arXiv:2303.01918v1 [math.PR] 3 Mar 2023

无界环境中的一类定向高分子弱无序相的矩刻画

RYOKI FUKUSHIMA 和 STEFAN JUNK

摘要。对于随机环境中的定向聚合物模型，已有研究通过重整化配分函数的矩对弱无序相进行了刻画，见 [S. Junk: 《数学物理通讯》389，1087–1097（2022）]。我们将这一刻画推广到一大类无界环境，其中包含许多常用的分布。

1. 引言

我们考虑随机环境中的定向高分子模型。令 $(X = (X_j)_{j\geq 0}, P^{\mathrm{SRW}})$ 为从原点出发的 $\mathbb{Z}^d$ 上的简单随机游走，并令 $((\omega_{j,x})_{(j,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d}, \mathbb{P})$ 为一列相互独立且同分布的随机变量，满足

$$e^{\lambda(\beta)} := \mathbb{E}\left[e^{\beta\omega_{0,0}}\right] < \infty \text{ for all } \beta \geq 0. \tag{1.1}$$

于是，我们定义逆温度为 $\beta \geq 0$、长度为 n 的高分子的概率律如下：

$$\mathrm{d}\mu^{\beta}_{\omega,n}(\mathrm{d}X) = \frac{1}{Z^{\beta}_n(\omega)} \exp\left(\beta \sum_{j=1}^{n} \omega_{j,X_j}\right) P^{\mathrm{SRW}}(\mathrm{d}X), \tag{1.2}$$

其中 $Z^{\beta}_n(\omega) = E^{\mathrm{SRW}}[\exp(\beta \sum_{j=1}^{n} \omega_{j,X_j})]$ 是该模型的归一化常数，称为配分函数。在此测度下，随机游走会被 ω 为正的位点吸引，并被其为负的位点排斥。因此，我们预计当 β 较大时，高分子的行为会受到环境的强烈影响。

在假设对所有 $\beta \in \mathbb{R}$ 均有 $\mathbb{E}\left[e^{\beta\omega_{0,0}}\right] < \infty$ 的条件下， [2, 3] 使这一直觉得到了精确刻画。在空间维数 $d \geq 3$ 下，存在 $\beta_{cr} \in (0, \infty)$，使得当 $\beta < \beta_{cr}$ 时，

$$e^{-n\lambda(\beta)} Z^{\beta}_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} W^{\beta}_{\infty}(\omega) > 0, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}, \tag{1.3}$$

而当 $\beta > \beta_{cr}$ 时，

$$e^{-n\lambda(\beta)} Z^{\beta}_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{1.4}$$

容易验证，退火配分函数满足 $E[Z^{\beta}_n] = e^{n\lambda(\beta)}$。由此可知，当 $\beta < \beta_{cr}$ 时，淬火配分函数与退火配分函数具有可比性；而当 $\beta > \beta_{cr}$ 时则相反。这表明，在前一种相中，无序的影响较弱；在后一种相中，无序的影响较强，并且在 β_{cr} 处行为发生了显著变化。感兴趣的读者可参阅 [2, 3]。

上述结果的证明依赖于以下事实：在 $\mathbb{P}$ 及滤过 $\mathrm{F}_n := \sigma(\omega_{j,\,x}\colon\ j \leq n,\ x \in \mathbb{Z}^d)$ 下，$W^{\beta}_n(\omega) := e^{-n\lambda(\beta)} Z^{\beta}_n(\omega)$ 是一个非负鞅，并且还可以进一步证明，相（1.3）由 $W^{\beta}_n(\omega)$ 的一致可积性刻画。但为了进一步分析弱无序相，最好能够对 $(W^{\beta}_n(\omega))_{n\geq 0}$ 获得更强的性质。第二作者最近在 [6] 中证明，在随机势 $= e^{-n\lambda(\beta)} Z^{\beta}_n$ 有上界的假设下，对于 $\beta < \beta_{cr}$，鞅 $(W^{\beta}_n(\omega))_{n\geq 0}$ 是 1

L^p-有界的，其中 $p > 1$满足一定条件，前提是随机势 ω 有上界。本文的主要结果将这一刻画推广到了大类无界环境。

2. 主要结果

我们对环境 ω 引入以下条件。

条件 1. 对于 $\beta > 0$，存在 $A_1 = A_1(\beta) > 1$和 $c_1 = c_1(\beta) > 0$，使得对于所有 $A > A_1$ ，

$$E\left[e^{\beta\omega} \,\middle|\, \omega > A\right] \le c_1 e^{\beta A}。 \tag{2.1}$$

该条件通过要求控制当 ω 在给定为较大值的条件下的超调，强化了关于有限指数矩的假设 (1.1)。这似乎并不十分严格，许多常用的分布都满足该条件，不过我们强调，也有一些分布满足 (1.1) 却不满足条件 1。我们将在第5节进一步讨论这些问题。

以下是本文的主要结果。

定理 2.1。 令 β 满足 $\mathbb{P}（W_\infty^\beta > 0）$ > 0，并假设 ω 满足 （1.1） 和条件 *1*。则存在 $p = p（\beta）$ > 1，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|W_n^\beta\|_p < \infty. \tag{2.2}$$

此外，满足 （2.2） 的 $p > 1$ 构成一个开集。

注 2.2。 如果 $\lim_{n\to\infty} W_n^\beta = 0$，则 W_n^β不是一致可积的，因此（2.2）必然不成立。由此，弱无序可由某个 p 阶矩的有限性来刻画。

注 2.3。 在 [6], 中还进一步证明了，如果 ω 有下界，则对某个 $\varepsilon > 0$有 $\sup_n \mathbb{E}[W_n^{-\varepsilon}] < \infty$。本文中的论证很容易推广，从而表明，只要 ω 满足将条件 1 直接推广到负尾部的条件，同样的结论也成立。

注 2.4. 描述最优指数$p^*(\beta) :=\sup\{ p\colon (W_n^\beta)_{n\in\mathbb{N}}$有界$\}$如何依赖于 β，是一个有趣的问题。对于有界环境，文献 [5] 已证明，只要满足 $W_\infty^\beta > 0$，就有 $p^*(\beta) \ge 1 + 2/d$，因此 $\beta \mapsto p^*(\beta)$ 在 β_{cr} 处不连续。自然可以预期，一般情况下也成立。

3. 条件 1 的推广

如下文将详细说明，证明定理 2.1 的主要步骤是控制 W_τ 在停时 τ处的超调，其形式为

$$\frac{W_\tau^\beta}{W_{\tau-1}^\beta} = \sum_x \alpha_x e^{\beta\omega_x - \lambda(\beta)} \tag{3.1}$$

对于某种概率权重 $(\alpha_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$。本节旨在将关于 ω 的条件 1 转化为关于此类凸组合的陈述。

首先，我们给出一个条件：只要 ω 满足条件 1， $e^{\beta\omega-\lambda(\beta)}$ 就满足该条件。

条件 2。 随机变量 Y非负，且满足 $\mathbb{E}[Y] = 1$、 $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$，并且存在$A_2 > 1$ 和 $c_2 > 0$，使得对所有 $p \in [1, 2]$ 和 $A \ge A_2$,

$$\mathbb{E}[Y^p \mid Y > A] \le c_2 A^p. \tag{3.2}$$

Th下一个条件还要求将 (3.2) 推广到凸组合 s.

条件 3。 随机变量 Y非负，且满足 $\mathbb{E}[Y]=1, \mathbb{E}[Y^2]<\infty$，并且存在$A_3>1$ 和 $c_3>0$ 使得下述条件成立：若 $(Y_i)_{i\in I}$ 是 Y 的独立同分布副本，且 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 是一组非负数，满足 $\sum^{i\in I}\alpha_i=1$，则对所有 $p\in[1,2]$ 和 $A\geq A_3$

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i\in I}\alpha_i Y_i\right)^p \,\middle|\, \sum_{i\in I}\alpha_i Y_i > A\right] \leq c_3 A^p. \tag{3.3}$$

现在我们证明，这两个条件都可由条件 1 推出。

引理 3.1。 (i) 若 ω 满足条件 *1*，则 $Y:=e^{\beta\omega-\lambda(\beta)}$ 满足条件 *2*。(ii) 若随机变量 Y 满足条件 *2*，则它也满足条件 *3*。

证明。 **第 (i) 部分**的证明很简单。对于 $A\geq A_2:=e^{\beta A_1(2\beta)-\lambda(\beta)}$，我们可以利用条件 1 得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^2|Y>A] &= \mathbb{E}\left[e^{2\beta\omega}\,\middle|\,\omega>\frac{1}{\beta}(\log A+\lambda(\beta))\right]e^{-2\lambda(\beta)}\\ &\leq c_0(2\beta)e^{2\beta\frac{1}{\beta}(\log A+\lambda(\beta))}e^{-2\lambda(\beta)}\\ &=: c_1A^2.\end{aligned}$$

对 $p\in[1,2)$ 的推广可由詹森不等式得出。

第 (ii) 部分的证明更为复杂。下文中，我们用 C 表示仅取决于 $\mathbb{E}[Y_i^2]$、A_2 和 c_2 的正数常量，其取值可能逐行变化。令 $A\geq A_3:=A_2$ 和 $N:=\acute{\mathrm{I}}^i \mathbb{I}_{\{\alpha_iY_i>A\}}$。我们分别考虑所有加数都很小的情形（$N=0$），以及事件 $\acute{\mathrm{I}}_i\alpha_iY_i>A$ 是由某一个很大的加数导致的情形（$N\geq 1$）。在第一种情形下，我们有

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_i\alpha_iY_i\right)^2{}_{\mathbb{I}\{N=0\}}\,\middle|\,\sum_i\alpha_iY_i>A\right]\leq\mathbb{E}\left[\left(\sum_i\alpha_iY_{i\,\mathbb{I}\{\alpha_iY_i\leq A\}}\right)^2\,\middle|\,\sum_i\alpha_iY_i>A\right] \tag{3.4}$$

因为对 $\{N=0\}$ 中所有 i，都有 $Y_i=Y_{i\,\mathbb{I}\{\alpha_iY_i\leq A\}}$。令 $\tau:=\inf\{i\colon \acute{\mathrm{I}}_{j\leq i}\alpha_jY_j>A\}$，并注意到在 $\{\acute{\mathrm{I}}_i\alpha_iY_i>A\}$ 上有 $=\{\tau<\infty\}$，

$$\sum_{i\leq\tau}\alpha_iY_{i\,\mathbb{I}\{\alpha_iY_i\leq A\}}\leq\sum_{i<\tau}\alpha_iY_i+\alpha_\tau Y_{\tau\,\mathbb{I}\{\alpha_\tau Y_\tau\leq A\}}\leq 2A.$$

另请注意，在给定 $\tau=i$ 的条件下，其余变量 $(Y_{j+i})_{j\geq1}$ 服从无条件分布 $\mathbb{P}$。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\sum_i\alpha_iY_i\right)^2{}_{\mathbb{I}\{N=0\}}\,\middle|\,\sum_i\alpha_iY_i>A\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left(2A+\sum_{i>\tau}\alpha_iY_i\right)^2\,\middle|\,\tau<\infty\right]\\ &\leq \mathbb{E}\left[\left(2A+\sum_{i\in I}\alpha_iY_i\right)^2\right]\\ &\leq C(A^2+1),\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中在最后一行，我们用到了 $\acute{\mathrm{I}}_{i\in I}\alpha_i=1$，且 Y_1 具有有限二阶矩。在第二种情况下 $N\geq1$，我们使用 $\{N\geq1\}\subseteq\{\acute{\mathrm{I}}_i\alpha_iY_i>A\}$ 得到

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_i\alpha_iY_i\right)^2{}_{\mathbb{I}\{N\geq1\}}\,\middle|\,\sum_i\alpha_iY_i>A\right]\leq\mathbb{E}\left[\left(\sum_i\alpha_iY_i\right)^2\,\middle|\,N\geq1\right]. \tag{3.6}$$

令 $q_i := \mathbb{P}(\alpha_i Y_i > A \mid N \geq 1)$，并注意到

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 \mathbb{E}[Y_i^2 \mid N \geq 1] &\leq \alpha_i^2 \mathbb{E}[Y_i^2 \mid \alpha_i Y_i > A] q_i + \alpha_i^2 \mathbb{E}[Y_i^2 \mid \alpha_i Y_i \leq A] \\ &\leq c_2 A^2 q_i + \alpha_i^2 \mathbb{E}[Y_i^2], \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中，第一项使用了条件 2（注意 $A/\alpha_i \geq A_2$），第二项使用了 Y_i^2 与 $\mathbb{I}_{\{\alpha_i Y_i \leq A\}}$ 之间的负相关。

类似地，对于 $i \neq j$，令 $q_{i,j} := \mathbb{P}(\alpha_i Y_i > A, \alpha_j Y_j > A \mid N \geq 1)$，并注意到

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j \mathbb{E}[Y_i Y_j \mid N \geq 1] &\leq \alpha_i \alpha_j \big(q_{i,j} \mathbb{E}[Y_i \mid \alpha_i Y_i > A] \mathbb{E}[Y_j \mid \alpha_j Y_j > A] \\ &\quad + q_i \mathbb{E}[Y_i \mid \alpha_i Y_i > A] + q_j \mathbb{E}[Y_j \mid \alpha_j Y_j > A] \\ &\quad + \mathbb{E}[Y_i Y_j \mathbb{I}_{\{\alpha_i Y_i \leq A\}} \mathbb{I}_{\{\alpha_j Y_j \leq A\}} \mid \max_{k \neq i,j} \alpha_k Y_k > A] \big) \\ &\leq C\big(q_{i,j} A^2 + \alpha_j q_i A + \alpha_i q_j A + \alpha_i \alpha_j \big), \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中，前三项使用了条件 1；最后一项则利用了 $Y_i Y_j \mathbb{I}_{\{\alpha_i Y_i \leq A\}} \mathbb{I}_{\{\alpha_j Y_j \leq A\}}$ 与 $\{\max_{k \neq i, j} \alpha_k Y_k > A\}$ 相互独立。为了给 (3.6) 的右侧作界，我们将对 i 求和 (3.7)，并对 $i \neq j$ 求和 (3.8)。注意，$\sum_i q_i = \mathbb{E}[N \mid N \geq 1]$ 和 $\sum_{i \neq j} q_{i,j} \leq \mathbb{E}[N^2 \mid N \geq 1]$。这些量满足以下界。

引理 3.2. 在上述设定下，有 $\mathbb{E}[N \mid N \geq 1] \leq 2$ 和 $\mathbb{E}[N^2 \mid N \geq 1] \leq 5$。

该引理的证明将在下文给出。现在，将 (3.7) 对 i 求和，将 (3.8) 对 $i \neq j$求和，再应用引理 3.2，可知 (3.6) 的左侧有界于 $C(A^2 + 1)$。结合 (3.5) 并回想起 $A \geq 1$，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_i \alpha_i Y_i \right)^2 \,\middle|\, \sum_i \alpha_i Y_i > A \right] \leq C(A^2 + 1) \leq 2CA^2.$$

最后，对于 $p \in [1, 2)$ 的结论与前面一样，通过对上述结果应用詹森不等式即可得到。 □

引理 *3.2* 的证明。令 $\sigma = \inf\{i\colon\ \alpha_i Y_i > A\}$，并记 $N = \mathbb{I}^{\sigma < \infty} + \sum^{i > \sigma} \mathbb{I}_{\{\alpha_i Y_i > A\}}$。给定 $\sigma = i$ 时，随机变量 $(Y_{i+j})_{j \geq 1}$ 服从无条件分布 $\mathbb{P}$。因此，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N \mid N \geq 1] &= \mathbb{E}[N \mid \sigma < \infty] \leq 1 + \mathbb{E}[N], \\ \mathbb{E}[N^2 \mid N \geq 1] &= \mathbb{E}[N^2 \mid \sigma < \infty] \leq \mathbb{E}[(1 + N)^2], \end{aligned}$$

因此，只需证明 $\mathbb{E}[N] \leq 1$ 和 $\mathbb{E}[N^2] \leq 2$。两者均可由马尔可夫不等式推出：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N] &= \sum_i \mathbb{P}(Y_i > A/\alpha_i) \leq \mathbb{E}[Y_1] \sum_i \frac{\alpha_i}{A} = \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{A}, \\ \mathbb{E}[N^2] &= \sum_i \mathbb{P}(Y_i > A/\alpha_k) + \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(Y_i > A/\alpha_i) \mathbb{P}(Y_j > A/\alpha_j) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{A} + \frac{\mathbb{E}[Y_1]^2}{A^2}. \end{aligned}$$

回顾 $\mathbb{E}[Y_1] = 1$ 和 $A \geq 1$，这就得到了所需的界。 □

4. 定理 2.1 的证明

本节证明定理 2.1。首先回顾一下 [6, 定理 1.1 (ii)] 的相关证明步骤。对于 $t > 1$，定义停时

$$\tau(t) := \inf\left\{n \in \mathbb{N} \colon W_n^\beta \geq t\right\} \tag{4.1}$$

以及 W_n^β 的钉扎版本如下：

$$W_{n,x}^\beta := E^{\mathrm{SRW}}\left[\exp\left(\sum_{t=1}^{n}(\beta\omega_{t,X_t} - \lambda(\beta))\right); X_n = x\right] \tag{4.2}$$

那么，b 利用简单随机游走的马尔可夫性质，我们在 $\{\tau(t) \leq n$ 上写出 $\}$

$$\begin{aligned} W_n^\beta &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} W_{\tau(t),x}^\beta\left(W_{n-\tau(t)}^\beta \circ \theta_{\tau(t),x}\right) \\ &= W_{\tau(t)}^\beta \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{\omega,\tau(t)}^\beta(X_{\tau(t)} = x)\left(W_{n-\tau(t)}^\beta \circ \theta_{\tau(t),x}\right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 $\theta_{k,x}$ 表示环境的时空平移。由 (4.3) 和詹森不等式可得

$$\mathbb{E}\left[\left(W_n^\beta\right)^p \mathbb{I}_{\{\tau(t)=k\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(W_k^\beta\right)^p \mathbb{I}_{\{\tau(t)=k\}}\right]\mathbb{E}\left[\left(W_{n-k}^\beta\right)^p\right]. \tag{4.4}$$

为了继续论证，我们需要对第二个因子给出如下界，该界对 $t > 1$ 和 $p \in [1, 2]$ 一致成立：

$$\mathbb{E}\left[\left(W_k^\beta\right)^p \mathbb{I}_{\{\tau(t)=k\}}\right] \leq Ct^p\mathbb{P}(\tau(t) = k). \tag{4.5}$$

在 [6], 中，假设 $\omega_{t,x} \leq K$ 是为了确保 $(W_k^\beta)^p \leq e^{2\beta K}t^p$ 成立于 $\{\tau(t) = k\}$ 上，也就是说，鞅在停时 $\tau(t)$ 处不会发生太大的超调。

我们使用引理 3.1 替换论证中的这部分。令 c_3 和 A_3 为应用引理 3.1(i)–(ii) 得到的常数。现在，我们分别考虑 $W_k^\beta \leq A_3 t$ 和 $W_k^\beta > A_3 t$ 两种情形，对 (4.5) 左端进行估计。第一种情形很简单：

$$\mathbb{E}\left[\left(W_k^\beta\right)^p \mathbb{I}_{\{\tau(t)=k, W_k^\beta \leq A_3 t\}}\right] \leq (A_3 t)^p\mathbb{P}\left(\tau(t) = k, W_k^\beta \leq A_3 t\right). \tag{4.6}$$

I在第二种情形中，我们考虑给定 F_{k-1} 后的条件期望，得到

$$\mathbb{E}\left[\left(W_k^\beta\right)^p \mathbb{I}_{\{\tau(t)=k, W_k^\beta > A_3 t\}}\right] = \mathbb{E}\left[\left(W_{k-1}^\beta\right)^p \mathbb{I}_{\{\tau(t)>k-1\}}\mathbb{E}\left[\left(W_k^\beta / W_{k-1}^\beta\right)^p \mathbb{I}_{\{W_k^\beta > A_3 t\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_{k-1}\right]\right]. \tag{4.7}$$

我们进一步改写*

$$W_k^\beta / W_{k-1}^\beta = \textstyle\sum_x \alpha_x Y_x \text{ and } \left\{W_k^\beta > A_3 t\right\} = \left\{\sum_x \alpha_x Y_x > A\right\},$$

其中 $\alpha_x := \mu_{\omega,k-1}^\beta(X_k = x)$，$Y_x := e^{\beta\omega_{k,x}-\lambda(\beta)}$ 以及 $A := A_3 t / W_{k-1}^\beta$。然后，注意到

- $(e^{\beta\omega_{k,x}-\lambda(\beta)})_{x\in\mathbb{Z}^d}$ 与 F_{k-1} 相互独立，
- $\mu_{\omega,k-1}^\beta(X_k = x)$ 是定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上的 F_{k-1}-可测概率测度，并且

*在下式中，我们将 $\mu_{\omega,k-1}^\beta$ 视为无限路径空间上的一个测度，而与环境的相互作用仅限于时间区间 $[0, k-1]$。

- $t/W_{k-1}^{\beta} \geq 1$ on $\{\tau(t) > k-1\}$,

我们可以在 $\mathbb{P}(\cdot \mid \mathrm{F}_{k-1})$ 下应用引理 3.1，得到

$$\mathbb{E}\Big[\big(W_k^{\beta}/W_{k-1}^{\beta}\big)^p {}_{\mathbb{I}\{W_k^{\beta} > A_3 t\}} \;\Big|\; \mathcal{F}_{k-1} \Big] \leq c_3 \big(A_3 t/W_{k-1}^{\beta}\big)^p \mathbb{P}\Big(W_k^{\beta}/W_{k-1}^{\beta} > A_3 t/W_{k-1}^{\beta} \;\Big|\; \mathcal{F}_{k-1} \Big).$$

将其代入 (4.7) 得

$$\mathbb{E}\Big[\big(W_k^{\beta}\big)^p {}_{\mathbb{I}\{\tau(t)=k, W_k^{\beta} > A_3 t\}} \Big] \leq c_3 A_3^2 t^p \mathbb{P}(\tau(t) = k, W_k^{\beta} > A_3 t). \tag{4.8}$$

将此上界与 (4.6) 结合，我们得到 (4.5)，因此可以重复 [6, eq.(20)] 中的论证。由于 [6, 定理 2.1 (ii)] 的证明中其他部分不依赖有界性假设，同样的论证即可证明定理 2.1。

5. 关于条件 1 的讨论

本节讨论条件 1。首先，尽管它看起来很自然，但一般而言并不成立。例如，若 ω 的支撑为 $\{k^2\}_{k\in\mathbb{N}}$，那么无论 ω 的分布具体形式如何，我们都有

$$\mathbb{E}\big[e^{\beta\omega} \;\big|\; \omega > k^2 \big] = \mathbb{E}\big[e^{\beta\omega} \;\big|\; \omega \geq (k+1)^2 \big] \geq e^{\beta(k+1)^2}$$

因此条件 1 不成立。

接下来，我们看到，在单侧尾部正则性假设下，条件 1 成立；而在尾部满足某些上界和下界时，该假设成立。

命题 5.1。 设 ω 为一个实值随机变量。

(i) 假设存在 $K > 0$ 和 $M > 2\beta$，使得

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{y\geq K} \frac{\mathbb{P}(\omega > x+y) e^{My}}{\mathbb{P}(\omega > x)} < \infty. \tag{5.1}$$

则条件 *1* 成立。

(ii) 假设存在 $c > 0$ 和一个凸函数 f，满足 $\lim_{x\to\infty} {}^{f(x)\,x} = \infty$，使得对于足够大的 x，

$$c^{-1} e^{-f(x)} \leq \mathbb{P}(\omega > x) \leq c e^{-f(x)}. \tag{5.2}$$

则对 β 的所有取值，条件 *1* 均成立。

(iii) 假设存在 $c > 0$ 和一个递增函数 f，满足 $f(x+y) \geq f(x)\, f(y)$，使得对于足够大的 x，

$$c^{-1} e^{-c f(x)} \leq \mathbb{P}(\omega > x) \leq c e^{-f(x)/c}. \tag{5.3}$$

那么，对于所有的 β 值，条件 *1* 均成立。

该命题涵盖了许多常用分布。

- 如果 ω 具有对数凹勒贝格密度，那么 $x \mapsto \mathbb{P}(\omega > x)$ 也具有对数凹性（见 [7, 定理 2]），因此 (5.2) 在 $f(x) := -\log \mathbb{P}(\omega > x)$ 的条件下成立。另请注意，$\lim_{x\to\infty} {}^{f(x)\,x} = \infty$ 已可由 (1.1) 得出。例如，这涵盖~~子~~高斯分布或威布尔分布（其中 $\mathbb{P}(\omega > x) = c e^{-c, x^{\alpha}}$ 对于 $\alpha > 1$）。
- 对于泊松分布，直接验证 (5.1) 并不困难。
- （负）冈贝尔分布，其中 $\mathbb{P}(\omega > x) = \exp(-e^{(x-c)/c},)$，还满足（5.3）。更一般地，我们可以在（5.3）中取 $f(x) = e^{x^{\alpha}}$，其中 $\alpha \geq 1$。

证明。 **(i) 部分**：根据（5.1），存在 $K > 0$、 $M > 2\beta$、 $A_0 > 1$ 和 $C > 0$，使得对于 $y \geq K$、$A > A_1$ 和 $u > K + A$,

$$\mathbb{P}(\omega > u) \leq C\mathbb{P}(\omega > A)e^{-Mu+MA}.$$

因此，对于 $A \geq A_1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{2\beta\omega}\mathbb{I}^{\omega>A}] &\leq \mathbb{P}(\omega > A)e^{2\beta(A+K)} + \mathbb{E}[e^{2\beta\omega}\mathbb{I}^{\omega>A+K}] \\
&= \mathbb{P}(\omega > A)e^{2\beta(A+K)} + \int_{e^{2\beta(A+K)}}^{\infty} \mathbb{P}(\omega > \log(t)/2\beta)\mathrm{d}t \\
&\leq \mathbb{P}(\omega > A)\Big(e^{2\beta(A+K)} + Ce^{MA}\int_{e^{2\beta(A+K)}}^{\infty} e^{-M\log(t)/2\beta}\mathrm{d}t\Big) \\
&= \mathbb{P}(\omega > A)\Big(e^{2\beta(A+K)} + \frac{C}{M/2\beta - 1}e^{MA}e^{2\beta(A+K)(1-M/2\beta)}\Big) \\
&=: c_3\mathbb{P}(\omega > A)e^{2\beta A},
\end{aligned}$$

其中我们 使用了假设 $M > 2\beta$，以确保最后一个积分的收敛 1.

对于**第 (ii) 部分**，现在只需验证 (5.1)。凸性和关于超线性增长的假设意味着存在 $x_0 > 0$，使得右导数 $D_+f(x_0) \geq 3\beta$。于是，对于 $x \geq x_0$和 $y > 0$，我们有 $f(x + y) - f(x) \geq 3\beta y$，从而

$$\frac{\mathbb{P}(\omega > x + y)}{\mathbb{P}(\omega > x)} \leq c^2e^{-(f(x+y)-f(x))} \leq c^2e^{-3\beta y}.$$

这就推出 (5.1)。

对于**第 (iii) 部分**，注意到根据超可加定理，存在 $C > 0$，使得 $f(x) \geq e^{Cx}$，因此对于 $y > 2\log(c)/C$ 以及足够大的 x，

$$\frac{\mathbb{P}(\omega > x + y)}{\mathbb{P}(\omega > x)} \leq c^2\exp\Big(-f(x)\Big(\frac{f(x+y)}{cf(x)} - c\Big)\Big) \leq c^2e^{-f(x)(f(y)/c-c)} \leq c^2e^{-3\beta y}.$$

这再次推出 (5.1)，证毕。 □

注 5.2。在第5节中，我们用随机变量 $Y := e^{\beta\omega-\lambda(\beta)}$ 来重新表述条件 1。由于一些作者将其 Y 用作定向聚合物模型中的随机势（例如，参见 [4, 8]），因此重新表述 (5.1) 或许也会有意义，其形式为

$$\text{there exist } K > 1 \text{ and } M > 2 \text{ such that } \limsup_{y\to\infty}\sup_{\lambda\geq K}\lambda^M\frac{\mathbb{P}(Y > \lambda y)}{\mathbb{P}(Y > y)} < \infty. \tag{5.4}$$

这是一个单侧正则变分条件。例如，它出现在 [1, 定理2.0.1]中；考察其证明可知，(5.4) 可由下式推出

$$\text{there exist } K > 1, M > 2 \text{ and } \rho < K^{-M} \text{ such that } \sup_{\lambda\in[K,K^2]}\limsup_{y\to\infty}\frac{\mathbb{P}(Y > \lambda y)}{\mathbb{P}(Y > y)} < \rho. \tag{5.5}$$

有许多分布满足（5.4）。例如，如果存在 c， $C > 0$ 和 $\gamma > 0$使得

$$c\exp(-Cy^\gamma) \leq \mathbb{P}(Y > y) \leq C\exp(-cy^\gamma) \tag{5.6}$$

对所有充分大的 y均成立，则

$$\frac{\mathbb{P}(Y > \lambda y)}{\mathbb{P}(Y > y)} \leq \frac{C}{c} \exp(-(c\lambda^{\gamma} - C)y^{\gamma}),$$

并且（5.4）得证。对于将（5.6）中的 y^{γ} 替换为 $\exp(y^{\gamma})$（$\gamma > 0$）或 $\exp(\log^{\alpha} y)$（$\alpha > 1$）的情形，也可采用类似的论证。

致谢

本研究得到科学研究费助成事业（KAKENHI）21K03286、22H00099 和 18H03672 的资助。

参考文献

[1] N. H. Bingham、C. M. Goldie 和 J. L. Teugels。《正则变差》，《数学及其应用百科全书》第 27 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1987 年。[2] Francis Comets、志贺德造和吉田信夫。随机环境中的定向高分子：路径局域化与强无序。《伯努利》，9(4):705–723，2003 年。[3] Francis Comets 和吉田信夫。弱无序下，随机环境中的定向高分子呈扩散行为。《概率年刊》，34(5):1746–1770，2006 年。[4] John Z. Imbrie 和 Thomas Spencer。随机环境中定向高分子的扩散。《统计物理学杂志》，52(3-4):609–626，1988 年。[5] Stefan Junk。弱无序相中定向高分子配分函数的涨落：超越 L^2-相。*arXiv* 预印本arXiv:2202.02907，2022 年。[6] Stefan Junk。有界随机环境中定向高分子弱无序相的新刻画。《数学物理通讯》，389(2):1087–1097，2022 年。[7] András Prékopa。对数凹测度及其在随机规划中的应用。《数学科学学报》，32:301–316，1971 年。[8] Timo Seppäläinen。具有边界条件的一维定向聚合物的标度。《概率年刊》，40(1):19–73，2012 年。

筑波大学数学系，茨城县筑波市天王台1-1-1，邮编305–8571，日本电子邮箱：ryoki@math.tsukuba.ac.jp 东北大学先进材料研究所数学组，青叶区片平2-1-1，仙台，邮编980-8577，日本电子邮箱：sjunk@tohoku.ac.jp