。在没有差分旋转的情况下，全对流恒星中观测到的极强环向磁场

恒星无法用 α–Ω发电机来解释。正如我们在第2节讨论交叉螺度效应时所看到的，发电机效应的关键条件是湍流中的旋转（绝对涡度）和交叉螺度。因此，即使在刚体旋转的恒星中，这种效应也有望发挥作用。基于这一预期，研究了交叉螺度发电机在全对流恒星中的作用（Pipin & Yokoi，2018）。

基于平均磁场方程（233）和湍流交叉螺度方程（234），分析了简化方程组的特征值解，其中湍流电动势纳入了交叉螺度效应。对环向磁场、极向磁场以及湍流交叉螺度采用球谐分解。生成的磁场构型取决于磁场生成机制。在没有Ω效应或差分旋转效应时，螺度效应、交叉螺度效应及二者的组合构成磁场生成机制。模型的特征值分析结果见图22 和23。图$m = 0$显示了若干模态的时间演化（22（a）。在 $\alpha^2\gamma^2$ 模型中，轴对称模态（$m = 0$）可能占主导地位，也可能与非轴对称模态相当。这与 α^2 和 γ^2 发电机形成鲜明对比：后两者更倾向于产生非轴对称环向磁场。图22（b）为时间—纬度（蝴蝶）图，其中表面极向（径向）磁场以颜色表示，半径为 $r = 0.75R$ （R：表面半径）处的环向场以等值线表示。轴对称环向场随时间和纬度的演化与太阳的情况相似。图23 展示了发电机稳定阶段径向磁场和交叉螺度分布的快照。图23（a）以颜色表示表面交叉螺度分布，以等值线表示表面径向磁场分布（范围为 $\pm$ 1 千高斯）。该图显示，非轴对称磁场占主导地位，非轴对称交叉螺度分布也占主导地位。图23（b）和（c）展示了轴对称和非轴对称磁场的形态。

这些结果表明，在快速刚体旋转的情况下，纯 α^2 或纯 γ^2 发电机模型都不倾向于产生轴对称磁场，而 $\alpha^2 - \gamma^2$ 发电机模型则能够产生这种磁场。非轴对称磁场产生的交叉螺度有助于生成轴对称环向磁场。这一发现使我们看到，通过交叉螺度效应，有可能生成强度达数千高斯的轴对称偶极型磁场。这是一种新的发电机机制，可用于解释刚体旋转冷星中轴对称磁场的生成。

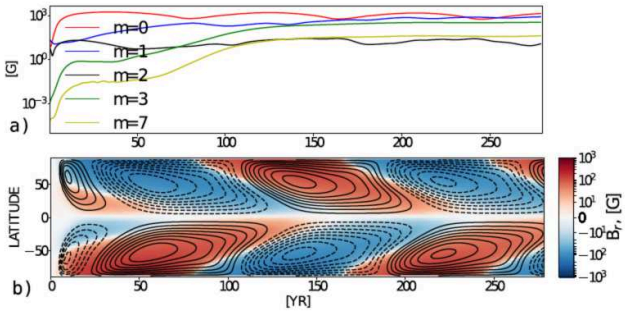


图22 应用于冷星的交叉螺度发电机模型。若干环向模态的磁场增长（上）以及环向磁场（等值线）和极向磁场的蝴蝶图（下） B^r （颜色）。改绘自 Pipin & Yokoi （2018）。

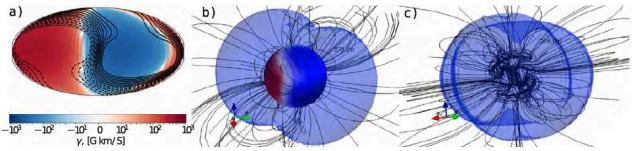


图23 湍流交叉螺度的空间分布 γ （颜色）和径向磁场（等值线）（左）；轴对称与非轴对称环向磁场的强度（中）；以及轴对称环向磁场（右）。改绘自 Pipin & Yokoi （2018）

6 交叉螺度驱动的流动生成

到目前为止，我们一直在磁场感应的背景下讨论交叉螺度效应。交叉螺度是速度和磁场之间的关联函数。第 3 节和第 5 节讨论的交叉螺度发电机，描述了流动对磁场的感应；而在存在湍流交叉螺度时，磁场也可能诱发流动。本节讨论交叉螺度效应在线动量和角动量输运中的作用。

6.1 雷诺应力与湍流麦克斯韦应力

雷诺应力和湍流麦克斯韦应力代表平均速度方程中的湍流动量通量。雷诺应力和湍流麦克斯韦应力的表达式（72）表明，除了由 $\nu_{\rm K}\boldsymbol{\mathcal{S}}(=\nu_{\rm K}\{\mathcal{S}^{ij}\}$ 表示的涡黏效应外，我们还有来自 $\nu_{\rm M}\boldsymbol{\mathcal{M}}(=\nu_{\rm M}\{\mathcal{M}^{ij}\})$ 和 $\boldsymbol{\Gamma\Omega}_*(=\{\Gamma^i\Omega^j\})$ 的贡献：

$$\langle u'^i u'^j - b'^i b'^j \rangle = +\frac{2}{3}K_{\rm R}\delta^{ij} - \nu_{\rm K}\mathcal{S}^{ij} + \nu_{\rm M}\mathcal{M}^{ij} + [\Gamma^i\Omega^j_* + \Gamma^j\Omega^i_*]_{\rm D}, \quad (247)$$

其中，等式右侧的第一项是 R 的对角部分所产生的贡献，可用湍流磁流体力学剩余能 $K_{\rm R}[\equiv (\langle \mathbf{u}'^2\rangle -$ 表示

$\langle \mathbf{b}'^2 \rangle)/2]$。Heinonen、Diamond、Katz 等人Heinonen, Diamond, Katz,et al.(2023)讨论了湍流交叉螺度在湍流磁流体力学剩余能量背景下的重要性。

在（247）中，涡黏性 ν_{K} 与湍流能量 K相关。另一方面，输运系数 ν_{M} 和 $\boldsymbol{\Gamma}$ 分别与湍流交叉螺度 W和湍流螺度梯度 ∇H相关。从（247）或（72）可以看出，湍流交叉螺度 $W(=\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle)$与平均磁场应变$\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 以及非均匀湍流动能螺度 $\nabla H(=\nabla \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle)$与平均绝对涡量$\Omega_*$ 相耦合，通过抵消涡黏性，促进线动量和角动量输运。

非均匀螺度 ∇H 效应对流体动力学湍流中的动量输运抑制和大尺度流动生成的作用，已通过理论和数值方法进行了研究（Yokoi & Yoshizawa, 1993；Yokoi & Brandenburg, 2016；Yokoi, 2023）。首先，非均匀螺度效应被应用于湍流旋流管道流。湍流旋流是指轴向管道流伴有绕管道轴线的周向流。没有周向流时，由于湍流产生强烈的动量输运，除近壁边界层外，管道流中的平均轴向流动在大部分区域都呈现非常平坦的速度分布。这与层流管道流的抛物线形轴向流速度分布形成鲜明对比。存在周向流时，平均轴向速度分布在中心轴附近会出现凹陷。从这个意义上说，在湍流旋流中，即使在极强湍流下，非均匀平均流结构仍能维持。湍流旋流的构型很简单，但采用涡黏性表示的标准湍流模型无法再现这种简单的流动构型。这一缺陷的主要原因被归结为高估了湍流黏度效应。通过在涡黏性模型中加入非均匀螺度（∇H）效应，成功再现了湍流旋流中平均轴向速度分布的凹陷。借助湍流模型模拟，验证了非均匀螺度效应对湍流动量输运的抑制作用。

近期，借助直接数值模拟（DNS），对水动力湍流中的非均匀螺度效应进行了进一步验证。研究考察了均匀旋转的三重周期盒中螺旋湍流的全局流动诱导。除旋转外，整个模拟过程中还通过强迫持续注入非均匀湍流螺度。从平均流为零的初始条件出发，直接数值模拟显示，非均匀湍流螺度与旋转耦合会诱导出沿旋转方向的全局平均流。研究还表明，在平均速度应变尚未出现的早期发展阶段，雷诺应力的空间分布与非均匀湍流螺度和旋转耦合后的空间分布吻合良好。在平均速度达到

稳态时的充分发展阶段，可以观察到涡黏项与非均匀螺度项之间的平衡。

这些湍流模型模拟和直接数值模拟清楚地表明，雷诺应力的涡黏性表示远远不够，因此，在缺乏镜像对称性的湍流建模中，应纳入非均匀湍流螺度效应。

6.2 动量输运中的交叉螺度效应

在磁流体力学湍流中，与平均磁场应变耦合的交叉螺度效应 $\nu_{\mathrm{M}}\boldsymbol{\mathcal{M}} = \nu_{\mathrm{M}}\{\mathcal{M}^{ij}\}$ 会出现在雷诺应力和湍流麦克斯韦应力表达式中（247）。涡黏项 $\nu_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \nu_{\mathrm{K}}\{\mathcal{S}^{ij}\}$总会通过增大有效黏度来破坏大尺度非均匀结构或增强湍流混合。与涡黏性不同，与交叉螺度相关的效应 $\nu_{\mathrm{M}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 则可能促成大尺度流动结构的形成，或抑制湍流混合，从而抵消涡黏性的作用。

由于雷诺应力和湍流麦克斯韦应力是二阶张量，因此要考察它们的物理起源和后果并非易事。这里，我们通过一个称为涡动力或惯性力的矢量 $\langle \mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}' \rangle$ 来考察这些性质；该矢量出现在平均涡量方程中，如下所示：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \cdots + \nabla \times \langle \mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}' \rangle + \cdots . \tag{248}$$

通过对其取反旋度，我们可以推测平均速度 U 受到涡动力的作用：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \cdots + \langle \mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}' \rangle + \cdots . \tag{249}$$

不过，实际的 U 应由边界条件确定，而取反旋度时会引入一个尚未确定的势函数。注意，涡动力 $\langle \mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}' \rangle$ 与雷诺应力 $\mathrm{R_K} = \{\mathcal{R}^{ij}{}_{\mathrm{K}}\} = \{\langle u'^i u'^j \rangle\}$ 之间存在如下精确关系

$$\langle \mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}' \rangle^i = -\frac{\partial \mathcal{R}^{ij}}{\partial x^j} + \frac{\partial K}{\partial x^i}. \tag{250}$$

我们来考察一个在垂直于平均电流密度 $\mathbf{J}$ 的平面内涨落的流体微团（图24）。平均电流密度本身的大小呈非均匀分布。我们假设速度涨落与磁场涨落彼此正相关的情形（正交叉螺度：$\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle > 0$）。

由于涨落洛伦兹力 $\mathrm{J} \times \mathrm{b}'$ 的一部分，会诱发速度涨落$\delta \mathrm{u}'$，其表达式为

$$\delta \mathbf{u}' = \tau_J \mathbf{J} \times \mathbf{b}', \tag{251}$$

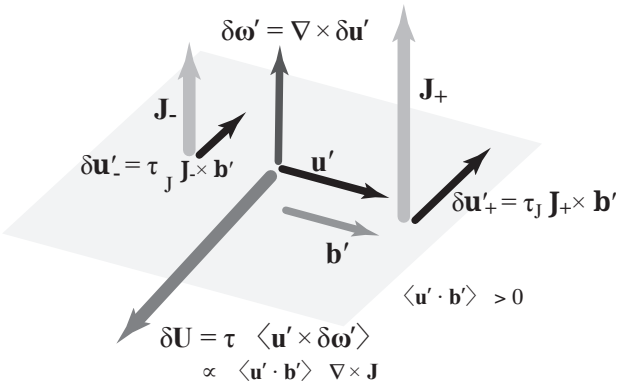


Fig. 24 通过涨落的洛伦兹力产生整体流动的湍流交叉螺度效应 伦兹力 J × b′。

其中， τ_J 是与涨落洛伦兹力诱发的运动相关的时间尺度。与这一速度涨落变化 $\delta\mathbf{u}'$相关的脉动涡量 $\delta\boldsymbol{\omega}'$ 表示为

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\omega}' &= \nabla\times\delta\mathbf{u}' \\ &= \tau_J\nabla\times(\mathbf{J}\times\mathbf{b}') \simeq \tau_J(\mathbf{b}'\cdot\nabla)\mathbf{J}.\end{aligned} \tag{252}$$

这表明，当磁场涨落感受到非均匀的平均电流密度时，就会诱发脉动涡量。脉动涡量的方向与平均电流 J 的方向一致，可以平行，也可以反平行，具体取决于平均电流密度的分布（J 的非均匀性）。

在诱发的速度涨落和涡量涨落共同作用下，涡动力 $\langle\mathbf{u}'\times\delta\boldsymbol{\omega}'\rangle$ 会诱发大尺度流。由于湍流涡旋力 $\langle\mathbf{u}'\times\boldsymbol{\omega}'\rangle$ 可能有助于沿着.....方向产生平均速度

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}\sim\langle\mathbf{u}'\times\boldsymbol{\omega}'\rangle, \tag{253}$$

我们预计 $\langle\mathbf{u}'\times\delta\boldsymbol{\omega}'\rangle$ 会诱发大尺度流。在存在非均匀平均电流密度 ∇J 的情况下，湍流交叉螺度效应可以产生整体流，如下所示

$$\delta\mathbf{U}=\tau\langle\mathbf{u}'\times\delta\boldsymbol{\omega}'\rangle\propto\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle\nabla\times\mathbf{J}=-\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle\nabla^2\mathbf{B} \tag{254}$$

沿着 $\nabla\times$J 的方向。这一结果表明，如果磁场强度在某个区域内空间集中（即相较于周围区域更强，如 ∇^2B <0），则在该磁场集中区域内可能诱导出沿平行于

平均磁场 B 的方向的整体流 ⟨U，前提是该处的湍流交叉螺度为正（$\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle > 0$）。如果该处的湍流交叉螺度为负（$\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle < 0$），则诱导出的整体流 δU 方向与平均磁场反平行。

这些论述表明，湍流交叉螺度与平均磁场剪切耦合，可能会诱发大尺度流。生成流动的方向取决于局部湍流交叉螺度的符号，以及由平均磁场剪切所表征的平均磁场空间分布。正如我们在（254）中所见，在平均磁场比周围区域更显著的位置（$\nabla^2 \mathbf{B} < 0$），当湍流交叉螺度为正（$\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle > 0$）时，会诱发平行于平均磁场 $\mathbf{B}$ 的整体流；当湍流交叉螺度为负（$\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle < 0$）时，则会诱发与 $\mathbf{B}$反平行方向的整体流。考虑到交叉螺度是速度和磁场之间的关联函数，这一结果是自然的。值得注意的是，对于均匀平均磁场，不会产生这种整体流动生成。

6.3 反剪切（RS）模式约束中的极向流生成

在第6.2节中，我们看到，湍流中非零的交叉螺度与平均电流密度$\mathbf{J}$的非平凡空间分布相结合，可以诱发整体流。这里我们将看到环形聚变等离子体中的一个实例（图25）（Yoshizawa、Yokoi、Itoh等人，1999年）。

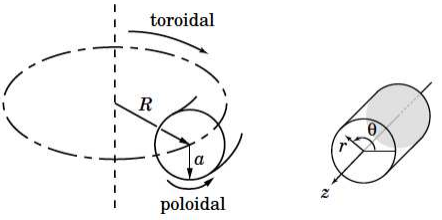


图25 托卡马克的几何结构（R：托卡马克环面的长半径，a：短半径，r：径向坐标）以及局部柱坐标系（r、θ、z）。环面几何中的环向和极向分别对应于柱坐标近似中的 z 和 θ-r 方向。

众所周知，在核心区域具有反向或负磁剪切的装置中，等离子体的约束性能会显著改善（Fujita，1997；Fujita、Oikawa、Suzuki 等，2001年）。在这种反剪切（RS）模式下，还观察到与最小值相关的极向旋转 q 区域 [图26（a）]。这里 q 安全因子定义为

$$q = \frac{rB^z}{RB^\theta}, \tag{255}$$

其中， r 和 R 分别为小半径和大半径， B^z 和 B^θ 分别对应环向磁场和极向磁场。

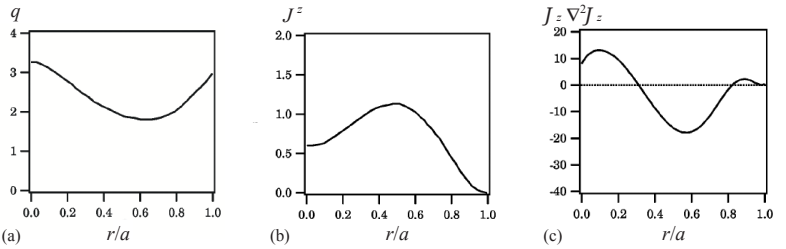


图26 反剪切（RS）模式约束中的径向分布：(a) 安全因子 q，(b) 等离子体环向电流密度 J^z，以及 (c) 由 $J^z\nabla^2 J^z$ 表示的平均电流密度非均匀性。

我们用柱坐标 (r,θ,z) 近似环面几何，其中环面几何中的环向和极向分别对应于 z 和 r-θ 方向。我们假设统计量沿中心小轴 $(\partial/\partial\theta = 0)$ 具有轴对称性，并忽略 z 依赖性 $(\partial/\partial z = 0)$。在此假设下，平均场可写为

$$\mathbf{B} = \left(0, B^\theta(r,t), B^z(r,t)\right), \tag{256a}$$

$$\mathbf{J} = \left(0, J^\theta(r,t), J^z(r,t)\right), \tag{256b}$$

$$\mathbf{U} = \left(0, U^\theta(r,t), U^z(r,t)\right), \tag{256c}$$

由此得到洛伦兹力

$$\mathbf{J}\times\mathbf{B} = \left(B^z J^\theta - B^\theta J^z,\ 0,\ 0\right). \tag{257}$$

我们将雷诺应力和湍流麦克斯韦应力$\boldsymbol{\mathcal{R}}$ 表达式（247）代入平均速度方程，并舍弃非均匀螺度效应 $\boldsymbol{\Gamma\Omega}$。若近似认为输运系数 ν_K 和 ν_M 在局部均匀，并忽略它们的空间导数，则动量方程可写为

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla\left(P_\mathrm{M} + \frac{2}{3}K_\mathrm{R}\right) + \frac{(U^\theta)^2}{r}\mathbf{e}_r + \mathbf{J}\times\mathbf{B} + \nu_\mathrm{K}\nabla^2\mathbf{U} - \nu_\mathrm{M}\nabla^2\mathbf{B}, \tag{258}$$

与湍流黏度 ν_K相比，分子黏度 ν 被忽略。

平均涡量 $\boldsymbol{\Omega}^z$ 的 z 分量代表极向旋转，其满足

$$\frac{\partial\Omega^z}{\partial t} = \nu_\mathrm{K}\nabla^2\Omega^z - \nu_\mathrm{M}\nabla^2 J^z, \tag{259}$$

70 未受重视的交叉螺度效应

其中 J^z 是 z 分量，即平均电流密度。没有交叉螺度效应 ν_{M}时，平均轴向涡度 $\mathbf{\Omega}^z$ 会因涡黏性 ν_{K} 效应而衰减。交叉螺度效应 ν_{M} 使得产生大尺度极向旋转成为可能。我们重点关注 ν_{M}效应。将 ν_{M} 表达式（77）代入（259），得到

$$\frac{\partial \Omega^z}{\partial t} = -\frac{5C_\gamma}{7}\frac{K}{\varepsilon} W \nabla^2 J^z + R_{\Omega 1}, \tag{260}$$

其中 $R_{\Omega 1}$ 表示所有其他项。对于交叉螺度 W 的演化，我们假设其产生率主要由 $P_W^{(\mathrm{E})}$ (178)决定，近似为

$$P_W^{(\mathrm{E})} \simeq \beta \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Omega}. \tag{261}$$

于是， W 的演化方程可写为

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \beta J^z \Omega^z + R_W = C_\beta \frac{K^2}{\varepsilon} J^z \Omega^z + R_W, \tag{262}$$

其中 R_W 表示所有其他项。由(260)和(262)，平均涡度方程可写为

$$\frac{\partial^2 \Omega^z}{\partial t^2} - \left(-\frac{5C_\beta C_\gamma}{7}\frac{K^3}{\varepsilon^2} J^z \nabla^2 J^z \right) \Omega^z = R_{\Omega 2}, \tag{263}$$

其中， $R_{\Omega 2}$ 表示所有其余贡献，本文不作讨论。

这表明，如果括号263中的量为正，则大尺度涡量可能增长，具体如下

$$\chi_\Omega^2 \equiv -\frac{5C_\beta C_\gamma}{7}\frac{K^3}{\varepsilon^2} J^z \nabla^2 J^z > 0, \tag{264}$$

其中， χ_Ω 表示 $\mathbf{\Omega}^z$ 的增长率。

在 RS 模式构型中，对应于核心区域内的最小 q 剖面，平均电流 J^z 的径向分布如图 26 （b）所示。相应的 $J^z \nabla^2 J^z$ 空间分布如图26 （c）所示。由（264）可知，整体极向旋转会在 $J^z \nabla^2 J^z < 0$的区域内诱发。

我们对 $K-\varepsilon-W$湍流模型进行了数值模拟。除包含雷诺应力和湍流麦克斯韦应力的平均速度方程外，还同时求解湍流磁流体能量 K、其耗散率 ε 以及湍流交叉螺度 W的方程。在初始阶段，整个模拟区域内均不存在交叉螺度 $W=0$；随后在某一时刻（交叉螺度起始时间 $t=80$），我们在整个 r 区域内外部注入与湍流磁流体能量 K成正比的交叉螺度 $W/K=0.5$。

我们的数值模拟表明，在交叉螺度出现之前，完全不会产生平均速度。然而，一旦交叉螺度被设定

后，平均极向速度便会在该区域产生 $J^z\nabla^2 J^z < 0$（图27）。

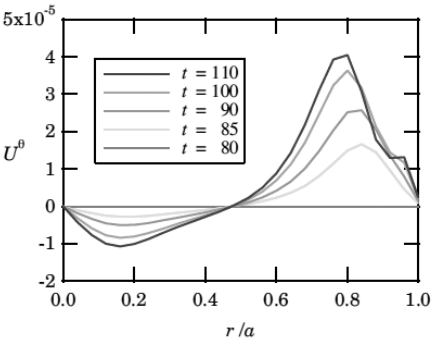


图27 极向速度 U^θ的时空演化。与湍流磁流体能量 K 成正比的湍流交叉螺度W 在交叉螺度起始时间（$t = 80$）开始出现。

当前最简单的湍流模型仍有很大的改进空间Yokoi、Rubinstein、Yoshizawa 等人（2008），但此例清楚地表明，湍流交叉螺度 W 与平均电流密度的非均匀空间分布$\mathbf{J}$ 相结合，可以诱发全局极向流。

7 磁重联中的交叉螺度效应

磁重联是一种重要情形，在这种情形下，动量输运和发电机中的交叉螺度效应都发挥着关键作用。从湍流输运的角度来看，磁重联的磁场构型被视为这样一种情形：磁场和速度的非均匀性会自发激发湍流，而流动和磁场则受到湍流输运的影响并由其决定。湍流交叉螺度的演化方程（157）结合（161）和（163）表明，在存在平均磁场时，湍流交叉螺度会普遍地产生，其产生机制与交叉螺度级联有关，或其输运机制与阿尔芬波传播的不对称性有关。这表明，湍流交叉螺度普遍存在于磁重联构型中。以往研究尚未充分探讨湍流交叉螺度在磁重联中的作用。本节将讨论这一问题。´

72 未被重视的交叉螺度效应

7.1 湍流磁重联的必要性

磁重联是将磁能转化为动能、并最终通过欧姆耗散转化为热的最高效机制。它被认为是天体物理对象中喷流形成、质量抛射和粒子加速的主要机制之一。磁重联也是太阳内部和大气中的一种基本过程。在太阳内部，磁场重联对于形成对流区或紧邻对流区下方日光层中的发电机磁场构型发挥着关键作用；而在太阳大气中，重联是太阳耀斑的核心过程，也是日冕加热的一种可能机制。

最简单的重联模型由 Sweet (1958年)和 Parker(1957年)提出。在这一 Sweet–Parker 模型中，重联被认为发生在一个薄的电流片中，其厚度为 Δ，宽度为 L，位于方向相反的重联磁场之间。在密度均匀的情况下 $\rho = \rho_0$，质量守恒给出

$$u_{\rm in} L = u_{\rm out} \Delta, \tag{265}$$

其中， $u_{\rm in}$ 是流入速度， $u_{\rm out}$ 是流出速度。若假设全部磁能都转化为动能，则能量通量守恒可表示为

$$\frac{1}{2\mu_0} b_{\rm in}^2 u_{\rm in} L = \frac{1}{2} \rho_0 u_{\rm out}^2 u_{\rm out} \Delta. \tag{266}$$

由（265）和（266），流出速度可计算为

$$u_{\rm out} = \frac{1}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} b_{\rm in} \equiv V_{\rm A}, \tag{267}$$

其中， $V_{\rm A}$ 是阿尔芬速度。也就是说，外流速度就是重联磁场的阿尔芬速度。

评估重联率的一种方法是计算流入马赫数 $M_{\rm in}$：对于给定的重联磁场 $u_{\rm in}$，会诱导出多大的流入 $b_{\rm in}$。利用（265）和（267），流入马赫数可表示为

$$M_{\rm in} = \frac{u_{\rm in}}{V_{\rm A}} = \frac{u_{\rm in}}{u_{\rm out}} = \frac{\Delta}{L}. \tag{268}$$

这表明，为了获得更高的重联率，更大的 Δ 和更小的 L 是有利的。

在 Sweet–Parker 模型中，进入扩散区的磁场 $(\mathbf{u}_{\rm in} \cdot \nabla)\mathbf{b}_{\rm in}$ 仅通过磁扩散率 $\eta \nabla^2 \mathbf{b}_{\rm in}$ 扩散。在这种情况下，

我们有 $b_{\rm in}u_{\rm in}/\Delta \sim \eta b_{\rm in}/\Delta^2$，因此得到

$$\Delta = \eta/u_{\rm in}. \tag{269}$$

将其代入 (7.4)，得到

$$M_{\rm in} = S_{\rm L}^{-1/2}, \tag{270}$$

其中， $S_{\rm L}$ 是定义如下的隆德奎斯特数

$$S_{\rm L} = \frac{V_{\rm A}L}{\eta} \tag{271}$$

（将速度替换为重联磁场的阿尔芬速度后的磁雷诺数）。在天体物理和空间物理现象中，隆德奎斯特数普遍极大（例如 $S_{\rm L} > 10^{12}$）。因此，Sweet–Parker 模型的重联率（270）过于缓慢（$M_{\rm in} < 10^{-6}$），无法解释天体物理和空间物理中观测到的快速重联。例如，太阳耀斑中的重联率观测值为 $M_{\rm in} = 10^{-3} - 10^{-1}$。

为克服 Sweet–Parker 模型的这一缺点，人们提出了若干有望解释快速重联的重联模型。例如，磁重联的 Petschek 模型中，慢激波发挥着关键作用；该模型实现了极小的扩散区，并有效降低了 L。

湍流重联是此类方法之一。首先，介质中的湍流运动通过增强且非均匀的湍流扩散率，影响磁重联的统计特性和动力学特性。在湍流存在时，磁力线会发生蜿蜒运动。因此，扩散的有效厚度也会增大，同时有效扩散率也会增强。正如我们在（268）中所见，这会促使重联率提高。对外部注入湍流中的磁重联进行的二维直接数值模拟（DNS）表明，注入湍流的强度越大，重联率越高。随着注入湍流强度的增加，重联率对隆德奎斯特数 $S_{\rm L}$ 的依赖关系——在最简单的 Sweet–Parker 标度关系中为 $M_{\rm in} \propto S^{-1/2}$ L ——会消失（Loureiro、Uzdensky、Schekochihin 等，2009）。这一直接数值模拟结果表明，在强湍流存在时，重联率取决的不是分子磁扩散率 η，而是湍流的非线性动力学。

通过外部强迫施加湍流来研究磁重联，是观察湍流对重联率影响的一种方法。同时，磁重联相关的磁场和速度构型确实高度非均匀。在大尺度上存在强磁场剪切和速度剪切（分别表现为电流密度和涡旋运动）的情况下，预计湍流会由这些非均匀的大尺度场

产生。事实上，平均场剪切通过与湍流通量（例如 $-\langle -u'^i u'^j + b'^i b'^j \rangle (\partial U^j/\partial x^i)$,$-\langle \mathrm{u}' \times \mathrm{b}' \rangle \cdot \mathrm{J}$ 等）耦合，作为自由能源促进湍流的产生。从这个意义上说，湍流是由磁重联相关的场构型自发产生的，无需借助外部强迫。

7.2 平均场与湍流场的模型方程组

本节将介绍一种非线性湍流建模方法，用于处理这种自发产生的湍流及其对磁重联的影响。该方法研究湍流输运作用下大尺度磁场的重联过程。同时，还考虑并求解平均磁场和速度场构型影响下湍流的演化。含湍流通量的平均场方程

描述磁重联的平均场方程由质量、动量、能量和磁感应方程给出：

$$\frac{\partial \langle\rho\rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle\rho\rangle \mathbf{U}) = 0, \tag{272}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho\rangle U^i + \frac{\partial}{\partial x_j}\langle\rho\rangle U^j U^i = -\frac{\partial}{\partial x^i}\langle\rho\rangle P + \frac{\partial}{\partial x^j}\mu \mathcal{S}^{ji} + \langle\rho\rangle \left(\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right)^i - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\langle\rho\rangle \mathcal{R}^{ij}\right), \tag{273}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left\{\langle\rho\rangle\left[\frac{P}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{U}^2 + \mathbf{B}^2\right) + \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2\right\rangle\right]\right\} \\ &= -\nabla\cdot\left\{\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}P + \frac{1}{2}\left(\mathbf{U}^2 + \langle \mathbf{u}'^2\rangle\right)\right]\langle\rho\rangle\mathbf{U} \right. \\ &\left. + \langle\rho\rangle\langle(\mathbf{U}\cdot\mathbf{u}')\mathbf{u}'\rangle + \langle\rho\rangle\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right\}, \end{aligned} \tag{274}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla\times\mathbf{E}. \tag{275}$$

根据欧姆定律，平均电场 E 表示为：

$$\mathbf{E} = -\mathbf{U}\times\mathbf{B} + \eta\mathbf{J} - \mathbf{E}_{\mathrm{M}}. \tag{276}$$

此处的湍流通量$\boldsymbol{\mathcal{R}}$ 和$\mathbf{E}_{\mathrm{M}}$ 分别由式（63）和（72）给出。

另一方面，湍动能的方程 K (155）、湍流交叉螺度 W (156）以及能量耗散率 ε (159）可表示为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\right)K = -\mathbf{E}_{\mathrm{M}}\cdot\mathbf{J} - \mathcal{R}^{ij}\frac{\partial U^i}{\partial x^j} - \varepsilon_K + \mathbf{B}\cdot\nabla W + \nabla\cdot\left(\frac{\nu_{\mathrm{K}}}{\sigma_{\mathrm{K}}}\nabla K\right), \tag{277}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\right)W=-\mathbf{E}_{\mathrm{M}}\cdot\boldsymbol{\Omega}-\mathcal{R}^{ij}\frac{\partial B^i}{\partial x^j}-\varepsilon_W+\mathbf{B}\cdot\nabla K+\nabla\cdot\left(\frac{\nu_{\mathrm{K}}}{\sigma_{\mathrm{W}}}\nabla W\right), \tag{278}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\right)\varepsilon=C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{K}P_K-C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{K}\varepsilon+\nabla\cdot\left(\frac{\nu_{\mathrm{K}}}{\sigma_\varepsilon}\nabla\varepsilon\right). \tag{279}$$

为简洁起见，我们考虑最简单的情形，即密度不变。此外，假设 R 和 $\mathrm{E_M}$ 中不存在螺度效应。于是它们可简化为

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{D}}=-\nu_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{S}}+\nu_{\mathrm{M}}\boldsymbol{\mathcal{M}}, \tag{280}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{M}}=-\beta\nabla\times\mathbf{B}+\gamma\boldsymbol{\Omega}. \tag{281}$$

在这种情况下，平均场方程可简化为关于平均速度 U 和磁场 B 的形式：

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}=\mathbf{U}\times\boldsymbol{\Omega}+\mathbf{J}\times\mathbf{B}+\nu_{\mathrm{K}}\nabla^2\left(\mathbf{U}-\frac{\gamma}{\beta}\mathbf{B}\right)-\nabla\left(P+\frac{1}{2}\mathbf{U}^2+\frac{1}{2}\langle\mathbf{b}'^2\rangle+\frac{2}{3}K_{\mathrm{R}}\right), \tag{282}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{U}\times\mathbf{B})-\nabla\times[\beta\nabla\times\mathbf{B}]+\nabla\times(\gamma\boldsymbol{\Omega}), \tag{283}$$

其中，分子黏度和磁扩散率 ν 和 η 已被忽略，因为它们的量级远小于湍流对应项 ν_{K} 和 β。

对（282）取旋度，可得平均涡度方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t}=&\nabla\times\left[\left(\mathbf{U}-\frac{\gamma}{\beta}\mathbf{B}\right)\times\boldsymbol{\Omega}+\nu_{\mathrm{K}}\nabla^2\left(\mathbf{U}-\frac{\gamma}{\beta}\mathbf{B}\right)\right]\\&+\nabla\times\left[\mathbf{F}+\frac{1}{\beta}(\mathbf{U}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\times\mathbf{B}\right].\end{aligned} \tag{284}$$

为了理解湍流交叉螺度在动量输运中的作用，我们将平均场量分为两部分。速度 U 和涡量 Ω 分别分解为：

$$\mathbf{U}=\mathbf{U}_0+\delta\mathbf{U},\quad\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Omega}_0+\delta\boldsymbol{\Omega}. \tag{285}$$

这里，$\mathbf{U}_0$ 和Ω_0 是不受平均磁场影响的平均场，$\mathbf{B}$而 $\delta\mathbf{U}$ 和 $\delta\Omega$ 是通过湍流交叉螺度表示$\mathbf{B}$ 一阶效应的平均场。将（285）代入（284），可得零阶场方程：

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_0}{\partial t}=\nabla\times\left(\mathbf{U}_0\times\boldsymbol{\Omega}_0+\nu_{\mathrm{K}}\nabla^2\mathbf{U}_0+\mathbf{F}\right), \tag{286}$$

以及一阶场方程为

$$\frac{\partial\delta\boldsymbol{\Omega}}{\partial t}=\nabla\times\left[\left(\delta\mathbf{U}-\frac{\gamma}{\beta}\mathbf{B}\right)\times\boldsymbol{\Omega}_0+\nu_{\mathrm{K}}\nabla^2\left(\delta\mathbf{U}-\frac{\gamma}{\beta}\mathbf{B}\right)\right]. \tag{287}$$

方程（286）描述了 Ω_0, 的演化，该演化受湍流黏度 ν_{K} 和外力 $\mathbf{F}$的影响。另一方面，（287）描述了 $\delta\Omega$ 由湍流交叉螺度效应引起的演化。从（287）可见，对于给定的平均涡量结构 Ω_0, 稳态的一个特解为

$$\delta\mathbf{U} = \frac{\gamma}{\beta}\mathbf{B} = C_{W/K}\frac{W}{K}\mathbf{B}. \tag{288}$$

该解表明，湍流交叉螺度会诱导出沿平均磁场 B 方向的大尺度流 δU。湍流交叉螺度为正时（$W > 0$），诱导流的方向与 B 平行；湍流交叉螺度为负时（$W <$**0**），诱导流的方向与 B 反平行。请注意，若不存在湍流交叉螺度（$W = 0$），则不会观察到这种平均流动诱导。

对平均感应方程也可进行类似推导（283）。将平均磁场 $\mathbf{B}$ 和平均电流密度 $\mathbf{J}$分别写为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}_0, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \delta\mathbf{J}_0, \tag{289}$$

并将（289）代入（283），可得

$$\frac{\partial\mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{U}\times\mathbf{B}_0) - \nabla\times(\beta\nabla\times\mathbf{B}_0) \tag{290}$$

$$\frac{\partial\delta\mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{U}\times\delta\mathbf{B}) - \nabla\times\left[\beta\nabla\times\left(\delta\mathbf{B} - \frac{\gamma}{\beta}\mathbf{U}\right)\right] \tag{291}$$

对于一阶场。

方程（290）描述平均磁场 $\mathbf{B}_0$,的演化，该演化受湍流磁扩散率影响。另一方面，方程（291）描述湍流交叉螺度效应导致的平均磁场感应 $\delta\mathbf{B}$ 。方程（291）意味着

$$\delta\mathbf{B} = \frac{\gamma}{\beta}\mathbf{U} = C_{W/K}\frac{W}{K}\mathbf{U} \tag{292}$$

是在稳态下的一阶磁场感应 $\delta\mathbf{B}$ 的一个特解。该解（292）表明，对于给定的磁场$\mathbf{B}_0$, 平均磁场 $\delta\mathbf{B}$ 可由湍流交叉螺度效应沿平均速度 $\mathbf{U}$的方向感应产生。当湍流交叉螺度为正时， $\delta\mathbf{B}$ 的方向与 $\mathbf{U}$ 平行（$W > 0$）；当交叉螺度为负时，则与 $\mathbf{U}$ 反平行（$W < 0$）。若不存在湍流交叉螺度（$W = 0$），则不会观测到这种感应。

速度诱导（288）和磁场感应（292）是自然的，因为交叉螺度代表了

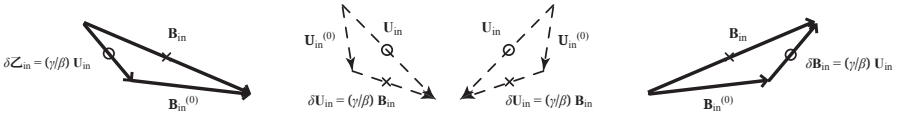
速度和磁场之间的关联函数。需要指出的是，这些平均场感应由湍流场中的交叉螺度（$W = \langle \mathrm{u}' \cdot \mathrm{b}' \rangle$）介导。

这些平均场感应可能通过调节流入速度和重联磁场，使磁重联得以增强（图28）。存在湍流交叉螺度效应时（292），会感应出平均磁场 $\delta \mathrm{B}_{\mathrm{in}}$。随后，不存在交叉螺度效应时的参考重联磁场 $\mathrm{B}^{(0)}{}_{\mathrm{in}}$ 会调制为 B_{in}，即

$$\mathbf{B}_{\mathrm{in}} = \mathbf{B}_{\mathrm{in}}^{(0)} + \delta \mathbf{B}_{\mathrm{in}} = \mathbf{B}_{\mathrm{in}}^{(0)} + \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{U}_{\mathrm{in}}^{(0)}. \tag{293}$$

同时，由于湍流交叉螺度效应（288），会感应出平均速度 $\delta \mathrm{U}_{\mathrm{in}}$。随后，不存在交叉螺度效应时的参考流入速度 $\mathrm{U}^{(0)}{}_{\mathrm{in}}$ 会调制为 U_{in}，即

$$\mathbf{U}_{\mathrm{in}} = \mathbf{U}_{\mathrm{in}}^{(0)} + \delta \mathbf{U}_{\mathrm{in}} = \mathbf{U}_{\mathrm{in}}^{(0)} + \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{B}_{\mathrm{in}}^{(0)}. \tag{294}$$



(a) (b)

图28 交叉螺度效应引起的重联磁场和流入速度的调制。在湍流交叉螺度为正的区域（$\gamma > 0$）（a）和湍流交叉螺度为负的区域（$\gamma < 0$）（b）中，流入速度的方向均变得不那么垂直于电流片，而重联磁场 $\mathbf{B}_{\mathrm{in}}$ 则变得与电流片更加倾斜。改绘自Yokoi 和 Hoshino (2011)。

如图28所示，流入速度和重联磁场受到交叉螺度效应的调制。调制方向取决于湍流交叉螺度的符号。在（a）正交叉螺度（$\gamma > 0$）和（b）负交叉螺度（$\gamma < 0$）两种情况下，调制后的流入速度 U_{in} 相较于参考流入速度 $\mathrm{U}^{(0)}$ in 更不垂直于电流片，而调制后的重联磁场 B_{in} 相较于参考重联磁场 $\mathrm{B}^{(0)}$ in 与电流片的夹角更大。这种调制使重联率公式中由流入马赫数 M_{in}（268）定义的 Δ/L 值增大。因此，受到湍流交叉螺度效应调制的流入速度 U_{in} 和重联磁场 B_{in} 有利于快速重联。重联率的增强源于场构型的调制，相对于参考态的增强程度取决于归一化交叉螺度 γ/β，或等价地取决于 W/K。Yokoi & Hoshino (2011) 对这一效应进行了评估。

7.3 重联模型方程的数值模拟

在上一小节中，我们基于湍流通量的表达式，通过微扰展开的方式评估了湍流交叉螺度效应导致的平均速度和磁场调制， $\delta\mathbf{U}$ 和 $\delta\mathbf{B}$。结果（288）和（292）表明，湍流交叉螺度通过平均场调制促进快速重联。然而，为了获得一般情况下的平均场和湍流场构型，我们必须对模型方程组进行数值求解。

7.3.1 纳入湍流演化的湍流磁重联模型

模型方程组由平均场方程（272）-（275）以及湍流通量（雷诺应力、湍流麦克斯韦应力和湍流电动势）（280）和（281）组成，并纳入了湍流统计量（湍流能量、湍流交叉螺度和湍流能量耗散率）的方程（277）-（279）。通过求解平均场和湍流场，可确保模型模拟的自洽性，包括可实现性以及平均场与湍流场之间的非线性相互作用。

首先，利用模型方程进行了第一系列模型模拟。在这些初步模拟中，没有求解 ε 方程（279），而是将湍流能量和交叉螺度的耗散率 ε_K 和 ε_W近似为

$$\varepsilon = \frac{K}{\tau}, \tag{295}$$

$$\varepsilon_W = C_W \frac{W}{\tau}, \tag{296}$$

其中 C_W 是模型常数（Higashimori、Yokoi 和 Hoshino，2013；Yokoi、Higashimori 和 Hoshino，2013）。在（295）和（296）中， τ 是表示湍流弛豫的湍流特征时间尺度，并在每次模拟中设为常数。为研究湍流与重联之间的关系，通过使用参数 τ ，在不同模拟中改变 C_τ 的值，该参数定义为

$$\tau = C_\tau \tau_0. \tag{297}$$

由于 C_τ 决定了湍流的特征时间尺度，因此它控制着湍流能量 ε_K的耗散率。如果 C_τ 远小于 $\mathbf{1}$（$C_\tau \ll 1$），湍流能量的耗散率就非常高，因此随着时间推移，湍流水平会变得非常低。另一方面，如果 C_τ 远大于 $\mathbf{1}$（$C_\tau \gg 1$），湍流能量的耗散率就非常低，湍流水平则会变得非常高。我们针对不同的 C_τ 值进行了数值模拟。对于初始湍流场，我们将湍流能量 $K = 1.0 \times 10^{-2}$ 和 $W = 0$ 设置为处处相同。

重联过程的效率可以通过定义的重联通量来衡量:

$$\Lambda = \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx \|B^z\|_{z=0} / (B_0^x L_x). \tag{298}$$

重联磁通量 Λ 随 C_τ 绘于图 29。该图显示，在区域 $C_\tau \lesssim 0.5$ 和 $2.0 \lesssim C_\tau$，Λ 很小，而在这些区域之间存在一个区域 $0.5 \lesssim C_\tau \lesssim 2.0$ ，其中重联磁场通量 Λ 会 Λ 远大于其他区域。较小的 C_τ 区域可称为层流磁重联区域，因为该处湍流能量的弛豫时间尺度极短，湍流水平非常低。另一方面，较大的 C_τ 区域可称为湍流扩散区域，因为该处湍流能量的弛豫时间尺度极长，湍流水平非常高。在这些区域之间，还存在一个 Λ大得多的区域，这意味着重联率更高。该区域可称为湍流磁重联区域。

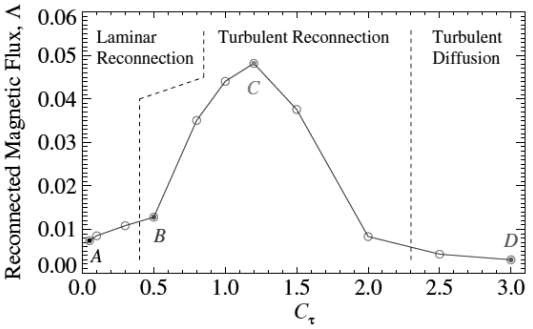


图2重联磁通量 Λ （298）与 $t/\tau_A = 254$ 的对比 C_τ。改绘自Higashimori、Yokoi 和 Hoshino（2013）

在这三种机制，即层流磁重联、湍流磁重联和湍流扩散机制中，各场构型之间存在明显差异。图中显示了层流磁重联（ y 时刻平均电流密度的分量（$t/\tau_A = 254$）、湍流磁重联（$C_\tau = 0.05$）以及湍流扩散（$C_\tau = 1.2$）机制下的等高线，见图30。

层流重联机制（上图）呈现出 Sweet–Parker 型的磁场构型，并具有一定幅度的外流。另一方面，在湍流重联机制（中图）中，磁场构型更接近 Petschek 型。也就是说，深度较小的薄重联区 Δ 在 $X = 0$附近集中得多。从这个意义上说，其宽度L 远小于层流重联

80 未受重视的交叉螺度效应

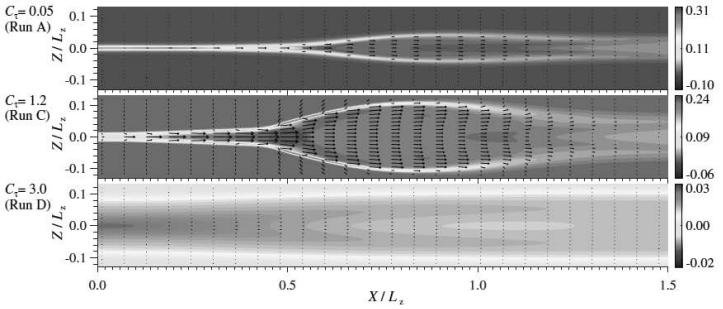


图 **30** y $t/\tau_{\mathrm{A}} =$ 层 254 $C_\tau = 0.05$ $C_\tau = 1.2$ 流重联（）、湍流磁重联（）和湍流扩散（$C_\tau = 3.0$）中的平均电流密度分量等值线图。黑色箭头表示流速矢量。改绘自 Higashimori、Yokoi 和 Hoshino (2013)。

机制中的对应值。在湍流重联机制中，外流速度大得多，并且具有某种 y 分量。这种流动速度的调制与交叉螺度效应导致的趋势相符。在湍流扩散机制中，由于湍流造成的强扩散率，磁场分布得更为宽广。在这一机制中，我们并未观察到层流和湍流重联机制中所见的任何特定重联。因此，在该机制中未观察到强外流。这可以解释为，湍流水平在各处都过高，重联磁场过度扩散，因而无法发生重联。

我们通过在整个模拟过程中人为地将湍流交叉螺度 $W = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$ 设为零（$W = 0$），并将结果与湍流交叉螺度非零的情况（$W \neq 0$）进行比较，考察了湍流交叉螺度在湍流磁重联中的作用。

湍流交叉螺度通过两种方式使湍流扩散率 β 效应的空间分布局域化；（i）一种方式是通过第 4.2 节中提到的机制使能量局域化，从而使 β 的空间分布局域化；（ii）另一种方式是通过交叉螺度效应 $\gamma\Omega$ 抑制湍流扩散效应 β J。我们在此阐述这几点。

图 31 比较了使用 K 方程（277）计算得到的湍流磁流体能量的空间分布。上图显示了同时求解湍流交叉螺度 K 方程 W （278）时 W 的空间分布。中图显示了相应的湍流交叉螺度分布。正如我们根据 W 与平均电流密度 $\mathbf{J}$ 和平均涡量 Ω 耦合相关的产生机制所预期的那样，$-\beta\mathbf{J} \cdot \Omega$，湍流交叉螺度呈现四极状空间分布。下图显示了不含湍流交叉螺度（$W = 0$）时湍流磁流体能量的分布。在这种情况下，整个计算时段内，整个计算区域中的湍流交叉螺度都被人为设为零（$W = 0$）。我们可以清楚地看到，含有 K 和不含 $W \neq 0$ 的情况下，$W = 0$分布存在显著差异。当存在湍流交叉螺度 $W \neq 0$ 时，

湍流磁流体能量 K 在X点附近明显更加集中。X点附近的 K 比没有交叉螺度时高得多。由于湍流扩散率 β 基本上与湍流磁流体能量 K成正比，这表明存在湍流交叉螺度时，湍流磁扩散率 β 比不存在湍流交叉螺度时更加集中于X点附近，且数值高得多。

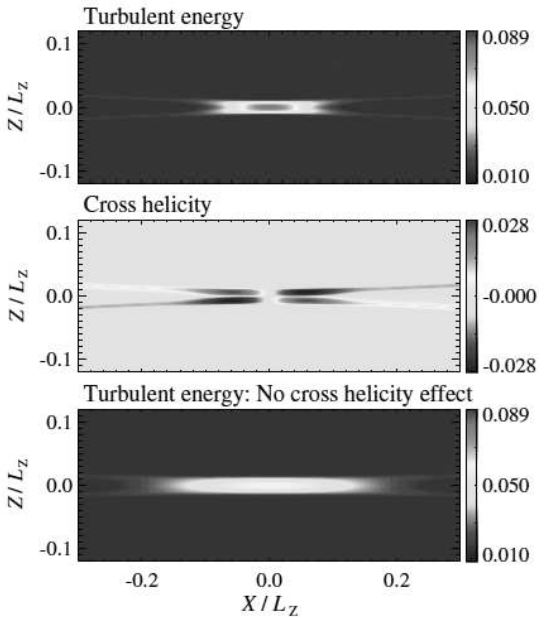


图3 湍流磁流体能量的空间分布 K 和交叉螺度 W。湍流磁流体能量 K 在湍流交叉螺度有限时的分布 $W \neq 0$ （上）。湍流交叉螺度的分布（中），以及不存在湍流交叉螺度时湍流磁流体能量的分布 $W = 0$。改绘自Higashimori、Yokoi 和 Hoshino(2013)。

X点附近湍流磁扩散率的这种集中或局域化，是由 K 以下机制产生的W 平均磁场方向上的非均匀性， $T_{(\mathrm{B})K} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)W$(174)。湍流交叉螺度的非均匀性对应于阿尔芬波沿平行与反平行方向传播的不对称性，从而导致穿过边界的能量通量不平衡（详见第4.1节和图14）。随后，在X点附近交叉螺度非均匀区域内会形成强烈局域化的湍流磁流体能量。

另一种用于局域化有效湍流扩散率效应的交叉螺度效应，可能是由于交叉螺度效应 $\gamma\Omega$ 抑制了湍流扩散效应 $\beta\mathrm{J}$ 所致。由电动势表达式可知

给出的（281）可知，有效湍流磁扩散率效应 $\beta\mathbf{J}$ 可通过湍流交叉螺度效应 $\gamma\mathbf{\Omega}$ 改变，如下所示：

$$\beta\mathbf{J} \rightarrow \beta\mathbf{J} - \gamma\mathbf{\Omega}. \tag{299}$$

这表明，在存在湍流交叉螺度 $W = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$并与平均涡旋运动 $\mathbf{\Omega}(= \nabla \times \mathbf{U})$耦合时，交叉螺度效应可能会改变湍流磁扩散率。由于湍流能量和湍流交叉螺度的空间分布通常不同，因此有效湍流磁扩散率可能发生空间局域化。在湍流交叉螺度大小相对较高的区域，$\|\beta\mathbf{J}\|$ 受到 $\|\gamma\mathbf{\Omega}\|$的抑制必然更加有效。从这个意义上说，该区域的湍流磁扩散率效应受到有效抑制。另一方面，在湍流交叉螺度大小相对较低的区域，这种抑制效应必然减弱，因此该区域会维持相对较强的湍流磁扩散率效应。图 32示意性地描绘了湍流磁扩散率效应有效局域化的概念。

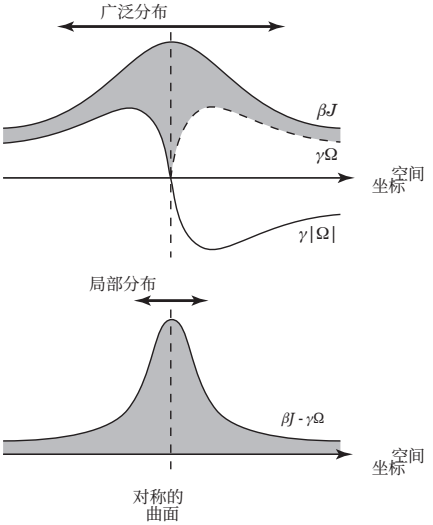


图32 湍流磁扩散率有效局域化的示意图 $\beta\mathbf{J}$ 由湍流交叉螺度效应的空间分布引起 $\gamma\mathbf{\Omega}$。湍流磁扩散率效应 $\beta\mathbf{J}$ 与湍流交叉螺度效应 $\gamma\mathbf{\Omega}$ 的空间分布（上）。湍流磁扩散率效应与湍流交叉螺度效应之差的空间分布，$\beta\mathbf{J} - \gamma\mathbf{\Omega}$。改绘自 Yokoi、Higashimori 和 Hoshino (2013)。

由于湍流交叉螺度W 相对于坐标呈反对称分布，交叉螺度效应在$\mathbf{X}$点附近应当消失。湍流交叉

螺度由以下空间分布表示： $\gamma\|\Omega\|$。这与湍流磁流体能量K的空间分布形成鲜明对比；后者在整个空间坐标范围内呈现广泛的正定分布，并在X点附近达到最大值。由于湍流交叉螺度 W 以及相应的 γ 符号由平均涡量Ω决定， $\gamma\Omega$在X点处始终为正 [或等于零] （图32 上图）。 βJ 与 $\gamma\Omega$的空间分布差异，导致 $\beta J - \gamma\Omega$的有效局域化。强湍流磁扩散率局限于X点附近；由于湍流交叉螺度的符号反转，交叉螺度导致的抑制效应在此处消失。

图 33 显示了以下分量的空间分布： z (a) 湍流磁扩散率效应， $-\beta\mathbf{J}$；(b) 湍流交叉螺度效应，$\gamma\Omega$；以及 (c) 两者之和， $-\beta\mathbf{J} + \gamma\Omega$。

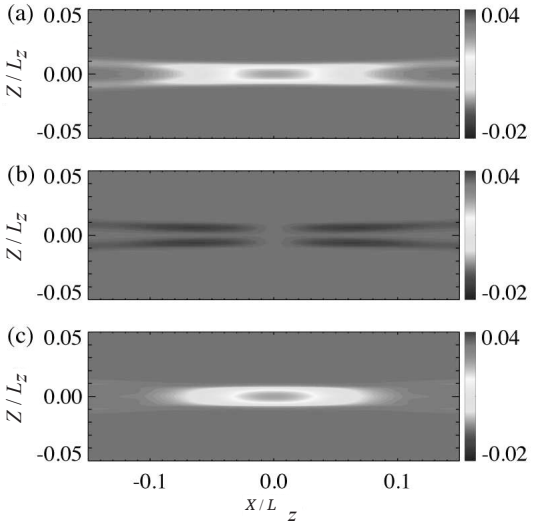


图33 湍流电动势（EMF）中的平衡效应。(a) 湍流磁扩散率效应 $\beta\mathbf{J}^z$、(b) 湍流交叉螺度效应 $\gamma\Omega^z$，以及 (c) 湍流磁扩散率效应与湍流交叉螺度效应之差 $\beta\mathbf{J}^z - \gamma\Omega^z$。改绘自 Yokoi、Higashimori 和 Hoshino (2013)。

反映湍流磁流体能量空间分布的 K 如图所示31（上图），湍流磁扩散率效应 $-\beta\mathbf{J}$ 在空间中广泛分布，包括与平均电流密度在四个方向上的尾部相对应的长尾 [参见图中所示的平均电流密度等值线30 （中图）]。交叉螺度效应 $\gamma\Omega$ 相对较弱，并且在 X 点附近消失。这

这可由湍流交叉螺度的反对称分布预期得到。由于尾部区域的交叉螺度分布相对较广， $\gamma\Omega$ 必然有助于减弱此类尾部区域中 $-\beta\mathbf{J}$ 的作用。由于交叉螺度的这种减弱效应，湍流磁扩散率效应 $-\beta\mathbf{J}$ 在概念上如图所示的那样，有效地局限于X点区域附近。32。

所有这些湍流磁流体能量 K （以及湍流磁扩散率 β）和湍流交叉螺度 W （以及交叉螺度效应 γ）的计算，都是通过同时求解 K 和 W方程完成的。但湍流的时间尺度 τ 被视为一个参数，如（295）和（296），其中（297）。

为了以自洽的方式求解湍流模型方程组，必须同时求解湍流耗散率方程 ε （Widmer, B¨uchner & Yokoi，2019年）。在本研究中，通过求解 ε 方程以及湍流能量 K 方程，依据湍流的非线性动力学自洽地确定湍流的时间尺度。时间尺度用湍流能量 K 及其耗散率 ε 表示为

$$\tau = \frac{K}{\varepsilon}. \tag{300}$$

从这个意义上说，湍流的强度取决于湍流与平均场之间相互作用的非线性动力学。

考察了在几种不同初始湍流水平下重联率的时间演化（图34）。重联率定义为单位时间内的重联磁通量， $\partial_t\phi/(B_0V_\mathrm{A})$，将其绘制为时间 t/τ_A的函数，以比较不同初始湍流水平（$K_0 = 0.01$、0.05 和 0.1）的情况。无论初始湍流水平如何，所有情况下的重联率最终都达到相同水平，且远高于无湍流的电阻性MHD情况（η-MHD 情况）。这与此前将湍流时间尺度 τ 作为参数的数值模拟（图34）形成鲜明对比。

在自洽的湍流模型中，湍流能量耗散率 ε 和湍流磁流体能量 K均通过求解得到，因此湍流的演化受湍流自身非线性动力学的支配。湍流时间尺度会自行调整，且无论初始湍流水平如何，重联率最终都会达到同样较高的水平（快速重联）。这表明，如果湍流由重联磁场的非均匀性产生，且其能量通过自身的非线性动力学耗散，那么湍流水平会达到适于实现快速磁重联的程度。重联率不取决于初始湍流水平。这种情况与通过外部强迫注入湍流能量，或将能量耗散率 ε 设为参数的情况截然不同。

然而，湍流交叉螺度在磁重联中的作用，被认为与将时间尺度作为参数给出的情况相似。

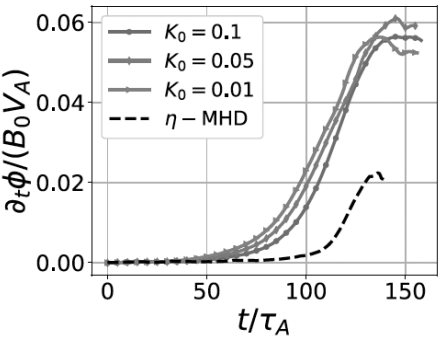


图34 初始湍动能可变时磁重联率的时间演化。不同初始湍动能水平下磁重联率的时间演化 $\partial_t\phi/(B_0V_A)$，初始湍动能水平分别为（$K_0 = 0.01$，0.05 和 0.1）。图中还绘出了无湍流的 η-磁流体力学情形。改绘自Widmer, B¨uchner & Yokoi (2019年)。

由平均场非均匀性自发产生的湍流交叉螺度，有助于局部化湍流扩散效应，从而实现快速重联。这一点可从图 K中的湍流磁流体能量 W、湍流交叉螺度、湍流磁流体能量耗散率以及湍流时间尺度 $\tau = K/\varepsilon$ 的空间分布中看出。35。

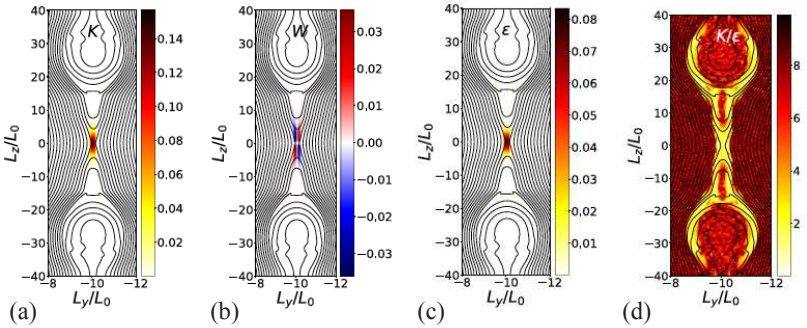


图35 (a) 湍流磁流体能量 K、(b) 湍流交叉螺度 W、(c) 湍流磁流体能量耗散率 ε（右侧第二幅）以及 (d) 湍流时间尺度 $\tau = K/\varepsilon$的空间分布。磁重联达到饱和时刻 $t/\tau_A = 150$的空间剖面。初始湍流水平为 $K_0 = 0.01$，磁扩散率为 $\eta = 10^{-5}$。改绘自Widmer, B¨uchner & Yokoi (2019年)。

.....的空间分布 K 和 W 与湍流时间尺度 τ 作为参数给定的数值模拟结果（图31）基本相似。.....的空间分布 ε 与 K的对应分布相似。这反映了 ε 方程（279）在形式上与 K 方程（277）相似。然而，由 τ =K/ε 定义的湍流时间尺度完全不是均匀的。这与参数 τ为常数的情况存在一定差异。

86 未受重视的交叉螺度效应

湍流统计量的产生、耗散和输运率 K、 W以及 ε分别遵循演化方程（277）、（278）和（279）。 K、 W 和 ε 的收支如图36所示。

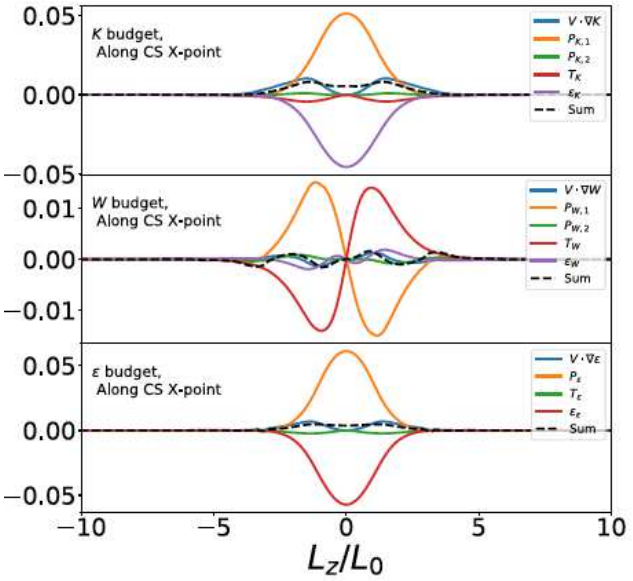


图36 湍流磁流体能量的收支 K （上），交叉螺度 W （中），以及能量耗散率 ε （下）沿包含X点的电流片绘出。收支绘于时刻 $\tau/\tau_{\mathrm{A}} = 120$，磁扩散率为 $\eta = 10^{-4}$。改绘自 Widmer, B¨uchner & Yokoi (2019年)。

与参数为 τ 的情形类似，湍流磁流体能量 K 的生成主要归因于产生率 $P_{K,\ 1} = -\beta \mathrm{J}^2$ （式（277））（图36，上图）。此外，与沿平均磁场的湍流交叉螺度非均匀性相关的输运项 $T_K = (\mathbf{B} \cdot \nabla)W$ （式（277））通过在$P_{K,\ 1}$的尾部区域产生负的 K，有助于使 K 分布局域化。这是湍流交叉螺度增强磁重联的显著效应之一。

湍流交叉螺度的产生 W 主要归因于平均涡量与平均电流密度耦合所产生的产生率 $P_{W,\ 1} = -\beta \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Omega}$ 见（278）（图 36，中）。这一效应在一定程度上被与平均磁场方向上湍流磁流体能量非均匀性相关的输运项抵消，$T_W =$（$\mathbf{B} \cdot \nabla$）K 见（278）。

由于与重联磁场 B 及其空间变化相关的湍流交叉螺度产生机制，重联点周围普遍存在湍流交叉螺度。这种湍流交叉螺度在周围的普遍存在

重联点为交叉螺度发挥作用、促进快速磁重联提供了环境，其作用途径是通过交叉螺度在磁场感应以及动量和角动量传输中的效应。湍流交叉螺度与平均速度剪切耦合会诱导出平均磁场，而湍流交叉螺度与平均磁场剪切耦合则会诱导出平均速度。我们认为，这些交叉螺度效应通过改变重联磁场和速度构型，有助于提高磁重联率。

然而，我们应当注意到，与上述数值模拟不同，一些数值模拟中并未报告非平凡的交叉螺度构型，例如四极分布（Nowak,Kowal & Falceta-Goncalves，2022）。这种差异应与湍流生成机制有关。在上文讨论的数值设置中，湍流由非均匀磁场和速度构型自发生成。在这种情况下，自然会形成非平凡的湍流交叉螺度分布。这与湍流由外部强迫均匀生成的情况大不相同。为了清楚地理解交叉螺度在湍流快速重联中的作用，我们还必须进一步研究湍流重联中湍流交叉螺度生成的条件。

8 总结

从输运的角度来看，湍流的主要作用是增强混合过程。平均动量方程中雷诺应力的涡黏性表述，以及平均磁场方程中湍流电动势所体现的湍流磁扩散率，都是湍流增强混合过程的典型效应。另一方面，我们观察到极强湍流中存在若干令人惊叹的持久大尺度结构及其生成过程。为了阐明湍流中的这类大尺度结构，我们需要涡黏性和扩散以外的其他机制。这些机制应当产生反扩散效应，以抵消湍流黏度和扩散效应，并抑制增强的输运。动能螺度、电流螺度和交叉螺度等赝标量的效应，以及与相干脉动运动（羽流、热泡和喷流）相关的非平衡效应，都是反扩散机制的典型候选因素。

本文借助多尺度重整化微扰展开理论（结合多尺度分析与直接相互作用近似（DIA）），从基本方程出发，系统地推导出湍流电动势、雷诺应力和湍流麦克斯韦应力的解析表达式。引入最低阶（或

背景）涨落场的非镜面对称分量后，湍流通量的表达式中也会出现赝标量统计量以及纯标量统计量。

强调了交叉螺度效应在磁场感应和动量输运中的重要性。除了发电机中的动能螺度和电流螺度效应（α 效应），以及涡旋发电机中的非均匀动能螺度效应外，交叉螺度效应还体现在湍流电动势以及雷诺应力和麦克斯韦应力的表达式中。这些赝标量效应有望代表反向扩散或反扩散效应，以平衡涡扩散率和黏度效应；后两者代表湍流导致的有效输运增强。

$$\mathbf{E}_{\mathrm{M}} = \overbrace{-\eta_{\mathrm{T}}\mathbf{J}}^{\substack{\text{turb. mag.}\\ \text{diffusivity}}} \underbrace{+\gamma\boldsymbol{\Omega}}_{\substack{\text{cross-hel.}\\ \text{effect}}} \underbrace{+\alpha\mathbf{B}}_{\substack{\text{hel.}\\ \text{effect}}}, \tag{301}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{D}} = \overbrace{-\nu_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{S}}_{\mathrm{D}}}^{\substack{\text{turb.}\\ \text{viscosity}}} \underbrace{+\nu_{\mathrm{M}}\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathrm{D}}}_{\substack{\text{cross-hel.}\\ \text{effect}}} \underbrace{+(\boldsymbol{\Gamma\Omega}_{*})_{\mathrm{D}}}_{\substack{\text{hel.}\\ \text{effect}}}, \tag{302}$$

其中，下标 D 表示张量的偏差部分或无迹部分。

本文还强调了在平均场方程中对湍流效应进行自洽且系统处理的重要性。要自洽地描述湍流现象，就应同时全面考虑平均场与湍流场之间的相互作用（图 37）。换言之，这个问题称为闭合问题，而以往对发电机和动量输运的研究尚未对此进行充分探讨。例如，在一些发电机研究中，人们通过分别考察平均磁场、旋转、扩散率等因素的影响，讨论发电机效应的猝熄或饱和。然而，这类论述往往只选取某些特定项（平均磁场、旋转、分子扩散率、黏度等）作为依据。因此，这些猝熄论述的有效性很大程度上取决于所考虑的具体构型。

湍流通量表达式中的输运系数由湍流的统计性质和动力学行为决定。我们对磁流体力学湍流进行了多尺度重整化微扰展开分析。我们系统地推导出了平均场方程中的湍流通量表达式，包括输运系数的解析表达式。根据这些解析表达式，系数可由适当的单点湍流统计量表示，例如湍流能量、动能螺度、电流螺度和交叉螺度。通过同时考虑并求解统计量的输运方程以及平均场方程，我们构建出一个自洽的

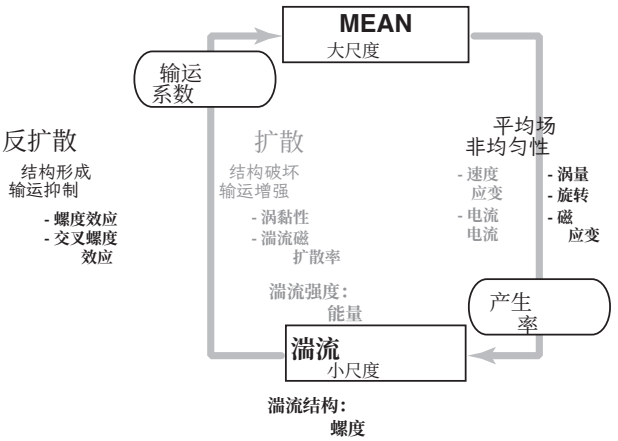


图37 平均场与湍流场的自洽湍流建模。扩散效应与反扩散效应之间的平衡也应在自洽闭合框架中加以处理。

模型方程系统。在这一框架下，平均场方程中的湍流输运系数由湍流统计量的输运方程决定。这些输运方程包括湍流统计量的产生、耗散和输运率，而这些量受平均场非均匀性的影响。因此，该湍流模型能够自洽地确定平均场和涨落场的演化。从这个意义上说，本方法提供了一个新框架，能够处理极强湍流中的全局结构形成，远超以往基于启发式的湍流建模方法（Yokoi, 2018c）。

致谢。作者感谢 PatDiamond 邀请其撰写这篇关于交叉螺度效应的文章。本研究得到日本学术振兴会（JSPS）科学研究补助金 JP18H01212 的资助。作者于 2022 年 5 月和 6 月在北欧理论物理研究所（NORDITA）访问期间完成了部分研究。作者还感谢剑桥的艾萨克·牛顿数学科学研究所，在其开展本论文相关工作的 DYT2 计划期间提供支持与接待。本研究还得到 EPSRC 项目资助，编号 EP/R014604/1。

声明

作者不存在利益冲突。

参考文献

Balbus, S. A. 和 Hawley, J. F.《吸积盘中的不稳定性、湍流和增强输运》，《现代物理评论》70，1–53（1998）。

90 未受重视的交叉螺度效应 Brandenburg, A. “带有熵雨的恒星混合长度理论”，Astrophys. J. 832, 6（2016）。Browning, M. K. “全对流恒星中发电机作用的模拟”，Astrophys. J. 676, 1262–1280（2008）。doi:10.1086/527432 Dobrowolny, M., Mangeney, A. 和 Veltri, P. “行星际空间中充分发展的各向异性磁流体湍流”，《物理评论快报》45, 144（1980a）。Dobrowolny, M., Mangeney, A., 和 Veltri, P. “太阳风中磁流体湍流的性质”，《天文学与天体物理学》83（1980b），26。Donati, J.-F., Morin, J., Petit, P., Delfosse, X., Forveille, T., Auri`eres, F., Cabanac, R., Dintrans, B., Fares, R., Gastine, T., Jardine, M. M., Ligni`eres, F., Paletou, F., Ramires Velez, J. C., 和 Th`eado, S. “早期M型矮星的大尺度磁拓扑结构”，《皇家天文学会月报》390, 545–560（2008）。doi:10.1111/j.1365-2966.2008.13799.x Duarte, L. D. V., Wicht, J, Browning, M. K. 和 Gastine, T. “球形对流中的螺度反转作为向赤道传播的发电机波的一种机制”，《皇家天文学会月刊》456, 1708–1722（2016）。Fujita, T. “聚变等离子体约束中负磁剪切的效应（1）：实验研究综述”，《等离子体与聚变研究》73, 549,（1997）。Fujita, T., Oikawa, T., Suzuki, T., Ide, S., Sakamoto, Y., Koide, Y. Hatate, T., Naito, O., Is ayama, A., Hayashi, N., Shirai, H. “JT-60U中近乎零中心电流密度托卡马克的等离子体平衡与约束”，《物理评论快报》87, 245001（2001）。Green, G., Vlaykov, D. G., Mellado, J. P., 和 Wilczek, M. “瑞利–贝纳德对流中超结构的已解析能量收支”，《流体力学杂志》887, A21（2020）。doi:10.1017/jfm.2019.1008 Hamba, F. “代数雷诺应力模型的欧几里得不变性与弱平衡条件”，《流体力学杂志》569, 399–408（2006）。doi:10.1017/S0022112006003041 Hamba, F. 和 Sato, H. “平均场发电机理论中的湍流输运系数与剩余能量”，《等离子体物理学》15, 022302（2008）。doi:10.1063/1.2839767 Hanasoge, S. M., Duvall, T. L., 和 Sreenivasan, K. R. 2012. “异常微弱的太阳对流”，《美国国家科学院院刊》，109, 11928（2012）。

Hanasoge，S.、Gizon，L. 和 Sreenivasan，K. R.，“太阳对流的地震探测”，《流体力学年度评论》48，191–217（2016）。doi:10.1146/annurev-fluid-122414-034534

Heinonen，R. A.、Diamond，P. H.、Katz，M. F. D. 和 Ronimo，G. E.，“弱湍流 β- 平面磁流体力学中的动量输运生成”，《物理评论E》107，025202（2023）。doi:10.1103/PhysRevE.107.025202

Higashimori，K.、Yokoi，N. 和 Hoshino，M.，“爆炸性湍流磁重联”，《物理评论快报》110，255001（2013）。doi:10.1103/PhysRevLett.110.255001

Hossain, M. Gray, P.C., Pontius Jr. D.H., Matthaeus, W. H. 和 Oughton, S.《均匀磁流体湍流中能量主导涡旋衰减的现象学》，Phys. Fluids 7 2886（1995）。

Krause,F. 和 R¨adler, K.-H.《平均场磁流体力学与发电机理论》（1980年，Pergamon Press，牛津）。

Loureiro,N. F., Uzdensky, D. A., Schekochihin, A. A. 和 Cowley, T. A.《二维湍流磁重联》，《皇家天文学会月刊》399, L146–L150（2009）。

Matthaeus, W. H., Oughton, S., Pontius Jr. D. H. 和 Zhou, Y.《太阳风中能量主导湍流涡旋的演化》，J. Geophys. Res. 99, 19267（1994）。

Mizerski, K. A.、Yokoi, N. 和 Brandenburg, A. “非平衡湍流中交叉螺度效应对 α 型发电机的影响”，已提交至《等离子体物理学杂志》，第 1–24 页（2023年）。doi:10.5281/zenodo.7683615

Moffatt, K.《导电流体中的磁场生成》（1978年，剑桥大学出版社，剑桥）。

Moffatt, K. 和 Dormy, E.《自激流体发电机》（2019年，剑桥大学出版社，剑桥）。

Morin, J.、Donati, J.-F.、Petit, P.、Delfosse, X.、Forveille, T.、Albert, L.、Auri´ere, M.、Cabanac, R.、Dintrans, B.、Fares, R.、Gastine, T.、Jardine, M. M.、Lingni` eres、Paletou, F.、Ramirez Velez, J. C. 和 Th`eado, S. “中等质量 M 型矮星的大尺度磁拓扑结构”，《皇家天文学会月报》390，567–581（2008）。doi:10.1111/j.1365-2966.2008.13809.x

Nowak, N.、Kowal, G. 和 Falceta-Goncalves, D. A.，《湍流随机磁重联中的电动势生成及其影响》，《等离子体物理学》28，062310（2022）。

92 未受重视的交叉螺度效应 Parker, E. N. “磁流体发电机模型”, Astrophys. J. 121, 293–314（1955年）。Parker, E. N. “导电流体中磁场合并的Sweet机制”, 《流体力学杂志》62, 509–520（1957年）。Pipin, V. 和 Yokoi, N. “对流全球交叉螺度发电机中大尺度磁场的生成”, Astrophys. J. 859, 18-1–11,（2018）。https://doi.org/10.3847/1538-4357/aabae6 Pouquet, A. 和 Yokoi, N. “螺旋流体与（Hall）磁流体动力学湍流：简要综述”, Phil. Trans. R. Soc. A380, 20210087（2022）。doi.org/10.1098/rsta.2021.0087 Pouquet, A., Frisch, U. 和 L´eorat, J. “强磁流体动力学螺旋湍流与非线性发电机效应”, 《流体力学杂志》77, 321–354（1997）。Proxauf, B. “大尺度太阳流的观测”, 博士论文, Georg-August Universit¨at G¨ottingen arXiv: 2106.07251（2021年）。http://doi.org/10.53846/goediss-8502 Rahbarnia, K., Brown, B. P., Clark, M. M., Kaplan, E. J., Norberg, M. D., Rasmus, A. M., Taylor, N. Z., Forest, C. B., Jenko, F. 和 Limone, A. “液态钠实验中对湍流电动势和磁场输运的直接观测”, Astrophys. J. 759, 80-1–6（2012）。doi:10.1088/0004-637X/759/2/80 Ranjan, A. 和 Davidson, P. “地球发电机数值模拟中动能螺度的空间分离”, 见《地球物理学、天体物理学及其他领域中的螺度》第16章, K. Kuzanyan, N. Yokoi, M. Georgoulis 和 R. Stepanov（编）AGU图书（2023, Wiley, 纽约）。Rast, M. P. “可压缩羽流动力学与稳定性”, 《流体力学杂志》369, 125–149（1998）。Rogachevskii, I. 和 Kleeorin, N. “非线性湍流磁扩散与平均场发电机”, 《物理评论E》64, 056307（2001年）。Schumacher, J. 和 Sreenivasan, K. R. “专题综述：太阳对流的异常动力学”, 《现代物理评论》92, 041001（2020）。doi:10.1103/RevModPhys.92.041001 Sch¨ussler, M. 和 Ferriz-Mas, A. “磁通管与发电机问题”, 载于《非线性发电机进展》, A. Ferriz-Mas 和 M. Nunez（编）, 第123–146页（2003, 泰勒与弗朗西斯, 伦敦）。

Shakura, N. I. 和 Sunyaev, R. A.《双星系统中的黑洞：观测表现》，《天文学与天体物理学》24，337-355（1973年）。Stribling, T. 和 Matthaeus, W. H.《低阶三维磁流体力学模型中的弛豫过程》，《物理学：流体 B》3，1848（1991）。Sur, S. 和 Brandenburg, A.《Yoshizawa效应在Archontis发电机中的作用》，《皇家天文学会月刊》399，273–280（2009）。Sweet, P. A.《太阳耀斑的中性点理论》，载于第6届国际天文学联合会专题讨论会《宇宙物理学中的电磁现象》，第123–134页（1958年）。Thiffeault, J.-L.《动力系统的协变时间导数》，J. Phys. A: Math. Gen. 34，5875–5885（2001）。doi:10.1088/0305-4470/34/29/309 Ting, A.C.、Montgomery, D. 和 Matthaeus, W. H.《磁流体力学中的湍流弛豫过程》，Phys. Fluids 29，3261（1986年）。Tobias, S. M.《湍流发电机》，《流体力学杂志》912，P1（2021年）doi:10.1017/jfm.2020.1055 Vasil, G. M.、Julien, K. 和 Featherstone, A.《旋转抑制巨尺度太阳对流》，《美国国家科学院院刊》118，31，e2022518118-1–9（2021年）。doi,org/10.1073/pnas.2022518118 Widmer, F.、B¨uchner, J. 和 Yokoi, N.《磁流体力学中湍流磁重联的亚网格尺度描述》，《等离子体物理学》23，04231（2016）。doi.org/10.1063/1.4947211 Widmer, F.、B¨uchner, J. 和 Yokoi, N.《通过湍流动力学表征等离子体团块重联》，《等离子体物理学》23，092304（2016）。doi.org/10.1063/1.4962694 Widmer, F.、B¨uchner, J. 和 Yokoi, N.《通过自洽确定湍流时间尺度分析快速湍流重联》，《等离子体物理学》26，102112（2019年）。doi: 10.1063/1.5109020 Yokoi, N.《交叉螺度及相关发电机》，Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.，107，114–184（2013）。doi.org/10.1080/03091929.2012.754022 Yokoi, N.《强可压缩磁流体湍流中的电动势》，J. Plasma Phys. 84，735840501-1-26（2018a）。doi:10.1017/S0022377818000727 Yokoi, N.《强可压缩磁流体湍流中的质量和内能输运》，J. Plasma Phys. 84，775840603-1-30（2018b）。doi:10.1017/S0022377818001228

Yokoi, N. “超越启发式建模的湍流发电机：螺度与密度方差”，AIP Conf. Proc. 1993, 020010-1-12（2018）。doi.org/10.1063/1.5048720

Yokoi, N. “湍流、输运与重联”，第177–265页，D. MacTaggart、A. Hillier（编）《磁流体动力学拓扑、重联与稳定性理论专题》第6章，CISM国际力学科学中心591，（2020，Springer，Cham）doi.org/10.1007/978-3-030-16343-3-6

Yokoi, N. “螺旋流体湍流中的输运”，K. Kuzanyan、N. Yokoi、M. Georgoulis和R. Stepanov（编）《地球物理学、天体物理学及其他领域中的螺度》第3章，AGU图书（2023，Wiley，纽约）。

Yokoi, N. 和 Balarac, G. “磁流体动力学流动中的交叉螺度效应与湍流输运”，《物理学杂志：会议系列》318，072039-1-10（2011）。doi:10.1088/1742-6596/318/7/072039

Yokoi, N. 和 Brandenburg, A. “非均匀螺度产生的大尺度流”，《物理评论E》93，033125-1–14（2016）。doi:10.1103/PhysRevE.93.033125

Yokoi, N. 和 Hoshino, M. “磁重联中的流动–湍流相互作用”，《等离子体物理学》18，111208（2011）。doi:10.1063/1.3641968

Yokoi, N. 和 Yoshizawa, A. “非均匀湍流中螺度效应的统计分析”，Phys. Fluids A 5，464-477（1993）。

Yokoi, N.、Higashimori, K. 和 Hoshino, M.，《湍流磁重联中的输运增强与抑制：一种自洽湍流模型》，《等离子体物理学》20，122310（2013）。doi.org/10.1063/1.4851976

Yokoi, N.、Masada, Y. 和 Takiwaki, T.，《利用羽流对恒星对流输运进行建模——I：双重平均公式中的非平衡湍流效应》，《皇家天文学会月刊》516，2718–2735（2022）。doi.org/10.1093/mnras/stac1181

Yokoi, N.、Rubinstein, R.、Yoshizawa, A. 和 Hamba, F.，《磁流体力学等离子体的湍流模型》，J. Turb. 824，9，37-1–25（2008）。doi:10.1080/14685240802433057

Yokoi, N., Schmitt, D., Pipin, V., andHamba, F. “恒星活动周期的新型简易发电机模型”，Astrophys. J. 824, 67 (2016). doi:10.3847/0004- 637X/824/2/67

Yoshizawa，A.《雷诺应力偏离其涡黏性表示的统计分析》，Phys. Fluids，27，1377–1387（1984）。

Yoshizawa, A. “反转场箍缩和行星磁场的自洽湍流发电机建模”，《物理学：流体 B》，2，1589–1600（1990年）。

Yoshizawa, A.、Yokoi, N.、Itoh, S.-I. 和 Itoh, K. “电场输运抑制和等离子体旋转产生的磁流体动力学机制，特别关注托卡马克的反剪切约束”，《等离子体物理学》，6，3194–3206（1999年）。