arXiv:2303.01900v1 [math.PR] 3 Mar 2023

# 高阶矩方法下 Meandric 系统中连通分量的中心极限定理

SVANTE JANSON 与 PAUL THÉVENIN

摘要。本文研究大型典型蜿蜒系统的行为，并证明给定形状的连通分量数量满足中心极限定理。我们的主要工具是 Gao 和 Wormald 的一个定理，它使我们能够根据所关注量的高阶矩渐近式推导出中心极限定理。

## 1. 模型与主要结果

**1.1.** 定义与一些记号。设$n \geq 1$ 为一个整数。大小为$n$的弯曲线系统 是平面中的一组不相交环，它们恰好在以下点与水平轴相交：$[2n]:=\{1, \ldots\ldots, 2n\}$；我们称这些点为该弯曲线系统的顶点；如果两个弯曲线系统仅相差一个保持水平轴不变的平面连续变形，则视为相同。据我们所知，弯曲线系统由 Di Francesco、Golinelli 和 Guitter [1], 提出，近来又重新成为研究热点 [6, 4, 2]。一个弯曲线系统可以视为上半平面内一组端点为 $[2n]$ 的非交叉弧，以及下半平面内另一组这样的弧；因此，一个弯曲线系统确定了 $[2n]$, 的两个非交叉匹配（配对划分），每个半平面各一个。容易看出，这建立了大小为 $n$ 的弯曲线系统与 $[2n]$的两组非交叉匹配之间的双射。特别地，由于 $[2n]$ 的非交叉匹配数就是卡特兰数

$$\mathrm{Cat}_n := \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}, \tag{1.1}$$

例如，见 [7, 条目 61], 大小为$n$ 的弯曲线系统的数量为卡特兰数$^2_n$。

蜿蜒系统的每个连通分量都是一个单独的环，它与水平轴相交于 $[2n]$,（即 $\{i_1 < \cdots < i_{2k}\}$）的一个子集，我们称之为该环的支撑集 。注意，支撑集中顶点的数量必为偶数，且

日期：2023年3月3日。2020 数学主题分类。60C05。获克努特与爱丽丝·瓦伦堡基金会资助。

每个间隔（$ij, ij+1$）内的整数数量也为偶数，即 $ij+1 - ij$ 对于 $1 \le j < 2k$ 为奇数。若两个这样的环仅相差一个平移，我们就称它们具有相同的形状。因此，我们可以将每种形状规范化，使其最左侧顶点为 1，并作如下形式化定义：

定义 1.1。 形状是一个（连通的）非交叉环 $S$，其支撑集为一组整数 $\{i_1 = 1 < i_2 < \cdots < i_{2k} = 2l\}$，其中 $k$、$l \ge 1$，且对所有 $1 \le j \le 2k - 1$，$ij+1 - ij$ 均为奇数。

设 $M$ 是一个蜿蜒系统，$C$ 是 $M$ 的一个连通分量。如果 $C$ 与 $S$ 仅相差一个平移，我们就称 $C$ 的形状为 $S$。

我们的主要定理如下。我们将定理 3.1 和 4.4 作为两个特殊情形加以证明，并在第 4.2 节证明剩下的、更困难的情形。

定理 1.2。 固定一个形状 $S$。设 $M_n$ 是一个大小为 $n$ 的均匀随机蜿蜒系统（即定义在 $[\![1, 2n]\!]$ 上），并记 $X_{S,n}$ 为 $M_n$ 中形状为 $S$ 的连通分量数。则 $X_{S,n}$ 满足中心极限定理：存在 $\mu_S, \sigma_S > 0$ 使得

$$\frac{X_{S,n} - n\mu_S}{\sigma_S \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{N}(0,1), \tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{N}(0,1)$ 表示标准正态分布。

请注意，对于某个常数 $\mu_S$，收敛关系 $X_{S,n}/n \xrightarrow{\mathbb{P}}_{n\to\infty} \mu_S$ 已在 [4] 中得到，并且其中给出了 $\mu_S$ 的显式表达式。

## 2. 预备知识

2.1. 更多记号。对于整数 $m \le n$，$[\![m,n]\!]$ 表示整数区间 $[m,n] \cap \mathbb{Z}$。$[\![m,n]\!]$ 的大小是其点的个数，即 $n - m + 1$。注意，$[n] = [\![1,n]\!]$。

对于蜿蜒系统的一个分量 $C$，我们用 $L_C$ ($R_C$) 表示其支撑集中的最左（最右）点。此外，我们称区间 $[\![L_C, R_C]\!]$ 为 $C$ 的基区间，并令 $l(C)$ 表示 $C$ 的半长度，定义为其基区间大小的一半，即 $l(C) := \frac{1}{2}(R_C - L_C + 1)$。（注意，$l(C)$ 始终是一个整数。）对于形状 $S$，我们采用相同的定义；于是 $L_S = 1$，因而 $R_C = 2l(S)$。

对于整数 $N \ge k \ge 0$，令

$$(N)_k := N(N-1)\cdots(N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!} = k!\binom{N}{k}, \tag{2.1}$$

$k$ 阶下降阶乘 $N$。

我们使用标准的 o 和 O 记号。此外，对于两个（正）数列 $a_n$ 和 $b_n$，$a_n \sim b_n$ 表示当 $n \to \infty$ 时 $a_n/b_n \to 1$，即 $a_n = b_n(1+o(1))$；$a_n = \Theta(b_n)$ 表示存在常数 $c > 0$ 和 $C$，使得当 $n$ 充分大时，$c \le a_n/b_n \le C$。请注意，例如，对于 $r = O(\sqrt{n})$，$a_{n,r} \sim b_{n,r}$ 表示对每个满足 $r = r(n) = O(\sqrt{n})$ 的数列都成立；这等价于对任意 $C < \infty$，当 $r \le C\sqrt{n}$ 时，$a_{n,r} \sim b_{n,r}$ 一致成立，因此在这种情况下，对 $r$ 的一致性是自动满足的。我们用“对 $r = O(\sqrt{n})$ 一致成立”表示“对任意 $C < \infty$，当 $r \le C\sqrt{n}$ 时一致成立”。未特别说明的极限均指 $n \to \infty$ 时的极限。

2.2. 关键工具：Gao 和 Wormald 定理。我们的证明依赖于 Gao 和 Wormald 提出的一个定理 [5],，该定理指出，我们可以根据一列变量的高阶（阶乘）矩的渐近行为，推导出中心极限定理。我们来回顾这一结果。

定理 2.1 (Gao 和 Wormald [5])。令 $\mu_n s_n > -1$ 并设 $\sigma_n := \sqrt{\mu_n + \mu_n^2 s_n}$，其中 $0 < \mu_n \to \infty$。假设 $\sigma_n = o(\mu_n)$、$\mu_n = o(\sigma_n^3)$，且一列非负随机变量 $\{X_n\}$ 满足，当 $n \to \infty$ 时：

$$\mathbb{E}[(X_n)_r] \sim \mu_n^r \exp\left(\frac{r^2 s_n}{2}\right). \tag{2.2}$$

对范围 $c\mu_n/\sigma_n \le k \le C\mu_n/\sigma_n$ 内的所有整数 $r$ 一致成立，其中 $C > c > 0$ 为某些常数。则 $(X_n - \mu_n)/\sigma_n$ 的分布收敛于标准正态分布，当 $n \to \infty$ 时。

换句话说，如果一个变量的高阶阶乘矩渐近地与正态分布的阶乘矩相匹配，那么它就收敛于正态分布。

2.3. 一些引理。我们陈述一些后文将用到的简单引理。第一个是一个众所周知的估计，我们在下文中会经常用到。

引理 2.2。(i) 若 $0 \le k \le n/2$，则

$$(n)_k = n^k \exp\left(-\frac{k^2}{2n} + O\left(\frac{k^3}{n^2} + \frac{k}{n}\right)\right). \tag{2.3}$$

(ii) 特别地，若 $k = O(\sqrt{n})$，则

$$(n)_k = n^k \exp\left(-\frac{k^2}{2n} + o(1)\right) \sim n^k \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right). \tag{2.4}$$

(iii) 更一般地，若 $0 \le k \le m$ 且 $m = O(\sqrt{n})$，则

$$(n-m+k)_k \sim n^k \exp\left(-\frac{m^2-(m-k)^2}{2n}\right) = n^k \exp\left(-\frac{k(2m-k)}{2n}\right). \tag{2.5}$$

证明。 (i)、(ii)：这可由对 $1-i/n$ 的对数进行泰勒展开轻易得到，其中 $0 \le i < k$；细节从略。

(iii)：由 (ii) 和 $(n-m+k)_k = (n)_m/(n)_{m-k}$ 可得。 □

由此可得以下渐近式。

引理 2.3. 设 $n \to \infty$ 且 $0 \le r = O(\sqrt{n})$。则

$$\frac{\mathrm{Cat}_{n-r}}{\mathrm{Cat}_n} \sim 2^{-2r}. \tag{2.6}$$

证明。 由定义 (1.1) 和引理 2.2 可得

$$\frac{\mathrm{Cat}_{n-r}}{\mathrm{Cat}_n} = \frac{(n)_r(n+1)_r}{(2n)_{2r}} \sim \frac{(n)_r^2}{(2n)_{2r}} = \frac{n^{2r}}{(2n)^{2r}} \exp\left(-2\frac{r^2}{2n} + \frac{(2r)^2}{4n} + o(1)\right) \sim 2^{-2r}. \tag{2.7}$$

□

本节最后给出另一个简单且广为人知的结果。

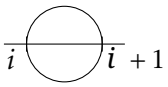
引理 2.4。 设 $m$、$n$、$k \ge 1$。大小为 $m$ 的互不相交的区间的无序 $k$ 元组数量为 $[n]$

$$\binom{n-k(m-1)}{k}. \tag{2.8}$$

证明。 删除每个所选区间中除最左端点以外的所有点，我们得到这类$k$元组区间的集合与 $[n-k(m-1)]$中 k 个互异点的集合之间的一个双射。□

## 3. 第一个例子：半长度为 1 的连通分量。

作为热身，我们首先考虑 $S$ 为半长度为 1 的环这一简单情形。对于任意 $i \in [2n]$, , 令 $Y_i$ 表示以下条件成立的指示变量：




于是,

$$X_{S,n} = \sum_{i=1}^{2n-1} Y_i \tag{3.1}$$

因此，对于每个$r \ge 1$，对 $1 \le i_1 < \cdots < i_r < 2n$求和,

$$\mathbb{E}[(X_{S,n})_r] = \mathbb{E}\left[r! \sum_{i_1<\cdots<i_r} Y_{i_1} \cdots Y_{i_r}\right] = r! \sum_{i_1<\cdots<i_r} \mathbb{E}\left[Y_{i_1} \cdots Y_{i_r}\right]. \tag{3.2}$$

最后一个求和中的期望非零，当且仅当 $[\![ij, i_j+1]\!]$ of$[\![1,2n]\!]$ 的$r$个子区间两两不相交，因此根据引理 2.4，共有 $\binom{2n-r}{r}$ 个非零项。每个非零项都等于 $1/\mathrm{Cat}_n^2$ 乘以包含$r$个半长度为 1 的给定环的大小为$n$的蜿蜒系统的数量；删除这些环（以及其中的顶点）后，我们得到这类蜿蜒系统与大小为$n-r$的蜿蜒系统之间的一个双射，因此这类系统的数量为 $\mathrm{Cat}_{n-r}^2$。于是，(3.2)给出

$$\mathbb{E}[(X_{S,n})_r] = (2n-r)_r \frac{\mathrm{Cat}_{n-r}^2}{\mathrm{Cat}_n^2} = \frac{(2n)_{2r}}{(2n)_r} \cdot \frac{\mathrm{Cat}_{n-r}^2}{\mathrm{Cat}_n^2}. \tag{3.3}$$

特别地，利用引理 2.2 和引理 2.3，若 $r = O(\sqrt{n})$，则

$$\mathbb{E}[(X_{S,n})_r] \sim (2n)^{2r-r} \exp\left(-\frac{4r^2}{4n} + \frac{r^2}{4n}\right) 2^{-4r} = \left(\frac{n}{8}\right)^r \exp\left(-\frac{3r^2}{4n}\right). \tag{3.4}$$

换言之，对于任意固定的 $C < \infty$，式 (2.2) 对 $0 \le r \le C\sqrt{n}$（一致地）成立，其中

$$\mu_n := \frac{n}{8}, \tag{3.5}$$

$$s_n := -\frac{3}{2n}. \tag{3.6}$$

我们有 $\mu_n s_n = -3/16 > -1$，因此

$$\sigma_n := \sqrt{\mu_n(1+\mu_n s_n)} = \sqrt{\frac{13}{128}n}. \tag{3.7}$$

因此我们有 $\sigma_n = o(\mu_n)$，且 $\mu_n = o(\sigma_n^3)$，由此定理 2.1 适用，并得出：

定理 3.1。 若 $S$ 是半长度为 $1$ 的简单环，则

$$\frac{X_{S,n} - n/8}{\sqrt{13n/128}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{N}(0,1). \tag{3.8}$$

这是 对于此特定的 $S$ 选择，定理 1.2，其中 $\mu_S = 1/8$ 且 $\sigma_S^2 = 13/128$ .

## 4. 扩展到任意固定形状

现在我们说明如何将这一结果推广到任意固定形状 $S$。现在令 $Y_i$表示存在一个形状为 $S$ 的分量 $C$，使得 $L_C = i$ 的指示变量；注意，(3.1) 和 (3.2) 仍然成立。

回顾一下，$l(S)$ 是 $S$ 的半长度，因此 $S$ 有基区间 $[\![1,2l(S)]\!]$。我们还定义了另外三个依赖于 $S$ 的常数 $K(S), c_+(S), c_-(S)$。为避免符号繁琐，接下来省略自变量 $S$，仅分别记作 $K, c_+, c_-$。

定义 4.1。（图 *1* 给出了一个示例。）注意，将形状为 $S$ 的分量 $C$ 与水平轴放在一起，会把平面分成两个无界面，各自位于一个半平面内，以及若干个有界面。令 $F_+$ 表示上半平面中的无界面，$F_-$ 表示下半平面中的无界面，并令 $\mathcal{F}(C)$ 表示有界面的集合。对于一个面 $F$，令 $\nu(F)$ 表示 $[\![L_C, R_C]\!]$ 中位于 $F$ 的边界上、但不在 $C$ 上的顶点数；注意，该数必为偶数。因此，我们定义

$$K(S) := \prod_{F\in\mathcal{F}(C)} \mathrm{Cat}_{\nu(F)/2}, \tag{4.1}$$

$$c_+(S) := \nu(F_+)/2, \tag{4.2}$$

$$c_-(S) := \nu(F_-)/2. \tag{4.3}$$

注意，这些常数与定义 $C$ 所用的顶点集合无关，只取决于其形状 $S$。

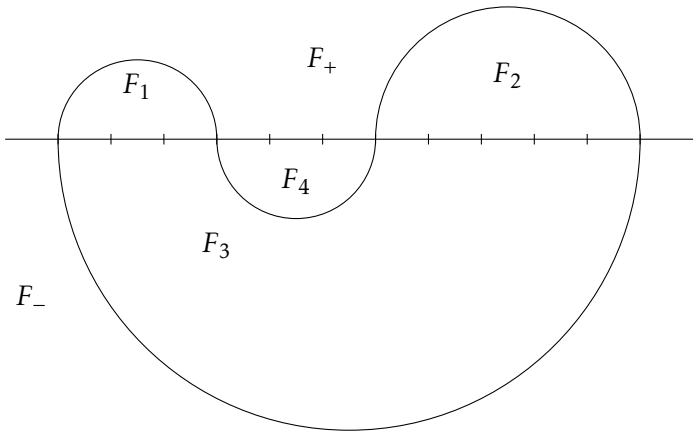



图 1。分量$C$ 有四个有界面$F_1$,$F_2$,$F_3$,$F_4$。在此例中，我们有$K(S)$ = 卡特兰数$_1^2$ 卡特兰数$_2$ 卡特兰数$_3$ = 10，$c_+(S)$ = 1 以及$c_-(S)$ = 0，其中$S$ 是$C$的形状。

4.1. 强形状。若两个分量的基区间重叠，我们就称它们重叠 。因此，若两个分量具有相同的形状$S$，且其支撑集中的最左点分别为$i$ 和$j$，那么当 $|j - i| < 2l(S)$ 时，它们便重叠。

为简单起见，我们先研究这种情况不会发生的情形。若两个不同的蜿蜒系统分量都具有形状$S$，且它们不能重叠，我们就称形状$S$ 为强 形状。因此，若$S$是强形状，则当 $|j-i|<2l(S)$ 时，${}_iY$。第3节中的简单环以及图 1 中的环都是强形状的例子。非强形状称为弱形状；图 2 给出了一个例子。

命题 4.2。 设 $S$ 是半长度为 $l(S)$ 的强形状。则，对于所有 $r \geq 1$，有

$$\mathbb{E}[(X_{S,n})_r] = \Big(2n - 2r\ell(S) + r\Big)_r K^r \frac{\mathrm{Cat}_{n-r\ell(S)+rc_+}\mathrm{Cat}_{n-r\ell(S)+rc_-}}{\mathrm{Cat}_n^2}. \tag{4.4}$$

证明。 我们按照第3节中的方法进行论证。如上所述，(3.2) 仍然成立，并且由于 $S$ 是强形状，当 $|j-i|<2l(S)$ 时，有 $Y_iY_j=0$。因此，根据引理 2.4，(3.2) 中非零项的数量为 $\binom{2n-r(2\ell(S)-1)}{r}$。同样，所有非零项的值都相同，即为 1/卡特兰数$_n^2$ 乘以将给定的 $r$ 个形状为 $S$ 的不相交环补全为大小为 $n$ 的蜿蜒系统的方法数。我们可以用 K 种方式填充每个连通分量中的有界面；上下连通分量中分别还剩下 $2n-2rl(S)+2rc_\pm$ 个顶点，因此可以用卡特兰数$_{n-r\ell(S)+rc_\pm}$ 种方式填充它们。这就得到 (4.4)。□

由引理 2.2 和引理 2.3，根据 (4.4) 可得，对于 $r=O(\sqrt{n})$，有（该结论一致成立）

$$\mathbb{E}[(X_{S,n})_r] \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2nK}{4^{2\ell(S)-c_+-c_-}}\right)^r \exp\left(-\frac{r^2}{4n}\Big[(2\ell(S))^2-(2\ell(S)-1)^2\Big]\right). \tag{4.5}$$

这就是 (2.2)，其中

$$\mu_n := \frac{2nK}{4^{2\ell(S)-c_+-c_-}}, \tag{4.6}$$

$$s_n := -\frac{(2\ell(S))^2-(2\ell(S)-1)^2)}{2n} = -\frac{4\ell(S)-1}{2n}. \tag{4.7}$$

为了应用定理 2.1，我们需要验证 $\mu_n s_n > -1$，这归结为以下结论。

引理 4.3。我们有

$$K(4\ell(S)-1) < 4^{2\ell(S)-c_+-c_-}. \tag{4.8}$$

证明。 注意，根据 $\mathrm{Cat}_n \leq \frac{4^n}{n+1}$ forall $n$，我们可以对$K$ 进行界定：很容易看出，对于给定的$c_\pm$，当每个半平面中只有一个有界面时，$K$ 最大，因此，

$$K \leq \mathrm{Cat}_{\ell(S)-c_+-1}\mathrm{Cat}_{\ell(S)-c_--1} \leq \frac{4^{2\ell(S)-c_+-c_--2}}{(\ell(S)-c_+)(\ell(S)-c_-)} \leq \frac{4^{2\ell(S)-c_+-c_--2}}{\ell(S)}, \tag{4.9}$$

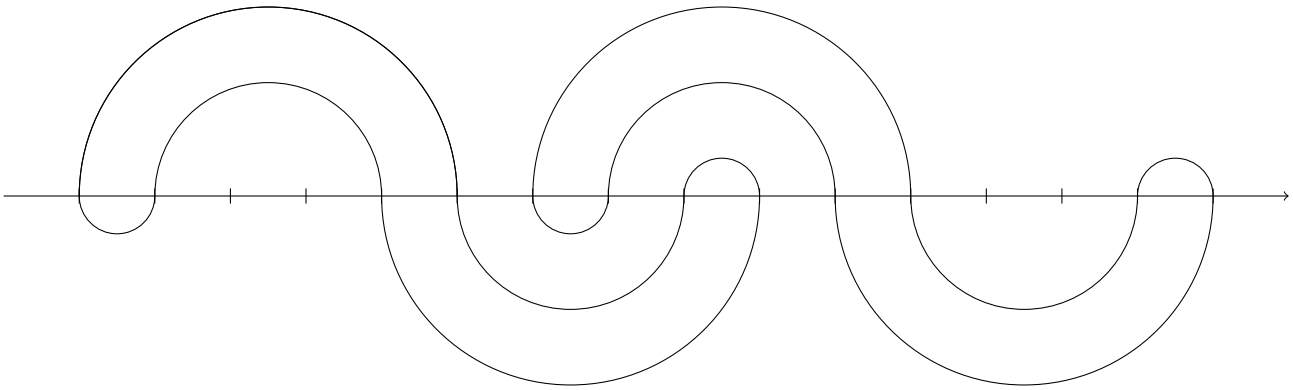


图 2. 两个形状相同的连通分量发生重叠。这里，$\mathrm{E}[Y_1Y_7] > 0$，而 $2l(S) = 10$。

因为$c_+ + c_- \le l(S) - 1$（要看出这一点，只需注意，顶点不能同时属于$S$的两个无界面，而且至少有两个顶点属于$C$）。这直接得出式（4.8）。□

显然，$\mu_n \to \infty$。此外，我们刚刚证明了 $1 + \mu_n s_n$ 是一个正常数。因此 $\sigma_n = \Theta(\sqrt{\mu_n})$，从而 $\sigma_n = o(\mu_n)$ 且 $\mu_n = o(\sigma_n^3)$。因此，我们可以应用定理 2.1，在这种情况下同样得到中心极限定理：

定理 4.4。 设 $S$ 是一个强形状。则

$$\frac{X_{S,n} - n\mu_S}{\sigma_S\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{N}(0,1), \tag{4.10}$$

其中

$$\mu_S = \frac{2K}{4^{2\ell(S)-c_+-c_-}} \quad \textit{and} \quad \sigma_S = \sqrt{\frac{2K}{4^{2\ell(S)-c_+-c_-}}\left(1 - \frac{K(4\ell(S)-1)}{4^{2\ell(S)-c_+-c_-}}\right)}. \tag{4.11}$$

这就证明了当 $S$ 是强形状时的定理 1.2，并给出了 $\mu_S$ 和 $\sigma_S$ 的显式公式。

4.2. 弱形状。最后，我们研究弱形状 $S$ 的情形。因此，现在形状为 $S$ 的两个连通分量之间可能存在重叠，即存在两个指标 $i < j$ 使得$|j - i| < 2l(S)$ 且 $Y_iY_j = 1$，其中 $Y_i$ 的定义同前。示例见图 2。

令 $\mathrm{A}^r$为所有 r 元组 $\mathrm{E} := \{\mathrm{i}_1, \dots, \mathrm{i}_r\}$ 的集合，其中 $1 \le \mathrm{i}_1 < \cdots < \mathrm{i}_r \le 2\mathrm{n}$。对于任意这样的 r 元组 E，在 $\{1, \dots, \mathrm{r}\}$ 上定义一个等价关系 $\sim_E$，使其为满足以下条件的最小等价关系（按照等价类的包含关系）：对于所有满足 $|\mathrm{i}_{k_1} - \mathrm{i}_{k_2}| < 2\mathrm{l}(\mathrm{S})$ 的 $1 \le \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2 \le \mathrm{r}$，$\mathrm{k}_1 \sim_E \mathrm{k}_2$。我们称 $\sim_E$ 的等价类为块。此外，对于 $1 \le \mathrm{j} \le \mathrm{r}$，令 $\mathrm{A}_j^r$为由恰有 j 个块的 r 元组 $\mathrm{E} \in \mathrm{A}^r$组成的集合。因此 $\mathrm{A}^r = \mathrm{S}_{j=1}^r \mathrm{A}_j^r$。

注意，$A_r^r$ 是所有块均为单元素块的$r$元组$E$ 的集合。一个$r$元组$E$对应于一个由形状为$S$的环组成的集合（$C_k$）$_1^r$，这些环经过平移，使得$C_k$ 具有$LC_k = i_k$。特别地，当且仅当这些环互不重叠时，$E \in A_r^r$。

对所有 $1 \le u \le r$，定义：

$$F_u := \binom{2n - 2u\ell(S) + u}{u} K^u \frac{\mathrm{Cat}_{n-u\ell(S)+uc_+}\mathrm{Cat}_{n-u\ell(S)+uc_-}}{\mathrm{Cat}_n^2}. \tag{4.12}$$

根据命题 4.2 的证明中的论证，$u!\,F_u$是来自互不重叠连通分量的 $u$ 元组对 $\mathbb{E}\,[(X_{S,n})_u]$ 的贡献。

我们有以下估计：

引理 4.5。 设 $S$ 为一个弱形状。

(i) 对所有 $r \ge 1$,

$$\mathbb{E}[(X_{S,n})_r] \ge r!F_r. \tag{4.13}$$

(ii) 对于所有 $1 \le u \le r$,

$$\sum_{E \in A_u^r} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in E} Y_i\right] \le \binom{r-1}{u-1} (2\ell(S))^{r-u} F_u. \tag{4.14}$$

(iii) 对于每个固定的 $M \ge 0$，当 $r = O(\sqrt{n})$ 且 $r \ge 2M$ 时，一致地成立，

$$\sum_{E \in A_{r-M}^r} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in E} Y_i\right] = \Theta\left(r^M F_{r-M}\right) \tag{4.15}$$

并且，若还满足 $r \to \infty$,

$$\sum_{E \in A_{r-M}^r(1,2)} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in E} Y_i\right] = (1 - o(1)) \sum_{E \in A_{r-M}^r} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in E} Y_i\right], \tag{4.16}$$

其中 $A_{r-M}^r(1、2)$ 是 $A_{r-M}^r$ 的子集，仅由大小为1 或2的块组成。

引理 *4.5* 的证明。 (i)：我们将 (3.2) 改写为

$$\mathbb{E}\left[(X_{S,n})_r\right] = r! \sum_{E \in A^r} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in E} Y_i\right] = r! \sum_{u=1}^{r} \sum_{E \in A_u^r} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in E} Y_i\right]. \tag{4.17}$$

该项$u = r$ 给出了$r$元组互不重叠的分量所产生的贡献；如 (4.12) 后所述，该贡献为$r!F_r$。

(ii)：对每个$r$元组$E \in A_u^r$，在乘积中只保留每个块的最左点。注意，对于任意集合$A \subseteq B \subseteq [\![1,2n]\!]$，有$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in B} Y_i\right] \le \mathbb{E}\left[\prod_{i\in A} Y_i\right]$。注意，这个最左点集合属于$A_u^u$。若第$i$个最左块的大小为$j_i$，则对于每个最左点集合，该块中其余$j_i-1$个点的可能位置数至多为$(2l(S))^{j_i-1}$，因为除第一个点外，每个点与前一个点的距离都不超过$2l(S)$。因此，

(4.18)
$$\sum_{E\in A_u^r} \mathbb{E}\left[\prod_{i\in E} Y_i\right] \le \sum_{\substack{j_1+\dots+j_u=r\\ j_1,\dots,j_u\ge 1}} \prod_{i=1}^{u} (2\ell(S))^{j_i-1} \cdot \sum_{E'\in A_u^u} \mathbb{E}\left[\prod_{i\in E'} Y_i\right] = \sum_{\substack{j_1+\dots+j_u=r\\ j_1,\dots,j_u\ge 1}} \prod_{i=1}^{u} (2\ell(S))^{j_i-1} \cdot F_u.$$

最后，由于允许的序列$(j_1,\dots,j_u)$的数量为$\binom{r-1}{u-1}$，且对所有这些序列，$\prod_{i=1}^{u}(2l(S))^{j_i-1} = (2l(S))^{r-u}$，因此得到（4.14）。

（iii）：我们如下划分集合$A_{r-M}^r$。考虑一个由整数$\ge 1$组成、总和为$r$的$(r-M)$元组$T := (T_1,\dots,T_{r-M})$，并且还考虑一个函数$J$，它为每个$1 \le i \le r-M$关联一个由整数$\ge 1$组成的$T_i$元组$J_i$：$j_{i,1} < j_{i,2} < \dots < j_{i,T_i}$，使得对于所有$1 \le k \le T_i - 1$，$j_{i,k+1} - j_{i,k} < 2l(S)$；此外，从顶点$j_k (k = 1,\dots,T_i)$出发、形状为$S$的$T_i$个环两两不相交，因此它们可以同时作为蜿蜒系统的连通分量出现。（我们称这样的对$(T,J)$为可容许对。）记$A_{T,J}$为$A_{r-M}^r$的子集，其中包含满足以下条件的$r$元组$E$：$E$中最左侧的第$i$个块大小为$T_i$；若该块为$na_i^1,\dots,a^{T_i}io$，则对所有$1 \le k \le T_i - 1$，有$a_i^{k+1} - a_i^k = j_{i,k+1} - j_{i,k}$。换言之，$A_{T,J}$涵盖了所有具有$r-M$个块的连通分量$r$元组，其中块的大小以及每个块中形状为$S$的各分量起点之间的区间均已给定。因此，$A_{r-M}^r$是对所有可容许对$(T,J)$的$A_{T,J}$取并集$S$所得。

由于我们只考虑满足以下条件的$(r-M)$-元组$T$

(4.19)
$$r = \sum_{i=1}^{r-M} T_i = r - M + \sum_{i=1}^{r-M} (T_i - 1),$$

至多有$M$个指标$i$满足$T_i > 1$，因此至少有$r-2M$个指标满足$T_i = 1$。另请注意，若$T_i = 1$，则显然有$J_i = (1)$。给定一个可容许对$(T,J)$，我们通过从$T$和$J$中删除所有满足$T_i = 1$的$T_i$和$J_i$，定义其约化对$(T,J)$；因此$bbbbT := (T_i : 1 \le i \le r-M$且$T_i > 1)$，$J$也类似。因此，$T$和$J$都是长度相同的序列，长度为$\le M$。由于(4.19)意味着它们的各项都有界

b b（对于固定的 $M$），约化对 $(T,J)$ 只有有限多个，记为 T；T 取决于$M$ 和 $S$，但不取决于 $r$。

b b b b b 反过来，给定一个可容许约化对 $(T,J)$，其中 $T=(T_1,\dots,T_k)$，我们可以从 $\binom{r-M}{k}$ 个不同的（可容许）对 $(T,J)$ 得到 $(\mathrm{b}T,\mathrm{b}J)$。注意，根据 (4.19)，由于每个 $T_i \geq 2$，

$$k \leq \sum_{i=1}^{k}(\widehat{T_i}-1)=\sum_{i=1}^{r-M}(T_i-1)=M, \tag{4.20}$$

b 当且仅当对所有 $i \leq k$，$T_i=2$ 时取等号。

现在我们希望了解对于一个可容许对 $(T,J)$，$\mathrm{P}_{E\in A_{T,J}}\mathrm{E}\left[\mathrm{Q}_{i\in E}Y_i\right]$ 的行为。采用与命题 4.2 类似的方法（将引理 2.4 推广到长度不同的区间），我们得到

$$\sum_{E\in A_{T,J}}\mathbb{E}\left[\prod_{i\in E}Y_i\right]=\binom{2n-2\widetilde{\ell}+(r-M)}{r-M}\widetilde{K}\frac{\mathrm{Cat}_{n-d_+}\mathrm{Cat}_{n-d_-}}{\mathrm{Cat}_n^2}, \tag{4.21}$$

e e 其中，对任意 $E \in A_{T,J}$，$l$ 是各块半长度之和，$K$表示由水平轴和 $E$ 所定义的环围成的有界面，而 $d_+,d_-$表示无界面。（注意，这些常数对所有 $E \in A_{T,J}$ 都相同，因此只取决于 $T$和 $J$。）此外，由于这些块中至少有 $r-2M$ 个是单元素块，而其余的块由 $T$ 和 $J$ 确定，我们可以写成

$$\widetilde{K}=K^{r-2M}K', \tag{4.22}$$

对于某个仅取决于（$T$，$J$）的 $K'>0$，同样，

$$\widetilde{\ell}=(r-M)\ell(S)+\ell', \tag{4.23}$$

$$d_+=(r-M)(\ell(S)-c_+)+e_+, \tag{4.24}$$

$$d_-=(r-M)(\ell(S)-c_-)+e_- \tag{4.25}$$

对某些仅依赖于 $(T,J)$ 的 $l',e_+,e_-$，$K',l',e_+,e_-$ 有界。特别地，对于固定的 $M$，可知 $K',l',e_+,e_-$只能取有限个值，且这些值的个数与 $n$和 $r$无关。

我们比较 (4.21) 与由 (4.12) 给出的 $F_{r-M}$。首先，根据引理 2.2(iii),

$$\frac{\binom{2n-2\widetilde{\ell}+(r-M)}{r-M}}{\binom{2n-2(r-M)\ell(S)+(r-M)}{r-M}} = \frac{\Big(2n-2\widetilde{\ell}+(r-M)\Big)_{r-M}}{\Big(2n-2(r-M)\ell(S)+(r-M)\Big)_{r-M}} \sim \exp\Big(-\frac{r-M}{4n}\Big((4\widetilde{\ell}-r+M)-(4(r-M)\ell(S)-r+M)\Big)\Big) = \exp\Big(o(1)\Big), \tag{4.26}$$

由 (4.23) 可得 $l = r\ell(S)+O(1)$，且 $r = o(n)$。类似地，由引理 2.3 和 (4.24)–(4.25) 可得,

$$\frac{\mathrm{Cat}_{n-d_\pm}}{\mathrm{Cat}_{n-(r-M)(\ell(S)-c_\pm)}} \sim 4^{-d_\pm+(r-M)(\ell(S)-c_\pm)} = 4^{-e_\pm}. \tag{4.27}$$

因此，再结合 (4.22)，由 (4.21) 和 (4.12) 可得,

$$\frac{\sum_{E\in A_{T,J}} \mathbb{E}\left[\prod_{i\in E} Y_i\right]}{F_{r-M}} = C_{T,J}(1+o(1)), \tag{4.28}$$

b b 其中 $C_{T,J}>0$ 仅依赖于 $(T,J)$，因此只取有限多个值。特别地,

$$\sum_{E\in A_{T,J}} \mathbb{E}\left[\prod_{i\in E} Y_i\right] = \Theta\Big(F_{r-M}\Big), \tag{4.29}$$

并且，这对 $r=O(\sqrt{n})$ 以及所有可容许的 $(T,J)$ 一致成立。

由 (4.20) 及其前面的讨论可知，对每个 $(T,J)$，都有 $\binom{r-M}{k} = \Theta(r^k)$ 个可容许对 $(T,J)$ b b b，其中 $k \le M$，当所有 $T_i = 2$ 时取等号。注意，由于我们假设形状 $S$ 是弱的，因此至少存在一个这样的可容许对 $(T,J)$，使得 $\mathbf{b}T = (2,\dots,2)$。因此，对所有 $(T,J)$ 对 (4.29) 求和即可得到 (4.15)。

此外，$A^r_{r-M}\setminus A^r_{r-M}(1,2)$ 是 $S'_{AT,J}$ 的并集，其中我们只对满足某个 $T_i \ge 3$ 的可容许 b b b 对（$T,J$）求和；这些对应于满足某个 $T_i \ge 3$ 的约化对（$T,J$），由 (4.20) 可知，每个这样的约化对的长度为 $\le M-1$，因此对应于 $O(r^{M-1})$ 个可容许对。因此，对所有此类（$T,J$）将 (4.29) 求和可得

$$\sum_{E\in A^r_{r-M}\setminus A^r_{r-M}(1,2)} \mathbb{E}\left[\prod_{i\in E} Y_i\right] = O\Big(r^{M-1}F_{r-M}\Big) = o\Big(r^M F_{r-M}\Big), \tag{4.30}$$

由此结合 (4.15) 可得 (4.16)。 □

下一个命题表明，为了得到 $\mathrm{E}\,[(X_{S,\ n})_r]$ 的渐近行为，我们只需考虑非单元素块数量为给定常数的构型。

命题 4.6. 固定一个弱形状 $S$。则存在 $\eta > 0$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $M > 0$，使得对于 $r \le \eta\sqrt{n}$，我们有如下结论，且该结论一致成立：

$$\sum_{u \le r-M} \sum_{E \in A_u^r} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in E} Y_i\right] \le \varepsilon F_r \le \varepsilon \frac{1}{r!}\mathbb{E}\,[(X_{S,n})_r]. \tag{4.31}$$

注 4.7. 为方便起见，这里假设 $r/\sqrt{n}$ 较小。事实上，命题 4.6 可以很容易地推广到任意 $C$ 下的 $r \le C\sqrt{n}$（其中 $M$ 取决于 $C$ 和 $\varepsilon$），但我们并不需要这一推广。

为证明这一点，我们先给出一个引理：

引理 4.8. 存在一个仅取决于形状 $S$ 的 $Q > 0$，使得当 $n$ 充分大时，对所有 $u \le \sqrt{n}$：

$$\frac{F_{u+1}}{F_u} \ge Q\frac{n}{u}. \tag{4.32}$$

证明。 我们只需逐项计算比值，并回顾式 (4.12)。有 $K^{u+1}\ K^u\ = K$。卡特兰数之比的比值一致收敛到一个正数。最后，利用引理 2.2，二项式系数之比为：

$$\frac{u!}{(u+1)!} \cdot \frac{\Big(2n-(u+1)(2\ell(S)-1)\Big)_{u+1}}{\Big(2n-u(2\ell(S)-1)\Big)_u} = \frac{1}{u+1} \cdot \frac{(2n)^{u+1}}{(2n)^u} \exp\Big(O(1)\Big) \ge c\frac{n}{u} \tag{4.33}$$

对某个 $c > 0$ 以及所有充分大的 $n$ 和 $u \le \sqrt{n}$ 成立。结果由此得出。 □

命题 *4.6* 的证明。 利用引理 4.5(ii)，对所有 $M \ge 0$，有：

$$\sum_{u \le r-M} \sum_{E \in A_u^r} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in E} Y_i\right] \le \sum_{u=1}^{r-M} \binom{r-1}{u-1} (2\ell(S))^{r-u} F_u. \tag{4.34}$$

令

$$B_{r,u} := \binom{r-1}{u-1} (2\ell(S))^{r-u} F_u, \tag{4.35}$$

由引理 4.8 可得，对于$r \le \sqrt{n}$ 以及任意$u \le r-1$:

$$\frac{B_{r,u+1}}{B_{r,u}} = \frac{1}{2\ell(S)}\frac{r-u}{u}\frac{F_{u+1}}{F_u} \ge \frac{Q}{2\ell(S)}\frac{n(r-u)}{u^2} \ge \frac{Q}{2\ell(S)}\frac{n}{u^2}. \tag{4.36}$$

因此，存在足够小的 $\eta > 0$，使得对于所有 $u < r \le \eta\sqrt{n}$，都有 $B_{r,u+1} \ge 2B_{r,u}$，于是通过反向归纳，

$$B_{r,u} \le 2^{-(r-u)} B_{r,r}. \tag{4.37}$$

那么，对于 $r \le \eta\sqrt{n}$，由 (4.34) 可得

$$\sum_{u\le r-M}\sum_{E\in A_u^r} \mathbb{E}\left[\prod_{i\in E} Y_i\right] \le \sum_{u=1}^{r-M} B_{r,u} \le 2^{1-M} B_{r,r} = 2^{1-M} F_r. \tag{4.38}$$

若我们选择满足 $2^{1-M} \le \varepsilon$ 的 $M$，则可得 (4.31)，因为根据 (4.12) 后的说明，$r!\, F_r \le \mathrm{E}\,[(X_{S,n})_r]$。□

命题 4.6 表明，我们只需理解块数为$r-M$（给定$M \ge 0$）的构型的渐近行为；引理 4.5(iii) 则表明，我们可以将注意力集中在块大小为 1 或 2 的构型上。为了证明最终结果，我们需要细化引理 4.5(iii)，并求出其中出现的显式常数。我们定义另一组常数，用以计入块大小为 2 的情形，即两个形状为$S$ 的分量发生重叠的情形。

定义 *4.9*。设 $S$ 是一种形状。存在有限个整数 $i \ge 1$ 使得 $E\,[Y_1 Y_i] > 0$，且 $i - 1 < 2l(S)$。令 $I(S)$ 为这些整数构成的集合，其元素为 $i_1, \dots, i_k$。对于 $i \in I(S)$，令 $l_i$、$K_i$、$c_+(i)$ 和 $c_-(i)$ 分别表示在以下情形中 $l(S)$、$K$、$c_+$、$c_-$ 的对应量：两个形状为 $S$ 的连通分量 $C$、$C'$ 发生重叠，且分别从位置 $1$ 和 $i$ 开始。特别地，$l_i = l(S)+(i-1)/2$ 是由两个形状为 $S$ 的连通分量（分别从位置 $1$ 和 $i$ 开始）构成的块的总半长度。此外，$C$、$C'$ 与水平轴共同界定两个无界面（$F_+$ 位于上半平面，$F_-$ 位于下半平面）以及若干有界面；令 $F(C, C')$ 表示有界面的集合。对于每个面 $F$，令 $\nu(F)$ 表示以下集合中的整数个数：$[\![ L(C), R(C)]\!] \cup [\![L(C'), R(C')]\!] = [\![L(C), R(C')]\!]$，这些整数与 $F$ 相接，但既不属于 $C$，也不属于 $C'$。我们定义 $K_i := Q^{\sum_{F\in F(C,C')} \nu(F)/2}$ 卡特兰数。最后，定义 $c_\pm(i) := \nu(F_\pm)/2$。再次注意，所有这些常数仅取决于 $S$ 和 $i$。

注意，$i \in I(S)$ 可能为偶数；在这种情况下，$2l_i$, $\nu(F_+)$ 和 $\nu(F_-)$ 为奇数，因此 $l_i$ 和 $c_\pm(i)$ 是半整数。

引理 4.10。 设 $r = O(\sqrt{n})$ 满足 $r \to \infty$。那么，对于每个固定的 $M \geq 0$,

$$\sum_{E \in A^r_{r-M}} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in E} Y_i\right] \underset{n\to\infty}{\sim} F_r \sum_{\substack{g_i \geq 0, i \in I(S) \\ \sum_i g_i = M}} \prod_{i \in I(S)} \frac{\left(b_i \frac{r^2}{2n}\right)^{g_i}}{g_i!}, \tag{4.39}$$

其中

$$b_i := 4^{4\ell(S) - 2\ell_i + c_+(i) - 2c_+ + c_-(i) - 2c_-} \frac{K_i}{K^2}. \tag{4.40}$$

注意，$b_i$ 以一种特定方式度量了形状为$S$ 的两个重叠连通分量与两个不重叠连通分量之间的差异。

证明。对于每个元素为整数、总和为 M 的 I (S)-元组 $G = (g_i)_{i \in I(S)}$，令 $A^r_{r-M,G}$为由 r 元组 $1 \leq i_1 < \ldots\ldots < i_r \leq 2n$ 组成的集合，其中有 $r - 2M$ 个大小为 1 的块和 M 个大小为 2 的块，并且对于每个 $i \in I(S)$，都有 $g_i$个类型为 $\{i_k, i_{k+1} = i_k + i - 1\}$ 且 $k < r$ 的块。于是，$A^r_{r-M,G}$是引理 4.5 的证明中若干类 $A_{T,J}$ 的并集，其中所有 $T_i \in \{1, 2\}$，且 k 的指定数目为 $g_i$，使得 $J_k = (1, i)$。因此，由式 (4.21) 可得，其中多项式系数等于包含在 $A^r_{r-M,G}$ 中的 (T , J ) 的数量，

$$\sum_{E \in A^r_{r-M,G}} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in E} Y_i\right] = \binom{r-M}{g_{i_1}, \ldots, g_{i_k}, r-2M} \binom{2n - 2\widetilde{\ell} + (r-M)}{r-M} \widetilde{K} \frac{\mathrm{Cat}_{n-d_+} \mathrm{Cat}_{n-d_-}}{\mathrm{Cat}_n^2}, \tag{4.41}$$

其中，根据（4.22）–（4.25）及其推导过程:

$$\widetilde{K} = K^{r-2M} \prod_{i \in I(S)} K_i^{g_i}, \tag{4.42}$$

$$\widetilde{\ell} = (r - 2M)\ell(S) + \sum_{i \in I(S)} g_i \ell_i, \tag{4.43}$$

$$d_\pm = \widetilde{\ell} - (r - 2M)c_\pm - \sum_{i \in I(S)} g_i c_\pm(i). \tag{4.44}$$

现在，我们采用与引理 4.5 的证明类似的方法，但这次将其与 $F_r$ 进行比较。我们有

$$\binom{r-M}{g_1, \ldots, g_k, r-2M} \sim r^M \prod_{i \in I(S)} \frac{1}{g_i!}, \tag{4.45}$$

$$\frac{\binom{2n-2\widetilde{\ell}+(r-M)}{r-M}}{\binom{2n-2r\ell(S)+r}{r}} = \frac{r!}{(r-M)!}\cdot\frac{\left(2n-2\widetilde{\ell}+(r-M)\right)_{r-M}}{\left(2n-2r\ell(S)+r\right)_r} \tag{4.46}$$

$$\sim r^M(2n)^{-M}\exp\Big(-\frac{1}{4n}\Big((r-M)(4\widetilde{\ell}-r+M)-r(4r\ell(S)-r)\Big)\Big)\sim r^M(2n)^{-M},$$

$$\frac{\widetilde{K}}{K^r} = K^{-2M}\prod_{i\in I(S)}K_i^{g_i}, \tag{4.47}$$

$$\frac{\mathrm{Cat}_{n-d_\pm}}{\mathrm{Cat}_{n-r\ell(S)+rc_\pm}} \sim 4^{-d_\pm+r(\ell(S)-c_\pm)} = 4^{2M(\ell(S)-c_\pm)-\sum_{i\in I(S)}(\ell_i-c_\pm(i))g_i}. \tag{4.48}$$

因此，由 (4.41) 和 (4.12)，并回顾 P $_{i\in I}(S)g_i$ = M</style}，

(4.49)

$$\frac{\sum_{E\in A^r_{r-M,G}}\mathbb{E}\left[\prod_{i\in E}Y_i\right]}{F_r}$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} r^{2M}(2nK^2)^{-M}4^{2(\ell(S)-c_+)M-\sum_{i\in I(S)}(\ell_i-c_+(i))g_i}4^{2(\ell(S)-c_-)M-\sum_{i\in I(S)}(\ell_i-c_-(i))g_i}\prod_{i\in I(S)}\frac{1}{g_i!}K_i^{g_i}$$

$$=\left(B\frac{r^2}{2n}\right)^M\prod_{i\in I(S)}\frac{q_i^{g_i}}{g_i!} = \prod_{i\in I(S)}\frac{\left(Bq_i\frac{r^2}{2n}\right)^{g_i}}{g_i!},$$

其中

$$B := \frac{4^{4\ell(S)-2c_+-2c_-}}{K^2}, \tag{4.50}$$

$$q_i := 4^{-2\ell_i+c_+(i)+c_-(i)}K_i. \tag{4.51}$$

引理 4.5(iii) 中定义的集合 $A^r_{r-M}(1,2)$ 是所有总和为 $M$ 的 $G$ 对应的 $A^r_{r-M,G}$ 的并集。因此，注意到这样的 $G$ 只有有限多个，(4.49) 蕴含：

$$\sum_{E\in A^r_{r-M}(1,2)}\mathbb{E}\left[\prod_{i\in E}Y_i\right]\underset{n\to\infty}{\sim}F_r\sum_{\substack{g_i\ge0,i\in I(S)\\ \sum_i g_i=M}}\prod_{i\in I(S)}\frac{\left(Bq_i\frac{r^2}{2n}\right)^{g_i}}{g_i!}. \tag{4.52}$$

现在利用 $Bq_i = b_i$，由 (4.52) 和 (4.16) 即可得出结果 (4.39)。 □

弱形状的定理 *1.2* 证明。令$r\to\infty$ 满足$r\le\eta\sqrt{n}$，其中 $\eta$ 如命题 4.6 所述。

我们可以对所有$M \geq 0$（其中$A^r_{r-M} := \emptyset$ 适用于$M > r$）将 (4.39) 求和，因为命题 4.6 表明，我们可以用有限项的和来近似该和式，且项数固定。因此，回顾 (4.17)，

$$\mathbb{E}\left[(X_{S,n})_r\right] = r! \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{E \in A^r_{r-M}} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in E} Y_i\right] \sim r!\, F_r \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{\substack{g_i \geq 0, i \in I(S) \\ \sum_i g_i = M}} \prod_{i \in I(S)} \frac{\left(b_i \frac{r^2}{2n}\right)^{g_i}}{g_i!} \tag{4.53}$$

$$= r!\, F_r \prod_{i \in I(S)} \exp\left(b_i \frac{r^2}{2n}\right).$$

由引理 2.2 和引理 2.3，(4.12) 推出（与 (4.5) 类似）

$$r!\, F_r \sim \left(\frac{2nK}{4^{2\ell(S)-c_+-c_-}}\right)^r \exp\left(-\frac{r^2}{4n}\left(4\ell(S)-1\right)\right). \tag{4.54}$$

最后，(4.53) 和 (4.54) 给出，对于 $r \to \infty$ 且 $r \leq \eta\sqrt{n}$，

$$\mathbb{E}\left[(X_{S,n})_r\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2nK}{4^{2\ell(S)-c_+-c_-}}\right)^r \exp\left(-\frac{r^2}{4n}(4\ell(S)-1) + \frac{r^2}{2n}\sum_{i \in I(S)} b_i\right). \tag{4.55}$$

这就是 (2.2)，其中

$$\mu_n := \frac{2nK}{4^{2\ell(S)-c_+-c_-}}, \tag{4.56}$$

$$s_n := \frac{-(4\ell(S)-1) + 2\sum_{i \in I(S)} b_i}{2n}. \tag{4.57}$$

特别地，(2.2) 因此对于 $r = r(n)$ 且 $\frac{\eta}{2}\sqrt{n} \leq r \leq \eta\sqrt{n}$ 时成立；如第 2.1 节所述，它随后会自动在此范围内一致成立。此外，

$$\mu_n s_n \geq -\frac{K(4\ell(S)-1)}{4^{2\ell(S)-c_+-c_-}} > -1 \tag{4.58}$$

根据引理 4.3，我们再次有 $\mu_n = \Theta(n)$ 和 $\sigma_n = \Theta(\sqrt{n})$。由此可知，定理 2.1 在此情形下也适用，从而得到 (1.2)。□

由 (4.56)–(4.57) 可得

$$\sigma_S^2 = \frac{2K}{4^{2\ell(S)-c_+-c_-}}\left(1 + \frac{K}{4^{2\ell(S)-c_+-c_-}}\left(1 - 4\ell(S) + 2\sum_{i \in I(S)} b_i\right)\right), \tag{4.59}$$

其中 $b_i$ 由（4.40）给出。注意，根据（4.11），该公式对强形状也成立（当 $I(S) = \emptyset$ 时）。

## 5. 开放问题

我们列出 下面列出一些关于我们结果可能扩展方向的开放问题 .

1. 似乎可以将上述论证推广到多个形状的联合阶乘矩

$$\mathbb{E}\Big[(X_{S_1,n})_{r_1}\cdots(X_{S_k,n})_{r_k}\Big] \tag{5.1}$$

形状 $S_1,\dots,S_k$，进而利用 Gao 和 Wormald 定理 [3], [8] 的多元版本，得到定理 1.2 的多元版本。不过，我们尚未核实具体细节。这样的多元定理将立即推出例如关于给定半长度的连通分量数量的中心极限定理。

2. 考虑相似的形状，我们能否得到一个中心极限定理，来描述仅与水平轴相交两次的连通分量数量（即支撑集大小为 2，但半长度任意）？

3. 正如 Kargin [6] 所猜想的那样，分量总数是否渐近正态?

## 参考文献

[1] P. Di Francesco、O. Golinelli 和 E. Guitter。弯曲线与 Temperley-Lieb 代数。《数学物理通讯》186 (1997), 1—59。[2] Jacopo Borga、Ewain Gwynne 和 Minjae Park。均匀弯曲线系统的几何。https://arxiv.org/abs/2212.00534。[3] Gabriel Berzunza Ojeda、Cecilia Holmgren 和 Svante Janson。具有给定顶点度的随机树的边缘树。准备中。[4] Valentin Féray 和 Paul Thévenin。蜿蜒系统中的连通分量与无限面条。《国际数学研究论文集》(2022), rnac156。[5] JasonGao 和 Nicholas Wormald。由高阶矩决定的渐近正态性，以及随机映射的子映射计数。《概率论及相关领域》130 (2004), 368–376。[6] Vladislav Kargin。随机弯曲线系统中的环。《统计物理学杂志》181 (2020), no. 6, 2322–2345。[7] Richard P. Stanley。卡特兰数。剑桥大学出版社，纽约，2015。[8] Nick Wormald。个人通信。

乌普萨拉大学数学系，PO Box 480，SE-751 06 乌普萨拉，瑞典电子邮箱地址：svante.janson@math.uu.se网址：http://www.math.uu.se/~svante/

数学研究所，Oskar-Morgenstern-Platz 1，1090 维也纳，奥地利电子邮箱地址：paul.thevenin@univie.ac.at