arXiv:2303.01848v1 [math.NT] 3 Mar 2023

# 关于中等长度和短特征和的注记

Matteo Bordignon

Abstract. 沿着 Hildebrand 的工作，我们在一个特定范围内改进了 P´olya- Vinogradov 不等式；我们还给出了一般性结果，揭示了该不等式对伯吉斯界的依赖性；最后，我们改进了伯吉斯特征和估计在一个特殊情形下的适用范围。

研究下列量可能的上界具有重要意义

$$S(N,\chi) := \left|\sum_{n=1}^{N}\chi(n)\right|, \tag{1}$$

其中，$N \in \mathbb{N}$ 和 $\chi$ 是模 $q$的非主 Dirichlet 特征。著名的 P´olya–Vinogradov 不等式告诉我们，对于任意 $\chi$ 非主

$$S(N,\chi) \ll \sqrt{q}\log q,$$

除去隐含常数这一点外，这是目前已知的最佳结果。Paley [19] 证明了对于无穷多个特征，我们有

$$\max_{N}\left|\sum_{n=1}^{N}\chi(n)\right| \gg \sqrt{q}\log\log q.$$

另一方面，Montgomery 和 Vaughan [18] 证明，假设广义黎曼猜想（GRH）成立，我们有

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\chi(n)\right| \ll \sqrt{q}\log\log q.$$

关于本原特征，(1) 中已知的最佳渐近常数为$\frac{69}{70\pi 3\sqrt{3}}+o(1)$，若 $\chi$从 [11] 出发为偶数，则为$\frac{1}{3\pi}+o(1)$，若 $\chi$从 [17]出发为奇数。最佳的完全显式常数见[2], [3] 和 [8]。对于奇数阶本原特征， $g$ Granville 和 Soundararajan 改进了 P´ólya–Vinogradov 不等式，证明了以下界

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\chi(n)\right| \ll \sqrt{q}(\log q)^{1-\delta_g/2+o(1)},$$

日期：2023年3月6日。

其中 $\delta = 1 - \frac{q}{\pi}\sin\frac{\pi}{q}$。另一个有趣的结果是 E. Fouvry、E. Kowalski、P. Michel、C. S. Raju、J. Rivat 和 K. Soundararajan 在 [7] 中的定理 1.1，他们扩展了所谓的 P´olya–Vinogradov 范围。有趣的是，似乎 $S(N, \chi)$ 在 $N \approx q$处取得最大值，参见 Bober 等人在 [1] 中的工作，以及 Hildebrand 的工作（[17], 的推论 3），该推论证明，对于偶特征，有 $N = o(q)$ 蕴含 $S(N, \chi) = o(\sqrt{q}\log q)$。
本文首先给出适用于有限范围的 P´olya–Vinogradov 不等式的改进版本，其灵感来自 Hildebrand 在 [16] 和 [17]中的工作。这个结果的有趣之处在于，它不使用伯吉斯界，因为它仅依赖 Montgomery 和 Vaughan[18, 推论 1] ，并且可以在某个范围内证明最优的 P´olya–Vinogradov 不等式。具体来说，我们证明以下结果，它由定理4取$a(q) = (\text{对数}\, q)^c$，其中 $c > 4 + 2\epsilon$，以及 $R(q) = (\text{对数}\, q)^{2+\epsilon}$ 推出；并且，如 Hildebrand 在[16]中所做的那样，将原始特征推广到非主特征。

定理 1。取 $N$ 和 $q$ 使得

$$\frac{q}{(\log q)^{c+2}} < N < \frac{q}{2(\log q)^2},$$

对任意固定的 $c > 0$，则对于 $\chi$ 模$q$的偶非主特征，我们有

$$\sum_{n=1}^{N} \chi(n) \ll_c \sqrt{q}\log\log q.$$

沿着 Hildebrand 在 [16], 中的工作，我们证明，最优的伯吉斯界（见 [12], ）与证明最优的波利亚–维诺格拉多夫不等式（见 [18]）所需的界仍稍有差距。具体而言，我们假设以下 Burgess 型结果；该结果是在假设广义黎曼猜想的情况下于 [12], 中证明的，不过这里的上界更强。

猜想 1. 对任意模 $q$ 的非主特征 $\chi$ 以及满足 $\log x/\log\log q \to \infty$ 的 $x$，我们有

$$\sum_{n\leqslant x} \chi(n) \ll_\epsilon \frac{x}{(\log x)^{3+\epsilon}},$$

其中 $\epsilon > 0$为固定值。

这使我们能够证明以下结果；与文献 [18] 中在假设广义黎曼猜想成立的情况下证明的最优结果相比，该结果仅相差 $(\log\log q)^\epsilon$short。

定理 2。 假设猜想 *1* 并取 $\chi$ 任意模 $q$的非主特征，则有

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\ll_{\epsilon}\sqrt{q}(\log\log q)^{1+\epsilon}.$$

接下来我们重点讨论短特征和。设 $\chi$ 是模素数 $p$ 的非主特征。以下类型的估计

$$\left|\sum_{n\leqslant N}\chi(n)\right|\leqslant\epsilon N\quad(N\geqslant N_0(\epsilon,p)),\tag{2}$$

在数论中非常重要。由 P´olya–Vinogradov 不等式，(2) 式中的 $N_0(\epsilon,p)=(\log p)\sqrt{p}/\epsilon$；而 Burgess 的特征和估计 [4, 5] 给出，对于任意 $\epsilon$、$\delta>0$ 及 $p\geqslant p_0(\epsilon,\delta)$，(2) 式中的 $N_0(\epsilon,p)=p^{1/4+\delta}$。Hildebrand 在 [15] 中证明，给定 $\epsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\epsilon)>0$ 和 $p_0(\epsilon)\geqslant 2$，使得对任意 $p\geqslant p_0(\epsilon)$，(2) 式中的 $N_0(\epsilon,p)=p^{1/4-\delta}$，其中 $\delta(\epsilon)=\exp(-C(\epsilon^{-2}+1))$，且 $C$ 是充分大的常数。利用 Elliot 在 [6] 中的结果，可以取 $\delta(\epsilon)=C\epsilon^{19}$ [10, 推论 3]()；再结合 Granville 和 Soundararajan 的推论 ()，这便是目前最先进的结果。此外，在 [13, §9] 中，Granville 和 Soundararajan 表明，对于一般的乘法函数，[10, 推论 3] 是最优的，但值得注意的是，他们给出的“最坏”函数并非 Dirichlet 特征。因此，一个有趣的问题是，能否改进 Dirichlet 特征的 [10, 推论 3]。本文证明，对于实乘法函数可以做到这一点，并证明引理 11；由此，我们改进了非主实特征情形下 $\delta(\epsilon)$ 的大小。虽然利用现有方法很容易推出这一结果，但我们未能在文献中找到相关论述，并认为它值得关注。我们得到以下结果；就目前的方法而言，该结果似乎是最优的。

定理 3. 给定 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$ 和 $p_0(\epsilon)\geqslant 2$，使得对于任意模素数 $\chi$ 的非主实特征 $p\geqslant p_0(\epsilon)$，(2) 以 $N_0(\epsilon,p)=p^{1/4-\delta}$ 成立，其中

$$\delta(\epsilon)=C\epsilon^2,$$

其中 $C$ 为一个充分大的绝对常数。

在第 1 节中，我们证明了定理 1 的一般形式；在第 2 节中，我们证明了定理 2 以及其更一般的形式，在该形式中我们假设猜想 1 的较弱版本；在第 3 节中，我们证明了定理 3。

Acknowledgements

感谢 Bryce Kerr、P¨ar Kurlberg、IgorShparlinski 和 Tim Trudgian 提供的宝贵评论与建议。

本研究部分由 OP RDE 项目资助，项目编号：CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_053/0016976 查理大学研究、技术及行政人员国际流动。

## 1. Improving Pólya–Vinogradov for a limited range without using Burgess bound

本节证明定理1的一般形式。

定理 4. 设 $R:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 且 $a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$，并且 $x$ 满足$2\leqslant R<a(q)\leqslant q$。取 $N$ 和 $q$，并假设

$$\frac{qR(q)}{a(q)}<N<\frac{q}{R(q)}\left(1-\frac{R(q)}{a(q)}\right).$$

那么，对于 $\chi$ 偶本原特征，我们有

$$\sum_{n=1}^{N}\chi(n)\leqslant\sqrt{q}2\left(\frac{2}{\pi}\log a(q)+\frac{2}{\pi}\left(C+\log 2+\frac{3}{a(q)}\right)\right)+O\left(\sqrt{q}\max\left(\log\frac{\log q}{\log a(q)},\frac{(\log R(q))^{3/2}}{\sqrt{R(q)}}\log\frac{q}{a(q)}\right)\right).$$

设 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 是一个满足 $|f(n)|\leqslant 1$的乘法函数。令 $\alpha$为实数，且 $e(\alpha)=\exp(2\pi i\alpha)$，记

$$S(\alpha)=\sum_{n=1}^{N}f(n)e(n\alpha).$$

我们将需要[18, 推论 1]。

引理 5. 设 $|\alpha-a/q|\leqslant q^{-2}$、$(a,q)=1$ 和 $2\leqslant R\leqslant q\leqslant N/R$。则

$$S(\alpha)\ll\frac{N}{\log N}+\frac{N\log^{\frac{3}{2}}(R)}{\sqrt{R}}.$$

现在我们得到[16, 引理 3]的一个变体。

引理 6。设 $R:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 且 $a:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 且 $x$，使得 $2\leqslant R\leqslant a(q)$，$a(q)\leqslant x\leqslant q$ 且 $R/a<1$。取 $N$ 和 $q$，并假设

$$\frac{qR(q)}{a(q)}<N<\frac{q}{R(q)}\left(1-\frac{R(q)}{a(q)}\right). \tag{3}$$

对于上述模 $q$ 的所有本原特征 $\chi$，我们一致地有，

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\chi(n)e(\alpha n)\right| \ll \max\left(\frac{x}{\log x}, x\frac{(\log R(q))^{3/2}}{\sqrt{R(q)}}\right).$$

证明。令 $M=[x]$，根据狄利克雷定理，存在整数 $r$ and$s$，其中 $(r,s)=1$ 且 $1\leqslant s\leqslant M/R$，使得

$$\left|\frac{N}{q}-\frac{r}{s}\right| \leqslant \frac{1}{sM/R}. \tag{4}$$

假设 $r=0$ 由（4）可得

$$N\leqslant \frac{qR}{sx},$$

但这与（3）的左端一起给出

$$\frac{1}{a(q)} < \frac{1}{sx},$$

即与假设 $a(q)\leqslant x$ 和 $1\leqslant s$ 相矛盾。因此我们可以假设 $r\neq 0$，而（4）与 $M=[x]$ 以及假设 $a(q)\leqslant x\leqslant q$ 和 $R/a<1$一起给出

$$s\geqslant \frac{q}{N}\left(r-\frac{R}{M}\right)\geqslant \frac{q}{N}\left(1-\frac{R(q)}{a(q)}\right)>0. \tag{5}$$

现在由（3）的右端可得

$$\frac{q}{N} > R(q)\left(1-\frac{R(q)}{a(q)}\right)^{-1}.$$

将其与（5）结合，我们得到 $s\gg R$。利用 $s\gg R$，由引理 5 即可得到结论。□

接下来，我们需要根据 Pomerance 在 [20, 引理 3]中的结果，给出三角和的一个显式界。

引理 7. 对于 $x\geqslant 1$，且 $\alpha$ 为实数，我们有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{|\sin(\alpha n)|}{n}\leqslant \frac{2}{\pi}\log x+\frac{2}{\pi}\left(C+\log 2+\frac{3}{x}\right).$$

现在我们可以证明定理 4。

证明。我们取 $\chi$ 原始的，并从

$$\chi(n)=\frac{1}{d(\overline{\chi})}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)e\left(\frac{an}{q}\right)=\frac{1}{d(\overline{\chi})}\sum_{0<|a|<q/2}\overline{\chi}(a)e\left(\frac{an}{q}\right),$$

其中 $d(\overline{\chi})$是高斯和。对 $1 \leqslant n \leqslant N$求和，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\chi(n) &= \frac{1}{d(\overline{\chi})}\sum_{0<|a|<q/2}\overline{\chi}(a)\sum_{n=1}^{N}e\left(\frac{an}{q}\right)\\ &= \frac{1}{d(\overline{\chi})}\sum_{0<|a|<q/2}\overline{\chi}(a)\frac{e\left(\frac{aN}{q}\right)-1}{1-e\left(\frac{-a}{q}\right)}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\sum_{n=1}^{N}\chi(n) \leqslant \frac{\sqrt{q}}{2\pi}\left|\sum_{0<|a|<q/2}\frac{\overline{\chi(a)}\left(e(\frac{aN}{q})-1\right)}{a}\right| + O(\sqrt{q}). \tag{6}$$

现在我们将内层求和拆分为两部分： $\Sigma_1$ 满足 $0 < |a| \leqslant a(q)$，以及$\Sigma_2$ 满足 $a(q) < |a| < q/2$。

由于 $\chi$ 为偶数，根据分部求和和引理 6，可得

$$\Sigma_2 \ll \max\left(\log\frac{\log q}{\log a(q)}, \frac{(\log R(q))^{3/2}}{\sqrt{R(q)}}\log\frac{q}{a(q)}\right).$$

现在注意到

$$\Sigma_1 = 2i\sum_{1\leqslant a\leqslant a(q)}\frac{\overline{\chi(a)}\sin(\frac{2\pi aN}{q})}{a},$$

因此由引理 7 可得

$$|\Sigma_1| \leqslant 2\left(\frac{2}{\pi}\log a(q) + \frac{2}{\pi}\left(C + \log 2 + \frac{3}{a(q)}\right)\right).$$

因此我们得到所需的结果——定理 4。 □

## 2. Improving Pólya–Vinogradov using a Burgess-like bound

本节旨在证明定理2。我们先证明以下基本结果。

引理 8. 假设猜想 *1* 成立，则有如下结果。取 $a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 使得 $a(q) \leqslant x \leqslant q$ 且有 $x$ 使得$2 \leqslant (\log x)^{2+\epsilon} \leqslant a(q)$。对于所有上述模 $\chi$ 的本原特征 $q$ 以及 $\log a(q)/\operatorname{loglog} q \to \infty$，该结果一致成立。

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\chi(n)e(\alpha n)\right| \ll_\epsilon \frac{x}{\log x}.$$

证明。令 $N=\lfloor x\rfloor$, $R=(\log N)^{2+\epsilon}$。取足够大的 $q$，即可轻易得到 $2\leqslant R\leqslant N$。由狄利克雷定理，存在整数 $r$ 和$s$，其中 $(r,s)=1$ 且 $1\leqslant s\leqslant N/R$，使得

$$\left|\alpha-\frac{r}{s}\right|\leqslant\frac{1}{sN/R}.$$

如果 $s\geqslant R$，则由引理 5可得该结论，因为

$$\frac{N}{\log N}+N\frac{(\log R)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{R}}\ll_\epsilon\frac{x}{\log x}.$$

现在设 $s<R$。由分部求和可得

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\chi(n)e(\alpha n)\right|\ll\left(1+\left|\alpha-\frac{r}{s}\right|x\right)\max_{u\leqslant x}|T(u)|\ll R\max_{u\leqslant x}|T(u)|,$$

其中

$$T(u)=\sum_{n\leqslant u}\chi(n)e\left(\frac{rn}{s}\right).$$

将和式 $T(u)$ 中的各项按 $(n,s)$ 的取值分组，可得

$$\begin{aligned}T(u)&=\sum_{dt=s}\sum_{\substack{dm\leqslant u\\(m,t)=1}}\chi(md)e\left(\frac{rm}{t}\right)\\&=\sum_{dt=s}\chi(d)\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant t\\(a,t)=1}}e\left(\frac{ra}{t}\right)\sum_{\substack{m\leqslant u/d\\m=a\pmod t}}\chi(m)\\&=\sum_{dt=s}\frac{\chi(d)}{\varphi(t)}\sum_{\psi\pmod t}\sum_{1\leqslant a\leqslant t}e\left(\frac{ra}{t}\right)\overline{\psi}(a)\sum_{m\leqslant u/d}\chi(m)\psi(m).\end{aligned}$$

将猜想 1 应用于右侧的和式，可得

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(n)e(\alpha n)\ll_\epsilon R\frac{x}{(\log x)^{3+\epsilon}}\ll_\epsilon\frac{x}{\log x}.$$

□

现在我们可以证明定理 2。

证明。 我们再次使用（6），并将内层求和拆分为两部分： $\Sigma_1$ 其中 $0<|a|\leqslant a(q)$ 以及 $\Sigma_2$ 其中 $a(q)<|a|<q/2$。

现在利用 $\chi$ 为偶数，由分部求和和引理 8，可得

$$\Sigma_2\ll\log\frac{\log q}{\log a(q)}.$$

接着注意到

$$\Sigma_1 = 2i \sum_{1 \leqslant a \leqslant a(q)} \frac{\overline{\chi(a)} \sin(\frac{2\pi aN}{q})}{a},$$

因此，由引理 7 可得

$$|\Sigma_1| \leqslant 2 \left( \frac{2}{\pi} \log a(q) + \frac{2}{\pi} \left( C + \log 2 + \frac{3}{a(q)} \right) \right).$$

因此，我们得到所需结果 raking log $a(q) = (\log \log q)^{1+\epsilon}$。 □

一般来说，我们可以假设以下 Burgess 型结果。

猜想 2. 对任意模 $q$ 的非主特征 $\chi$，以及满足 $x \gg l(q)$ 的 $x$，对于固定的 $l : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，有

$$\sum_{n \leqslant x} \chi(n) \ll \frac{x}{c(x)},$$

对于某个 $c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$。

与引理 8 的证明相同，假设猜想 2，我们证明以下结果。

引理 9. 假设猜想 2 对特定的 $l$ 和 $c$成立，则有如下结果。取 $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 使得 $a(q) \leqslant x \leqslant q$且取 $x$ 使得 $2 \leqslant R(x) \leqslant a(q)$。对于所有如上所述模 $\chi$ 的本原特征 $q$ 以及 $x \gg l(q)$，该结果一致成立：

$$\left| \sum_{n \leqslant x} \chi(n) e(\alpha n) \right| \ll x \max \left( \frac{1}{\log x} + \frac{(\log R(x))^{3/2}}{\sqrt{R(x)}}, \frac{R(x)}{c(x)} \right)$$

与定理 2的证明相同，利用引理 9，可以证明以下更一般的结果。

定理 10. 假设猜想 2 对特定的 $l$ 和 $c$成立，则有如下结果。对于所有如上所述模 $\chi$ 的偶本原特征 $q$， $2 \leqslant R(x) \leqslant a(q)$ 以及 $l(q) \leqslant a(q)$，

$$\left| \sum_{n \leqslant x} \chi(n) \right| \ll \log a(q) + \int_{a(q)}^{q} \frac{\max(x)}{x} dx,$$

其中

$$\max(x) = \max \left( \frac{1}{\log x}, \frac{(\log R(x))^{3/2}}{\sqrt{R(x)}}, \frac{R(x)}{c(x)} \right).$$

## 3. Hildebrand's version of Burgess bound

定理3 得益于对[14]中引理 4 的以下改进而得以成立。

引理 11. 设 $f$ 是满足 $-1 \leqslant f \leqslant 1$ 的实乘性函数，并设

$$M(x) = M(x, f) = \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(x).$$

则对于 $3 \leqslant x \leqslant x' \leqslant x^{\mathcal{O}(1)}$，我们有

$$|M(x') - M(x)| \ll \left( \frac{\log(2x'/x)}{\log x'} \right)^{1/2-\epsilon_1},$$

对于任意 $\epsilon_1 > 0$，且隐含常数是一致的。

在着重讨论引理 11 之前，我们将用它来证明定理 3。

证明。应用引理 11，取 $f = \chi$（模素数 $p$ 的非主实特征），$x = N \geqslant p^{1/4-\delta}$ 以及 $x' = Np^{2\delta}$（$\geqslant p^{1/4+\delta}$），我们得到

$$M(N, \chi) = M(Np^{2\delta}, \chi) + \mathcal{O}\left(\delta^{1/2-\epsilon_1}\right).$$

利用 Burgess 估计对 $M(Np^{2\delta}, \chi)$ 进行界定，即得所需结果。

□

现在剩下的工作是证明引理 11。证明基于两个结果。首先，我们需要 Tenenbaum 在 ′中给出的 Hal [21, 第 343] 页上的结果版本，其中定义

$$S(x, T) := \min_{|\gamma| \leqslant 2T} \sum_{p \leqslant x} \frac{1 - \mathbf{R}\left(f(p)p^{-i\gamma}\right)}{p},$$

可得，对于任意乘法函数 $|f(n)| \leqslant 1$、$x \geqslant 3$ 和 $T \geqslant 1$

$$M(x, f) \leqslant (1 + S(x, T))e^{-S(x,T)} + \frac{1}{\sqrt{T}}. \tag{7}$$

这给出了我们所需两个结果中的第一个。

定理 12. 对所有满足 $|f| \leqslant 1$ 的实乘性函数 $f$、所有 $x \geqslant 3$，并且满足

$$S'(x, t) := \min \left\{ \log\log x + O(1), \sum_{p \leqslant x} \frac{1 - f(p)}{p} \right\}$$

我们有

$$S(x, f) \ll (1 + S'(x, t)) \exp\left(-S'(x, t)\right).$$

证明。 该结果由（7）可得，注意到当 $f$（$n$）为实数时，我们有

$$S(x,T)=\min\left\{\log\log x+O(1),\sum_{p\leqslant x}\frac{1-f(p)}{p}\right\}.$$

□

第二个是命题 4.1. in [9]。

引理 13. 对所有满足 $-1\leqslant f\leqslant 1$ 的实乘法函数 $f$。令 $x$ 足够大，$1\leqslant x\leqslant x'$。那么

$$|M(x')-M(x)|\ll\frac{\log 2x'/x}{\log x'}\exp\left(\sum_{p\leqslant x'}\frac{1-f(p)}{p}\right).$$

现在我们可以证明引理 11。

证明。给定 $x'\geqslant x\geqslant 3$，定义 $\delta$ 为 $x'=x^{1+\delta}$，并令

$$R=\log\left(\frac{\log x'}{\log 2x'/x}\right)^{1/2+\epsilon}.$$

如果我们假设

$$\sum_{p\leqslant x'}\frac{1-f(p)}{p}\geqslant R,$$

我们有引理 11 可由定理 12以及利用来自$3\leqslant x\leqslant x'\leqslant x^{\mathcal{O}(1)}$ 可得

$$\sum_{x\leqslant p\leqslant x'}\frac{1-f(p)}{p}\ll 1.$$

另一方面，若我们假设

$$\sum_{p\leqslant x'}\frac{1-f(p)}{p}\leqslant R,$$

引理 11 可由引理 13推出。证明至此结束。□

## References

[1] J. Bober、L. Goldmakher、A. Granville 和 D. Koukoulopoulos，特征和的大值的频率与结构，《欧洲数学会杂志》（JEMS），20(7)：1759–1818，2018年。[2] M. Bordignon，本原特征的部分高斯和与波利亚–维诺格拉多夫不等式，《伊比利亚美洲数学杂志》，2021年，DOI：10.4171/RMI/1328[3] M. Bordignon 和 B. Kerr，通过部分高斯和得到的显式波利亚–维诺格拉多夫不等式，《美国数学会汇刊》，373(9)：6503–6527，2020年。

[4] D. A. Burgess，二次剩余与非剩余的分布，《Mathematika》，4：106–112，1957年。[5] D. A. Burgess，关于特征和原根，《伦敦数学会会刊》，12(3)：179–192，1962年。[6] P. D. T. A. Elliott，外推乘法函数的平均值，《Indagationes Mathematicae》，51：409–420，1989年。[7] E. Fouvry、E. Kowalski、P. Michel、C. S. Raju、J. Rivat 和 K. Soundararajan，关于迹函数的短和，《格勒诺布尔傅里埃研究所年刊》，67(1)：423–449，2017年。[8]D. A. Frolenkov 和 K. Soundararajan，波利亚–维诺格拉多夫不等式的推广，《拉马努金杂志》，31(3)：271–279，2013年。[9] A. Granville；K. Soundararajan，积性函数谱，《数学年刊》（2），153(2)：407–470，2001年。[10] A. Granville；K. Soundararajan，积性函数平均值的衰减，《加拿大数学杂志》，55(6)：1191–1230，2003年。[11] A. Granville 和 K. Soundararajan，大特征和：伪装特征与波利亚–维诺格拉多夫定理，《美国数学会杂志》，20(2)：357–384，2007年。[12] A. Granville；K. Soundararajan，大特征和：伯吉斯定理与 $L$-函数的零点，《欧洲数学会杂志》，20(1)：1–14，2018年。[13]A. Granville；K. Soundararajan，哈尔ász定理的新证明及其推论，《组合数学》，155(1)：126–163，2019年。[14] A. Hildebrand，关于乘法函数的维尔辛平均值定理，《伦敦数学会通报》，18(2)：147–152，1986年。[15] A. Hildebrand，关于伯吉斯特征和估计的注记，《加拿大科学院数学报告》，8(1)：35–37，1986年。[16] A. Hildebrand，关于波利亚–维诺格拉多夫不等式中的常数，《加拿大数学通报》，31(3)：347–352，1988年。[17] A. Hildebrand，特征和的大值，《数论杂志》，29(3)：271–296，1988年。[18] H. Montgomery；R. Vaughan，带有积性系数的指数和，《数学发明》，43(1)：69–82，1977年。[19] R. E. A. C. Paley，关于特征的一个定理，《伦敦数学会杂志》，7(1)：28–32，1932年。´ C. Pomerance，关于波利亚–维诺格拉多夫不等式的评论，《Integers》，11(4)：531–542，2011年。[21]G. Tenenbaum，《解析与概率数论导论》，剑桥高等数学研究丛书，第46卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。xvi+448 页。

KTH Royal Institute of Technology, Stockholmand
Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Department of Algebra, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8, Czech Republic Department of Mathematics电子邮件地址：matteobordignon91@gmail.com