arXiv:2303.01846v1 [math.AP] 3 Mar 2023

$(H_p - L_p)$ 沃尔什-傅里叶级数的 NÖRLUND 均值子列的型不等式

DAVID BARAMIDZE[1,2], LARS-ERIK PERSSON[2,3*], KRISTOFFER TANGRAND[2], GEORGE TEPHNADZE[1]

[1]格鲁吉亚大学科学与技术学院，梅拉布·科斯塔瓦街77a号，第比利斯0128，格鲁吉亚。

[2]挪威北极大学计算机科学与计算工程系，邮政信箱385号，N-8505纳尔维克，挪威。

[3]卡尔斯塔德大学数学与计算机科学系，65188卡尔斯塔德，瑞典。

*通讯作者：Kristoffer Tangrand（电子邮箱：ktangrand@gmail.com）

摘要。我们研究由非递增凸序列生成的 Walsh 系统下诺尔隆德平均的子列 $\{t_{2^n} f\}$。特别地，我们证明，这类求和方法中有很大一类从鞅 Hardy 空间 H_p 到空间 $weak - L_p$ 并不有界，其中 $0 < p < 1/(1+\alpha)$，且 $0 < \alpha < 1$。此外，我们推导出一些新的相关不等式。作为应用，我们指出了针对一些著名求和方法的若干已知和新结果，尤其是 Nörlund 对数均值和 Cesàro 均值的相关结果。

2000年数学主题分类。26015, 42C10, 42B30。

关键词和短语： Walsh系统、诺尔隆德平均、Cesàro 均值、Nörlund 对数均值、鞅 Hardy 空间、收敛、发散、不等式。

1. 引言

本引言中使用的术语和记号可见第2节。

Walsh系统是紧阿贝尔群的特征标群这一事实，将 Walsh 分析与抽象调和分析联系起来；这一发现由 Fine [6] 和 Vilenkin [36]独立作出。关于群上的 Haar 测度和调和分析的一般参考资料，见 Pontryagin [27], 、Rudin [28], 以及 Hewitt 和 Ross [10]。特别是，Fine 研究了群 G，它是以下加法群的直积

$Z_2 =: \{0,1\}$ ，并引入了 Walsh系统$\{w_j\}_{j=0}^{\infty}$。

众所周知，Walsh系统在空间L_1. 中不构成基。此外，在 Hardy空间 H_1中存在一个函数，使得 f 的部分和在 L_1-范数下无界。此外（见 [34]），存在一个鞅 $f \in H_p$ $(0 < p < 1)$，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_{2^n+1} f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

另一方面（详情可参见例如著作 [29] 、 [37] ，尤其是最新的著作 [26]），部分和的子列 $\{S_{2^n}\}$ 从鞅 Hardy 空间 H_p 到空间 H_p是有界的，对于所有 $p > 0$均成立，即有如下不等式:

$$\|S_{2^n} f\|_{H_p} \leq c_p \|f\|_{H_p}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p > 0. \tag{1}$$

Weisz [38] 证明了 Vilenkin-Fourier级数的 Fejér均值从鞅 Hardy空间 H_p 到空间 H_p是有界的，对于$p > 1/2$.Goginava [12]（另见 [25], [18, 19, 20, 21]）证明了存在一个鞅 $f \in H_{1/2}$ ，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_n f\|_{1/2} = +\infty.$$

然而，Weisz [38] （另见 [22]）证明，对于每个 $f \in H_p$，都存在一个绝对常数 c_p，使得下列不等式成立:

$$\|\sigma_{2^n} f\|_{H_p} \leq c_p \|f\|_{H_p}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p > 0. \tag{2}$$

Móricz 和 Siddiqi [16]研究了 L_p 函数的沃尔什-傅里叶级数某些特殊诺尔隆德平均在范数意义下的逼近性质。一般求和方法的逼近性质可见 [3, 4]。Fridli、Manchanda 和 Siddiqi [9] 将 Móricz 和 Siddiqi [16] 的结果推广并扩展到鞅 Hardy 空间。情形 $\{q_k = 1/k : k \in \mathbb{N}\}$ 未被涵盖，因为这些方法不适用于 Nörlund 对数均值。在 [11] ，Gát 和 Goginava 证明了勒贝格空间 L_1.中函数的 Nörlund 对数均值的一些收敛与发散性质。特别地，他们证明存在一个函数 f 属于空间L_1，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n f\|_1 = \infty.$$

在 [5] （另见 [17]）中，证明了存在一个鞅 $f \in H_p$，$(0 < p < 1)$，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_{2^n} f\|_p = \infty.$$

$p = 1$ 的一个反例已在 [24] 中给出。然而，Goginava[13] 证明，对于每个 $f \in H_1$，都存在一个绝对常数 c，使得下列不等式成立：

$$\|L_{2^n} f\|_1 \leq c \|f\|_{H_1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

在 [2] 中，已证明对于任意 $0 < p < 1$，存在一个鞅$f \in H_p$，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_{2^n} f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

在 [23] 中，已证明对于满足条件的任意非递减序列 $(q_k, k \in \mathbb{N})$

$$\frac{1}{Q_n} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{and} \quad q_n - q_{n+1} = O\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right), \ \text{as} \ n \to \infty, \tag{4}$$

于是，对于每个 $f \in H_p$，其中 $p > 1/(1+\alpha)$，存在一个仅依赖于 p 的绝对常数 c_p，使得下列不等式成立：

$$\|t_n f\|_{H_p} \leq c_p \|f\|_{H_p}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

当 $0 < p < 1/(1+\alpha)$时，从 H_p 到 $weak-L_p$ 的有界性不成立。因此（详情见 [39]），当 $p > 1/(1+\alpha)$ 时，Cesàro 均值σ_n^α 从 H_p 到 L_p 有界；但当 $0 < p < 1/(1+\alpha)$ 时，它们从 H_p 到 $weak - L_p$ 不有界。在端点情形 $p = 1/(1+\alpha)$ 下，Weisz 和 Simon [31] 证明，Cesàro 均值的极大算子 $\sigma^{\alpha,*}$ 定义为

$$\sigma^{\alpha,*} f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sigma_n^\alpha f|$$

从 Hardy空间 $H_{1/(1+\alpha)}$到空间 $weak-L_{1/(1+\alpha)}$.的映射是有界的。Goginava [14] 给出了一个反例，表明对于 $0 < p \leq 1/(1+\alpha)$，有界性并不成立。

本文发展了 [1, 2, 15] 中讨论的一些方法（另见新书 [26]），并证明对于任意 $0 < p < 1$，存在一个鞅 $f \in H_p$，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|t_{2^n} f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

此外，我们证明，对于由非递增凸序列生成的关于 Walsh系统 的诺尔隆德平均，一个很大的子列 $\{t_{2^n} f\}$不能从鞅 Hardy 空间 H_p 有界映射到空间 $weak - L_p$，其中 $0 < p < 1/(1+\alpha)$，且 $0 < \alpha < 1$。此外，还推导出了一些新的相关不等式。作为

应用，我们指出了适用于众所周知的求和方法的一些已有结果和新结果，尤其是 Nörlund 对数均值和 Cesàro 均值。

本文的主要结果在第 4 节中陈述并证明。第 3 节用于给出一些辅助结果，其中，特别是引理 2 是新的，并且具有独立的研究价值。为了不影响后文的讨论，我们在第 2 节给出一些定义和记号。

2. 定义和记号

令 $\mathbb{N}_+$ 表示正整数集合， $\mathbb{N}:=\mathbb{N}_+\cup\{0\}$. 记 Z_2 为阶数为 2 的离散循环群，即 $Z_2:=\{0,1\}$，其中群运算为模 2 加法，且每个子集都是开集。 Z_2 上的 Haar 测度定义为单点的测度为 1/2。

将群 G 定义为群 Z_2 的完全直积，并赋予 Z_2's 的离散拓扑的积拓扑。

G的元素可表示为序列

$$x:=(x_0,x_1,...,x_j,...), \quad \text{where} \quad x_k=0\vee 1.$$

容易给出 $x\in G$ 邻域的一组基，即:

$$I_0(x):=G,\quad I_n(x):=\{y\in G: y_0=x_0,...,y_{n-1}=x_{n-1}\}\ (n\in\mathbb{N}).$$

记 $I_n:=I_n(0)$ $\overline{I_n}:=G\setminus I_n$ 以及

$$e_n:=(0,...,0,x_n=1,0,...)\in G,\quad \text{for } n\in\mathbb{N}.$$

若 $n\in\mathbb{N}$，则每个 n 都可以唯一地表示为 $n=\sum_{k=0}^{\infty}n_j2^j$，其中 $n_j\in Z_2$ $(j\in\mathbb{N})$，且只有有限个 n_j 不为零。令

$$|n|:=\max\{k\in\mathbb{N}:\ n_k\neq 0\}.$$

空间 $L_p(G)$和 $weak-L_p(G)$（$0<p<\infty$）的范数（或准范数）分别定义为

$$\|f\|_p^p:=\int_G|f|^p\,d\mu \quad \text{and} \quad \|f\|_{weak-L_p}^p:=\sup_{\lambda>0}\lambda^p\mu(f>\lambda).$$

第 k个拉德马赫函数定义为

$$r_k(x):=(-1)^{x_k}\qquad (x\in G,\ k\in\mathbb{N}).$$

现在，定义 G 上的 Walsh系统 $w:=(w_n:\ n\in\mathbb{N})$ 如下:

$$w_n(x):=\prod_{k=0}^{\infty}r_k^{n_k}(x)=r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1}n_kx_k}\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

众所周知（例如参见 [29]），Walsh系统在 $L_2(G)$ 中是正交归一且完备的。此外，对于任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n(x+y) = w_n(x)\, w_n(y). \tag{6}$$

若 $f \in L_1(G)$，我们将傅里叶系数、部分和及狄利克雷核定义为

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &:= \int_G f w_k d\mu \quad (k \in \mathbb{N}), \\ S_n f &:= \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)\, w_k, \quad D_n := \sum_{k=0}^{n-1} w_k \quad (n \in \mathbb{N}_+). \end{aligned}$$

回顾一下（详情参见例如 [29]）：

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{if } x \in I_n \\ 0, & \text{if } x \notin I_n \end{cases} \tag{7}$$

and

$$D_n = w_n \sum_{k=0}^{\infty} n_k r_k D_{2^k} = w_n \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left(D_{2^{k+1}} - D_{2^k}\right), \text{ for } n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i. \tag{8}$$

设 $\{q_k,\ k \geq 0\}$ 为一个非负数列。f 的傅里叶级数的诺尔隆德平均定义为

$$t_n f := \frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_k f, \quad \text{where} \quad Q_n := \sum_{k=0}^{n-1} q_k.$$

本文考虑凸数列 $\{q_k,\ k \geq 0\}$，即

$$q_{n-1} + q_{n+1} - 2q_n \geq 0, \quad \text{for all} \quad n \in \mathbb{N}.$$

若函数 $\psi(x)$ 是任意一个实值凸函数（例如 $\psi(x) = x^{\alpha-1}$, $0 \leq \alpha \leq 1$），则数列 $\{\psi(n) \quad n \in \mathbb{N}\}$ 是凸的。

由于 $q_{n-2} - q_{n-1} \geq q_{n-1} - q_n \geq q_n - q_{n+1} \geq q_{n+1} - q_{n+2}$，我们发现

$$q_{n-2} + q_{n+2} \geq q_{n-1} + q_{n+1}$$

我们还得到

$$q_{n-2} + q_{n+2} - 2q_n \geq 0, \quad \text{for all} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

在 $\{q_k = 1,\ k \in \mathbb{N}\}$ 的特殊情况下，我们得到 Fejér均值

$$\sigma_n f := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k f.$$

此外，若 $q_k = 1/(k+1)$，则可得 Nörlund 对数均值：

$$L_n f := \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k f}{n+1-k}, \qquad \text{where} \quad l_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \tag{10}$$

Cesàro 均值 σ_n^α（有时也记作 (C,α)）也是诺尔隆德平均的一个著名例子，其定义为

$$\sigma_n^\alpha f =: \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}S_k f,$$

其中

$$A_0^\alpha := 0, \qquad A_n^\alpha := \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!}, \qquad \alpha \neq -1,-2,\dots$$

众所周知,

$$A_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}, \quad A_n^\alpha - A_{n-1}^\alpha = A_n^{\alpha-1} \quad \text{and} \quad A_n^\alpha \sim n^\alpha. \tag{11}$$

我们还将 U_n^α 均值定义为

$$U_n^\alpha f := \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^{(\alpha-1)}S_k f \quad \text{where} \quad Q_n := \sum_{k=1}^{n}k^{\alpha-1}.$$

我们还将 V_n^α 均值定义为

$$V_n f := \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+1-k)S_k f \quad \text{where} \quad Q_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln(k+1)}.$$

设 $f := \left(f^{(n)}, n\in\mathbb{N}\right)$ 是关于 $F_n (n\in\mathbb{N})$ 的鞅，它们由区间 $\{I_n(x)$ 生成： $x\in G\}$ （详情参见例如 [37]）。

我们称该鞅属于哈代鞅空间$H_p(G)$，其中 $0<p<\infty$，如果

$$\|f\|_{H_p} := \|f^*\|_p < \infty, \quad \text{with} \quad f^* := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|f^{(n)}\right|.$$

在 $f\in L_1(G)$ 的情形下，极大函数也可表示为

$$M(f)(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{\mu(I_n(x))}\left|\int_{I_n(x)}f(u)\,d\mu(u)\right|\right).$$

若 $f \in L_1(G)$，则容易证明，序列 $F = (S_{2^n}f: n\in\mathbb{N})$ 是一个鞅，且 $F^* = M(f)$。

若 $f=\left(f^{(n)},\ n\in\mathbb{N}\right)$ 是一个鞅，则 Walsh-Fourier 系数必须以稍有不同的方式定义：

$$\widehat{f}(i):=\lim_{k\to\infty}\int_G f^{(k)}(x)\,w_i(x)\,d\mu(x).$$

有界可测函数 a 是 p-原子，如果存在一个区间I，使得

$$\operatorname{supp}(a)\subset I,\quad \int_I a d\mu=0\ \text{ and }\ \|a\|_\infty\leq\mu(I)^{-1/p}.$$

3. 辅助结果

哈代鞅空间 H_p(G)具有原子刻画（参见 Weisz [37], [38]）：

引理1. 鞅 $f=\left(f^{(n)},\ n\in\mathbb{N}\right)$ 属于 $H_p\,(0<p\leq 1)$ 当且仅当存在一个 p-原子序列$(a_k,k\in\mathbb{N})$ 和一个实数序列$(\mu_k,k\in\mathbb{N})$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$：

$$(12)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\mu_k S_{2^n}a_k=f^{(n)},\qquad where\qquad \sum_{k=0}^{\infty}|\mu_k|^p<\infty.$$

此外，以下双边不等式成立

$$\|f\|_{H_p}\backsim\inf\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\mu_k|^p\right)^{1/p},$$

其中，下确界取遍所有形式为 *(12)* 的 f 分解。

我们还陈述并证明以下一个本身也具有独立意义的新引理：

引理 2. 设 $k\in\mathbb{N}$，$\{q_k:\ k\in\mathbb{N}\}$ 为任意凸的非递增序列，且 $x\in I_2$ $(e_0+e_1)\in I_0\backslash I_1$. 那么，对于任意 $\{\alpha_k\}$，以下不等式成立：

$$\left|\sum_{j=2^{2\alpha_k}}^{2^{2\alpha_k+1}}q_{2^{2\alpha_k+1}-j}D_j\right|\geq q_1-\frac{3}{2}q_3.$$

证明。 令 $x\in I_2$(e_0+e_1) $\in I_0\backslash I_1$. 根据 (7) 和 (8)，我们得到

$$D_j(x)=\begin{cases}w_j, & \text{if } j \text{ is odd number},\\ 0, & \text{if } j \text{ is even number},\end{cases}$$

and

$$\sum_{j=2^{2\alpha_k}}^{2^{2\alpha_k+1}-1} q_{2^{2\alpha_k+1}-j} D_j = \sum_{j=2^{2\alpha_k-1}}^{2^{2\alpha_k}-1} q_{2^{2\alpha_k+1}-2j-1} w_{2j+1} = w_1 \sum_{j=2^{2\alpha_k-1}}^{2^{2\alpha_k}-1} q_{2^{2\alpha_k+1}-2j-1} w_{2j}.$$

利用 (9) 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2^{2\alpha_k-2}+1}^{2^{2\alpha_k-1}-1} \left| q_{2^{2\alpha_k+1}-4j+3} - q_{2^{2\alpha_k+1}-4j+1} \right| \\
= &\sum_{j=2^{2\alpha_k-2}+1}^{2^{2\alpha_k-1}-1} \left(q_{2^{2\alpha_k+1}-4j+1} - q_{2^{2\alpha_k+1}-4j+3} \right) \\
= &\left(q_{2^{2\alpha_k}-3} - q_{2^{2\alpha_k}-1} \right) + \left(q_{2^{2\alpha_k}-7} - q_{2^{2\alpha_k}-5} \right) + \ldots + \left(q_5 - q_7 \right) \\
\leq &\frac{1}{2} \left(q_{2^{2\alpha_k}-3} - q_{2^{2\alpha_k}-1} \right) + \frac{1}{2} \left(q_{2^{2\alpha_k}-5} - q_{2^{2\alpha_k}-3} \right) \\
+ &\frac{1}{2} \left(q_{2^{2\alpha_k}-7} - q_{2^{2\alpha_k}-5} \right) + \frac{1}{2} \left(q_{2^{2\alpha_k}-9} - q_{2^{2\alpha_k}-7} \right) \\
+ &\ldots + \frac{1}{2} \left(q_5 - q_7 \right) + \frac{1}{2} \left(q_3 - q_5 \right) \leq \frac{1}{2} q_3 - \frac{1}{2} q_{2^{2\alpha_k}-1}.
\end{aligned}$$

因此，如果我们应用

$$w_{4k+2} = w_2 w_{4k} = -w_{4k}, \quad \text{for} \quad x \in I_2(e_0 + e_1),$$

我们发现

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{j=2^{2\alpha_k}}^{2^{2\alpha_k+1}-1} q_{2^{2\alpha_k+1}-j} D_j \right| \\
= &\left| q_0 w_{2^{2\alpha_k+1}-2} + q_3 w_{2^{2\alpha_k+1}-4} + \sum_{j=2^{2\alpha_k-1}}^{2^{2\alpha_k}-1} q_{2^{2\alpha_k+1}-2j-1} w_{2j} \right| \\
= &\left| (q_3 - q_1) 2 w_{2^{2\alpha_k+1}-4} + \sum_{j=2^{2\alpha_k-2}+1}^{2^{2\alpha_k-1}-1} \left(q_{2^{2\alpha_k+1}-4j+3} w_{4j-4} - q_{2^{2\alpha_k+1}-4j+1} w_{4j-4} \right) \right| \\
\geq &q_1 - q_3 - \sum_{j=2^{2\alpha_k-2}+1}^{2^{2\alpha_k-1}-1} \left| q_{2^{2\alpha_k+1}-4j+3} - q_{2^{2\alpha_k+1}-4j+1} \right| \\
\geq &q_1 - q_3 - \frac{1}{2} (q_3 - q_{2^{2\alpha_k}-1}) \geq q_1 - \frac{3}{2} q_3.
\end{aligned}$$

证明完成。 □

4. 主要结果

在前几节中，我们讨论了若干不等式，有时也讨论了它们的锐性。我们的主要结果是下面这个新的锐性结果:

定理1. 设 $0 \leq \alpha \leq 1$, β 为任意非负实数， t_n 为具有凸的非递增序列$\{q_k$ 的诺尔隆德平均： $k \in \mathbb{N}\}$ 满足条件

$$\frac{q_1 - (3/2)q_3}{Q_n} \geq \frac{C}{n^{\alpha} \log^{\beta} n}, \tag{13}$$

对于某个正常数 $C.$ 成立。因此，对于任意 $0 < p < 1/(1+\alpha)$ ，存在一个鞅 $f \in H_p$ 使得

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|t_{2^n} f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

证明. 设 $0 < p < 1/(1+\alpha)$。在条件（13）下，存在一个序列 $\{n_k$: $k \in \mathbb{N}\}$ 使得

$$\frac{2^{2n_k(1/p-1)}}{n_k Q_{2^{2n_k+1}}} \geq \frac{2^{2n_k(1/p-1-\alpha)}}{n_k^{\beta+1}} \to \infty, \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

设 $\{\alpha_k$: $k \in \mathbb{N}\} \subset \{n_k$: $k \in \mathbb{N}\}$ 为正整数递增序列，使得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{-p/2} < \infty, \tag{14}$$

$$\sum_{\eta=0}^{k-1} \frac{\left(2^{2\alpha_\eta}\right)^{1/p}}{\sqrt{\alpha_\eta}} < \frac{\left(2^{2\alpha_k}\right)^{1/p}}{\sqrt{\alpha_k}} \tag{15}$$

and

$$\frac{\left(2^{2\alpha_{k-1}}\right)^{1/p}}{\sqrt{\alpha_{k-1}}} < \frac{q_1 - q_3 - (3/2)q_5}{Q_{2^{2\alpha_k+1}}} \frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)-3}}{\alpha_k}. \tag{16}$$

Let

$$f^{(n)} := \sum_{\{k;\ 2\alpha_k < n\}} \lambda_k a_k,$$

其中

$$\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}} \quad \text{and} \quad a_k = 2^{2\alpha_k(1/p-1)} \left(D_{2^{2\alpha_k+1}} - D_{2^{2\alpha_k}}\right).$$

由式（14）和引理1可得 $f \in H_p$.

容易证明

$$\widehat{f}(j)=\begin{cases}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\sqrt{\alpha_k}}, & \text{if } j\in\{2^{2\alpha_k},...,\ 2^{2\alpha_k+1}-1\},\ k\in\mathbb{N},\\ 0, & \text{if } j\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{2^{2\alpha_k},...,\ 2^{2\alpha_k+1}-1\}\ .\end{cases}\tag{17}$$

此外,

$$\begin{aligned}&t_{2^{2\alpha_k+1}}f\\ &=\frac{1}{Q_{2^{2\alpha_k+1}}}\sum_{j=1}^{2^{2\alpha_k}-1}q_{2^{2\alpha_k+1}-j}S_jf+\frac{1}{Q_{2^{2\alpha_k+1}}}\sum_{j=2^{2\alpha_k}}^{2^{2\alpha_k+1}-1}q_{2^{2\alpha_k+1}-j}S_jf\\ &:=I+II.\end{aligned}\tag{18}$$

令 $j<2^{2\alpha_k}$. 通过结合（15）、（16）和（17），我们可以得出

$$\begin{aligned}|S_jf(x)|&\le\sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{v=2^{2\alpha_\eta}}^{2^{2\alpha_\eta+1}-1}\left|\widehat{f}(v)\right|\\ &\le\sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{v=2^{2\alpha_\eta}}^{2^{2\alpha_\eta+1}-1}\frac{2^{2\alpha_\eta(1/p-1)}}{\sqrt{\alpha_\eta}}\le\sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2\alpha_\eta/p}}{\sqrt{\alpha_\eta}}\le\frac{2^{2\alpha_{k-1}/p+1}}{\sqrt{\alpha_{k-1}}}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}|I|&\le\frac{1}{Q_{2^{2\alpha_k+1}}}\sum_{j=1}^{2^{2\alpha_k}-1}q_{2^{2\alpha_k+1}-j}|S_jf(x)|\\ &\le\frac{1}{Q_{2^{2\alpha_k+1}}}\frac{2^{2\alpha_{k-1}/p}}{\sqrt{\alpha_{k-1}}}\sum_{j=1}^{M_{2\alpha_k+1}-1}q_j\le\frac{2^{2\alpha_{k-1}/p}}{\sqrt{\alpha_{k-1}}}.\end{aligned}\tag{19}$$

设 $2^{2\alpha_k}\le j\le 2^{2\alpha_k+1}-1$. 由于

$$\begin{aligned}S_jf&=\sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{v=2^{2\alpha_\eta}}^{2^{2\alpha_\eta+1}-1}\widehat{f}(v)w_v+\sum_{v=2^{2\alpha_k}}^{j-1}\widehat{f}(v)w_v\\ &=\sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2\alpha_\eta(1/p-1)}}{\sqrt{\alpha_\eta}}\left(D_{2^{2\alpha_\eta+1}}-D_{2^{2\alpha_\eta}}\right)+\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\sqrt{\alpha_k}}\left(D_j-D_{2^{2\alpha_k}}\right),\end{aligned}$$

对于 II，我们可以得出结论:

$$(20)\ II=\frac{1}{Q_{2^{2\alpha_k+1}}}\sum_{j=2^{2\alpha_k}}^{2^{2\alpha_k+1}}q_{2^{2\alpha_k+1}-j}\left(\sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2\alpha_\eta(1/p-1)}}{\sqrt{\alpha_\eta}}\left(D_{2^{2\alpha_\eta+1}}-D_{2^{2\alpha_\eta}}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{Q_{2^{2\alpha_k+1}}}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\sqrt{\alpha_k}}\sum_{j=2^{2\alpha_k}}^{2^{2\alpha_k+1}-1}q_{2^{2\alpha_k+1}-j}(D_j-D_{2^{2\alpha_k}}).$$

令 $x\in I_2(e_0+e_1)\in I_0\backslash I_1$. 根据此式， $\alpha_0\geq 1$ 我们得到$2\alpha_k\geq 2$，对所有 $k\in\mathbb{N}$，若使用 (7)，则得到 $D_{2^{2\alpha_k}}=0$；若使用引理 2，还可以得出

$$(21)\qquad \begin{aligned} II &= \frac{1}{Q_{2^{2\alpha_k+1}}}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\sqrt{\alpha_k}}\sum_{j=2^{2\alpha_k}}^{2^{2\alpha_k+1}-1}q_{2^{2\alpha_k+1}-j}D_j \\ &\geq \frac{q_1-(3/2)q_3}{Q_{2^{2\alpha_k+1}}}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\sqrt{\alpha_k}}. \end{aligned}$$

结合 $x\in I_2(e_0+e_1)$ 的 (16)、(18)–(21)，可得

$$\begin{aligned} |t_{2^{2\alpha_k+1}}f(x)| &\geq II-I \\ &\geq \frac{q_1-(3/2)q_3}{Q_{2^{2\alpha_k+1}}}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\sqrt{\alpha_k}}-\frac{q_1-(3/2)q_3}{Q_{2^{2\alpha_k+1}}}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)-3}}{\alpha_k} \\ &\geq \frac{q_1-(3/2)q_3}{Q_{2^{2\alpha_k+1}}}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)-3}}{\sqrt{\alpha_k}}\geq\frac{C2^{2\alpha_k(1/p-1-\alpha)-3}}{\left(\ln 2^{2\alpha_k+1}+1\right)^{\beta}\sqrt{\alpha_k}} \\ &\geq \frac{C2^{2\alpha_k(1/p-1-\alpha)-3}}{\alpha_k^{\beta+1}}. \end{aligned}$$

因此，我们可以得出结论:

$$\begin{aligned} &\|t_{2^{2\alpha_k+1}}f\|_{weak-L_p} \\ \geq\ & \frac{C2^{2\alpha_k(1/p-1-\alpha)-3}}{\alpha_k^{\beta+1}}\mu\left\{x\in G:|t_{2^{2\alpha_k+1}}f|\geq\frac{C2^{2\alpha_k(1/p-1)-3}}{\alpha_k^{\beta+1}}\right\}^{1/p} \\ \geq\ & \frac{C2^{2\alpha_k(1/p-1-\alpha)-3}}{\alpha_k^{\beta+1}}\mu\left\{x\in I_2(e_0+e_1):|t_{2^{2\alpha_k+1}}f|\geq\frac{C2^{2\alpha_k(1/p-1)-6}}{\alpha_k^{\beta+1}}\right\}^{1/p} \\ \geq\ & \frac{C2^{2\alpha_k(1/p-1-\alpha)-3}}{\alpha_k^{\beta+1}}\left(\mu\left(I_2(e_0+e_1)\right)\right)^{1/p} \\ >\ & \frac{c2^{2\alpha_k(1/p-1-\alpha)}}{\alpha_k^{\beta+1}}\to\infty,\quad \text{as}\quad k\to\infty. \end{aligned}$$

证明完毕。 □

在一个具体情形下，我们得到一个关于 Nörlund 对数均值的结果 $\{L_n\}$，该结果在 [2] 中得到证明:

推论 1. 设 $0 < p < 1$. 那么存在一个鞅 $f \in H_p$使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_{2^n} f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

证明。 容易证明

$$q_1 - (3/2)q_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8} > 0,$$

并且条件（13）对 $\alpha = \beta = 0$. 成立 □

我们还可以得到关于 V_n 均值的类似新结果:

推论 2. 设 $0 < p < 1$. 则存在一个鞅 $f \in H_p$使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|V_{2^n} f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

证明. 容易证明

$$q_1 - (3/2)q_3 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\ln 4} = \log_2^e - (3/2)\frac{\log_2^e}{\log_2^4} = \log_2^e\left(1 - \frac{3}{4}\right) > 0,$$

并且对于 $\alpha = \beta = 0.$，条件（13）成立 □

我们还可以得到关于 Cesàro 均值 $\sigma_{2^n}^{\alpha}$. 的相应新结果

推论 3. 设 $0 < p < 1/(1+\alpha)$，其中某个 $0 < \alpha \leq 0.56$. 则存在一个鞅 $f \in H_p$ 使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_{2^n}^{\alpha} f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

证明。 经过常规计算，我们得到

$$q_1 - (3/2)q_3 = \alpha - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{4} = \alpha\cdot\frac{2 - 3\alpha - \alpha^2}{4}.$$

容易证明，当 $0 < \alpha < 0.56$ 时，这个表达式为正。因此，条件（13）对 $\beta = 0$ 和 $0 < \alpha < 1.$ □成立

推论 4。 令 $0 < p < 1/(1+\alpha)$，对某个 $0 < \alpha \leq 0.41.$，则存在一个鞅 $f \in H_p$，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|U_{2^n}^{\alpha} f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

证明。 通过直接计算可得

$$q_1 - (3/2)q_3 = 2^{1-\alpha} - (3/2)4^{1-\alpha} = 2^{1-\alpha}\left(1 - 3/2^{2-\alpha}\right).$$

容易证明，当 $0 < \alpha < 0.41$ 时，该表达式为正。因此，对于 $\beta = 0$ 和 $0 < \alpha < 1.$ □，条件（13）成立。

5. 开放问题与总结

注 1. 本文可视为新书 [26]的补充。该书还提出了若干开放问题。此外，这项新的研究也引出了一些相关的开放问题。

开放问题 1： 设 $0 < p < 1/(1+\alpha)$，其中某个 $0.56 < \alpha < 1.$ 是否存在一个鞅 $f \in H_p$，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma^{\alpha}_{2^n} f\|_{weak-L_p} = \infty?$$

开放问题 2： 设 $0 < p < 1/(1+\alpha)$，其中某个 $0.41 < \alpha < 1.$ 是否存在一个鞅 $f \in H_p$，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|U^{\alpha}_{2^n} f\|_{weak-L_p} = \infty?$$

我们还可以研究更一般的可和性方法所对应的类似问题：

开放问题 3： 设 $0 < p < 1/(1+\alpha)$ 是沃尔什-傅里叶级数的诺尔隆德平均，其中 $0.56 < \alpha < 1$和 t_n，且具有非递增凸序列 $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$，满足条件（13）。

是否存在一个鞅 $f \in H_{1/(1+\alpha)}(0 < p < 1)$，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|t_{2^n} f\|_{H_{1/(1+\alpha)}} = \infty?$$

开放问题 4： 设 $f \in H_{1/(1+\alpha)}$，其中 $0 < \alpha < 1.$ 是否存在一个绝对常数 C_α，使得以下不等式成立

$$\|\sigma^{\alpha}_{2^n} f\|_{1/(1+\alpha)} \leq C_\alpha \|f\|_{H_{1/(1+\alpha)}}?$$

开放问题 5： 设 $f \in H_{1/(1+\alpha)}$，其中 $0 < \alpha < 1.$ 是否存在一个绝对常数 C_α，使得以下不等式成立

$$\|U^{\alpha}_{2^n} f\|_{1/(1+\alpha)} \leq C_\alpha \|f\|_{H_{1/(1+\alpha)}}?$$

开放问题 6： 设 $f \in H_{1/(1+\alpha)}$，其中 $0 < \alpha < 1$ 和 t_n 是具有非递增凸序列 $\{q_k$ 的沃尔什-傅里叶级数的诺尔隆德平均： $k \in \mathbb{N}\}$，满足条件（13）。是否存在绝对常数 C_α，使得下列不等式成立

$$\|t^{\alpha}_{2^n} f\|_{1/(1+\alpha)} \leq C_\alpha \|f\|_{H_{1/(1+\alpha)}}?$$

注 2。 沃尔什-傅里叶级数与小波理论之间存在重要联系，参见例如 [26] 以及论文 [7] 和 [8]。这一点对于应用也特别重要，正如 *K. Tangrand* 最近的博士论文所述 [32]。

数据和材料的可用性

不适用。

利益冲突

作者声明，他们不存在任何利益冲突。

经费

本手稿的出版费用由挪威北极大学出版基金根据代码 IN-1096130 提供支持。

作者贡献

DB 和 GT 提出了这一想法并开始撰写本文。LEP 和 KT 在此基础上提出了一些补充性想法。所有作者均阅读并批准了最终手稿。

致谢

GEORGE TEPHNADZE 的工作得到了肖塔·鲁斯塔韦利国家科学基金会 FR-19-676 项目的支持。本文的出版费用由挪威北极大学出版基金提供的资助支付。

作者详情[1]

格鲁吉亚大学，科学与技术学院，梅拉布·科斯塔瓦街77a号，第比利斯0128，格鲁吉亚。

[2]计算机科学与计算工程系，挪威北极大学，邮政信箱385，N-8505，纳尔维克，挪威；数学与计算机科学系，卡尔斯塔德大学，65188卡尔斯塔德，瑞典。

[3]计算机科学与计算工程系，挪威北极大学，邮政信箱385，N-8505，纳尔维克，挪威。

[4]格鲁吉亚大学，科学与技术学院，梅拉布·科斯塔瓦街77a号，第比利斯0128，格鲁吉亚。

参考文献

[1] *L. Baramidze*、*L. E. Persson*、*G. Tephnadze* 和 *P. Wall*，加权维尔金-Nörlund 均值极大算子的锐 $H_p - L_p$ 型不等式及其应用，《不等式及其应用杂志》，2016，DOI：10.1186/s13660-016-1182-1。[2] *D. Baramidze*、*L.-E. Persson*、*H. Singh* 和 *G. Tephnadze*，关于沃尔什-傅里叶级数 Nörlund 对数均值子列的一些新结果与不等式，《不等式及其应用杂志》，2022，DOI: https://doi.org/10.1186/s13660- 022-02765-5。

[3] I. Blahota、K. Nagy 和 G. Tephnadze，沃尔什-傅里叶级数的 Θ均值逼近，Anal. Math.，44（1），57-71。[4] I. Blahota、K. Nagy 和 G. Tephnadze，双重沃尔什-傅里叶级数的 Marcinkiewicz Θ均值逼近，《数学不等式及其应用》，22（2019），第3期，837–853。[5]I. Blahota、L.-E. Persson 和 G Tephnadze，关于维尔金-Fourier级数的诺尔隆德平均，《捷克数学杂志》，65（4），983-1002。[6] N. J. Fine，关于沃尔什函数，《美国数学会会刊》，65（1949），372–414。[7] Yu. Farkov、U. Goginava 和 T. Kopaliani，康托尔二进群上的小波展开无条件收敛，《哈恩逼近杂志》，1，第3期，117-133，2011。[8] Yu. Farkov、E. A. Lebedeva 和 M. Skopina，维尔金群上的小波框架及其逼近性质，《国际小波、多分辨率与信息处理杂志》，13，第5期，1-19，2015。[9] S. Fridli、P. Manchanda 和 A.H. Siddiqi，沃尔什-诺伦德平均逼近，Acta Sci. Math.(Szeged) 74（2008），第3-4期，593-608。[10]E. Hewitt 和 K. A. Ross，《抽象调和分析》第一卷：拓扑群的结构、积分理论、群表示，Springer，2013。[11] G. Gàt 和 U. Goginava，沃尔什-傅里叶级数对数均值的一致收敛与 L收敛，《数学学报》22（2006），第2期，497–506。[12] U. Goginava，沃尔什-傅里叶级数的（C，α）均值极大算子，《布达佩斯大学科学学报·计算机分辑》26（2006），127–135。[13] U. Goginava，沃尔什-傅里叶级数对数均值子列几乎处处收敛，《尼赖吉哈佐数学教育学报》，21（2005），169-175。[14] U. Goginava，沃尔什-傅里叶级数的（C，α）均值极大算子，《布达佩斯大学科学学报·计算机分辑》，26（2006），127–135。[15] D. Lukkassen、L.E. Persson、G. Tephnadze 和 G. Tutberidze，关于维尔金-Fourier级数黎斯对数平均强收敛的若干不等式，《不等式及其应用杂志》，2020，DOI：https://doi.org/10.1186/s13660- 020-02342-8。[16] F. Móricz 和 A. Siddiqi，沃尔什-傅里叶级数的诺尔隆德平均逼近，J. Approx. Theory 70（1992），第3期，375–389。[17] N. Memiæ、L. E. Persson 和 G. Tephnadze，关于系数非递增的维尔金-Nörlund 均值极大算子的注记，《匈牙利数学科学研究》，53，4，（2016）545-556。[18] K. Nagy 和 G. Tephnadze，哈代空间上的沃尔什-Marcinkiewicz 均值，Cent. Eur. J. Math.，12，8（2014），1214-1228。[19] K. Nagy 和 G. Tephnadze，卡茨马尔兹-马尔钦凯维奇平均与哈代空间，《匈牙利数学学报》，149，2（2016），346-374。[20]K. Nagy 和 G. Tephnadze，沃尔什-Marcinkiewicz 均值的强收敛定理，《数学不等式及其应用》，19，1（2016），185-195。[21] K. Nagy 和 G. Tephnadze，哈代空间上的沃尔什-Marcinkiewicz 均值逼近，《京都数学杂志》，54，3（2014），641-652。[22] L. E. Persson 和 G. Tephnadze，关于维尔金-Fejér 均值某些极大算子的一个锐有界性结果，《地中海数学杂志》，13，4（2016），1841-1853。

[23] *L. E. Persson*、*G. Tephnadze*、*P. Wall*，关于 Vilenkin- 诺尔隆德均值的极大算子，J. Fourier Anal. Appl., 21, 1 (2015), 76-94.[24] *L. E. Persson*、*G. Tephnadze* 和 *P. Wall*，关于鞅 Hardy 空间中相对于 Vilenkin 系统的 Nörlund 对数均值，Acta Math. Hung., 154 (2018), no 2, 289-301.[25] *L. E. Persson*、*G. Tephnadze* 和 *G. Tutberidze*，关于 Vilenkin-Fejér 均值子序列在鞅 Hardy 空间上的有界性，Operators and matrices, 14 (2020), no. 1, 283-294.[26] *L. E. Persson*、*G. Tephnadze* 和 *F. Weisz*，鞅 Hardy 空间与一维 Vilenkin-Fourier 级数的可和性，书稿，Birkhäuser/Springer，即将于 2022 年 10 月出版。[27] *L. Pontryagin*，《拓扑群》，第二版，Gordon and Breach，纽约，Princeton Univ. Press，1966.[28] *W. Rudin*，《群上的傅里叶分析》，Wiley Online Library，1962.[29]*F. Schipp*、*W.R. Wade*、*P. Simon* 和 *J. Pál*，《Walsh 级数：二进制调和分析导论》，Akadémiai Kiadó，（布达佩斯-Adam-Hilger（布里斯托尔-纽约）），1990.[30] *P. Simon*，Vilenkin-Fourier 级数的强收敛定理，J. Math. Anal. Appl., 245 (2000), 52-68.[31] *P. Simon* 和 *F. Weisz*，Walsh-Fourier 级数的 Cesàro 可和性与 Riesz 可和性的弱不等式，J. Approx. Theory, 151 (2008), no. 1, 1–19.[32] *K. Tangrand*，《神经网络与小波及其应用的新进展》，博士论文，挪威北极大学，2022 年，即将出版。[33] *G. Tephnadze*，一维 Vilenkin-Fourier 级数对数均值的极大算子，Acta Math. Acad. Paed. Nyíreg., 27 (2011), 245-256.[34] *G. Tephnadze*，关于 Vilenkin-Fourier 级数的部分和，J. Contemp. Math. Anal. 49 (2014), no. 1, 23-32.[35] *G. Tephnadze* 和 *G. Tutberidze*，关于 Vilenkin-Fourier 级数 Nörlund 对数均值极大算子的注记，Trans. A. Razmadze Math. Inst., 174 (2020), no. 1, 1070-112.[36] *N. Ya. Vilenkin*，关于一类完备正交归一系统，Izv. Akad. Nauk. U.S.S.R., Ser. Mat., 11 (1947), 363-400.[37] *F. Weisz*，《鞅 Hardy 空间及其在傅里叶分析中的应用》，Springer，柏林-海德堡-纽约，1994.[38] *F. Weisz*，二维傅里叶级数的哈代空间与 Cesàro 均值，Bolyai Soc. Math. Studies, (1996), 353-367.[39] *F. Weisz*，，(C，α) Walsh-Fourier 级数的可和性，Anal. Math., 27 (2001), 141-156.