arXiv:2303.01893v1 [quant-ph] 3 Mar 2023

原子超精细基态中的量子双稳态

B. G´abor、D. Nagy、A. Vukics 和 P. Domokos

Wigner物理研究中心，匈牙利布达佩斯 H-1525，邮政信箱49号，2023年3月6日

一级相变在自然界中无处不在，然而，对于远离热平衡的量子系统而言，这一概念却含义模糊且备受争议。我们构建了一个典型范例，以阐明其中的关键概念。我们展示了光学腔中的原子能够呈现一级耗散相变，其中稳定共存的各相是量子纯度很高的量子态。这些状态包括原子的超精细基态以及电磁场模式的相干态。该方案得益于原子与腔场之间耦合的集体增强。因此，我们提出了一种切实可行的实验方案，用于研究量子极限下的耗散相变现象，尤其能够进行向热力学极限的有限尺寸标度分析。

一级耗散量子相变（DQPT） [1, 2] 具有以下定义性特征：（i）在给定控制参数的一段有限范围内，量子系统具有多个稳定的稳态；（ii）这些稳态可通过序参量在宏观尺度上加以区分；（iii）它们近似为纯量子态。当控制参数扫过临界区域时，稳态取决于此前的演化历程，序参量则表现出滞后现象。第（iii）项条件尤为特殊。尽管许多经典系统都具有（i）和（ii）所描述的多稳态特性，但直到最近，人们才在各种系统中发现了量子版本的实例。理论预测，里德堡原子团簇中会出现一级动态量子相变 [3, 4, 5]，但其实验可行性一直存在争议 [6, 7, 8, 9]。具有人工设计损耗的光学晶格 [10, 11]，超冷原子腔量子电动力学系统 [12]，非线性光子模或极化激元模 [13, 14]，激子-极化激元凝聚体 [15]，以及电路量子电动力学系统 [16, 17, 18] 也已被证明会表现出一级耗散相变。

外部驱动的耗散量子系统可以演化到驱动与耗散相平衡的稳态，这与热力学平衡不同。在这些稳态中，系统存在稳定的电流，例如穿过系统的光子通量，从而为稳态提供可测量的宏观特征。测量是使用“相变”这一术语的重要组成部分。此类现象的典型实验设置是腔量子电动力学（QED）。在腔量子电动力学的光学波段，原子被装载到由激光源驱动的法布里–珀罗型光学谐振腔中。部分透过反射镜的光携带着与原子相互作用所产生的腔内场信息。通过光电探测器连续监测输出耦合光，可获得强度测量信号，它可作为腔内系统的序参量。即使系统只有少数几个自由度，也就是说它并非宏观系统，稳态仍可被视为不同的相，因为测量信号具有宏观特征。

光学双稳态 [19, 20, 21, 22, 23] 是腔量子电动力学中一级相变的典型例子。通常形式的光学双稳态 [20] 满足前两个条件（i）和（ii），但不满足第三个条件（iii）。激光驱动的光学谐振腔模式的透射可以被抑制或允许，而驱动强度相同；具体取决于装载在模体积中的原子的状态。非线性源于二能级原子的饱和效应。完全饱和时，原子介质对光透明，光便能以自洽的方式充满共振驱动的腔模。在一定的驱动强度范围内，还可以共存一种截然不同的解：原子接近其基态，形成吸收性很强的介质。此时光强受到抑制，从而确保原子处于低激发状态。在这一相中，原子的状态接近纯量子态，即基态。然而，在亮相中，饱和原子对应于高熵混合态，因此违反了上述条件（iii）。

在光子阻塞崩溃（PBB）相变[24, 25, 26]中，这三个条件都得到了满足。实验配置非常相似，不过，原子介质仅由一个二能级原子组成，而且它与模式之间的电偶极耦合必须非常强。这可以在微波频段的超导电路量子电动力学系统中实现

A. Vukics: vukics.andras@wigner.hu

在该频段，已有实验利用三能级原子观测到一种与之密切相关的双稳态效应 [16]。

本文提出了一种光学腔量子电动力学方案，它以内禀形式呈现一阶耗散量子相变，并利用模式与原子系综之间耦合的集体增强。在这里，进入临界区同样需要较大的协同性，但与 PBB 不同的是，这不仅可以通过增大（单原子）耦合常数来实现——这在光学波段似乎是不可能的——还可以通过增加原子数来实现。不过，增加原子数并不会伴随原子云体积的增大，空间尺度并不起内禀作用。

所提出的方案是近期一项实验的扩展。在该实验中，我们观察到了透射阻塞崩塌 [27, 28], , 另请参见 [29] 中的相关情形。扩展之处在于，使用两个腔模，而非实验 [28] 中的单个腔模。这些模式与一个由四能级图描述的原子系综相互作用。各相对应于量子纯度较高的稳态。两个模式要么处于真空态，要么处于高强度相干态；与此同时，原子处于其超精细基态之一。由于稳态如此简单，采用半经典理论便足以描述相图，并计算系统序参量随控制参数的变化。

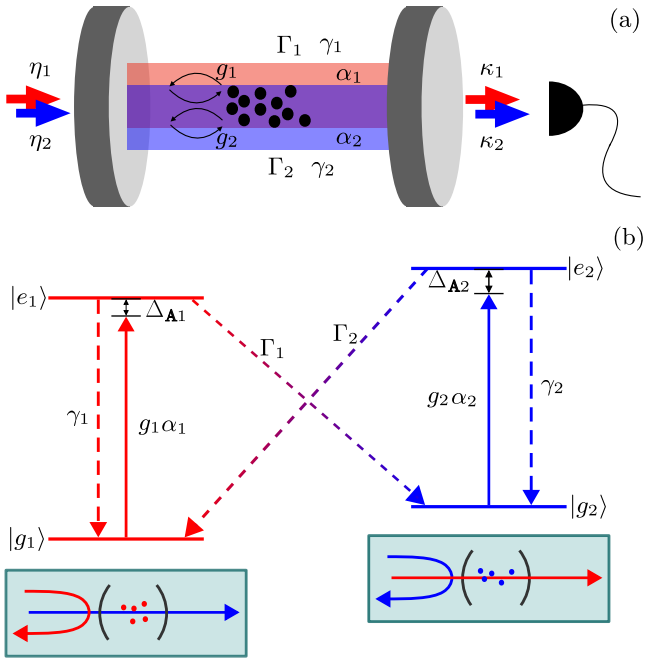

图 1：（a）含有两个激光驱动模式并与原子系综相互作用的腔量子电动力学方案参数。图中仅为说明目的将两个模式在空间上分开；实际上可以使用腔的两个基模。（b）原子的相关能级图，其中两个偶极允许跃迁通过弛豫过程交叉耦合。底部的示意图表示原子基态会切换腔驱动场的透射或反射。

考虑由 N 个原子组成的冷系综，它们与频率为 ω_{Ci} 、线宽为 κ_i （$i = 1$, 两个模式分别对应 2）的腔的两个模式相互作用。这些模式由频率为 ω_i 的相干激光在外部驱动，驱动振幅分别为 $\sqrt{N}\,\eta_i$。为方便后续处理，引入缩放因子 $\sqrt{N}$。腔模分别耦合到电偶极跃迁 $|g_1\rangle \leftrightarrow |e_1\rangle$ 和 $|g_2\rangle \leftrightarrow |e_2\rangle$。这些跃迁的共振频率为 ω_{Ai}，线宽为 γ_i；电偶极相互作用强度用单光子拉比频率 $g_i = \sqrt{\frac{N\omega_{Ci}}{2\epsilon_0\hbar\mathcal{V}}}\,d_i$ 表示，其中 d_i 为原子偶极矩，模体积为$\mathcal{V}$。请注意，将 N 引入 g_i 的定义后，这些参数描述的是腔模与冷原子系综之间的集体耦合。

对于该方案而言，重要的是，来自激发能级的原子不仅可以衰变到与腔耦合的基态，即 $|e_i\rangle \to |g_i\rangle$，也可能发生交叉衰变 $|e_1\rangle \to |g_2\rangle$,$|e_2\rangle \to |g_1\rangle$ ，其速率分别为 Γ_1 和 Γ_2。这就是耦合子空间 1 和 2 的机制。

动力学变量的时间演化可以用半经典平均场模型描述，具体如下：

麦克斯韦-布洛赫方程。令 $\alpha_i = \mathrm{Tr}(a_i)/\sqrt{N}$ 表示腔场模式的复振幅，其中a_i 是相应腔模的湮灭算符。相应转变的原子极化为量子平均值 $m_i = \langle |g_i\rangle\langle e_i| \rangle$。在平均场近似的框架下，不再根据原子在腔模中的坐标或速度对其加以区分，因此无需对集体变量再进行系综平均。态 $|g_i\rangle$ 的占据率记为 $n_{gi} = \langle |g_i\rangle\langle g_i| \rangle$——它们是介于 0 和 1 之间的数——而态 $|e_i\rangle$ 的占据率 n_{ei} 则以类似方式定义。平均场运动方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_1 &= (i\Delta_{C1} - \kappa_1)\alpha_1 + g_1\, m_1 + \eta_1\,, \\
\dot{m}_1 &= (i\Delta_{A1} - \gamma_1 - \Gamma_1)\, m_1 + g_1\,[n_{e1} - n_{g1}]\,\alpha_1\,, \\
\dot{n}_{e1} &= -g_1\,[\alpha_1^* m_1 + m_1^* \alpha_1] - 2(\gamma_1 + \Gamma_1) n_{e1}\,, \\
\dot{n}_{g1} &= g_1\,[\alpha_1^* m_1 + m_1^* \alpha_1] + 2\gamma_1\, n_{e1} + 2\Gamma_2\, n_{e2}\,,
\end{aligned}
\tag{1a}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_2 &= (i\Delta_{C2} - \kappa_2)\alpha_2 + g_2 m_2 + \eta_2\,, \\
\dot{m}_2 &= (i\Delta_{A2} - \gamma_2 - \Gamma_2)\, m_2 + g_2\,[n_{e2} - n_{g2}]\,\alpha_2\,, \\
\dot{n}_{e2} &= -g_2\,[\alpha_2^* m_2 + m_2^* \alpha_2] - 2(\gamma_2 + \Gamma_2) n_{e2}\,, \\
\dot{n}_{g2} &= g_2\,[\alpha_2^* m_2 + m_2^* \alpha_2] + 2\gamma_2\, n_{e2} + 2\Gamma_1\, n_{e1}.
\end{aligned}
\tag{1b}
$$

场模 α_i 和极化 m_i 的方程是在以 ω_i ($i = 1, 2$) 旋转的参考系中写出的。不失一般性，为简便起见，我们考虑对称情形，即带有索引$i = 1$ 和 2 的参数两两相等：对于 $i = 1,2$，有 $\gamma_i = \gamma$、 $\Gamma_i = \Gamma$、 $\kappa_i = \kappa$ 和 $g_i = g$。我们考虑腔模的共振驱动，即 $\Delta_{C1} = \Delta_{C2} = 0$。腔线宽$\kappa = 1.32\gamma$ 和原子-腔耦合取自实验 [28], , 对于后者，单原子耦合为 $g(N = 1) = 0.1\gamma$。不失一般性地取 $\Gamma = \gamma$。驱动振幅 η_1 和 η_2 作为系统的控制参数保留，可对其进行调节，以探索不同的相及其之间的转变。

通过对上述引入的动力学变量和参数进行 N 缩放，我们实现了 N 不再出现在系统（1）中，甚至不再作为布居变量取值范围的上限。此外，按上述定义（其中包含一个 $\sqrt{N}$ 因子）得到的 g^2 与系综协同性 $\mathcal{C} \equiv g^2/\sqrt{(\Delta_C^2 + \overline{\kappa^2})(\Delta_A^2 + \gamma^2)}$成正比。后者可作为非线性的度量，正如由 耦合到腔模的二能级原子组成的系统在 $\mathcal{C} \sim 1$ 区域内能够实现光学双稳态所证明的那样。注意，当 $\Gamma_i = 0$ 时，系统（1）分解为两个互不耦合的二能级系统，此时双稳态源于原子的饱和。尽管我们将考虑相对于线宽较大的原子失谐 Δ_A γ （数值计算中选取了 $\Delta_A = -12\gamma$，负号表示红失谐），但在强度较大时， n_{ei} 激发态布居仍可能显著。方程中考虑了这种可能性。尽管如此，接下来我们将研究平均场方程的另一种解，它与交叉耦合衰减项有关，并出现在原子的低激发极限下。

方程（1）的稳态解可通过将左侧的时间导数设为零得到。剩余的代数方程组可转化为关于变量 $n_{e1} - n_{g1}$ 的一个具有实系数的7 阶多项式方程。该方程可有 1、3、5 或 7 个实解，其中分别有 1、2、3 或 4 个稳定解，其余均不稳定。稳定解的数量取决于控制参数 η_1 和 η_2，不同解数对应的区域在

图2。

相图取决于协同性，在当前实验装置中，协同性可以通过原子数N改变。相比之下， $N = 5 \cdot 10^3$ （面板 (a)）只允许出现 1 个或三个解，而较大的原子数 $N = 10^5$ 和 10^6（面板 (c) 和 (d)）则会产生包含 5 个解（亮黄色区域的橙色边缘）甚至 7 个解的区域

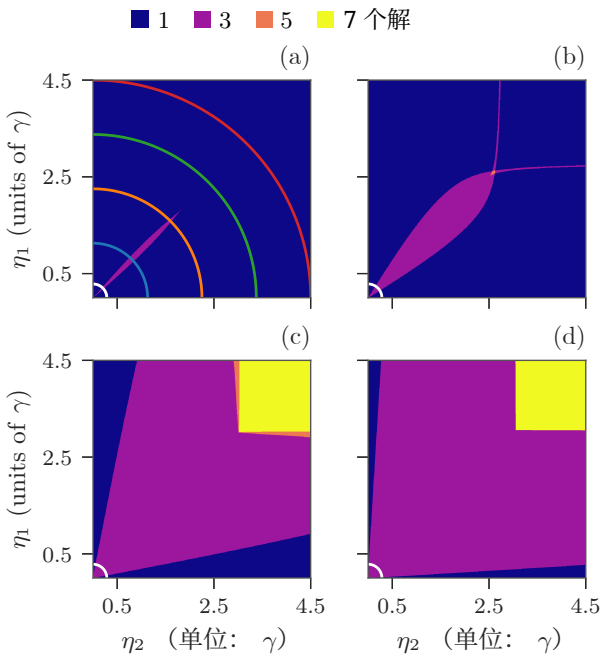

图2：系统（1）在驱动振幅 η_1、 η_2平面上的相图，显示了稳定解数量不同的区域。协同性从 (a) 到 (d) 逐渐增大，对应的原子数分别为 $N = 5 \cdot 10^3$, 10^4, 10^5, 和 10^6, , 单原子耦合为$g = 0.1\gamma$ ($N = 1$) 。相图中绘制的彩色四分之一圆弧上的相关量将在稍后的图 3 和 4中展示。彩色圆弧的半径为 $\eta/\gamma = 0.29$、1。13、2。25 3。38 4。5, 、。低驱动极限下的白色圆弧与动态量子相变（DQPT）尤其相关。

（亮黄色区域）。对于 $N = 10^4$ （面板 (b)），得到的是一个中间相图，其中存在包含 5 个解的区域，但不存在包含 7 个解的区域。仔细观察包含 5 个解和 7 个解区域中的具体解（此处未展示）可以发现，激发态 n_{ei} 的占据显著，而极化 m_i 的值较低。这意味着这些稳态对应于统计混合态，即该态的量子纯度较低。接下来，我们将聚焦于相图左下角仅存在一个或两个稳定解的区域。

相图中给定区域内的不同解在某个宏观可观测量上有所区别；在我们的情形中，该量为透射功率 $\kappa|\alpha_i|^2$ （$i = 1, 2$）。这是一个合适的相序参量，可从平均场模型中直接得到。对于我们的情形（ $\Delta_C = 0$ 和 $|\Delta_A| \gg \gamma + \Gamma$），解为

$$|\alpha_i|^2 = \frac{\eta_i^2}{\kappa^2} \frac{1}{1 + \mathcal{C}^2(n_{ei} - n_{gi})^2}, \qquad (2)$$

凸显协同性作为非线性度量的作用。因子 η_i^2/κ^2 只是

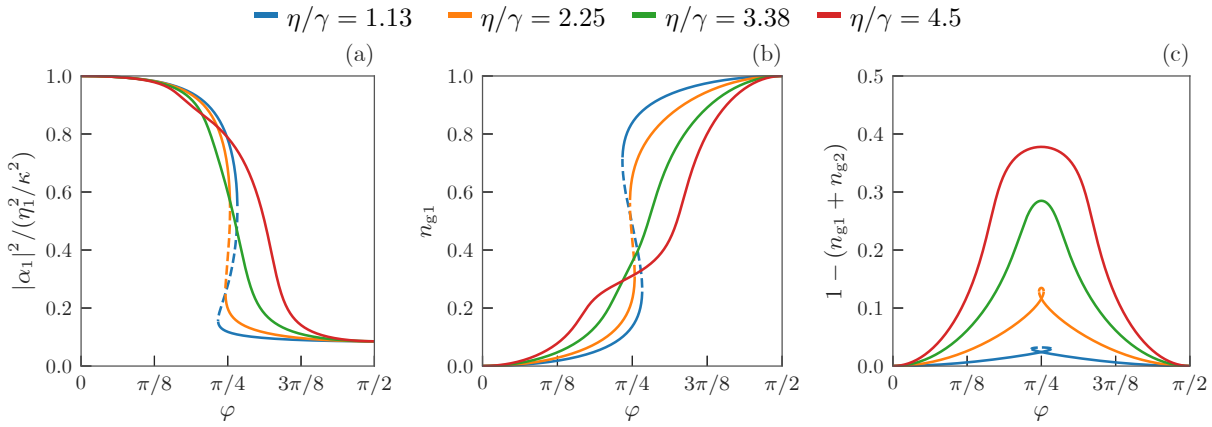

图3：具有多个稳定解的交叉区域。图中展示了沿图2 （a）中绘制的相应颜色圆弧的圆弧，模式1（a）的腔透射率以及相对原子布居（b-c）。弧度 φ 从纵轴开始测量。实线（虚线）分别对应稳定（不稳定）解。

共振驱动的空腔中的光子数，并将用作归一化因子。上面的第二个因子可视为透射率。方程（2）并非显式解，因为布居差 $n_{ei}-n_{gi}$ 取决于腔内强度$|\alpha_i|^2$。然而，这种形式有助于深入理解各个相。

如果布居 $n_{g1}\simeq 1$ 和 $n_{e1}\ll n_{g1}$，则在协同性较大时，通过模式1 的透射率受到抑制 $\mathcal{C}\gg 1$。由于腔的模式1中没有场，所有原子均处于状态 $|g_1\rangle$ 是一个稳定解。另一方面，根据上面 $n_{e2}\approx 0$和 $n_{g2}\approx 0$对应的解，模式2受到近共振激发，从而透射率为1。反之，还存在一个稳定解，其中所有原子均处于 $|g_2\rangle$，即 $n_{g2}\simeq 1$，且模式1的透射率接近于1。图2中具有3个解的区域对应于这些稳定稳态共存的情形。下面将沿相图的圆形截面进一步研究这一情形，即 $\eta_1^2+\eta_2^2\equiv\eta^2$ 保持不变的位置。由于每个原子的总输入功率与 $\eta_1^2+\eta_2^2$成正比，该截面表示固定的每个原子的总驱动强度；而将角度 $\varphi=\arctan\eta_2/\eta_1$ 从0增加到 $\pi/2$，对应于从驱动模式1连续切换到模式2。

图3 展示了沿着图 η_1 轴测得的角度变化时，腔透射率（a）、基态布居（b）和总激发态布居（c）的变化；对应于情形 $N=5000$，并沿图中以相同颜色绘出的不同半径圆弧2（a）变化。由于该方案具有 $1\leftrightarrow 2$ 对称性，指标为 2 的相同物理量曲线只是指标为 1 的曲线的镜像，因此这里只展示后者。红色和绿色圆弧均未穿过双稳态区域，因此沿这些圆弧只有一个实解，且该解当然是稳定的。其余曲线中，透射率和基态布居曲线均呈现双稳态特有的 S形曲线，其中重叠的稳定解（实线）由一个不稳定解（虚线）连接。高（低）透射率对应较低（较高）的相对基态布居。随着总输入功率降低，面板（a）和（b）中的 S形曲线逐渐收敛，而（c）中激发态布居则逐渐降低。在此极限下，双稳态形成于两个超精细基态之间；在基态间的双光子跃迁过程中，激发态仅被虚占据。因此，可以按照引言中提出的三个条件，将其视为一种耗散性量子相变；尤其是，各相对应于高纯度的量子态。

双稳态转变为相变的热力学极限可定义为 $\mathcal{C}\to\infty$ 保持 η 不变。在实际情况下，协同性可通过增加原子数来提高，因此$N\to\infty$ 意味着实际驱动功率 $N\eta^2$ 必须趋于无穷大。图2 中的相图坐标轴已采用这一标度。因此，在有限尺寸标度下，每张相图中绘制的半径为 $\eta/\gamma=0.29$ 的圆弧（白色）都是固定的。尽管多值域的边界略有变化，相图在定性上保持不变。随着协同性（通过原子数）增加，图 4(a) 和 (b) 显示，S形曲线趋向于一条更尖锐的 Z形曲线（镜像）。有趣的是，趋近热力学极限时，两个解在控制参数 η_2/η_1的几乎整个范围内都变得稳定。同时，如图 4 (c) 所示，激发态中的布居趋于完全消失

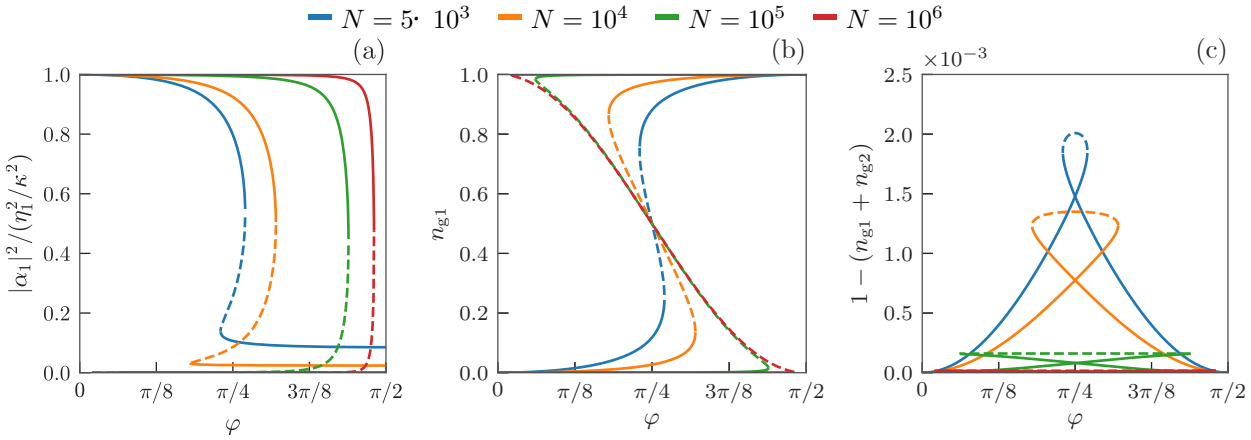

图4：向热力学极限进行有限尺寸标度。图(a)绘出了腔中模式1透射率所表示的序参量，图(b-c)则展示了图2 (a)中相空间圆弧上的相对原子布居，圆弧半径为 $\eta/\gamma = 0.29$ ，对应不同的原子数 N。 φ 从纵轴起测量。实线（虚线）对应稳定（不稳定）的解。

在此极限下。因此，在热力学极限下，所提出的系统有两个稳定解：原子处于其中一个基态 $|g_{1(2)}\rangle$ ，而另一个模式2（1）由相干态占据，这意味着在此极限下，系统各相实现了完美的量子纯度。

总之，所提出的方案为实验研究一级耗散量子相变开辟了道路。该四能级原子方案可以在例如铷-87的D2线超精细结构中得到很好的近似实现，正如文献 [28] 所述。在实验中，原子数可以通过受控方式跨越多个数量级进行调节，从而能够对热力学极限进行有限尺寸标度。除了能够研究介观量子系统中相变的基本概念外，长寿命基态之间的双稳态也为新型原子存储架构带来了希望。

致谢

本研究得到匈牙利文化与创新部以及国家研究、发展与创新办公室的支持，资助来源为匈牙利量子信息国家实验室（资助编号：2022-2.1.1-NL-2022-00004）。

参考文献

[1] E.M.Kessler, G.Giedke, A.Imamoglu,S. F. Yelin, M. D. Lukin, 和 J. I. Cirac。《耗散相变：中心自旋系统中的相变 . *Phys. Rev. A* ，86:012116，2012年7月。[2]Katarzyna Macieszczak、M˘ad˘alin Guţ˘a、Igor Lesanovsky 和 Juan P Garrahan。论开放量子动力学中亚稳态的理论。《物理评论快报》，116(24):240404，2016年。[3]Tony E Lee、Hartmut Haeffner 和 MC Cross。里德伯原子的集体量子跃迁。《物理评论快报》，108(2):023602，2012年。[4] Cenap Ates、Beatriz Olmos、Juan P. Garrahan 和 Igor Lesanovsky。耗散量子伊辛模型的动力学相与间歇性。*Phys.Rev. A*，85:043620，2012年4月。[5] Matteo Marcuzzi、Emanuele Levi、Sebastian Diehl、Juan P Garrahan 和 I gor Lesanovsky。耗散里德伯气体的普适非平衡性质。《物理评论快报》，113(21):210401，2014年。[6] C. Carr、R. Ritter、C. G. Wade、C. S. Adams 和 K. J. Weatherill。稀薄里德伯系综中的非平衡相变。*Phys. Rev. Lett.*，111:113901，2013年9月。[7] N. Malossi、M. M. Valado、S. Scotto、P. Huillery、P. Pillet、D. Ciampini、E. Arimondo 和 O. Morsch。耗散里德伯气体的全计数统计与相图。*Phys. Rev. Lett.*，113:023006，2014年7月。

[8]A Urvoy, F Ripka, Igor Lesanovsky, D Booth, JP Shaffer, T Pfau, and R L¨ow. 蒸汽池中里德伯聚集体的强相关增长。《物理评论快报》, 114(20):203002, 2015年。

[9] F. Letscher, O. Thomas, T. Niederpr¨um, M. Fleis- chhauer, and H. Ott. 驱动耗散里德伯气体中的双稳态与亚稳态。*Physical Review X*, 7:021020, 2017年5月。[10] Ralf Labouvie, Bodhaditya Santra, Simon Heun, and Herwig Ott. 驱动耗散超流体中的双稳态。*Phys. Rev. Lett.*, 116:235302, 2016年6月。[11] J Benary, C Baals, E Bernhart, J Jiang, M R¨ohrle, and H Ott. 在多模多体量子系统中对耗散相变的实验观测。*New Journal of Physics*, 24(10):103034, 2022年10月。[12] Francesco Ferri, Rodrigo Rosa-Medina, Fabian Fin- ger, Nishant Dogra, Matteo Soriente, Oded Zil- berberg, Tobias Donner, and Tilman Esslinger. 可调衰减超辐射量子气体中涌现的耗散相。*Physical Review X*, 11:041046, 2021年12月。[13]S. R. K. Rodriguez, W. Casteels, F. Storme, N. Carlon Zambon, I. Sagnes, L. Le Gratiet, E. Ga- lopin, A. Lemaˆıtre, A. Amo, C. Ciuti, and J. Bloch. 通过动态光学滞后现象探测耗散相变。*Phys. Rev. Lett.*, 118:247402, 2017年6月。[14] Thomas Fink, Anne Schade, Sve n H¨ofling, Chris- tian Schneider, and Ata¸c Imamoglu. 光子关联测量中的耗散相变特征。*Nature Physics*, 14(4):365–369, 2018年4月。[15] Galbadrakh Dagvadorj, Micha-l Kulczykowski, Marzena H. Szyma´nska, and Micha-l Matuszewski. 激子-极化激元凝聚体中的一阶耗散相变。*Physical Review B*, 104:165301, 2021年10月。[16] J. M. Fink, A. Dombi, A. Vukics, A. Wallraff, and P. Domokos. 光子阻塞崩塌相变的观测。*Physical Review X*, 7(1):011012, 2017年1月。[17] Mattias Fitzpatrick, Neereja M. Sundaresan, Andy C. Y. Li, Jens Koch, and Andrew A. Houck. 一维电路量子电动力学晶格中耗散相变的观测。*Physical Review X*, 7:011016, 2017年2月。[18]Riya Sett, Farid Hassani, Duc Phan, Shabir Barzanjeh, Andras Vukics, and Johannes M Fink. 单个超导量子比特诱导的涌现宏观双稳态。*arXivpreprintarXiv:2210.14182*, 2022年。[19] R Bonifacio and LA Lugiato. 光学双稳态中的光子统计与透射光谱。《物理评论快报》, 40(15):1023, 1978年。[20] R. Bonifacio 和 L. A. Lugiato。环形腔中的双稳态吸收。*Lettere al Nuovo Cimento(1971-1985)*, 21(15):505–509，1978年4月。[21]Andr´as Dombi、Andr´as Vukics 和 Peter Domokos。少数原子强耦合腔量子电动力学中的光学双稳态。*Journal of PhysicsB:Atomic, Moleculararnd OpticalPhysics*, 46(22):224010，2013年。出版商：IOP Publishing。[22] W. Casteels、R. Fazio 和 C. Ciuti。一阶耗散相变的临界动力学性质。*Phys. Rev. A*，95:012128，2017年1月。[23] Toni L. Heugel、Matteo Biondi、Oded Zilberberg 和 R. Chitra。利用参数驱动耗散相变实现量子变频器。*Phys.Rev. Lett.*，123:173601，2019年10月。[24] Dombi、Andr´as、Vukics、Andr´as 和 Domokos、Pe- ter。J aynes-Cummings模型极强耦合区域中的双稳态效应。*Eur.Phys. J. D*，69(3):60，2015年。[25] H. J. Carmichael。光子阻塞的崩溃：零维中的耗散量子相变。*Phys. Rev. X*，5(3):031028，2015年9月。出版商：美国物理学会。[26] A. Vukics、A. Dombi、J. M. Fink 和 P. Domokos。光子阻塞崩溃耗散量子相变的有限尺寸标度。*Quan-tum*，3:150，2019年6月。[27]T. W. Clark、A. Dombi、F. I. B. Williams、A. Kurk´o、J. Fort´agh、D. Nagy、A. Vukics 和 P. Domokos。时间分辨观测腔中原子的动力学相变。*Phys. Rev. A*，105:063712，2022年6月。[28]B. G´abor、D. Nagy、A. Dombi、T. W. Clark、F. I. B. Williams、K. V. Adwaith、A. Vukics 和 P. Domokos。腔中冷原子的基态双稳态。*Phys. Rev. A*，107:023713，2023年2月。[29] Elmer Suarez、Federico Carollo、Igor Lesanovsky、Beatriz Olmos、Philippe W Courteille 和 Se- bastian Slama。多能级基态原子的原子-腔集体耦合与非线性动力学。《物理评论*A*》，107(2):023714，2023年。