arXiv:2303.01908v1 [math.AP] 3 Mar 2023

快速对流热方程：源型解与大时间行为

JØRGEN ENDAL、LIVIU I. IGNAT 和 FERNANDO QUIR´OS

Abstract. 我们研究在某些尾部控制假设下，快速对流热方程柯西问题的源型解的存在性与唯一性。我们允许解改变符号，但实际上将证明，解的符号与初始数据相同，而初始数据是狄拉克δ的某个倍数。作为应用，我们得到了快速对流热方程中具有可积初值的非负有界解的大时间行为，涵盖了自上世纪末以来一直未解决的多维情形。

Contents

1. 引言与主要结果 1 1.1. 源型解 1 1.2. 大时间行为的应用 3 1.3. 一些开放问题 4 1.4. 论文结构 4 2. 熵形式 4 2.1. 熵解 5 2.2. 熵下解 6 3. 非负源型解的唯一性 7 4. 源型解具有确定符号 11 5. 大时间行为的应用 13 致谢 14 参考文献 14

谨以此文献给 Yihong Du 教授，值此他 60 寿辰之际，并感谢他的友谊，钦佩他的数学造诣。

1. 引言与主要结果

1.1. 源型解。

本文的首要目标是研究带对流项的扩散问题的解的存在性与唯一性

$$\partial_t u + \mathcal{L}u + \partial_{x_N}(|u|^{q-1}u) = 0 \text{ 在 } Q := (0,\infty) \times \mathbb{R}^N, \qquad u(0) = M\delta_0,\ M \neq 0 \text{ 于 } \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35B40, 35A01,35A02,35A08,60J60.*Key words and phrases.* 扩散-对流，快速对流，源型解，唯一性，渐近行为。

在快速对流范围 $q \in (1-1/N, 1)$ 内， $\mathcal{L} = -\Delta$ 和 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$ 均成立，其中 $\Delta_{x'}$表示前 $N-1$ 个坐标上的拉普拉斯算子。这里， δ_0 表示位于原点的狄拉克质量。以狄拉克δ的倍数作为初始值的这一问题的解，称为源型解，也称为基本解。我们关注在演化过程中质量守恒的解，

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(\cdot, t) = M \quad \text{for all } t > 0.$$

这就是对 q 从下方施加限制 $q > 1 - 1/N$ 的原因。

我们首先考虑解具有确定符号的情形。不失一般性，假设这些解非负，并在熵解框架下证明唯一性；这类解的定义及其主要性质见第 2 节。这就是我们的第一个定理所要说明的内容。

定理 1.1. 设 $q \in (1-1/N, 1)$，且 $\mathcal{L} = -\Delta$ or $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$。问题 (1.1) 至多存在一个非负熵解 u。

注 1.2. 当 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$ 时，问题 (1.1) 在某些缩放变换下的不变性以及唯一性结论意味着，源型解具有自相似形式，

$$u(t, x', x_N) = t^{-\alpha} f(x' t^{-1/2}, x_N t^{-\beta}), \qquad \alpha = \frac{N+1}{2q}, \quad \beta = \frac{N+1-q(N-1)}{2q};$$

参见 [7]，其中给出了 $q > 1$ 时的类似论证。如果 $q \geq (N+1)/(N-1)$， $\beta \leq 0$，这与初始值为狄拉克质量的倍数相矛盾。

当 $q > 1$ 时，上述分析最初针对相当特殊的情形 $N = 1$ 和$\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$进行，此时问题 (1.1) 化为标量守恒律

$$\partial_t u + \partial_x(|u|^{q-1}u) = 0, \tag{1.2}$$

在 [13], 中，随后针对 $N = 1$和 $\mathcal{L} = -\Delta$ 进行了分析，见 [6], ；最后，在 [7] 中对任意维数下的两个算子都进行了分析。

在快速对流范围内，目前为止仅研究了特殊情形 $N = 1$, $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$ ；参见 [12, 命题 1.1]。当 $q > 1$ 时的证明利用了对流非线性项是C^1这一性质，而该性质在快速对流范围内并不成立，因此需要采用新的方法。我们的证明受到近期论文 [5], 的启发；在该文中，我们研究了 (1.1) 的一个非局部类似物，其中 $\mathcal{L}$ 是一个稳定非局部扩散算子。

接下来我们将允许出现变号。不过，我们将证明，在某个尾部控制假设下，源型解与初始值中的常数 M 符号相同。因此，根据前一步的结果，我们在这一类解中得到唯一性。

定理 1.3。设 $q \in (1-1/N, 1)$、 $\mathcal{L} = -\Delta$ 或 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$，且 $M > 0$。那么，问题 (1.1) 的任意熵解 $u \in L^\infty((0,\infty); L^1(\mathbb{R}^N))$ 满足

$$\int_{|x|>r} |u(t, x', x_N)| \, \mathrm{d}x' \mathrm{d}x_N \to 0 \ \textit{as}\ t \to 0^+ \ \textit{for any}\ r > 0, \tag{1.3}$$

非负 。由此可推得，满足 (1.3) 的 (1.1) 至多有一个熵解 .

对于 $q \in (1, (N+1)/(N-1))$， $q \leq 2$， [3] 中进行了类似分析。迄今为止，快速对流范围内尚无此类结果。

注 1.4. (a) 定理 1.1] 中关于标量守恒律 (1.2) 的唯一性结果（对应特殊情形 $N = 1, \mathcal{L} = -\Delta_{x'}$）对任意 $q > 1$ 均成立，且不要求解具有特定符号。此外，这些结果也适用于初始值为带符号有限测度的解（该测度不必是狄拉克质量的倍数）。

(b) 如上所述，当 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$ 若 $q \geq (N+1)/(N-1)$ 时，(1.1) 不存在非负解。然而，这一不存在性结果是基于源型解的唯一性得出的。由于在这一指数范围内，可能变号的源型解是否唯一仍是一个未解决的问题（即使在尾部控制假设下也是如此），因此我们目前尚不能排除这类解存在的可能性。

(c) 在维数为 $N = 1$ 时，当 $\mathcal{L} = -\Delta$ 时，我们的定理 1.3 证明适用于 $q \in (1,3)$。因此，我们得以改进已有结果，涵盖 $q \in (2,3)$ 的范围；参见注 4.1。

定理 1.5. 设 $q \in (1 - 1/N, 1)$ 且 $\mathcal{L} = -\Delta$ 或 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$。存在问题 (1.1) 的一个非负熵解 u，满足尾部控制条件 (1.3)。

在维数为 $N = 1$ 时，关于 $q > 1$ 的尾部控制解的存在性已在 [6] 中证明，其限制条件为：当 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$ 时，$q \in (1, 2)$；当 $\mathcal{L} = -\Delta$ 时，$q \in (1, 3)$。$N > 1$ 高维情形则在 [7], 中得到处理，其限制条件为 $q \in (1, (N+1)/(N-1))$，$q \leq 2$。

1.2. 大时间行为的应用。我们研究方程 (1.1) 的解，是因为它们在描述下列方程有界解的大时间行为时发挥着重要作用：

$$\partial_t u - \Delta u + \partial_{x_N}(|u|^{q-1}u) = 0 \quad \text{in } Q, \qquad u(0) = u_0 \quad \text{on } \mathbb{R}^N, \tag{1.4}$$

其初始值为 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$。事实上，在慢对流范围 $q > 1$ 内，当 $M = \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \neq 0$ 时，该问题解的大时间行为由下式给出：

$$t^{\max\{\frac{N}{2}, \frac{N+1}{2q}\}(1-\frac{1}{p})} \|u(t) - U(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{as } t \to \infty \tag{1.5}$$

对所有 $p \in [1, \infty)$ 均成立，其中 U 是质量为 M 的 Q 中唯一的非常弱解（若 $q \geq q_*$：$= 1 + \frac{1}{N}$）或熵源型解（若 $q < q_*$）：

$$\partial_t U - \Delta U = 0 \quad \text{if } q > q_*, \tag{1.6}$$

$$\partial_t U - \Delta U + \partial_{x_N}(|U|^{q-1}U) = 0 \quad \text{if } q = q_*, \tag{1.7}$$

$$\partial_t U - \Delta_{x'} U + \partial_{x_N}(|U|^{q-1}U) = 0 \quad \text{if } q \in (1, q_*), \tag{1.8}$$

非负解的相关结果已在一系列重要论文 [8, 6, 7, 9] 中得到证明，而变号解的相关结果则见 [3]；另见 [18]。

截至目前，关于方程 (1.4) 的解的长期行为，唯一已知的结果见 [12], 。作者证明，在一维情形 $N = 1$ 下，若解同时非负，则对所有 $q \in (0, 1)$，给出极限的函数是方程 (1.8) 的源型解，这正如预期，因为 $1 < q_{*\circ}$ 多维情形下，关于 $q < 1$ 尚无结果，主要障碍是缺乏极限问题源型解的唯一性理论。我们的唯一性结果将帮助我们克服这一困难，从而证明：若 $q \in (1 - 1/N, 1)$，则任意维数下的非负解都具有大时间行为。我们指出，对 q 的下界限制并非技术性要求，因为它是保证质量在演化过程中守恒所必需的，

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(\cdot, t) = \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \quad \text{for all } t > 0.$$

定理 1.6. 设 $q \in (1 - 1/N, 1)$ 和 $\mathcal{L} = -\Delta$ 或 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$。设 $u \in C([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^N))$ 是方程 (1.4) 的非负有界熵解，其中 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$。设 U 是方程 (1.1) 的唯一源型解，其中 $M = \int_{\mathbb{R}^N} u_{0\circ}$ 那么，对所有 $p \in [1, \infty)$,

$$t^{\frac{N+1}{2q}(1-\frac{1}{p})} \|u(t) - U(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{as } t \to \infty.$$

注 1.7. 对于情形 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$，收敛结果为满足尾部控制假设 (1.3) 的源型解提供了另一种存在性证明。

紧性所需的（抛物型和双曲型）估计可按照论文 [5]中的方法得到。我们将在第 5 节简要概述。需要指出的是，这类紧性论证不适用于变号解。

1.3. 一些开放问题。 Existence for $q \in (2, 3)$ in dimension $N = 2$. 正如我们所提到的，对于 [7] 中 $N > 1$ 的源型解，其存在性结果受到以下限制$q < (N + 1)/(N - 1)$， $q \leq 2$。至少当 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$时，第一个限制具有本质性。但第二个限制源于证明中所使用的双曲型技术，可能只是技术性的。因此，探究在维数$N = 2$下是否存在 $q \in (2, 3)$ 的源型解，或者相反地证明其不存在，将是很有意义的。

Non-existence for $q \geq (N + 1)/(N - 1)$。我们猜测不存在 $q \geq (N + 1)/(N - 1)$ 的源型解。然而，当 $\mathcal{L} = -\Delta$时，或者在允许变号的情况下当 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$ 时，即使满足某种尾部控制假设，在这一范围内其存在性尚未被排除。

Long-time behaviour for solutions with sign changes. 我们在此采用紧性论证来获得非负解的大时间行为，这些论证借鉴自 [5], ，但无法处理变号解的非线性项。因此需要新的紧性论证。不过，若紧性问题能够解决，那么关于预期极限所需的唯一性，本文已经给出。

在一维情形中， [4] 中用于获得变号解长期行为的方法基于 [17], 中的补偿紧性技术，但由于这里的非线性项并非 C^1，因此无法采用该方法。在连续流的背景下如何推广补偿紧性方法，仍有待研究。

The case with integral 0. 如果我们能够在 $M = \int_{\mathbb{R}^N} u_0 = 0$的情形下证明变号解也满足 (1.5)，那么该结果只能说明

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = o\big(t^{\max\{\frac{N}{2}, \frac{N+1}{2q}\}(1-\frac{1}{p})}\big) \text{ as } t \to \infty,$$

而无法提供关于解的渐近形状的任何信息。要理解这一有趣情形下的大时间行为，首先需要求得解的精确衰减率。

1.4. 论文结构。本文其余部分安排如下。第 2 节汇集了后文所需的熵解预备材料（定义、性质和估计）。第 3 节致力于证明非负源型解的唯一性。在第 4 节中，我们证明，满足尾部控制性质 (1.3) 的源型解即使可能变号，也不会变号。这里还讨论源型解的存在性。最后，作为唯一性结果的应用，我们在第 5 节中得到了初始数据有界且可积时，问题 (1.4) 的非负解的大时间行为。

2. Entropy formulation

本节将介绍该问题的熵框架

$$\partial_t u + \mathcal{L}u + \partial_{x_N}(f(u)) = 0 \quad \text{in } Q, \qquad u(0) = u_0 \quad \text{on } \mathbb{R}^N, \tag{2.1}$$

其中 $f(u) = |u|^{q-1}u$, $1 - \frac{1}{N} < q \neq 1$, $\mathcal{L}$ 要么是 $-\Delta$ ，要么是 $-\Delta_{x'}$，而 u_0 至少是一个有限测度；我们汇集了有关解、下解和上解的预备材料，这些内容之后会用到。

2.1. 熵解。我们先给出熵解的定义。

定义 2.1（熵解）。函数 u 是方程 (2.1) 的熵解，当且仅当：

(a)（正则性） $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,\infty);\, L^\infty(\mathbb{R}^N))$ 且 $\nabla u \in L^2_{\mathrm{loc}}(Q)$。（b）（熵不等式）对于所有 $k \in \mathbb{R}$ 以及所有 $0 \le \phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(Q)$,

$$\iint_Q \Big(|u-k|\partial_t\phi + \operatorname{sgn}(u-k)\big(f(u)-f(k)\big)\partial_{x_N}\phi - |u-k|(\mathcal{L}\phi)\Big) \ge 0. \tag{2.2}$$

(c)（有限测度意义下的初始数据）对于所有 $\psi \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^N)$,

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} u(t)\psi = \int_{\mathbb{R}^N} \psi \,\mathrm{d}u_0. \tag{2.3}$$

注 2.2。(a) 若 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$，则当数据以 L^1 意义取值时，条件 (2.3) 可由此推出。此时，标准做法是：不假设在 $t=0$ 处的 L^1 连续性，而是在熵不等式 (2.2) 左侧加上项 $\int_{\mathbb{R}^N} |u_0-k|\phi(0)$，并取 $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\overline{Q})$。

(b) 也很容易证明，(2.1) 的经典解是熵解，而熵解是该问题的非常弱解，即：

$$\iint_Q \big(u\partial_t\phi + f(u)\partial_{x_N}\phi - u(\mathcal{L}\phi)\big) + \int_{\mathbb{R}^N} \phi(0)\,\mathrm{d}u_0 = 0 \quad \text{for all } \phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\overline{Q}).$$

现在我们汇总一些关于熵解的较为标准的结果。证明可通过参照 [14] 或 [1] 与 $\alpha = 2$得出。

引理 2.3. (a) 假设 $p \in [1,\infty)$ 和 $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$。那么，(2.1) 至少存在一个熵解 $u \in L^\infty(Q) \cap C([0,\infty);\, L^p{}_{\text{局部}}(\mathbb{R}^N))$，且 $\nabla u \in L^2_{\mathrm{loc}}(Q)$，其初始数据为 u_0。此外，设 $u, \bar{u}$ 分别是 (2.1) 的熵解，其初始数据分别为 $u_0, \bar{u}_0$。那么：

(i)（比较原理）若 $u_0 \le \bar{u}_0$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上几乎处处成立，则 $u \le \bar{u}$ 在 Q 内几乎处处成立。(ii)（L^1-压缩性）若 $u_0 - \bar{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$，则对几乎处处的 $t>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(t)-\bar{u}(t)| \le \int_{\mathbb{R}^N} |u_0-\bar{u}_0|.$$

(¡ii)（L^∞界）对于几乎处处的 $(t,x) \in Q$，$\operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x) \le u(t,x) \le \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x)$.
(iv)（L^1界）对于几乎处处的 $t>0$, $\|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$。
(v)（质量守恒）对于几乎处处的 $t>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(t) = \int_{\mathbb{R}^N} u_0.$$

(b) 此外，假设 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$。那么，方程 (2.1) 至多有一个以初始数据 u_0 为条件的熵解u，并且，$u \in C([0,\infty);\, L^1(\mathbb{R}^N))$。

注2.4。通过逼近论证可得，对于仅为有限测度的一般初始数据，$u \in C((0,\infty);\, L^1(\mathbb{R}^N))$ 且 $\int_{\mathbb{R}^N} u(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}u_0$对所有 $t>0$ 均成立。

与 [5], 中一样，我们还需要一些额外的正则性性质，其证明与前述论文中的思路一致，只是 $\alpha = 2$。

引理2.5. 假设 $0 \le u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$。则：

（a）（能量估计）对所有 $0 < \tau < T < \infty$,

$$\int_\tau^T \|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\mathrm{d}s \le \frac{1}{2}\|u(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

(b) (P 时间导数的初步估计）对所有光滑有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ，

$$\partial_t u \in L^2((0,\infty); H^{-1}(\Omega)).$$

（c）（初步尾部控制）设 $\rho_R(x) := \rho(x/R)$，其中 $0 \le \rho \le 1$ 是一个 C^∞-函数，满足当 $|x| \le 1$ 时 $\rho \equiv 0$，且当 $|x| > 2$时 $\rho \equiv 1$。那么，对于所有 $R > 0$ 和 $t > 0$,

$$\int_{|x|>2R} u(t) \lesssim \int_{|x|>R} u_0 + Mt\|\mathcal{L}\rho_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^q |\partial_{x_N}\rho_R|.$$

注 2.6。（a）当 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$时,

$$\|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{x'} u(s)|^2,$$

这使得我们无法控制沿 x_N方向的导数。

（b）通过逼近论证，我们得到对于 $u_0 = M\delta_0$,

$$\int_{|x|>2R} u(t) \lesssim Mt\|\mathcal{L}\rho_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^q |\partial_{x_N}\rho_R|.$$

2.2. 熵下解。本小节汇集了文献 [14, 15] 中关于熵次解与熵上解的结果。我们分别用 $s^+ = \max\{s, 0\}$ 和 $s^- = -\min\{s, 0\} = \max\{-s, 0\}$ 表示正部与负部。因此 $s = s^+ - s^-$ 和 $|s| = s^+ + s^-$。

De义 2.7（熵下解）。函数 u 是方程 (2.1) 的熵下解 if:

(a)（正则性） $u \in L^\infty(Q)$ 且 $\nabla u \in L^2_{\mathrm{loc}}(Q)$。(b)（熵不等式）对于所有 $k \in \mathbb{R}$ 以及所有 $0 \le \phi \in C_c^\infty(Q)$,

$$\iint_Q \Big((u-k)^+ \partial_t \phi + \operatorname{sgn}^+(u-k)\big(f(u) - f(k)\big)\partial_{x_N}\phi - (u-k)^+(\mathcal{L}\phi)\Big) \ge 0. \tag{2.4}$$

(c)（初始数据）

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0^+} (u(t,x) - u_0(x))^+ = 0 \quad \text{in } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N). \tag{2.5}$$

与前面一样，可以将上述概念定义为一个积分不等式 [15, 命题 2.1]: 对于所有 $k \in \mathbb{R}$ 以及所有 $0 \le \phi \in C_c^\infty(\overline{Q})$

$$\iint_Q \Big((u-k)^+ \partial_t \phi + \operatorname{sgn}^+(u-k)\big(f(u) - f(k)\big)\partial_{x_N}\phi - (u-k)^+(\mathcal{L}\phi)\Big) + \int_{\mathbb{R}^N} (u_0 - k)^+ \phi(0) \ge 0. \tag{2.6}$$

类似地，若函数 u 满足以下条件，则称其为熵上解

$$\iint_Q \Big((k-u)^+ \partial_t \phi + \operatorname{sgn}^+(k-u)\big(f(k) - f(u)\big)\partial_{x_N}\phi - (k-u)^+(\mathcal{L}\phi)\Big) + \int_{\mathbb{R}^N} (k - u_0)^+ \phi(0) \ge 0.$$

下文将对 Q使用以下性质。

命题 2.8. 方程 (2.1) 满足以下结论：

(a) 函数 u 是熵解，当且仅当它既是熵下解又是熵上解。(b) 所有熵次解均满足

$$\partial_t u + \mathcal{L}u + \partial_{x_N} f(u) \le 0 \quad in\ \mathcal{D}'(Q).$$

(c) 若 u_1 和 u_2 是熵次解，则 $u = \max\{u_1, u_2\}$ 也是熵次解。(d) 若存在唯一的熵解 u, 则所有熵下解和上解 u_-, u_+都满足

$$u_- \le u \le u_+ \quad a.e.\ in\ Q.$$

证明。前四个性质由 [14, 15]得出。此外， [15, 定理 1.1] 表明，最大的/最小的熵解也是最大的/最小的熵下解/上解。若熵解 u 的唯一性得到保证，则它满足所要求的不等式。□

3. Uniqueness of nonnegative source-type solutions

本节旨在证明快速对流范围内方程 (1.1) 的非负解的唯一性。证明使用了近期论文 [5], 中的一些思想，该论文的作者研究了带对流项的非局部扩散问题。

定理 1.1 的证明。我们将证明分为几个步骤。设 (1.1) 具有两个初始数据相同的非负熵解 u 和 $\overline{u}$ ，初始数据为 $M\delta_0$。根据注2.4，这些解还属于 $L^\infty((0,\infty);\, L^1(\mathbb{R}^N)) \cap C((0,\infty);\, L^1(\mathbb{R}^N))$。

(i) 沿 x_N 方向积分。容易验证

$$v(t,x') := \int_{\mathbb{R}} u(t,x',x_N)\,\mathrm{d}x_N \quad \text{for } (t,x') \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^{N-1} \tag{3.1}$$

属于 $C((0,\infty); L^1(\mathbb{R}^{N-1}))$，并且是 $\partial_t v = \Delta_{x'} v$ 在 $(0,\infty)\times\mathbb{R}^{N-1}$ 上具有初始数据 $M\delta_{0'}$（按有限测度意义）的唯一非常弱解。因此， $v = M\Gamma_{N-1}$，其中 Γ_{N-1} 是该方程质量为 1 的唯一基本解，它具有自相似形式，

$$\Gamma_{N-1}(t,x') = t^{-\frac{N-1}{2}} F(t^{-\frac12}x'), \qquad F(\xi) = \frac{\mathrm{e}^{-|\xi|^2/4}}{(4\pi)^{\frac{N-1}{2}}}.$$

将 u 和 $\overline{u}$ 在一个零测集上作相应修改后，我们便有:

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x',x_N)\,\mathrm{d}x_N = \int_{\mathbb{R}} \overline{u}(t,x',x_N)\,\mathrm{d}x_N = M\Gamma_{N-1}(t,x') \quad \text{for all } (t,x') \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^{N-1}.$$

(ii) 由初始数据属于 $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 的熵解作逼近。我们先为这些逼近构造初始数据。受 [7], 的启发，对每个 $r>0$，我们定义

$$\varphi_r(t,x') = \int_{-r}^{r} u(t,x',x_N)\,\mathrm{d}x_N - M\Gamma_{N-1}(t,x') = -\int_{|x_N|>r} u(t,x',x_N)\,\mathrm{d}x_N,$$
$$u^r_{0,n}(x',x_N) := \Big(u(1/n,x',x_N) - \frac{1}{2r}\varphi_r(1/n,x')\Big)\mathbb{1}_{(-r,r)}(x_N).$$

注意到 $-M\Gamma_{N-1}(t,x') \le \varphi_r(t,x') \le 0$。因此，函数 $u^r_{0,n}$ 均为非负且有界，

$$\|u^r_{0,n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le \|u(1/n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{M}{2r}\|\Gamma_{N-1}(1/n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

另一方面，它们的积分为 M ，因为

$$\int_{\mathbb{R}} u^r_{0,n}(x',x_N)\,\mathrm{d}x_N = M\Gamma_{N-1}(1/n,x') \quad \text{for all } x' \in \mathbb{R}^{N-1}. \tag{3.2}$$

令 u_n （为简洁起见，我们省略对参数 r 的依赖）为以初始数据 $u^r_{0,n}$ 为初值的方程 (2.1) 的熵解。我们来证明，对任意 $t>0$，序列 $u_n(t)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中收敛到 $u(t)$，当 $n\to\infty$ 时。为此，我们注意到， u_n 和 $u(\cdot+1/n)$ 都是方程 (2.1) 的熵解，其对应的初始数据 $u^r_{0,n}$ 和 $u(1/n)$ 均属于 $L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$。

于是， L^1-压缩性质表明

$$\begin{aligned}\big\|u_n(t)-u\big(t+1/n\big)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &\le \|u^r_{0,n}-u(1/n)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\\ &\le \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(\int_{|x_N|>r} u(1/n,x',x_N)\,\mathrm{d}x_N+|\varphi_r(1/n,x')|\right)\mathrm{d}x'\\ &\le 2\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{|x_N|>r} u(1/n,x',x_N)\,\mathrm{d}x_N\mathrm{d}x'\to 0 \quad \text{as } n\to\infty.\end{aligned}$$

由于 $u\in C((0,\infty);\,L^1(\mathbb{R}^N))$，我们有 $u(t+1/n)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于 $u(t)$，当 $n\to\infty$ 时。因此，当 $n\to\infty$ 时， $u_n(t)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中 $\to u(t)$。压缩性质表明，对于所有 $\tau>0$， $u_n\to u$ 在 $C([\tau,\infty);\,L^1(\mathbb{R}^N))$ 中，当 $n\to\infty$ 时。

定义 $\overline{u}^r_{0,\,n}$，然后以类似的方式定义 $\overline{u}_n$，由相同的推理可得，当 $n\to\infty$ 时， $\overline{u}_n(t)\to\overline{u}(t)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中。

(iii) 非线性项的近似。我们考虑带有初始数据$u^r_{0,\,n}$ 和非线性项的問題 (2.1) 的解

$$f_\eta(u)=(u^2+\eta)^{q/2}-\eta^{q/2},\quad \eta>0. \tag{3.3}$$

相应的解将取决于 η。我们将其记为 u^η_n。注意， f_η 是 $C^\infty(\mathbb{R})$，并满足不等式

$$0\le f_\eta(s)=(s^2+\eta)^{q/2}-\eta^{q/2}\le s^q \quad \text{for all } s\ge 0. \tag{3.4}$$

热方程在索伯列夫空间中的经典正则性结果 [10] 表明， $u^\eta_n\in L^p{}_{\mathrm{loc}}((0,\infty);\,H^{2,p}(\mathbb{R}^N))$ 以及 $\partial_t u\in L^p{}_{\mathrm{loc}}((0,\infty);\,L^p(\mathbb{R}^N))$ 对所有 $p\in(1,\infty)$ 均成立。因此， u^η_n属于抛物型 H¨older 空间 $C^{\delta,2\delta}(Q)$，其中 $\delta>0$, [11, 参见第 8.5 节，第 117] 页。 f_η 的正则性保证了 $\partial_{x_N}(f_\eta(u^\eta_n))$ 也属于 $C^{\delta,2\delta}(Q)$，随后，非齐次热方程的正则性结果 [11, 定理 8.7.3，第 123] 页表明， $u\in C^{1+\delta,2+2\delta}(Q)$，因此 u^η_n 是一个经典解。

此外， [5, 引理 B.17] 表明， $u^\eta_n\to u_n$ 在 $C([0,\infty);\,L^1(\mathbb{R}^N))$ 中为 $\eta\to 0^+$。因此，鉴于上一步的结果，对于所有 $\tau>0$， $u^\eta_n\to u$ 属于 $C([\tau,\infty);\,L^1(\mathbb{R}^N))$。对于$\overline{u}^\eta_n$也有类似结果，其定义方式类似。

（iv）原函数是哈密顿-雅可比方程的有界解。容易验证，

$$v^\eta_n(t,x',x_N):=\int_{-\infty}^{x_N} u^\eta_n(t,x',y_N)\,\mathrm{d}y_N \quad \text{for all } (t,x',x_N)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}$$

是哈密顿-雅可比方程的非负经典解

$$\partial_t v-\Delta v=f_\eta(\partial_{x_N}v) \quad \text{in } Q. \tag{3.5}$$

我们来证明它是有界的。事实上，由于 $u^\eta_n\in C([0,\infty);\,L^1(\mathbb{R}^N))$ 是非负的，

$$v^\eta_n(t,x',x_N)\le\int_{\mathbb{R}} u^\eta_n(t,x',y_N)\,\mathrm{d}y_N=:w^n_\eta(t,x'), \tag{3.6}$$

其中函数 w^n_η属于 $C([0,\infty);\,L^1(\mathbb{R}^{N-1}))$ 并满足

$$\partial_t w-\Delta_{x'}w=0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^{N-1},\qquad w(0)=M\Gamma_{N-1}(1/n) \quad \text{on } \mathbb{R}^{N-1}. \tag{3.7}$$

该问题的解为 $w^n_\eta(t)=M\Gamma_{N-1}(t)*\Gamma_{N-1}(1/n)$。因此，

$$\|w^n_\eta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})}\le M\|\Gamma_{N-1}(1/n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})}\le Mc_n$$

对于某个正常数 c_n，且 v^η_n 有界。对于以类似方式定义的 $\overline{v}^\eta_n$，同样的结果以同样的界成立。

（v）迹的比较。我们声称，对于所有 $(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{x_N-2r} u_{0,n}^r(x', y_N)\,\mathrm{d}y_N \le \int_{-\infty}^{x_N} \overline{u}_{0,n}^r(x', y_N)\,\mathrm{d}y_N \le \int_{-\infty}^{x_N+2r} u_{0,n}^r(x', y_N)\,\mathrm{d}y_N. \tag{3.8}$$

我们只证明第一个不等式，因为第二个不等式可以用类似的方法得到。根据构造，$u_{0,n}^r(x', \cdot)$ 的支集包含于 $(-r, r)$。因此，若 $x_N < r$，左端项为零，故不等式成立，因为 $\overline{u}_{0,n}^r$ 非负。若 $x_N > r$，利用 $\overline{u}_{0,n}^r(x', \cdot)$ 的支集以及 (3.2),

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x_N-2r} u_{0,n}^r(x', y_N)\,\mathrm{d}y_N &\le \int_{-\infty}^{\infty} u_{0,n}^r(x', y_N)\,\mathrm{d}y_N = M\Gamma_{N-1}(1/n, x') = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u}_{0,n}^r(x', y_N)\,\mathrm{d}y_N \\ &= \int_{-\infty}^{r} \overline{u}_{0,n}^r(x', y_N)\,\mathrm{d}y_N = \int_{-\infty}^{x_N} \overline{u}_{0,n}^r(x', y_N)\,\mathrm{d}y_N,\end{aligned}$$

并且该不等式也成立。

另一方面，由于 $u_n^\eta \in C([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^N))$，因此 $u_n^\eta(t) \to u_{0,n}^r$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^N)$，其中 $t \to 0^+$。于是,

$$v_n^\eta(t, x', x_N) \to \int_{-\infty}^{x_N} u_{0,n}^r(x', y_N)\,\mathrm{d}y_N \quad \text{in } L^1_{x'}(\mathbb{R}^{N-1}; L^\infty_{x_N}(\mathbb{R})) \text{ as } t \to 0^+,$$

并且因此在 $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ 中几乎处处也成立。对 $\overline{v}_n^\eta$ 也有类似的论证。因此，(3.8) 转化为

$$v_n^\eta(0+, x', x_N - 2r) \le \overline{v}_n^\eta(0+, x', x_N) \le v_n^\eta(0+, x', x_N + 2r) \quad \text{for a.e } (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

(vi) 原函数的比较。现在我们来证明，迹函数的不等式 (3.9) 推出

$$v_n^\eta(t, x', x_N - 2r) \le \overline{v}_n^\eta(t, x', x_N) \le v_n^\eta(t, x', x_N + 2r) \text{ 对所有 } (t, x', x_N) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

我们只证明第一个不等式，因为第二个不等式的证明类似。为此，我们定义

$$g(t, x', x_N) := v_n^\eta(t, x', x_N - 2r) - \overline{v}_n^\eta(t, x', x_N) \quad \text{for all } (t, x', x_N) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}.$$

By 步骤（iv）， g 由 $2Mc_n$一致有界。此外， $g \in C^{1+\delta, 2+2\delta}(Q)$ 并满足 s

$$\partial_t g - \Delta g = a(t,x)\partial_{x_N} g \quad \text{in } Q, \qquad \lim_{t\to 0^+} g(t) \le 0 \quad \text{a.e. on } \mathbb{R}^N, \tag{3.11}$$

其中 $|a(t,x)| \le c_{\eta,q}$。

按照 [2, 定理 3], , 我们考虑 $\psi:\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ 光滑，且满足 $\psi(x) = 0$，其中 $|x| \le 1, \psi(x) > \|g\|_{L^\infty(Q)}$，对于 $|x| \ge 2$，且 $\psi, \nabla\psi$ 和 $D^2\psi$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中有界。采用这一选择，我们对所有 $\beta > 0$ 引入 $\psi_\beta(x) = \psi(\beta x)$。可得，对于 $|x| \ge 2/\beta$， $\psi_\beta(x) > \|g\|_{L^\infty(Q)}$，并且当 $\beta \to 0^+$ 时， $\nabla\psi_\beta$, $D^2\psi_\beta$ 和 $\mathcal{L}\psi_\beta$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上都一致趋于零。令 $\tilde{\delta} > 0$ 和 $h(t,x) := g(t,x) - \tilde{\delta}t - \psi_\beta(x)$。那么 $h^+(t) \in W^1, 1(\mathbb{R}^N)$ 在球 $|x| < 2/\beta$ 中紧支，且满足 $\nabla h^+(t) = \nabla h(t)\mathbb{1}_{(h(t)>0)}$，对所有 $t > 0$ 均成立。因此，由 (3.11),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N} (h^+(t))^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} h^+(t)\partial_t h(t) = \int_{\mathbb{R}^N} h^+(t)(\partial_t g(t) - \tilde{\delta}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h^+(t)(\Delta g(t) + a\partial_{x_N} g(t) - \tilde{\delta}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h^+(t)\big(\Delta h(t) + a\partial_{x_N} h(t)\big) + \int_{\mathbb{R}^N} h^+(t)\big(\Delta\psi_\beta + a\partial_{x_N}\psi_\beta - \tilde{\delta}\big).\end{aligned}$$

˜注意到，当 β 足够小时， $\beta < \beta(\delta)$，我们有

$$\big|\Delta\psi_\beta + a\partial_{x_N}\psi_\beta\big| < \tilde{\delta} \quad \text{in } \mathbb{R}^N.$$

因此，对于所有 $t>0$，由杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N}(h^+(t))^2 &\le -\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla h^+|^2+\int_{\mathbb{R}^N}ah^+(t)\partial_{x_N}h^+(t)\\ &\le -\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla h^+|^2+\frac{c_{n,q}^2}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(h^+(t))^2+\int_{\mathbb{R}^N}|\partial_{x_N}h^+(t)|^2\le\frac{c_{n,q}^2}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(h^+(t))^2.\end{aligned}$$

那么对所有 $0<s<t$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^N}(h^+(t))^2\le\int_{\mathbb{R}^N}(h^+(s))^2+\frac{c_{n,q}^2}{4}\int_s^t\int_{\mathbb{R}^N}(h^+)^2.$$

注意到

$$\lim_{s\to0^+}\int_{\mathbb{R}^N}(h^+(s))^2=\lim_{s\to0^+}\int_{|x|<2/\beta}\big((g(s)-\tilde{\delta}s-\psi_\beta)^+\big)^2=0,$$

由此可得 $h^+\equiv0$。根据 Gr¨onwall 不等式，因此

$$g(t,x)\le\tilde{\delta}t+\psi_\beta(x)\quad\text{for all } t>0,\ \text{all } x\in\mathbb{R}^N,\ \text{and all } \beta<\beta(\tilde{\delta}).$$

这意味着 $g(t,x)$ 在 $\{|x|<1/\beta\}$ 上成立，从而令 $\beta\to0^+$ 后，在 $\mathbb{R}^N$ 上也成立。最后，˜通过取极限 $\delta\to0^+$，即可得到该结果。

(vii) 结论。不等式 (3.10) 可写为

$$\int_{-\infty}^{x_N-2r}u_n^\eta(t,x',y_N)\,\mathrm{d}y_N\le\int_{-\infty}^{x_N}\overline{u}_n^\eta(t,x',y_N)\,\mathrm{d}y_N\le\int_{-\infty}^{x_N+2r}u_n^\eta(t,x',y_N)\,\mathrm{d}y_N.$$

由于对所有 $\tau>0$，$u_n^\eta\to u_n$ 在 $C([\tau,\infty);L^1(\mathbb{R}^N))$ 中，我们推得，对于几乎处处的 $x'\in\mathbb{R}^{N-1}$ 及所有 $t\ge\tau$，$u_n^\eta(t,x',\cdot)\to u_n(t,x',\cdot)$ 在 $L^1(\mathbb{R})$ 中。然后令 $\eta\to0$，可得（取一个子列后），

$$\int_{-\infty}^{x_N-2r}u_n(t,x',y_N)\,\mathrm{d}y_N\le\int_{-\infty}^{x_N}\overline{u}_n(t,x',y_N)\,\mathrm{d}y_N\le\int_{-\infty}^{x_N+2r}u_n(t,x',y_N)\,\mathrm{d}y_N\quad\text{for a.e. } x'.$$

另一方面，由于 $u_n(t)\to u(t)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中，可得（取一个子列后），对于几乎处处的 $x'\in\mathbb{R}^{N-1}$，$u_n(t,x',\cdot)\to u(t,x',\cdot)$ 在 $L^1(\mathbb{R})$ 中。我们得出，对于所有 $t\ge\tau$，

$$\int_{-\infty}^{x_N-2r}u(t,x',y_N)\,\mathrm{d}y_N\le\int_{-\infty}^{x_N}\overline{u}(t,x',y_N)\,\mathrm{d}y_N\le\int_{-\infty}^{x_N+2r}u(t,x',y_N)\,\mathrm{d}y_N\quad\text{for a.e. } x'.$$

令 $r\to0^+$，我们推得，对于几乎处处的 $(x',x_N)\in\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}$ 及所有 $t\ge\tau$，$u(t,x',x_N)=\overline{u}(t,x',x_N)$，由此得到唯一性结论。

约化方程。证明与情形 $\mathcal{L}=-\Delta$ 类似。下面说明需要格外注意的几点。在步骤（i）中，我们仍然有：由 (3.1) 定义的 v 是 $\partial_t v-\Delta_{x'}v=0$ 的唯一基本解，其质量为 M。在步骤（iii）中，我们不仅需要正则化非线性项，还需要在 x_N 变量中加入扩散项

$$\partial_t u-\Delta_{x'}u-\varepsilon\partial_{x_Nx_N}^2u+\partial_{x_N}(f_\eta(u))=0\quad\text{in } Q. \tag{3.12}$$

其解满足 $u^{\varepsilon,\,\eta}\to u$ 在 $C([\tau,\infty);L^1(\mathbb{R}^N))$ 中对所有 $\tau>0$，当 $\varepsilon,\eta\to0$ 时成立。步骤（iv）中的原函数满足哈密顿-雅可比方程

$$\partial_t v-\Delta_{x'}v-\varepsilon\partial_{x_Nx_N}^2v=f_\eta(\partial_{x_N}v)\quad\text{in } Q,$$

而非 (3.5)。我们可以用函数 w_ε^n 来界定这些原函数，该函数如 (3.6) 所定义，满足与另一种情形中定义的函数 w_ε^n 相同的问题 (3.7)，因此具有相同的界。注意到 $\int_{\mathbb{R}^N}h^+(\Delta_{x'}h)\le0$，且项 $-\varepsilon|\partial_{x_N}h^+|^2$ 有助于吸收应用杨氏不等式时出现的额外项后，步骤 (vi) 的证明也能顺利进行。

□

4. Source-type solutions have a sign

现在我们证明具有尾部控制的源型解的唯一性与存在性。

定理 1.3 的证明。我们遵循 [3] 中的主要步骤，但将其调整为熵解的概念。

(i) u^+ 和 u^- 满足 (2.4)。由于 u 是熵解，因此 u^+ 和 u^- 在 $t=0$ 之外满足定义 2.7 中的正则性，即 $u^\pm \in L^\infty([\tau,\infty);\, L^\infty(\mathbb{R}^N))$ 和 $\nabla u^\pm \in L^2_{\rm loc}([\tau,\infty)\times\mathbb{R}^N)$ 对所有 $\tau>0$ 均成立。我们来证明它们都是熵次解。由于 u 是熵解，它满足不等式 (2.4)。显然，零函数也满足同一恒等式。利用命题 2.8，我们得到 $u^+=\max\{u,0\}$ 是一个下解。对于负部，我们首先注意到，由于 $f(u)$ 是奇非线性项，$-u$ 又是同一问题在不同初始数据下的熵解。再次利用零函数，我们得到 $u^-=\max\{-u,0\}$ 是一个熵次解。

我们强调，对于一维标量守恒律，u^+和 u^- 是熵次解这一事实已在引理 1.1] 中证明，见 [13, 。

(ii) u^+ 和 u^-的初始数据。由于 $u(t)\to M\delta_0$ （当 $t\to 0$ 时），可知对任意序列$(t_n)_{n\ge1}\to 0$, 存在一个子列$(t_j)_{j\ge1}\to 0$ 以及两个非负有限测度 μ 和ν，使得 $M\delta_0=\mu-\nu$并且

$$u^+(t_j)\to\mu,\ u^-(t_j)\to\nu$$

在测度意义下成立。尾部控制意味着这两个测度必定是支集位于 $x=(x',x_N)=0$处的狄拉克测度。

(iii) 将 u^+、u^- 与熵解进行比较。设$m_j\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$是一列收敛到 $M\delta_0$的非负函数。分别用 h_j 和g_j 表示初始数据为 $h_j(0)=u^+(t_j)$和$g_j(0)=u^-(t_j)$的方程 (2.1) 的熵解，其中$+m_j$属于 $L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$。定理 2.3(b) 的唯一性结论保证这两个解唯一。注意，$v_j(t):=u^+(t_j+t)$是方程 (2.1) 的熵次解，且其初始数据与 h_j相同。由命题 2.8 可知$v_j(t)\le h_j(t)$。对u^-. 也有类似结论。因此

$$0\le u^+(t+t_j)\le h_j(t),\ 0\le u_j^-(t+t_j)\le g_j(t)\quad \text{for a.e } t>0.$$

(iv) 对 h_j 和 g_j 的估计。由于 $u\in L^\infty((0,\infty);\, L^1(\mathbb{R}^N))$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^N}u^\pm(t_j)\le\int_{\mathbb{R}^N}|u(t_j,x)|dx\le\|u\|_{L^\infty((0,\infty);L^1(\mathbb{R}^N))}=A<\infty$$

a因此，序列 $(h_j(0))_{j\ge1}$ 和 $(g_j(0))_{j\ge1}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中一致有界 .

回顾一下 [5] 中关于方程 (2.1) 的非负解 w 的一些结果，其中初始数据为 $0\le w_0\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$。它们保持质量；当 $1-\frac{1}{N}<q\le 2$时，我们有双曲型估计（见 [5] 中命题 4.4 在 $\alpha=2$ 和 $\lambda=1$ 条件下的证明）：

- （L^p 范数的时间衰减）对所有 $p\in[1,\infty]$ 以及几乎处处的 $t>0$,

$$\|w(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\lesssim t^{-\frac{N+1}{2q}(1-\frac{1}{p})}\|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{q}(1-\frac{1}{p})}. \tag{4.1}$$

- （能量估计）对所有 $0<\tau<T<\infty$,

$$\int_\tau^T\|\mathcal{L}^{\frac12}w(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2dt\lesssim\tau^{-\frac{N+1}{2q}}\|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/q}. \tag{4.2}$$

- （时间导数估计）对于所有有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$,

$$\|\partial_t w\|_{L^2((\tau,T);H^{-1}(\Omega))}\lesssim C(\tau,\|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}). \tag{4.3}$$

我们不们将上述估计应用于 $w_0 = h_j(0)$。对于 $g_j(0$，也将采用类似的论证 ）。我们先考虑 $\mathcal{L} = -\Delta$ 的情形。由于 $(h_j(0))_{j>0}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中一致有界，上述估计 (4.2)、(4.3) 使我们能够应用 Aubin-Lions-Simon 的经典紧性论证 [16, 定理 5]。因此，除去一个子列，$h_j \to h$ 在 $L^2_{\mathrm{loc}}(Q)$ 中， $h_j \to h$ 几乎处处于 Q，并且对每个 $\varepsilon > 0$ 以及有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$，$h_j \to h$ 属于 $C_{\mathrm{loc}}((0,\infty); H^{-\varepsilon}(\Omega))$。

当 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$ 时，紧性论证稍微困难一些，因为能量估计 (4.2) 仅提供了部分梯度：

$$\int_\tau^T \|\nabla_{x'} w(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} dt \lesssim \tau^{-\frac{N+1}{2q}} \|w_0\|^{1/q}_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

然而，利用 Hoff/Oleˇınik 型估计，可以推出沿方向 x_N 的一致平移估计（见 [5, 引理 3.8]）：

$$\begin{aligned}(4.4)\qquad &\int_{|x'|<R', |x_N|<R} |w(t, x+(0,\xi_N)) - w(t,x)| dx \\ &\qquad \lesssim |\xi_N| R'^{N-1} \Big(R^{-1} t^{-1-\frac{N+1}{2}\frac{q-2}{q}} \|w_0\|^{\frac{2-q}{q}}_{L^1(\mathbb{R}^N)} + t^{-\frac{1}{q}\frac{N+1}{2}} \|w_0\|^{\frac{1}{q}}_{L^1(\mathbb{R}^N)} \Big).\end{aligned}$$

[5, 引理 C.2] 中的紧性结果结合 $\alpha = 2$，给出了所需的（h_j）$_{j\geq 1}$ 收敛性。

上述得到的紧性使我们能够在熵不等式 (2.2) 中取极限

$$\iint_Q \Big(|h_j - k| \partial_t \phi + \operatorname{sgn}(h_j - k)\big(f(h_j) - f(k)\big)\partial_{x_N}\phi - |h_j - k|(\mathcal{L}\phi) \Big) \geq 0$$

从而得到极限点 h 也满足 (2.2)。

现在，我们来确定 h 以测度意义取得的初始数据。我们利用这样一个事实： h_j 保持质量守恒，而且也是一个非常弱解。经过经典的逼近论证，我们推得对于任意 $\psi \in C_c^\infty$（$\mathbb{R}^N$），有

$$\begin{aligned}\Big| \int_{\mathbb{R}^N} h_j(t,x)\psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} h_j(0)\psi(x)\,\mathrm{d}x \Big| &\leq RHS := \int_0^t |h_j||\mathcal{L}\psi| + \int_{\mathbb{R}^N} |h_j|^q |\partial_{x_N}\psi| \\ &\leq tA\|\mathcal{L}\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |h_j|^q |\partial_{x_N}\psi|.\end{aligned}$$

由于 $q \in (1 - \frac{1}{N}, 1)$，我们利用引理 2.3 (iv) 中的 L^1-界，得到

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |h_j|^q |\partial_{x_N}\psi| \leq \int_0^t \|h_j\|^q_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\partial_{x_N}\psi\|_{L^{1/(1-q)}(\mathbb{R}^N)} \leq C(A)\|\partial_{x_N}\psi\|_{L^{1/(1-q)}(\mathbb{R}^N)} t,$$

于是，当$t \to 0^+$ 时， RHS 关于 j一致趋于零。令 $j \to \infty$，可得对所有$\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(t,x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \to \langle \mu, \psi \rangle \quad \text{as } t \to 0^+.$$

为了证明上述结论对所有 $\psi \in C_b(\mathbb{R}^N)$都成立，我们利用引理2.5(c)中的尾部控制以及上述讨论，得到

$$(4.5)\qquad \int_{|x|>2R} h_j(t,x)\,\mathrm{d}x \lesssim \int_{|x|>R} u^+(t_j)\,\mathrm{d}x + \frac{At}{R^2} + C(A)\frac{t}{R^{1-N(q-1)}}.$$

令 $j \to \infty$，并利用 $u^+(t_j)$收敛到狄拉克质量的一个倍数这一事实，我们得 et

$$\int_{|x|>2R} h(t,x)\,\mathrm{d}x \lesssim \frac{At}{R^2} + C(A)\frac{t}{R^{1-N(q-1)}}$$

然后再次有 $\int_{\mathbb{R}^N} h(t)\psi \to \langle \mu, \psi \rangle$ 对于所有 $\psi \in C_b(\mathbb{R}^N)$，均有 $t \to 0$。

(v) 非负解唯一性的应用。由此可知， h是方程 (2.1) 的一个非负熵解，其初始数据为狄拉克δ，记作 $\mu_\circ$ 对序列 $(g_j)_{j\ge1}$ 也可作类似论证，因此其极限点 g 仍是方程 (2.1) 的一个熵解，但初始数据为 $\nu + M\delta_0 = \mu_\circ$ 根据狄拉克δ初始数据对应的非负解的唯一性，我们可推出 $h = g_\circ$

（vi）结论。利用 $h = g$，并令 $t_j \to 0^+$，再令 $t \to 0^+$，可得 $\nu = 0$、$\mu = M\delta_0$、$u^- = 0$、$u = u^+$，于是非负解的唯一性结果再次适用。完整细节见 [3]。□

注 4.1。定理 1.3 证明中步骤（iv）的所有估计都基于 L^1–L^p双曲型估计 (4.1)。当 $\mathcal{L} = -\Delta$ 时，也可以使用抛物型 L^1–L^p 估计（参见[5, 引理 3.5] 及其中的 $\alpha = 2$），这些估计适用于范围 $q > 1 - 1/N$:

$$\|w(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \lesssim t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})}\|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \quad \text{for all } p \in [1,\infty] \text{ and } t > 0.$$

由此可得

$$\int_{|x|>2R} h(t,x)\,\mathrm{d}x \lesssim \frac{At}{R^2} + C(A)\frac{t^{1-\frac{N}{2}(q-1)}}{R}.$$

注意，对所有 $q \in (1, 1 + 2/N)$，右端在 $t \to 0^+$ 时趋于零。此前已在一维情形下，于 [6, 第 4] 节中观察到非负解具有这一性质。因此，当 $N = 1$ 且 $q \in (2, 3)$ 时，我们也可以应用步骤（iv）中的论证；这一情形在 [3]中尚未处理。

现在我们开始证明存在性。

定理 1.5 的证明。考虑 $m_j = Mj^{-N}\varphi(x/j)$，$j \ge 1$，其中 φ 是一个非负的、具有紧支撑且质量为一的光滑函数。将上述相同论证应用于 $(g_j)_{j\ge1}$，即可得到所需的存在性。□

5. Application to large-time behaviour

本节将讨论当 $q \in (1 - 1/N, 1)$时，方程 (2.1) 的变号解的大时间行为。

定理 1.6 的证明。(i) $\mathcal{L} = -\Delta$ 的情形。我们引入如下函数的单参数族

$$u_\lambda(t, x', x_N) := \lambda^\gamma u(\lambda t, \lambda^{1/2}x', \lambda^\beta x_N),$$

其中指数 γ、$\beta > 0$ 满足:
- Th质量的 f the sol解保持不变。
- 在 L^∞ 范数下的衰减与 λ 无关。

质量守恒要求

$$\gamma = \frac{N-1}{2} + \beta.$$

由于 $1 - \frac{1}{N} < q < 1$，我们处于次临界情形，因此采用双曲型估计。特别地，对于 $p = \infty$，我们有（4.1）。为了使该估计对于 u_λ 保持不变，我们令

$$\beta = \frac{N + 1 - q(N-1)}{2q}.$$

u 的 大时间行为将由某个固定时间 t 下 u_λ 在 $\lambda \to \infty$ 时的行为决定。注意， u_λ 是一个熵解，满足

$$\partial_t u_\lambda - \Delta_{x'}u_\lambda - \lambda^{1-2\beta}\partial^2_{x_Nx_N}u_\lambda + \partial_{x_N}(u_\lambda^q) = 0 \quad \text{in } Q, \qquad u_\lambda(0) = u_{0,\lambda} \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \tag{5.1}$$

其中 $u_{0,\ \lambda}(x', x_N) := \lambda^{\gamma} u_0(\lambda^{1/2} x', \lambda^{\beta} x_N)$，且 $1 - 2\beta < 0$。因此，我们预期当 $\lambda \to \infty$时，(5.1) 的解将收敛到 $\partial_t u - \Delta_{x'} u + \partial_{x_N}(u^q) = 0$ 的源型解。

为此，我们需要关于序列 $(u_\lambda)_{\lambda>1}$ 的若干结果：L^p-范数的时间衰减（参见 (4.1)）、质量守恒（参见引理 2.3(a)(v)）、能量估计（参见 (4.2)）、关于 x_N 导数的局部估计（参见 (4.4)）、关于时间导数的估计（参见 (4.3)）以及尾部控制（参见 (4.5)）。这正是 [5] 中带有 $\alpha = 2$ 的命题 4.4。随后，通过缩放，所有上述性质都可以转移到 u_λ。

定理 1.6 的证明随后沿用定理 1.3 中次临界情形的证明步骤，见 [5] 中的 $\alpha = 2$。[5] 中以引理 C.2 形式给出的紧性（见 $\alpha = 2$）主要是算子 $-\Delta_{x'}$ 的能量估计与关于 x_N 导数的局部估计共同作用的结果。这些结果连同尾部控制表明，存在一个子列，使得对于几乎处处的 $t > 0$，$u_\lambda(t) \to U(t)$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$，并且当 $\lambda \to \infty$ 时，对于几乎处处的 $(t, x) \in Q$，有 $u_\lambda(t, x) \to U(t, x)$。极限方程已经得到确定，但关于熵形式稳定性的严格讨论也可按照 [5] 中带有 $\alpha = 2$ 的方式进行。最后，初始数据的确定在很大程度上依赖于所推导出的尾部控制。

极限方程的唯一性（参见定理 1.1）进而保证整个序列 $(u_\lambda)_{\lambda>0}$ 收敛到极限 U，由此得到定理 1.6。

（ii）情形 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$。我们需要先在（2.1）中用 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'} - \varepsilon \partial^2_{x_N x_N}$ 替换 $\mathcal{L} = -\Delta_{x'}$。与上文相同的考量表明，$u^\varepsilon_\lambda$ 满足

$$\partial_t u^\varepsilon_\lambda - \Delta_{x'} u^\varepsilon_\lambda - \lambda^{1-2\beta} \varepsilon \partial^2_{x_N x_N} u^\varepsilon_\lambda + \partial_{x_N}((u^\varepsilon_\lambda)^q) = 0 \quad \text{in } Q, \qquad u^\varepsilon_\lambda(0) = u_{0,\lambda} \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \tag{5.2}$$

再次，$1 - 2\beta < 0$，因此当 $\lambda \to \infty$时，我们预期会得到与上文相同的极限问题 .

重复之前的论证可知，u^ε_λ 也满足上文提到的性质（关于 ε 和 λ一致）。再次，由 [5] 中的引理 C.2 可知 $(u^\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0,\ \varepsilon>0}$具有紧性。取一个子列后，我们有 $u^{\varepsilon_k}_{\lambda_k}(t) \to U(t)$ 于 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中，对几乎处处的 $t > 0$成立；并且 $u^{\varepsilon_k}_{\lambda_k}(t, x) \to U(t, x)$ 对几乎处处的 $(t, x) \in Q$成立，当 $k \to \infty$时。随后可如前所述完成证明。□

致谢。L. I. Ignat 获得了罗马尼亚研究、创新与数字化部以及 CNCS - UEFISCDI 的资助，项目编号为 PN-III-P1-1.1-TE-2021-1539，隶属 PNCDI III。

F. Quir´os 得到 CEX2019-000904-S、PID2020-116949GB-I00 和 RED2018- 102650-T 项目的资助，这些项目均由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助；此外，还获得马德里政府（马德里自治区 – 西班牙）在与马德里自治大学签订的多年期协议框架下提供的资助，该协议属于第五期区域研究与技术创新计划背景下的大学研究人员卓越计划。

References

[1] B. Andreianov 和 M. Brassart. 具有“完全无限”传播速度的分数阶守恒律熵解的唯一性。《微分方程杂志》，268(7):3903–3935，2020。[2]G. Barles 和 C. Imbert. 二阶椭圆积分微分方程：重新审视粘性解理论。《高等科学研究所亨利·庞加莱研究所分析与非线性年刊》，25(3):567–585，2008。[3] A. Carpio. 对流-扩散方程的大时间行为。《比萨高等师范学校科学类年刊》(4)，23(3):551–574，1996。[4] C. M. Cazacu、L. I. Ignat 和 A. F. Pazoto. 具有非局部扩散的亚临界对流-扩散方程的渐近行为。《非线性》，30(8):3126–3150，2017。[5] J. Endal、L. I. Ignat 和 F. Quir´os. 各向异性稳定非局部扩散问题在对流作用下的大时间行为。预印本，arXiv:2207.01874v1，2022。

[6] M. Escobedo、J. L. V´azquez 和 E. Zuazua. 扩散-对流方程的渐近行为与源型解。《数学分析与力学文献》，124(1):43–65，1993。[7] M. Escobedo、J. L. V´azquez 和 E. Zuazua. 多个空间维数下的扩散-对流方程。《印第安纳大学数学杂志》，42(4):1413–1440，1993。[8] M. Escobedo 和 E. Zuazua. R^N中的对流-扩散方程的大时间行为。《泛函分析杂志》，100(1):119–161，1991。[9] M. Escobedo 和 E. Zuazua. 高维对流-扩散方程的长时间行为。《工业与应用数学学会数学分析杂志》，28(3):570–594，1997。[10] B. F. Jones, Jr. 一类奇异积分。《美国数学杂志》，86:441–462，1964。[11] N. V. Krylov. H ¨older 空间中的椭圆与抛物型方程讲义，数学研究生教材第12卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1996。[12] P. Lauren˛cot. 快速对流扩散方程的长时间行为。《纯粹与应用数学年刊》(4)，175:233–251，1998。[13] T.-P. Liu 和 M. Pierre. 守恒律中的源解与渐近行为。《微分方程杂志》，51(3):419–441，1984。[14] E. Y. Panov. 关于退化非线性抛物型方程熵次解理论。《数学方法与应用科学》，43(16):9387–9404，2020。[15]E. Y. Panov. 关于非线性退化抛物型方程熵解理论。《数学科学（纽约）》，265(6):988–1007，2022。[16] J. Simon. 空间 $L^p(0,T;B)$中的紧集。《纯粹与应用数学年刊》，第四辑，146:65–96，1987。[17] L. Tartar. 补偿紧性及其在偏微分方程中的应用。载于《非线性分析与力学：赫瑞瓦特研讨会》第四卷，数学研究札记第39卷，第136–212页。Pitman，波士顿、伦敦，1979。[18]E. Zuazua. 标量对流-扩散方程的渐近行为。预印本，arXiv:2003.11834v1，2020。

(J. ENDAL) Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology (NTNU), N-7491, Trondheim, Norway

Email address: jorgen.endal@ntnu.no

URL: https://folk.ntnu.no/jorgeen/

(L.I. Ignat) Institute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy, 21 Calea Grivitei Street 010702 Bucharest Romania and The Research Institute of the University of ,,,,,,,,, Bucharest - ICUB University of Bucharest 90-92 Sos. Panduri 5th District Bucharest Romania

Email address: liviu.ignat@gmail.com

URL: http://www.imar.ro/˜lignat

(F. Quir´os) Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid (UAM), Campus de Cantoblanco, 28049 Madrid, Spain, and, Instituto de Ciencias Matemáticas ICMAT (CSIC-UAM-UCM-UC3M), 28049 Madrid, Spain

Email address: fernando.quiros@马德里自治大学.es

URL: https://matematicas.uam.es/˜fernando.quiros