arXiv:2303.01898v1 [math.CO] 3 Mar 2023

Generalized Splitting and element splitting operations on p-matroids

Sachin Gunjal[1], Uday Jagadale[2], Prashant Malavadkar[3]
[1,2,3]Dr. Vishwanath Karad MIT World Peace University，印度浦那 411 038。电子邮箱： *1.sachin.gunjal@mitwpu.edu.in*, *2.uday.jagdale@mitwpu.edu.in*
3.prashant.malavadkar@mitwpu.edu.in,

摘要

本文定义了 p-拟阵上的广义分裂运算和元素分裂运算。 p-拟阵是指可在 $GF(p)$ 上表示的拟阵。新拟阵的回路和基分别用原拟阵的回路和基来刻画。本文还刻画了一类 n-连通的 p-拟阵，通过广义分裂运算可得到 n-连通的 p-拟阵。我们还证明， p-拟阵的连通性在元素分裂运算下保持不变。本文给出了在分裂操作和元素分裂操作下，由欧拉 p-拟阵得到欧拉 p-拟阵的充分条件。

关键词： p-拟阵；分裂操作；n-连通拟阵；欧拉拟阵
美国数学学会学科分类：05B35；05C50；05C83

1 引言

Raghunathan 等人[9], 介绍了二元拟阵上的双元素分裂操作，而 Shikare [10]介绍了二元拟阵上相对于 n-元素的元素分裂操作。Shikare 还在 [11]中将双元素分裂操作推广为 n 元素分裂操作。文献 [7, 3, 12, 13, 20]研究了分裂操作和元素分裂操作的性质。此外，文献 [5, 4]讨论了可表示在 GF（p）上的拟阵（称为p-拟阵）中相对于两个元素的分裂操作和元素分裂操作。

本文讨论了相对于 n 个元素的分裂操作和元素分裂操作对 p 拟阵的影响。

本文仅考虑无环且无余环的 p-拟阵。未定义的术语和概念请参阅 [8]。

2 广义分裂与广义元素分裂操作

本节中，我们定义关于 n-元素的分裂操作和元素分裂操作，以下分别称为广义分裂和广义元素分裂操作。

定义 2.1. 设 M 是定义在集合 E 上的一个 p-拟阵，且 $T \subset E$. 。假设 A 是 M 在素域 $GF(p)$上的一个矩阵表示。令 A_T 为通过添加一行得到的矩阵，该行除对应于 T 中元素的列取值为 1 外，其余各项均为 0。矩阵 A_T 的向量拟阵记为 M_T. 。从 M 到 M_T 的变换称为分裂操作，拟阵 M_T称为分裂拟阵。令 A'_T 为由 A_T 添加一列得到的矩阵，该列标记为 z ，除最后一行取值为 1 外，其余各项均为 0。矩阵 A'_T的向量拟阵记为 M'_T. 。从M到 M'_T的变换称为元素分裂操作，拟阵 M'_T称为元素分裂拟阵。

注 2.2. 如果 $T \subset M$ 是 M 的余回路，那么 $M \equiv M_T$. 在这种情况下，这种分裂称为平凡分裂；否则称为非平凡分裂。

设 C 是 M 的一个回路，且 $C \cap T \neq \phi$. 我们称 C 为 M 的 PT-回路，如果它也是 M_T. 的一个回路；如果 C 不是 M_T 的回路，则称其为 M. 的 NPT-回路。我们用 $\mathcal{C}_0$ 表示 PT-回路以及不包含 T. 中任何元素的回路所组成的集合。考虑 E 中形如 $C \cup I$ 的子集，其中 $C = \{u_1, u_2, \ldots, u_l\}$ 是 M 的一个 NPT-回路，并且与独立集 $I = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$不相交，且$T \cap (C \cup I) \neq \phi$。如果 $C \cup I$ 不包含 $\mathcal{C}_0$ 中的任何成员，并且存在非零常数 α_1、α_2、...、α_l 以及 β_1、β_2、...、β_k，使得 $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j v_j = 0$ 且 $\sum_{x \in T \cap (C \cup I)} coeff.(x) \equiv 0 (mod\, p)$，则称 $C \cup I$ 为 PT-相关集。

引理 2.3. 设 M是一个 p-拟阵，且 C_1、C_2是 M.中互不相交的 NPT-回路。那么$C_1 \cup C_2$ 是 M_T.中的一个相关集。

证明。令 $C_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$、$C_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_l\}$、$|C_1 \cap T| = k_1$和 $|C_2 \cap T| = k_2$.。不失一般性，假设 x_1、x_2、...、$x_{k_1} \in T$、y_1、...、y_2、$y_{k_2} \in T$，其中 $k_1 \leq k$、$k_2 \leq l$. 。由于 C_1 和 C_2 是回路，存在非零标量 α_1、α_2、...、α_k 以及 β_1、β_2、...、β_l，使得

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{k_1} x_{k_1} + \cdots + \alpha_k x_k = 0 (\mod p),$$

$$\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_{k_2} x_{k_2} + \cdots + \beta_l y_l = 0 (\mod p).$$

令 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k_1}$ 和 $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{k_2}$.。将等式 2 乘以 $\frac{-\alpha}{\beta}$ ，得到

$$\beta'_1 y_1 + \beta'_2 y_2 + \ldots + \beta'_{k_2} x_{k_2} + \cdots + \beta'_l y_l = 0(\mod p).$$

注意，所有系数 $\beta'_i, i = 1, 2, \ldots, l$ 都是非零标量。因此，我们得到非零标量 $\alpha_1, \alpha, \ldots, \alpha_k, \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_l$，使得

$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{k_1} x_{k_1} + \cdots + \alpha_k x_k) + (\beta'_1 y_1 + \beta'_2 y_2 + \ldots + \beta'_{k_2} x_{k_2} + \cdots + \beta'_l y_l) = 0$

此外，

$$(\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k_1}) + (\beta'_1 + \beta'_2 + \cdots + \beta'_{k_2}) = 0,$$

即 $(C_1 \cup C_2) \cap T$ 中元素的系数之和为零。因此， $C_1 \cup C_2$ 是 M_T. 的相关集

□

注 2.4. 设 C_1 和 C_2 是 M 的 NPT-回路，且 I 是 M. 的独立集。那么， $C_1 \cup C_2 \cup I$ 不可能是 M_T. 的回路

上述引理刻画了所有包含 z. 的 M'_T 回路。我们将这类回路记为 $\mathcal{C}_z$. 。因此

$$\mathcal{C}_z = \{C \cup z : C \ is \ NPT \ circuit \ of \ M\}$$

引理 2.5. 设 C 是 M'_T. 的一个回路。那么， $z \in C$ 当且仅当 $C \setminus z$ 是 M. 的一个 NPT 回路

证明。假设 $z \in C$ 是 M'_T. 的一个回路。令 $C' = C \setminus e$.。那么 C' 是 M. 的一个相关集。若 C' 本身是一个 PT 回路，或包含一个 PT 回路，则这样的回路也是 M'_T. 的一个回路。因此，存在一个包含于 C 中的回路，这与矛盾相悖。接下来假设 C' 包含 M. 的一个 NPT 回路 C_1。那么 C_1 是 M'_T. 的一个独立集。注意， $\sum_{x \in C_1 \cap T} \text{coeff.}(x) \not\equiv 0 \pmod p$。将列 z 乘以 $-\alpha$，集合 $C_1 \cup z$ 是 M'_T 的一个相关集，且包含于 C 中，这与矛盾相悖。因此我们得出结论： C 必须是一个 $NPT-$ 回路。

反之，假设 C' 是 M. 的 NPT-回路。那么，正如前面所述，集合 $C' \cup z$ 是 M'_T 中的一个相关集。如果 $C' \cup z$ 不是 M'_T 的回路，那么它包含一个回路，设为 C_1，属于 M'_T.。以下情形之一将会发生；

情形（i）若 $z \in C_1$，则 $C_1 \setminus z$ 是包含于 C' 的 M 相关集，这是不可能的。

情形（ii）若 $z \notin C_1$，则 $C_1 \subseteq C'$，这与 C' 是 M'_T. 的独立集这一事实矛盾。因此，$C' \cup z$ 是 M'_T. 的一个回路。 □

3 M_T 和 M 的回路、基与秩函数 $'_T$

定理 3.1 根据原始 p-拟阵 M. 的回路，描述了分裂拟阵 M_T 和元素分裂拟阵 M'_T 的回路

定理 3.1. 设 M 是底集为 E 的 p-拟阵，且 $T \subset E.$，则

1. $\mathcal{C}(M_T) = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$
2. $\mathcal{C}(M'_T) = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_z$

其中

$\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C}(M)$: C是一个 PT-回路或 $C \cap T = \phi$ $\}$;

$\mathcal{C}_1 =$ $\{C \cup I$的极小元素: $(C \cup I)$ 是 M $\}$的一个 PT-相关集;

$\mathcal{C}_2 =$ $\{C_1 \cup C_2$的极小元素: C_1、C_2是 NPT回路, $C_1 \cap C_2 = \phi$且$C_1 \cup C_2$不包含 $\mathcal{C}_0$中的任何元素，并且 $\mathcal{C}_1\}$;

证明。证明 1 时，包含关系 $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}(M_T)$ 由定义 2.1 和引理 2.3 得出。对于反向包含，设 C 是 $M_T.$ 的一个回路。那么 C 是 $M.$ 的一个相关集。C 属于 M 有以下三种可能情况:

情形 I: C 是 $M.$ 中的一个回路。那么 $C \in \mathcal{C}_0.$
情形 II: C 不是 $M.$ 的回路。那么, C 必定包含 $M.$ 的一个回路 C_1。现在考虑$C \setminus C_1$：

子情形 I: 集合 $C \setminus C_1$ 在 $M.$ 中是相关的。注意，此时$(C \setminus C_1) \cap T \neq \phi.$。否则，$C \setminus C_1$ 包含一个 NPT回路，记为 C'_1，且它包含于 $M_T.$的回路 C中，这不可能。因此，$C \setminus C_1$必定包含一个 NPT回路，记为 $C_2.$。集合 $S = C \setminus (C_1 \cup C_2)$在 M中不能非空，否则集合 $C = C_1 \cup C_2 \cup S$ 将包含两个不相交的 NPT回路 C_1、$C_2.$。根据引理 2, 3 $C_1 \cup C_2$是 M_T的相关集，且包含于 M_T的回路 C 中，矛盾。在这种情况下, $C \in \mathcal{C}_2$
子情形 II: 集合 $C \setminus C_1$ 在 $M.$ 中是独立的。那么 $C = C_1 \cup I$，其中 $I = C \setminus C_1.$。集合 $I \cap T \neq \phi$，否则 C_1是一个 $NPT-$回路。因此 $C \in \mathcal{C}_2.$
在证明 2 时, $\mathcal{C}(M_T) \cup \mathcal{C}_z \subseteq \mathcal{C}(M'_T)$ 的包含关系由定义 2.1 和引理 2.5 得出。对于另一重包含关系，令 C 为 $M'_T.$的回路
Case (i) 令 $z \in C.$。根据引理 3.1, $C \in \mathcal{C}_z.$
情形（ii）若 $z \notin C$，则 $C \in \mathcal{C}(M_T)$。
因此 $\mathcal{C}(M'_T) \subseteq \mathcal{C}(M_T) \cup \mathcal{C}_z.$

□

M_T 和 M'_T 的基的集合分别记为 $\mathcal{B}(M_T)$ 和 $\mathcal{B}(M'_T)$。现在，我们根据 $M.$ 的基元素，给出 $\mathcal{B}(M_T)$ 和 $\mathcal{B}(M'_T)$ 中成员的描述

定理 3.2。设 M 是一个 p-拟阵, $T \subseteq E$，且 M 包含一个 NPT-回路。则

1. $\mathcal{B}(M_T) = \mathcal{B}_1 = \{B \cup x$: $B \in \mathcal{B}(M)$ $x \notin B$且 $B \cup x$既不包含 PT-回路，也不包含 PT-相关集$\}$

2. $\mathcal{B}(M'_T) = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_z$, *where* $\mathcal{B}_z = \{B \cup z : B \in \mathcal{B}(M)\}$.

证明。第 1 条的证明沿用 [5] 中定理 2.12 证明里的类似论证。

在证明 2 时，很容易观察到 $\mathcal{B}(M_T) \cup \mathcal{B}_z \subseteq \mathcal{B}(M'_T)$。接下来假设 $B \in \mathcal{B}(M'_T)$。那么 $rank(B) = rank(M) + 1$. 设 $z \in B$. 那么 $B' = B \setminus z$ 是 M_T 的一个大小为 $rank(M)$ 的独立集。如果 B' 也是 M 的独立集，那么 $B \in \mathcal{B}_z$. 如果 B' 是 M 的相关集，那么它必定包含一个 $NPT-$ 回路 C. 根据引理 3.1, $C \cup z$ 是 M'_T 的一个回路，包含在 M'_T 的基 B 中，这就产生了矛盾。如果 $z \notin B$，那么 B是一个大小为 $rank(M)$ 的独立集 $+1$. 因此 $B \in \mathcal{B}(M_T)$。□

M、 M_T和 M'_T的秩函数分别记为 r、 r'和 r。”

定理 3.3. 假设 $S \subseteq E(M)$。那么

$$\begin{aligned} r'(S) &= r(S), && \textit{if } S \textit{ contains no } NPT\textit{-circuit of } M\textit{; and} \\ &= r(S) + 1, && \textit{if } S \textit{ contains an } NP\textit{-circuit of } M. \\ r''(S \cup z) &= r(S) + 1. \end{aligned} \tag{1}$$

证明。设 B和 B'分别是 $M|_S$和 $M_T|_S$的基，则 $r(S) = |B|$且 $r'(S) = |B'|$.。如果 S 不含 NPT-回路，则 $|B'| = |B|$.。因此 $r(S) = r'(S)$。如果 S含有一个 NPT-回路，则由定理 3.2, $B' = B \cup e$，其中某个$B \in \mathcal{B}$满足$M|_S(e \in)S \setminus B$，且 $B \cup e$含有唯一的 NPT-回路。因此 $r'(S) = r'(M_T|_S) = |B'| = |B \cup e| = |B| + 1 = r(S) + 1$.

等式 $r''(S \cup z) = r(S) + 1$由定义 2.1 得出。 □

4 分裂操作和元素分裂操作对连通及欧拉 p-拟阵的影响

图和拟阵的高连通性已在 [14, 1, 15, 16, 17] 中得到充分研究。本节研究分裂操作和元素分裂操作对连通及欧拉 p-拟阵的影响。在下面的引理中，我们给出一个充分条件，使得利用分裂操作可由一个连通 p-拟阵得到一个连通 p-拟阵。

引理 4.1. 设 M 是一个连通 p-拟阵，且 $T \subset E(M)$。若对于 $E(M)$ 的每个真子集 X，满足 $|X| \geq 1$，则 X 或 $Y = E(M) \setminus X$ 包含 M 的一个 NPT- 回路；那么 M_T 是连通的。

证明。注意， M是一个连通的 p-拟阵，这意味着 M没有 1-分离。反之，假设 M_T 不连通。也就是说， M_T 存在一个 1-分离，即（X,Y）。因此

$$r'(X) + r'(Y) - r'(M_T) < 1.$$

如果 X 和 Y 都包含 np-回路，那么根据引理 3.3，我们有

$$r(X)+1+r(Y)+1-r(M)-1=r(X)+r(Y)-r(M)+1<1.$$

因此，这与事实 $r(X)+r(Y)-r(M)\geq 0$. 矛盾。此外，若 X 或 Y 中只有一个（设为 X）包含一个 np-回路，则有

$$r'(X)+r'(Y)-r'(M_T)=r(X)+1+r(Y)-r(M)-1<1.$$

也就是说

$$r(X)+r(Y)-r(M)<1.$$

因此，(X,Y) 给出了 M 的一个 1-分离，这是不可能的。 □

定理 4.2 刻画了一类 n-连通的 p-拟阵，其 n-连通性在分裂操作下保持不变。

定理 4.2. 设 M 是一个 n-连通且垂直（$n+1$）-连通的二元拟阵，$n\geq 2$, $|E(M)|\geq 2(n-1)$，并且 M 的围长至少为 $n+1$.。设 $X\subset E(M)$ 且 $|X|\geq n$.。那么， M_X 是 n-连通的，当且仅当对于 $E(M)$ 的任意（$n-1$）元子集 S，存在 M 的一个 NPT-回路 C，使得 $S\cap C=\phi$.

证明。通过将 OX-回路替换为 NPT-回路，可以使用 [6] 中定理 2.3 的类似论证来证明。 □

下一个定理指出，非平凡的元素分裂操作保持 p-拟阵的连通性。

定理 4.3. 设 M 是底集为 E. 的连通 p-拟阵。那么， M'_T 是底集为 $E\cup\{z\}$ 的连通 p-拟阵，当且仅当 M_T 是对 M. 应用非平凡分裂操作所得到的分裂拟阵。

证明。证明过程与 [4] 中定理 3.1 的证明类似。本证明中的分裂涉及两个元素 a、 b，但同样的论证也适用于一般的分裂拟阵 M_T、$|T|\geq 2$.。 □

Fleischner [2] 使用从图中度至少为三的顶点移去一对边的操作来刻画欧拉图。在 [18, 19] 中研究了欧拉拟阵。设 M 是底集为 E. 的欧拉拟阵。那么， M 中存在互不相交的回路 C_1、 C_2、.....、 C_{2l-1}、 C_{2l}、.....、 C_k; $2l\leq k$，使得 $E=C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_{2l-1}\cup C_{2l}\cup\cdots\cup C_k$. 设 $T\subset E$ 和 M_T 为分裂拟阵。若由互不相交回路组成的集合 $\mathcal{C}=\{C_1,C_2,\ldots,C_{2l-1},C_{2l},\ldots,C_k\}$ 满足：对于 $1\leq j\leq l$、 $T\cap C_{2j-1}\neq\phi$、 $T\cap C_{2j}\neq\phi$ 和 $(C_{2j-1}\cup C_{2j})\in\mathcal{C}_2$，或者 C_{2j-1}、C_{2j} 是 PT-回路；并且 $C_j\in\mathcal{C}_0$ 对所有 $j\in\{2l+1,2l+2,\ldots,k\}$ 均成立，则称其为 M 的 PT-分解。

命题4.4。设 M 是底集为 E 且具有 $T \subset E$ 的 p-拟阵。若 M 是一个具有 PT-分解的欧拉拟阵，则 M_T 是欧拉的。

˜证明。设 C $= \{C_1, C_2, \ldots, C_{2l-1}, C_{2l}, \ldots, C_k\}$ 是 $M.$ 的 PT-分解。于是

$$E = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{2l-1} \cup C_{2l} \cup \cdots \cup C_k,$$

$T \cap C_{2j-1} \neq \phi$、 $T \cap C_{2j} \neq \phi$，当 $1 \leq j \leq l$时；且对所有 $j \in \{2l+1, 2l+2, \ldots, k\}$，$C_j \in \mathcal{C}_0$。令$C'_j = (C_{2j-1} \cup C_{2j})$； $j \in \{1, 2, \ldots, l\}.$于是，根据 PT-分解的 $C'_j \in \mathcal{C}_2.$，集合 $\{C'_1, \ldots, C'_l, C_{2l+1}, \ldots, C_k\}$是$M'_T.$的回路分解。因此， M_T是一个欧拉拟阵。

□

命题4.5. 设 M 是欧拉 p拟阵，且 $T \subset E$。如果 M的回路分解中相对于 T分裂恰好包含一个 NPT回路，则 M'_T是欧拉p-拟阵。

参考文献

[1] Bixby R. E.，《关于 3-连通性的一个简单定理》，Linear Algebra Appl. 45(1982), 123-126。[2] Fleischner H.，《欧拉图及相关主题》，第 1 部分，第 1 卷, North Holland，阿姆斯特丹（1990）。[3] Malavadkar P. P., Dhotre S. B. 和 Shikare M. M.，《产生图形元素分裂拟阵的余图拟阵类的禁用拟阵子式》，Southeast Asian Bull. Math. 43(1) (2019), 105-119。[4]Malavadkar P. P., Gunjal S. S. 和 Jagadale U.V.，《关于可在 $GF(p)$ 上表示的拟阵的保持连通性的分裂运算》，预印本。https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.03617[5] Malavadkar P. P., Jagadale U.V. 和 Gunjal S. S.，《关于可在 $GF(p)$ 上表示的分裂拟阵的回路》，预印本。https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.00437[6] Malavadkar P. P., Shikare M. M. 和 Dhotre S. B.，《n-连通分裂拟阵的刻画》，Asian-European Journal of Mathematics 第 7 卷，第 4 期，1450060（2014）。

[7] Mills A. D.,《关于分裂拟阵的余回路》,《组合学》89 (2008), 第 243-253 页。[8] Oxley J. G.,《拟阵理论》,牛津大学出版社,牛津(1992)。[9] Raghunathan T. T., Shikare M. M. 和 Waphare B. N.,《二元拟阵中的分裂》,《离散数学》184 (1998), 267-271。[10] Shikare M. M.,《图、二元拟阵的元素分裂运算及其应用》,《数学学生》80 (2010), 85-90。[11] Shikare M. M., Azadi G. 和 Waphare B. N.,《广义分裂运算及其应用》,《印度数学会杂志》78 (2011), 145-154。[12] Shikare M. M.,《二元拟阵的分裂引理》, Southeast Asian Bull. Math. 32 (2008), 151-159。[13] Shikare M. M. 和 Azadi G.,《分裂拟阵的基的确定》,《欧洲组合学杂志》24 (2003), 45-52。[14] Slater P. J.,《4-连通图的分类》,《组合理论杂志》17 (1974), 282-298。[15] Tutte W. T.,《拟阵讲义》,《美国国家标准局研究杂志》B69 (1965), 1-47。[16] Tutte W. T.,《3-连通图理论》,《数学探索》23 (1961), 441-455。[17] Tutte W. T.,《拟阵中的连通性》,《加拿大数学杂志》18 (1966), 1301-1324。[18] Wagner Donald K.,《二分图拟阵与欧拉拟阵的拟阵子式》,《欧洲组合学杂志》74 (2018), 1-10。[19] Welsh D. J. A.,《欧拉拟阵与二分拟阵》,《组合理论杂志》6 (1969), 375-377。[20] 吴耀坤,《偶偏序集与二元线性码的一个奇偶性结果》,《线性代数及其应用》418 (2006), 591-594。