arXiv:2303.01924v2 [math.SP] 3 Jul 2023

¨紧致度量图上带有 δ 和 δ' 耦合的薛定谔算子谱理论：综述

JONATHAN ROHLEDER 和 CHRISTIAN SEIFERT

Abstract. 本文研究紧致度量图上薛定谔算子的谱性质，并特别关注不同类别顶点条件在谱行为上的差异。我们综述了近期研究成果，尤其是关于 δ 和 δ' 耦合的成果，并通过大量实例展示其谱性质。除此之外，我们还考察了基态特征值与特征函数的性质，以及度量图或顶点条件受到各种扰动时的谱行为。

1. Introduction

过去三十年来，人们对度量图（即所谓的量子图）上的微分算子进行了广泛研究。度量图为准一维结构网络（如纳米管或波导）提供了有效的一维模型，参见例如综述中的 [14, 第 7.6] 节。此外，由于边上的一维特性，度量图模型易于处理；与此同时，顶点处的耦合又使度量图呈现出非平凡的行为。

迄今已有大量文献研究度量图上的自伴薛定谔算子，非穷尽性的文献列表见 [14, 45, 46, 47, 48, 49, 58, 66] ；此外，其他类型的算子也得到研究，例如一阶算子[17, 70, 73], 、与度量图上扩散过程相关的算子 [31, 32, 40, 71]„ 以及高阶算子，参见例如 [5, 10, 24,25, 54, 59, 72]。此外，文献中还出现了对度量图上某些非自伴算子的描述及其谱估计 [6, 30]。除了度量图上的这些连续模型之外，作用于离散图顶点上的差分算子也有着悠久的研究历史，而且度量图上的算子与离散图上的算子之间存在密切联系，参见 [9, 20, 22, 41, 42],；关于离散图上算子的全面综述，另见 [35] 。

本文着重研究薛定谔算子

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q$$

作用于度量图的各条边上，配备实值势 q以及适当的顶点条件；详情请参见第 2 节。我们将允许一般的自伴顶点条件，但通常尤其关注 δ 和 δ' 顶点

Date: 2023年7月4日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：47D08、34L40、35P05；次要分类：81Q10。*Key words and phrases.* 度量图、量子图、薛定谔算子、特征值、手术原理。本文基于 COST行动18232 MAT-DYN-NET 的研究工作，并由欧洲科学技术合作组织（COST）提供支持， www.cost.eu。J.R. 感谢瑞典研究理事会（VR）资助，项目编号为 2022-03342。作者感谢 James B. Kennedy 提供了一些有益的意见。

条件；最著名的连续性-基尔霍夫（也称为标准或诺伊曼）顶点条件是前述第一类条件的特例，而其对偶对应——反基尔霍夫条件——属于第二类。

度量图上 Schr¨odinger 算子的许多非平凡行为特性，都可以从谱理论的角度加以研究。近年来，人们从多个方面对其进行了探讨，例如谱估计、特征函数的性质、逆问题或等谱性问题，参见 [1, 2, 4, 12, 15, 16, 18, 22, 26, 27, 28, 38, 39, 43, 44, 56, 61, 62, 64, 65] 了解近期的一些进展。

近年来，度量图的几何操作对 Schr¨odinger 算子特征值的影响受到了广泛关注。这主要是因为，所谓的手术原理已被证明是获取特征值界和证明等周不等式的有力工具[3, 11, 12, 18, 19, 37, 53, 55, 57, 60, 62, 67, 68]。

本文综述度量图上自伴薛定谔算子谱理论的不同方面。尽管本文介绍的一些结果适用于一般的自伴顶点条件，但在许多情况下，我们着重比较 δ 和 δ' 顶点条件。除此之外，我们还重点关注手术原理的影响。这些原理基本上可分为两类：一类是改变图的总长度的操作，例如

- 增加一条或所有边的长度，
- 添加一条新边或连接另一张图，
- 将另一张图插入一个顶点，
- 将某些边长缩短至零。

另一类则是保持图的总长度不变的手术操作，例如

- 改变顶点处的耦合条件或其强度，
- 连接顶点，
- 展开平行边或悬挂边。

此外，我们研究基态特征值及其对应特征函数的性质，这些性质尤其有助于上述手术原理的应用。此外，我们还讨论带有 δ 和 δ' 顶点条件的拉普拉斯算子的最低特征值的界，其中上述某些手术原理可以发挥作用。

本文主要是一篇综述。许多结果以此类或类似形式取自近期文献，尽管在某些情况下我们给出了略微的推广和修改后的证明。不过，我们还通过一些适度的补充完善了这些结果，例如定理 4.13 或定理5.4，以及一系列富有启发性的例子和反例。此外，我们还提出了一些开放问题。

下面概述本文的内容。第2节介绍度量图及其上的薛定谔算子的设置，并汇集所需的谱理论基本知识。第3节聚焦于基态特征值和特征函数。接下来的各节讨论手术原理，分为第4节和第5节：前者讨论可能改变总长度的图修改，后者讨论保持总长度不变的图修改。第6节给出Hadamard型变分公式，用以描述模型数据变化时谱数据的变化（此处我们关注单特征值）；具体而言，我们考虑耦合条件的变化。最后，在第7节中，我们作为应用讨论若干关于 δ 和 δ' 顶点条件下最低特征值的界。

2. Schrödinger operators on metric graphs

2.1. 度量图。设 Γ 为一个度量图，由有限顶点集$\mathcal{V}:=\mathcal{V}(\Gamma)$、有限边集 $\mathcal{E}:=\mathcal{E}(\Gamma)$以及长度函数 $L\colon\ \mathcal{E}\to(0,\infty)$构成。将每条边 $e\in\mathcal{E}$ 参数化为区间 $[0,L(e)]\subseteq\mathbb{R}$，并将Γ 视为由区间 $[0,L(e)]_e\in\mathcal{E}$组成的一维单纯复形，在顶点处施加相应的耦合后，Γ 便成为一个紧致度量空间；我们将这样的 Γ 称为紧致度量图。对于每个顶点 $v\in\mathcal{V}$，记与 v 相接的边的集合为 $\mathcal{E}_v\subseteq\mathcal{E}$，并以deg($v$)表示 v的度。根据我们的参数化，若 v 分别对应端点0或 $L(e)$，我们就记作 $v=o(e)$或 $v=t(e)$，并分别称边 e 从顶点 v出发或终止于该顶点。我们将用

$$L^2(\Gamma):=\bigoplus_{e\in\mathcal{E}}L^2(0,L(e))$$

通常的 L^2 空间于 Γ，以及

$$\widetilde{H}^k(\Gamma):=\bigoplus_{e\in\mathcal{E}}H^k(0,L(e))$$

基于 L^2 的 $k\in\mathbb{N}$ 阶 Sobolev空间。对于 $f\in L^2(\Gamma)$ 和 $e\in\mathcal{E}$，我们用 f_e 表示 f 在边 $e\in\mathcal{E}$ 上的限制（即区间 $(0,L(e))$，对应于 e）。

2.2. 度量图上的薛定谔算子。本文聚焦于 $L^2(\Gamma)$ 中满足顶点处自伴耦合条件的自伴薛定谔算子；也就是说，我们考虑作用于 $L^2(\Gamma)$ 中的薛定谔算子，其作用形式为

$$(\mathcal{L}f)_e:=-f_e''+q_ef_e,\quad e\in\mathcal{E},\tag{2.1}$$

其势为实值势 $q=(q_e)_{e\in\mathcal{E}}$，其中我们假设 $q\in L^\infty(\Gamma)$。这一假设是为了简化讨论；本综述讨论的许多结果自然也适用于更广泛的势类，例如 $L^1(\Gamma)$。

接下来，我们指定顶点条件，使得 $\mathcal{L}$ 构成一个自伴算子。对于 $v\in\mathcal{V}$，设 $\{e_1,\dots,e_l\}:=\{e\in\mathcal{E}_v\colon\ v=o(e)\}$ 和 $\{e_{l+1},\dots e_m\}:=\{e\in\mathcal{E}_v\colon\ v=t(e)\}$ 分别是从 v 出发和终止于 v 的边集的枚举。注意，在边 e 是一个环的特殊情况下，即 $\widetilde{\ }(e)=t(e)$，e 将同时属于这两个集合。对于 $f\in H^1(\Gamma)$，我们记

$$F(v):=\begin{pmatrix}f_{e_1}(0)\\ \vdots\\ f_{e_l}(0)\\ f_{e_{l+1}}(L(e_{l+1}))\\ \vdots\\ f_{e_m}(L(e_m))\end{pmatrix}$$

表示 f 在 v 处限制到相邻边上的边界值集合。此外，对于 $f\in\widetilde{H}^2(\Gamma)$，我们记

$$F'(v):=\begin{pmatrix}f'_{e_1}(0)\\ \vdots\\ f'_{e_l}(0)\\ -f'_{e_{l+1}}(L(e_{l+1}))\\ \vdots\\ -f'_{e_m}(L(e_m))\end{pmatrix},$$

表示 f 在 v 处沿着从 v 指向边外部的方向的导数集合。以下关于 $L^2(\Gamma)$ 中具有局部耦合条件的 $\mathcal{L}$ 的所有自伴实现的描述是标准的。

命题 2.1（例如 [14, 定理 1.4.4]）。设 Γ 为紧致度量图，$q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实值函数，且 $\mathcal{L}$ 为式 (2.1) 中的 Schr¨odinger 微分表达式。对每个顶点 $v \in \mathcal{V}$，设 $P_{v,\,\mathrm{D}}$、$P_{v,\,\mathrm{N}}$ 和 $P_{v,\,\mathrm{R}}$ 为 $\mathbb{C}^{\deg(v)}$中的正交投影，且其值域两两正交，并满足 $P_{v,\,\mathrm{D}} + P_{v,\,\mathrm{N}} + P_{v,\,\mathrm{R}} = I$；再设 Λ_v 为 $\mathrm{ran} P_{v,\,\mathrm{R}}$中的自伴可逆算子。那么，$H$ 中由下式给出的算子 $L^2(\Gamma)$

$$\begin{aligned} Hf &:= \mathcal{L}f, \\ \operatorname{dom} H &:= \Big\{ f \in \widetilde{H}^2(\Gamma) : P_{v,\mathrm{D}} F(v) = 0, P_{v,\mathrm{N}} F'(v) = 0, \\ &\qquad P_{v,\mathrm{R}} F'(v) = \Lambda_v P_{v,\mathrm{R}} F(v) \text{ for each } v \in \mathcal{V} \Big\}, \end{aligned}$$

是自伴的（并且，满足局部耦合条件的 $\mathcal{L}$ 在 $L^2(\Gamma)$ 中的每个自伴实现都可以写成这种形式）。此外，根据例如 [34, 第 VI 章定理 2.1]，与算子 H 对应的闭二次型 h 由下式给出

$$\begin{aligned} h(f) &:= \int_\Gamma |f'|^2 + \int_\Gamma q|f|^2 + \sum_{v \in \mathcal{V}} \big\langle \Lambda_v P_{v,\mathrm{R}} F(v), P_{v,\mathrm{R}} F(v) \big\rangle, \\ \operatorname{dom} h &:= \Big\{ f \in \widetilde{H}^1(\Gamma) : P_{v,\mathrm{D}} F(v) = 0 \text{ for each } v \in \mathcal{V} \Big\}. \end{aligned}$$

根据标准的紧嵌入论证，哈密顿算子 H在紧致度量图 Γ 上的谱始终是纯离散的，并且有下界，参见例如 [48, 推论 10 和定理 18]。我们记

$$\lambda_1(H) \leq \lambda_2(H) \leq \dots$$

特征值 H 按非递减顺序排列，并按重数计数。若$q \geq 0$ 和 Λ_v 对于每个顶点 v 都是非负的，则所有特征值都是非负的。我们将频繁使用以下事实：这些特征值可通过极小极大原理表示为

$$\lambda_k(H) = \min_{\substack{F \subseteq \operatorname{dom} h \\ \dim F = k}} \max_{\substack{f \in F \\ f \neq 0}} \frac{h(f)}{\int_\Gamma |f|^2}$$

对于 $k = 1$、2、.....。

我们将特别强调所谓的 δ 和 δ' 耦合条件及其特殊变体，即连续性-基尔霍夫条件和反基尔霍夫条件。为在命题 2.1 的框架内规定这些条件，对于 $d \in \mathbb{N}$ 我们记

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & \cdots & \frac{1}{d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{d} & \cdots & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathcal{Q} := \mathcal{Q}_d = \begin{pmatrix} \frac{d-1}{d} & -\frac{1}{d} & \cdots & -\frac{1}{d} \\ -\frac{1}{d} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{d} \\ -\frac{1}{d} & \cdots & -\frac{1}{d} & \frac{d-1}{d} \end{pmatrix}$$

分别表示到 $\mathrm{span}\{(1, 1, \dots, 1)^\top\}$ 的正交投影，以及到其正交补空间 $(\mathrm{span}\{(1, 1, \dots, 1)^\top\})^\perp$的正交投影。

定义 2.2. 设 $v \in \mathcal{V}$ 和 $d := \deg(v) > 0$。那么，v处的顶点条件称为

（a）若 $P_{v,\mathrm{D}} = \mathcal{Q}$, $P_{v,\mathrm{N}} = \mathcal{P}$ 且 $P_{v,\mathrm{R}} = 0$，则为连续性-基尔霍夫条件；（b）若 $P_{v,\,\mathrm{D}} = \mathcal{Q}$, $P_{v,\mathrm{N}} = 0$, $P_{v,\mathrm{R}} = \mathcal{P}$ 且 Λ_v 为乘以 $\frac{\alpha_v}{d}$ 的运算，则为强度为 $\alpha_v \in \mathbb{R}$ 的 δ 耦合条件；

（c）若 $P_{v,\mathrm{N}}=\mathcal{Q}$, $P_{v,\mathrm{D}}=\mathcal{P}$ 且 $P_{v,\mathrm{R}}=0$，则为反基尔霍夫条件；（d）若 $P_{v,\mathrm{N}}=\mathcal{Q}$, $P_{v,\mathrm{D}}=0$,$P_{v,\mathrm{R}}=\mathcal{P}$ 且 Λ_v 为乘以 $\frac{d}{\beta_v}$ 的运算，则为强度为 $\beta_v\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 的 δ' 耦合条件。

定义 2.2 中给出的顶点条件可以更明确地写出。事实上， f 满足顶点 v 处强度为 α_v 的 δ 顶点条件，当且仅当$F(v)$等于一个常向量，我们将其值记为 $f(v)$，并且

$$\sum_{j=1}^{\deg(v)} F_j'(v)=\alpha_v f(v).$$

特别地，连续性-Kirchhoff 耦合条件等同于强度为 $\alpha_v=0$的 δ 耦合条件。另一方面，形式上令 $\alpha_v=\infty$ ，则在 v处得到狄利克雷条件，即 $f(v)=0$。

此外， f 满足 v 处强度为 β_v 的 δ' 耦合条件，当且仅当 $F'(v)$等于一个常向量，我们将其值记为 $f'(v)$，并且

$$\sum_{j=1}^{d} F_j(v)=\beta_v f'(v).$$

特别地，反基尔霍夫耦合条件可以解释为强度为 $\beta_v=0$的 δ' 耦合条件。形式上令 $\beta_v=\infty$ ，则在 v处得到诺伊曼条件，即 $f'(v)=0$。

对于 δ和 δ'耦合，命题 2.1 中二次型 h 的顶点项如下所示。

引理 2.3（例如 [69, 引理 2.5]）。设 Γ 为紧致度量图，设 H 为命题 2.1 中的自伴薛定谔算子，作用于 $L^2(\Gamma)$，并设 h为相应的二次型。此外，设 $v\in\mathcal{V}$ ，且 H 在 v 处的顶点条件由 $P_{v,\mathrm{D}}$,$P_{v,\mathrm{N}}$,$P_{v,\mathrm{R}}$ 和 Λ_v给出。则对每个 $f\in\operatorname{dom}h$，以下断言均成立。

(i) 若在 v处施加连续性-基尔霍夫条件，则 f 在 v 处连续，且

$$\big\langle \Lambda_v P_{v,\mathrm{R}}F(v), P_{v,\mathrm{R}}F(v)\big\rangle=0.$$

(ii) 若在 v处施加强度为 α_v 的 δ 耦合条件，则 f 在 v 处连续，且

$$\big\langle \Lambda_v P_{v,\mathrm{R}}F(v), P_{v,\mathrm{R}}F(v)\big\rangle=\alpha_v|f(v)|^2.$$

(iii) 若在 v处施加反基尔霍夫条件，则$\sum_{j=1}^{\deg(v)} F_j(v)=0$ 且

$$\big\langle \Lambda_v P_{v,\mathrm{R}}F(v), P_{v,\mathrm{R}}F(v)\big\rangle=0.$$

（iv）如果在 v 处施加了强度为 β_v 的 δ' 耦合条件，那么 f 在 v 处不满足任何顶点条件，并且

$$\big\langle \Lambda_v P_{v,\mathrm{R}}F(v), P_{v,\mathrm{R}}F(v)\big\rangle=\frac{1}{\beta_v}\Big|\sum_{j=1}^{\deg(v)} F_j(v)\Big|^2.$$

3. Properties of the ground state

本节回顾在每个顶点均施加相同耦合条件（即 δ 或 δ'）时，第一特征值及其对应特征函数的性质。

3.1. 第一特征函数的正性。这里我们讨论具有 δ 和 δ' 顶点条件的量子图的佩龙-弗罗贝尼乌斯（或 Courant）型性质。例如，对于具有适当边界条件的欧几里得区域上的 Schr¨odinger 算子，众所周知，第一特征值是单重的，且相应的特征函数可以取为正值。事实证明，这对 δ耦合条件成立，但对于 δ' 条件则不再成立，正如下文所见。

下面的定理对应于 [21, 定理 3.2], , 另见 [52, 推论1]; 为方便读者，我们给出证明。

定理 3.1. 设 Γ 为连通紧致度量图，设 $q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实值函数，且设 H 为定义在 Γ 上的薛定谔算子，其定义见命题 2.1，并假设在所有顶点处均施加了 δ 耦合条件。则与第一特征值 $\lambda_1(H)$ 对应的 H 特征空间是一维的。此外，对应的特征函数在 Γ 上没有零点，因此可以选取为正函数。

证明. 设 $f \in \ker(H - \lambda_1(H))$, $f \neq 0$, 并令 $g := |f|$。则 $|g'| \leq |f'|$，因此

$$\begin{aligned} h(g) &= \int_\Gamma |g'|^2 + \int_\Gamma q|g|^2 + \sum_{v\in\mathcal{V}} \alpha_v |g(v)|^2 \\ &\leq \int_\Gamma |f'|^2 + \int_\Gamma q|f|^2 + \sum_{v\in\mathcal{V}} \alpha_v |f(v)|^2 = h(f), \end{aligned}$$

由于 f 使瑞利商达到最小值， g也如此。因此 g 是 $\ker(H - \lambda_1(H))$ 的非零元素；特别地， g 满足 δ 耦合条件。注意， g 在任何顶点处都不为零。事实上， $g(0) = 0$，且耦合条件意味着

$$\sum_{j=1}^{\deg(v)} G'_j(v) = 0,$$

并且由于 g 在 v 处为零且处处非负，因此对每条与 v相邻的边 e，都有 $g'_e(v) = 0$。特别地， g 在每条与 v相邻的边上均为零，因此对每个通过一条边与 v 相连的顶点 w，都有 $g(w) = 0$。依次重复同样的论证可得， $g = 0$ 在 Γ 上恒为零，因为 Γ 是连通的，这就产生了矛盾。由于 Γ 上的每个非顶点点都可视为一个度为二、配备强度为零的 δ 条件的顶点，因此 g 在 Γ上没有零点，这意味着任意选取的特征函数 f 都没有零点。

最后，若存在两个线性无关的特征函数 f、k，则对任意选定的 $x_0 \in \Gamma$，函数

$$f - \frac{f(x_0)}{k(x_0)} k$$

属于 $\ker(H - \lambda_1(H))$，非平凡且在 x_0处为零，这就产生了矛盾。因此 $\ker(H - \lambda_1(H))$ 是一维的。□

δ' 耦合条件的情况从根本上有所不同，以下示例将对此进行说明。

例3.2. 考虑一个三臂星形图，它由三份区间 $[0, 1]$组成，并在各自的零端点处相互耦合，见图1。若在度为一的顶点处施加诺伊曼边界条件（可视为强度为 ∞ 的 δ' 条件），并在度为三的顶点处施加强度为 $\beta \geq 0$ 的 δ' 耦合条件，则相应的拉普拉斯算子 H 的二次型非负，即 $\lambda_1(H) \geq 0$。此外，函数 f 在其中一条

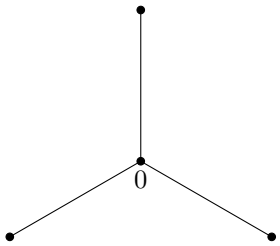


FIGURE 1. 等边三叉星形图。

边上恒等于 1，在另一条边上恒等于 -1，在剩余的一条边上恒等于零，并满足所有施加的顶点条件。由于每条边上 $f''=0$，有 $f\in\ker(H-\lambda_1(H))=\ker H$。但是 f 在一条边上为正，在另一条边上为负，也就是说，存在符号不固定的基态特征函数，甚至可以在整条边上恒为零。此外，通过交换各边的角色可知，特征空间是二维的。

关于允许基态特征函数具有唯一性和正性的更广泛一类顶点条件的研究，请读者参阅 [52]。

3.2. 负特征值的存在性。对于满足 δ 或 δ' 顶点条件的量子图，一个负耦合系数的存在并不一定意味着最低特征值为负；参见下文例 3.6。下面给出负特征值存在的充分条件。

定理 3.3. 设 Γ 为紧致度量图，且 H 为作用于 Γ 上的自伴薛定谔算子，如命题 2.1 中所定义。在每个顶点 $v\in\mathcal{V}$ 处施加强度为 α_v 的 δ 耦合条件。若

$$\int_\Gamma q+\sum_{v\in\mathcal{V}}\alpha_v<0,$$

则 $\lambda_1(H)<0$。

证明。将常值函数 $f=1$ 代入二次型可得

$$\begin{aligned}h(f)&=\int_\Gamma|f'|^2+\int_\Gamma q|f|^2+\sum_{v\in\mathcal{V}}\alpha_v|f(v)|^2\\&=\int_\Gamma q+\sum_{v\in\mathcal{V}}\alpha_v<0.\end{aligned}$$

这意味着 $\lambda_1(H)<0$。 □

对于 δ' 耦合，可以给出负特征值存在性的一个更局部化条件。

定理 3.4。设 Γ 为一个紧致度量图，H 为 Γ 上的自伴薛定谔算子 Schr ¨odinger，如命题 2.1 中所定义。假设在每个顶点 $v\in\mathcal{V}$ 处施加一个强度为 β_v 的 δ'耦合条件。若对于某条边 e_0，

$$\int_{e_0}q+\frac{1}{\beta_{o(e_0)}}+\frac{1}{\beta_{t(e_0)}}<0,$$

那么 $\lambda_1(H)<0$。

证明。这次我们可以使用在 e_0上恒等于一、在其他地方为零的函数 f。那么 f 属于 $\operatorname{dom} h$，并且

$$\begin{aligned} h(f) &= \int_\Gamma |f'|^2 + \int_\Gamma q|f|^2 + \sum_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\beta_v}\Big|\sum_{j=1}^{\deg(v)} F_j(v)\Big|^2 \\ &= \int_{e_0} q + \frac{1}{\beta_{o(e_0)}} + \frac{1}{\beta_{t(e_0)}} < 0. \end{aligned}$$

因此 $\lambda_1(H) < 0$。 □

例 3.5. 设 Γ 是一个连通紧致度量图，H 是定义在 Γ 上的拉普拉斯算子（即势恒为零的薛定谔算子），并且在每个顶点 v处都满足 δ' 耦合条件，其中 $\beta_v = 1$ 对所有 $v \neq v_0$ 和 $\beta_{v_0} = -1/2$均成立，这里选定一个顶点 v_0。若 e_0 是与 v_0相 incident 的任意一条边，则

$$\frac{1}{\beta_{o(e_0)}} + \frac{1}{\beta_{t(e_0)}} = -2 + 1 < 0.$$

因此，定理 3.4 给出 $\lambda_1(H) < 0$。

下面的例子表明，对于 δ 顶点条件，类似的条件不足以保证负特征值的存在。

例 3.6. 设 Γ 是任意一个紧致度量图。再次考虑 $q = 0$恒为常数的情形，并假设在每个顶点 $v \in \mathcal{V}$ 处都施加一个强度为α_v 的 δ 耦合条件。假设对于某个 $v_0 \in \mathcal{V}$，$\alpha_{v_0} < 0$，而其余的 α_v 均为正。我们的目的是证明，对于所有满足 $h = \widetilde{H}^1(\Gamma)$ 的 $f \in$，只要假定α_{v_0} 足够接近零（相对于其相邻边的长度而言），就有 $h(f) \geq 0$。事实上，将顶点 v_0 处的耦合系数 α_{v_0} 替换为零后，由 H 得到的薛定谔算子 H $\lambda_1(H) > 0$。由于特征值 $\lambda_1(H)$关于耦合系数连续依赖，当 $\alpha_{v_0} < 0$ 足够接近零时，$\lambda_1(H) > 0$。

最后指出，文献 [8]研究了具有一般自伴顶点条件的度量图上 Schr¨odinger 算子的负特征值个数；另见 [29]。

4. Graph manipulations changing the total length of the graph

下面我们回顾对给定度量图进行某些几何操作对图上 Schr¨odinger 算子谱的影响。首先讨论改变度量图 Γ总长度的操作，包括增加或缩短一条边或所有边的长度、连接新边或新图，或者在某个顶点处插入图。

4.1. 增加一条边的长度。这里，我们考察增加一条边的长度时特征值的变化。对于满足连续性-基尔霍夫 δ 或狄利克雷顶点条件的拉普拉斯算子，以下定理见文献 [12, 推论 312]。

定理 4.1. 设 Γ 为一个紧致度量图，$q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实值，且 H为作用在 Γ 上、势为 q 并带有任意自伴耦合~条件的薛定谔算子。此外，设 Γ 为由 Γ 通过增加一条边的~长度得到的度量图，即存在 $e_0 \in \mathcal{E}$ 使得 $L(e) = L(e)$ 对于 $e \neq e_0$ 成立，且 ~ ~ ~$L(e_0) > L(e_0)$，其中 L 为 Γ的长度函数。令 $\widetilde{q}_e := q_e$，对于 $e \neq e_0$ 以及

$\widetilde{q}_{e_0}:= q_{e_0}(\frac{L_{(e_0)}}{\widetilde{L}_{(e_0)}}\cdot)$。记 $\widetilde{H}$为作用在 $\widetilde{\Gamma}$ 上、势为 $\widetilde{q}$且配备与 H相同耦合条件的薛定谔算子。则

$$\lambda_k(\widetilde{H}) \le \lambda_k(H)$$

对所有满足 $k \in \mathbb{N}$ (λ_k) H 的 ≥ 0 都成立。若所有耦合条件均为 δ 型，且 $\lambda_1(H)$ > 0，即谱为正，则

$$\lambda_1(\widetilde{H}) < \lambda_1(H).$$

~证明。设 h 是与 H 关联的二次型， h 是与 H 关联的二次型~；参见命题 2.1。取满足 $\lambda_k(H) \ge 0$ 的 $k \in \mathbb{N}$，并设$F \subseteq \operatorname{dom} h$ 是一个 k 维子空间，使得

$$h(f) \le \lambda_k(H) \int_\Gamma |f|^2 \quad \text{for all } f \in F.$$

~ ~ ~设 $x_0 \in [0, L(e_0)]$。对每个 $f \in F$，在 Γ 上定义函数 f 如下： f_e : $= f_e$，其中 $e \ne e_0$，并且

$$\widetilde{f}_{e_0}(x) := \begin{cases} f_{e_0}(x), & x \in [0, x_0], \\ f_{e_0}(x_0), & x \in (x_0, x_0 + \widetilde{L}(e_0) - L(e_0)], \\ f_{e_0}\big(x - (\widetilde{L}(e_0) - L(e_0))\big), & x \in (x_0 + \widetilde{L}(e_0) - L(e_0), \widetilde{L}(e_0)]. \end{cases}$$

~ ~ ~ ~于是对每个 $v \in \mathcal{V}$，都有 $F(v) = F(v)$；特别地， $f \in \operatorname{dom} h, h$ $(f) = h(f)$。此外，

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} |\widetilde{f}|^2 = \int_\Gamma |f|^2 + (\widetilde{L}(e_0) - L(e_0))|f_{e_0}(x_0)|^2 \ge \int_\Gamma |f|^2, \quad f \in F. \tag{4.1}$$

~ ~对于所有满足 $h(f) < 0$ 的 $f \in F$，显然有 $\frac{h(f)}{\int_{\widetilde{\Gamma}} |\widetilde{f}|^2} < 0 \le \lambda_k(H)$；而对于所有满足 $h(f) \ge 0$ 的 $f \in F$，可得

$$\frac{\widetilde{h}(\widetilde{f})}{\int_{\widetilde{\Gamma}} |\widetilde{f}|^2} \le \frac{h(f)}{\int_\Gamma |f|^2} \le \lambda_k.$$

~因此 $\lambda_k(H) \le \lambda_k(H)$。

如果每个顶点都配备一个 δ 耦合条件，那么 $\ker(H - \lambda_1(H))$ 是一维的，且相应的特征函数在 Γ 上没有零点，参见~定理 3.1。特别地， $f_{e_0}(x_0) \ne 0$，而 (4.1) 意味着 $\int_{\widetilde{\Gamma}} |f|^2 > \int_\Gamma |f|^2$。因此，~如果 $\lambda_1(H) > 0$，那么 $\lambda_1(H) < \lambda_1(H)$。□

对于某些耦合条件，例如 δ 或 δ' 耦合，上述定理将特征值限制为非负是必要的，以下例子对此作了说明（另见 [21, 定理 4.1 和第 5] 节）。

例 4.2. 考虑一个环图，即由一个顶点 v 和一条长度为 L 的边 e 构成的图: $= L$ (e) 从 v 出发并终止于 v，见图 2。在 v 处施加强度为 α 的 δ 耦合条件: $= \alpha_v < 0$。于是

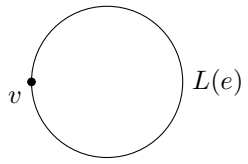


FIGURE 2. 环图。

H 的唯一负特征值为数值 $\lambda = -k^2$，其中 k 是下列方程的正解

$$2k - \alpha \sinh(kL) - 2k \cosh(kL) = 0,$$

对应的特征函数是 $x \mapsto \sinh(kx)$ 和$x \mapsto \cosh(kx)$ 的线性组合。可以看出，当 L 增大时， k 减小，因此 λ 增大。

δ' 耦合条件也表现出完全相同的行为。在相同设定下，对于强度为 β : $= \beta_v < 0$的 δ' 条件，负特征值由 $\lambda = -k^2$ 给出，其中 k 是以下方程的正解:

$$\beta k \sinh(kL) + 2 \cosh(kL) + 2 = 0,$$

同样，当 L 增大时， λ 也增大。

例4.3。以下例子曾在 [21, 第 5] 节中研究。设 Γ 为一个星形图，即由一个中心顶点 v_0 以及若干度为一的顶点v_1、.....、v_r 构成的图，每个度为一的顶点都通过一条边与 v_0 相连。在此情形下，假设 Γ 是一个有三条边的星形图，其中两条边的长度为 l_1 : $= 1$，第三条边的长度为 $l_2 := l > 0$。在度为一的顶点处施加δ 耦合条件，长度为 1 的边对应的强度为 $\alpha_1 := -3/2$，长度为 l的边对应的强度为$\alpha_2 := -2$ 。在中心顶点处施加强度为$\alpha < 0$的条件，见图3。设 H 为 Γ 上与这些顶点

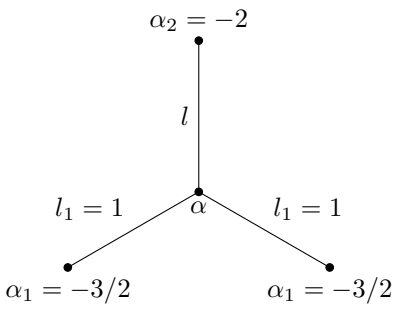


FIGURE 3. 星形图。

条件。根据定理 3.3， $\lambda_1(H) < 0$ 。第 [21, 节中证明了存在一个具有以下性质的常数 $\alpha_c \approx 1.09$:

- 若 $\alpha_c < \alpha < 0$，则 $\lambda_1(H)$ 随着 l 增大而减小;
- 若 $\alpha = \alpha_c$ ，则随着 l 增大， $\lambda_1(H)$ 保持不变;
- 若 $\alpha < \alpha_c$，则 $\lambda_1(H)$ 随着 l 增大而增大。

最后，我们指出，在 δ' 耦合条件下，定理 4.1 中不等式的严格性无法得到保证，以下示例说明了这一点。

例4.4。考虑例3.2中的度量图和顶点条件。在该例中，边长不起任何作用，对它们进行任何更改都将使$\lambda_1(H) = 0$ 保持不变。

4.2. 增加所有边的长度。这里，我们考察同时增加所有边的长度时特征值的变化。反复应用第4.1小节的结果，可以很容易得出：若所有边长均增加，则正特征值会减小。如果所有边长都按相同比例增加，并且耦合条件也相应地按该比例调整，则还可以得到更多结论。至少对于连续性-基尔霍夫和 δ 顶点条件，以下定理已是众所周知的结果。不过，为了完整起见，我们给出证明。

定理 4.5. 设 Γ 为一个紧致度量图，$q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实值，且令H 为作用在 Γ上的薛定谔算子，其势为 q，并满足命题 2.1 中所述的一般自伴顶点~条件。令 $t>0$，并通过对每条~~边、势和强度进行缩放得到 Γ，即 Γ具有长度函数 $L(e) := tL(e)$，势为 $\widetilde{q}_e := \frac{1}{t^2} q_e(\frac{\cdot}{t})$，其中 $e \in \mathcal{E}$，且 $\widetilde{\Lambda}_v = \frac{1}{t}\Lambda_v$对应 $v \in \mathcal{V}$。令 $\widetilde{H}$为作用在 Γ上的相应薛定谔算子。那么

$$\lambda_k(\widetilde{H}) = \frac{1}{t^2}\lambda_k(H)$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。

~~~证明。设 h 和 h 分别为与 H 和 H 相关联的二次型。对于 $f \in \widetilde{H}^1(\Gamma)$ 及其在任意一条边 $e \in \mathcal{E}$ 上的限制 f_e，该边参数化为~~~[0, L(e)]，考虑定义在每条边 e 上的函数 $f \in H^1(\Gamma)$：

$$\widetilde{f}_e(x) := f_e\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in [0, tL(e)].$$

~~~由于 f_e 和 f_e 在每个顶点处的边界值相同，即对于每个 $v \in \mathcal{V}$，$F(v) = F(v)$~~~，因此 f 属于 dom h 当且仅当 f 属于 dom h。通过代换 $y = \frac{x}{t}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}(\widetilde{f}) &= \sum_{e\in\mathcal{E}} \int_0^{tL(e)} |\widetilde{f}'|^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}} \int_0^{tL(e)} \widetilde{q}_e |\widetilde{f}_e|^2 + \sum_{v\in\mathcal{V}} \left\langle \widetilde{\Lambda}_v P_{v,\mathrm{R}} \widetilde{F}(v), P_{v,\mathrm{R}} \widetilde{F}(v) \right\rangle \\
&= \frac{1}{t} \sum_{e\in\mathcal{E}} \int_0^{L(e)} |f'|^2 + \frac{1}{t} \sum_{e\in\mathcal{E}} \int_0^{L(e)} q_e |f_e|^2 + \frac{1}{t} \sum_{v\in\mathcal{V}} \left\langle \Lambda_v P_{v,\mathrm{R}} F(v), P_{v,\mathrm{R}} F(v) \right\rangle \\
&= \frac{1}{t} h(f).
\end{aligned}$$

此外，通过同一代换可得 $\int_{\widetilde{\Gamma}} |\widetilde{f}|^2 = t \int_\Gamma |f|^2$。因此，由极小极大原理可得

$$\lambda_k(\widetilde{H}) = \min_{\substack{\widetilde{F} \subseteq \operatorname{dom} \widetilde{h} \\ \dim \widetilde{F} = k}} \max_{\widetilde{f} \in \widetilde{F}} \frac{\widetilde{h}(\widetilde{f})}{\int_{\widetilde{\Gamma}} |\widetilde{f}|^2} = \min_{\substack{F \subseteq \operatorname{dom} h \\ \dim F = k}} \max_{f \in F} \frac{1}{t^2} \frac{h(f)}{\int_\Gamma |f|^2} = \frac{1}{t^2} \lambda_k(H)$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。 □

我们在下一个推论中强调 δ 和 δ' 耦合条件的特殊情形；请注意，δ 和 δ' 条件的耦合强度必须采用不同的缩放方式。

推论 4.6. 设 Γ 为一个紧致度量图，$q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实值函数，且 H 为作用于 Γ 上、势为 q 的薛定谔算子，并在每个顶点 $v \in \mathcal{V}$ 处施加强度为 α_v 的 δ 耦合条件，或施加强度为 β_v 的 δ' 耦合条件，其中~。设 $t>0$，并通过缩放每条边、势和耦合强度得到 Γ，即对于 $e \in \mathcal{E}$，$\widetilde{L}(e) := tL(e)$，且 $\widetilde{q}_e := \frac{1}{t^2} q_e(\frac{\cdot}{t})$；同时，$\widetilde{\alpha}_v := \frac{1}{t}\alpha_v$~~~分别为 $\beta_v := t\beta_v$，对每个 $v \in \mathcal{V}$ 均如此。设 H 为作用于 Γ 上的相应薛定谔算子 ¨~。那么

$$\lambda_k(\widetilde{H}) = \frac{1}{t^2}\lambda_k(H)$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。这直接由定理 4.5 得出；对于 δ 耦合的情形，在每个顶点 v, $\Lambda_v = \frac{\alpha_v}{\deg(v)}$ 处分别如此；对于 δ' 耦合的情形，则在每个顶点 $\Lambda_v = \deg(v)\,\beta_v$ 处分别如此。□

4.3. 在两个顶点之间添加一条边。接下来我们关注这样一种操作：在两个顶点 $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ 之间添加一条有限长度的新边，见图4。对于在 v_1 和 v_2 处满足 δ' 耦合条件的情形，这可能



FIGURE 4. 在顶点 v_1 和 v_2之间连接一条新边。

只会降低 H的特征值；这可以通过在相应的新边上将瑞利商中的试探函数延拓为零来证明。

定理 4.7（[69, 定理 3.2]）。设 Γ 为紧致度量图，$q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实数，且 v_1、$v_2 \in \mathcal{V}$ 是 Γ的两个不同顶点。此外，设 H 为作用在 Γ 上的薛定谔算子，其势为 q，并在每个顶点 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_1, v_2\}$处满足任意自伴耦合条件；在 v_1 和 v_2处分别具有强度为 β_{v_1} 和 β_{v_2} 的 δ' 耦合条件；我们允许强度为零的情形，~即反基尔霍夫条件。设 Γ 为由 Γ 添加一条有限长度的额外边 $\widetilde{e}$ 得到的图，该边连接 v_1 和 v_2，其势为 $q_{\widetilde{e}} \in L^\infty((0, L(\widetilde{e})))$。此外，设 $\widetilde{H}$ 为作用在 $L^2(\widetilde{\Gamma})$ 中的薛定谔算子，它在所有 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_1, v_2\}$上具有与 H 相同的边上势和相同的耦合条件，并且在 v_1 和 v_2处的 δ' 耦合强度也分别相同。那么

$$\lambda_k(\widetilde{H}) \leq \lambda_k(H)$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。

证明。我们给出 $\beta_{v_1} \neq 0 \neq \beta_{v_2}$ 情形的证明；在顶点 v_1、v_2 中一个或两个顶点处满足反基尔霍夫条件的情形，证明类似。设 h 为与 H 关联的二次型，h 为与 H 关联的二次型。此外，设 F 为 $\operatorname{dom} h$ 的一个 k 维子空间，使得

$$h(f) \leq \lambda_k(H) \int_\Gamma |f|^2 \qquad \text{for all } f \in F.$$

~ ~ ~ 对于 $f \in F$，令 $\widetilde{f}$ 为将 f 在 $\widetilde{e}$ 上延拓为零所得的函数，并令 $\widetilde{F}$ 为所有此类函数构成的空间。~ ~ ~ ~于是，$\widetilde{F}$ 是 k 维的，且 $\widetilde{F} \subseteq \operatorname{dom} h$。对于 $\widetilde{f} \in \widetilde{F}$，我们观察到

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(\widetilde{f}) = \int_\Gamma |f'|^2 + \int_\Gamma q|f|^2 + \sum_{v \in \mathcal{V}\setminus\{v_1,v_2\}} \langle \Lambda_v P_{v,\mathrm{R}} F(v), P_{v,\mathrm{R}} F(v)\rangle \\ + \frac{1}{\beta_{v_1}} \left| \sum_{j=1}^{\deg(v_1)} F_j(v_1) \right|^2 + \frac{1}{\beta_{v_2}} \left| \sum_{j=1}^{\deg(v_2)} F_j(v_2) \right|^2 = h(f).\end{aligned}$$

因此，

$$\widetilde{h}(\widetilde{f}) = h(f) \leq \lambda_k(H) \int_\Gamma |f|^2 = \lambda_k(H) \int_{\widetilde{\Gamma}} |\widetilde{f}|^2 \quad \text{for all } \widetilde{f} \in \widetilde{F}.$$

由极小极大原理可得所述结论。 □

定理 4.7 的结论对于 δ 耦合条件并不成立；如下面的例子所示，在这种情况下无法作出确定的陈述。

例 4.8（[53, 例 1] 和 [69, 例 3.3]）。设 Γ 为一个度量图，它有两个顶点 v_1、v_2，且有一条长度为 1 的边连接这两个顶点，见图 5。设 H 为作用于 $L^2(\Gamma)$ 上的拉普拉斯算子，在 v_1 处满足强度为 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的 δ 条件，并且

在 v_2处满足基尔霍夫条件。注意，两个顶点的度均为 1；因此， v_1 处的条件是罗宾边界条件，而 v_2 处的条件是诺伊曼条件。还要注意， $\alpha = 0$ 在 v_1 处的条件同样是诺伊曼条件。此外，设 Γ 为在 Γ 的基础上添加另一条长度为 $\ell > 0$ 的边后得到的图，该边也连接 v_1 和 v_2；设 $\widetilde{H}$ 为作用于 $L^2(\widetilde{\Gamma})$ 上的拉普拉斯算子，并满足对 H中条件作自然推广后得到的条件，即在 v_1 处满足强度为 α 的 δ 条件，并在 v_2处满足基尔霍夫条件。我们考察两种不同情形。



~FIGURE 5. 例 4.8 中的图。左： Γ，右： Γ。

若 $\alpha = 0$ （见 [53, 例 1]），则对所有 $k \in \mathbb{N}$， $\lambda_k(H) = \pi^2(k-1)^2$，且 $\widetilde{H}$与长度为 $1+\ell$、满足周期边界条件的区间上的拉普拉斯算子酉等价，这意味着 $\lambda_1(\widetilde{H}) = 0$ 且 $\lambda_{2k}(\widetilde{H}) = \lambda_{2k+1}(\widetilde{H}) = \frac{4\pi^2}{(1+\ell)^2}k^2$~对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。因此，对于 $\ell < 1$，~~我们~~观察到 $\lambda_2(H) > \lambda_2(H)$；而对于 $\ell \geq 1$，我们~得到 $\lambda_k(H) \leq \lambda_k(H)$，对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立（对于 $k > 2$，甚至是严格不等式；对于$\ell > 1$，该不等式在 $k = 2$ 时也严格成立）。

若 $\alpha = 1$，则通过简单计算可得 $\lambda_1(H) \approx 0.74017$。此外，令 ~$\ell = 0.1$，可得 $\lambda_1(H) \approx 0.83156$，也就是说， $\lambda_1(H) < \lambda_1(H)$。因此，即使对于 $\alpha \neq 0$，添加一条边也可能使特征值增大。

4.4. 附加一个悬挂图。本节研究将一个全新的图附加到给定图的一个顶点上时，特征值如何变化。与上述定理 4.7 不同，对于 δ 和 δ' 耦合，将瑞利商中的试探函数以常数方式延拓到新边上是允许的。该结果尤其涵盖了附加一条悬挂边的情形。

定理 4.9（参见 [12, 定理 3.10], [69, 定理 3.5]）。设 Γ 为紧致度量图， $q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实数，且 $v \in \mathcal{V}$ 为 Γ的一个顶点。此外，设 H为作用在 Γ 上的薛定谔算子，其势为 q，在每个顶点 $w \in \mathcal{V} \setminus \{v\}$处满足任意自伴顶点条件，并在 v处满足 ^ ^ ^ δ 或 δ' 耦合条件。设 Γ 为紧致度量图， $\widehat{q} \in L^\infty(\Gamma)$， $\widehat{v} \in \mathcal{V}$ 为 Γ 的一个顶点，并^ ~在每个顶点 $w \in \mathcal{V} \setminus \{\widehat{v}\}$处选取任意自伴顶点条件。令 Γ 为^由 Γ 附加图 Γ 而得到的图，其中图 Γ 的顶点 $\widehat{v}$ 与 v 处的顶点v 和 $\widehat{v}$识别，见图6。令 $\widetilde{H}$ 为作用在 $L^2(\widetilde{\Gamma})$ 上的薛定谔算子，其在所有 $w \in \mathcal{V} \setminus \{v\}$ 上具有与 H 相同的顶点条件，在~$w \in \mathcal{V} \setminus \{\widehat{v}\}$处具有选定的耦合条件，并在 v处具有与~H相同强度的 δ或 δ' 耦合条件。若 v 处的条件属于 δ 类型，我们还假设 H ^ ^在 $w \in \mathcal{V} \setminus \{\widehat{v}\}$ 处的条件为耦合条件，其强度对所有 $w \in \mathcal{V} \setminus \{\widehat{v}\}$均为 $\alpha_w \leq 0$，且 $\int_{\widehat{\Gamma}} \widehat{q} \leq 0$。那么

$$\lambda_k(\widetilde{H}) \leq \lambda_k(H)$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。

~证明。令 h 为与 H 相关联的二次型，令 h 为与 H相关联的二次型~。此外，令 F 为 $\operatorname{dom} h$ 的一个 k 维子空间，使得

$$h(f) \leq \lambda_k(H) \int_\Gamma |f|^2 \qquad \text{for all } f \in F.$$



FIGURE 6. 定理 4.9 的变换。左： Γ，右： $\widehat{\Gamma}$，其中图 Γ（粗线）连接在 v处。

对于 $f \in F$，令 $\widetilde{f}$ 为 f 在 Γ 上通过零延拓得到的扩张（即在 δ' 耦合位于 v 的情形下，$\widetilde{f} = 0$ 在 $\widehat{\Gamma}$ 上），而在耦合位于 v 的 δ 耦合情形下，则通过常值 $f(v)$ 延拓至 $\widehat{\Gamma}$（即 $\widetilde{f} = f(v)$ 在 $\widehat{\Gamma}$ 上）。此外，令 $\widetilde{F}$ 为由所有 $f \in F$ 的扩张 $\widetilde{f}$ 所构成的空间。那么 $\widetilde{F}$ 是 k 维的，且 $\widetilde{F} \subseteq \operatorname{dom} \widehat{h}$。对于 $f \in F$，我们注意到

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(\widetilde{f}) = \int_{\Gamma} |f'|^2 + \int_{\Gamma} q|f|^2 + \int_{\widehat{\Gamma}} \widehat{q}|\widetilde{f}_{\widehat{\Gamma}}|^2 + \sum_{w \in \mathcal{V}\setminus\{v\}} \langle \Lambda_w P_{w,\mathrm{R}} F(w), P_{w,\mathrm{R}} F(w)\rangle \\ + \sum_{w \in \widehat{\mathcal{V}}\setminus\{\widehat{v}\}} \langle \widehat{\Lambda}_w \widehat{P}_{w,\mathrm{R}} \widehat{F}(w), \widehat{P}_{w,\mathrm{R}} F(w)\rangle \\ + \begin{cases} \frac{1}{\beta_v} \sum_{j=1}^{\deg(v)} \widetilde{F}_j(v) & \text{for a } \delta' \text{ condition at } v, \\ \alpha_v |f(v)|^2 & \text{for a } \delta \text{ condition at } v. \end{cases}\end{aligned}$$

注意

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \widehat{q}|\widetilde{f}|^2 \begin{cases} = 0 & \text{for a } \delta' \text{ condition at } v, \\ \leq 0 & \text{for a } \delta \text{ condition at } v. \end{cases}$$

此外，注意顶点 $w \in \mathcal{V} \setminus \{\widehat{v}\}$ 处的顶点项为

$$\langle \widehat{\Lambda}_w \widehat{P}_{w,\mathrm{R}} \widehat{F}(w), \widehat{P}_{w,\mathrm{R}} F(w)\rangle \begin{cases} = 0 & \text{for a } \delta' \text{ condition at } v, \\ \leq 0 & \text{for a } \delta \text{ condition at } v, \end{cases}$$

根据定理的假设。因此，

$$\widetilde{h}(\widetilde{f}) \leq h(f) \leq \lambda_k(H) \int_{\Gamma} |f|^2 \leq \lambda_k(H) \int_{\widehat{\Gamma}} |\widetilde{f}|^2 \quad \text{for all } \widetilde{f} \in \widetilde{F}.$$

极小极大原理给出了所述结论。 □

如果我们在粘合顶点 v 处采用 δ 型条件，那么就必须对新附加图中其他顶点处的耦合系数施加条件，如下例所示。

例4.10（[69, 例3.6]）。设 Γ 为由两个顶点 v_0 和 v_1 以及一条连接这两个顶点的边组成的图，该边由区间 $[0, 1]$ 参数化；参见图7。我们在



FIGURE 7. 例4.10中的图。左： Γ；右： Γ。

v_0 和 v_1。由于这两种情况下的度均为 1，这些条件对应于 H 在 0 和 1 处的诺伊曼边界条件。因此，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，$\lambda_k(H) = (k-1)^2\pi^2$。现在，我们添加一条长度为 1 的边，将 v_1 与一个新的顶点 v_2 连接起来，见图 7。在顶点 v_2 处，我们施加条件 $f'(2) + \alpha f(2) = 0$

˜，其中某个 $\alpha > 0$ 满足该条件，或者施加狄利克雷条件。于是， H 的谱为正，因此，

$$\lambda_1(\widetilde{H}) > 0 = \lambda_1(H).$$

4.5. 在顶点处插入图。本节讨论一种图操作：将一个度量图插入另一个给定度量图的某个顶点。此变换在 [12, 第 3] 节中引入，并在那里研究了它对具有 δ （以及狄利克雷）顶点条件的拉普拉斯算子特征值的影响。该操作的形式化定义如下。

定义 **4.11.** 设 v_0 是紧致度量图 Γ的一个顶点， Γ' 是另一个紧致度量图。记 $\mathcal{E}_{v_0}$ 为在 Γ中与 v_0 ˜相连的边集。若图 Γ 由从 Γ 中移除 v_0 ，并将每条边 $e \in \mathcal{E}_{v_0}$ 连接到 Γ′的某个顶点而得到，则称图 Γ 是将 Γ' 插入 Γ 的 v_0 处所得；参见图 8。

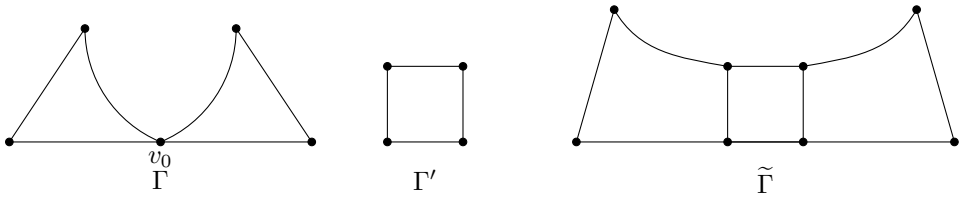


FIGURE 8. 将图 Γ' 插入顶点 $v_0 \in \Gamma$处。

通过这一操作，对于 δ 顶点条件，以下定理成立。对于拉普拉斯算子的无势情形， [12, 定理 3.10]中已证明了这一结论。这里我们给出一种略有不同的证明，并允许存在势 q ，同时也允许在未受该操作影响的顶点处采用更一般的顶点条件。

˜定理 **4.12.** 设 Γ 和 Γ' 为紧致度量图，且 Γ 由在 Γ的给定顶点 v_0 处将 Γ' 插入 Γ 而形成。此外，设 H 为作用于 Γ 上的薛定谔算子，具有实势 $q \in L^\infty(\Gamma)$；除 v_0 外的所有顶点处均采用任意自伴顶点条件，并在∼ ∼v_0处采用强度为 $\alpha := \alpha_{v_0}$ 的 δ 顶点条件。考虑作用于 Γ 上的薛定谔算子 H ，其在 Γ 的所有顶点处（除 v_0 外）采用相同的顶点条件，并在 Γ的所有边上采用相同的势；在 Γ′的边上设置势 q_e ，使得 $\int_{\Gamma'} q \le 0$；并在其余顶点˜处设置 $\mathcal{V}' = \mathcal{V}(\Gamma) \setminus (\mathcal{V}(\Gamma) \setminus \{v_0\})$，施加耦合系数为 α_v 的 δ 顶点条件，使得

$$\sum_{v \in \mathcal{V}'} \alpha_v \le \alpha.$$

Then

$$\lambda_k(\widetilde{H}) \le \lambda_k(H)$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。令 F 表示 $1 \le j \le k$ 的空间 $\ker(H - \lambda_j(H))$ 的线性张成。则 $\dim F \ge k$，并且

$$h(f) \le \lambda_k(H) \int_\Gamma |f|^2$$

对所有 $f \in F$ 均成立。此外，令 $\widetilde{F}$ 为将所有 $f \in F$ 恒定延拓至整个 $\widetilde{\Gamma}$ 所形成的空间，其中以自然方式将 Γ 视为 $\widetilde{\Gamma}$ 的子图。则 $\widetilde{F}$ 也满足 $\dim \widetilde{F} \geq k$，$\widetilde{F}$ 属于与 $\widetilde{H}$ 相关的二次型 $\widetilde{h}$ 的定义域，并且对每个 $\widetilde{f} \in \widetilde{F}$，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(\widetilde{f}) &= \big(h(f) - \alpha|f(v_0)|^2\big) + |f(v_0)|^2 \left(\int_{\Gamma'} q + \sum_{v \in \mathcal{V}'} \alpha_v\right) \\ &\leq h(f) \leq \lambda_k(H) \int_\Gamma |f|^2 \leq \lambda_k(H) \int_{\widetilde{\Gamma}} |f|^2.\end{aligned}$$

这就证明了该定理的断言。 □

在插入附加图Γ' 的 v_0 顶点处施加 δ' 顶点条件的情形，一方面限制较少：可以在插入的图上施加任意自伴顶点条件，并在边上设置任意势。另一方面，受影响顶点处的耦合条件必须满足符号条件。

定理 4.13. 设 Γ 和 Γ' 为紧致度量图，并设 Γ 由在 Γ的给定顶点 v_0 处插入 Γ' 到 Γ 中而得到。此外，设 H 为作用在 Γ 上的薛定谔算子，其实势为 $q \in L^\infty(\Gamma)$；在除 v_0 外的所有顶点处施加任意自伴顶点条件，并在 v_0处施加强度为 $\beta := \beta_{v_0} < 0$ 的 δ' 顶点条件。$\widetilde{H}$ 考虑作用在 $\widetilde{\Gamma}$ 上的薛定谔算子 $\widetilde{H}$，其在 Γ 的所有顶点处（除 v_0 外）施加相同的顶点条件，并在 Γ的所有边上采用相同的势；在 Γ'的边上设置任意势 q_e，在通过分裂 v_0得到的顶点集 $\mathcal{V}$ 上施加强度为 $\beta_v < 0$ 的 δ'顶点条件，使得

$$\sum_{v \in \widehat{\mathcal{V}}} \beta_v = \beta, \tag{4.2}$$

并在其余顶点集 $\mathcal{V}' = \mathcal{V}(\Gamma) \setminus (\mathcal{V}(\Gamma) \setminus \{v_0\})$ 上施加任意自伴顶点条件。于是

$$\lambda_k(\widetilde{H}) \leq \lambda_k(H)$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。

$\widehat{H}$ 证明。令 $\widehat{\Gamma}$ 为将 Γ 中的 v_0 分裂为顶点集 $\mathcal{V}$，$\widehat{\Gamma}$ 后得到的图，并令 $\widehat{H}$ 为作用在 $\widehat{\Gamma}$ 上的薛定谔算子，其边上的势相同 $\widehat{q}$ $\widehat{\beta}$（经过识别后），且在 $\mathcal{V}(\Gamma) \setminus \mathcal{V}$ 中所有顶点处施加相同的顶点条件。$\widehat{H}$此外，在 $\mathcal{V}$, δ' 中的新顶点处施加强度为 $\beta_v < 0$ 的顶点条件，且这些条件满足 (4.2)。于是，由下文的定理 5.7，

$$\lambda_k(\widehat{H}) \leq \lambda_k(H)$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。此外，以使所得图 $\widetilde{\Gamma}$ 为 Γ 的方式将 Γ' 附接到 Γ，并施加所需的顶点条件，便得到定理中定义的算子 $\widetilde{H}$，且

$$\lambda_k(\widetilde{H}) \leq \lambda_k(\widehat{H})$$

分别反复应用定理 4.7 和定理 4.9 即可得出。这就完成了证明。□

4.6. 边长收缩至零。这里我们回顾 [15], 中关于边长收缩至零的一些结果。更具体地说，[15] 确定了部分边长缩短至零时自然产生的极限顶点条件，并在一定条件下证明了相应的薛定谔算子收敛。为简化表述，我们在此仅讨论拉普拉斯算子的无势情形， $q = 0$ 恒等。

现在我们稍微转换一下视角。到目前为止，我们将度量图上的薛定谔算子视为在顶点处满足耦合条件，而函数的边界值来自与给定顶点相邻的所有边。现在，我们分别关注每条边，使得 $\widetilde{H}^2$中的函数在每条边上都有两个函数边界值和两个（向内）导数边界值，分别对应左端点和右端点。由于对于每个图，所有顶点的度之和等于边数的两倍，因此取所有顶点处的边界值等同于取所有边上的边界值，所以这种视角转换只是对边界值重新排序（现在按边而不是按顶点排列）。

为了表述 [15], 的一个变体，需要引入一些记号。对于边总数为 $E = |\mathcal{E}|$的紧致度量图 Γ ，设 $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$ 为一组选定的边，我们将把它们缩短至零。对于每条边 e ，记 $l(e)$和 $r(e)$分别为与 e 对应的区间的左端点和右端点，并令

$$\partial\Gamma := \bigcup_{e\in\mathcal{E}} \{l(e), r(e)\};$$

我们区分所有端点，即使根据各边的参数化方式，它们可能对应于实线上的同一点。于是，对于任意函数$f \in \widetilde{H}^1(\Gamma)$，我们都可以考虑一个由$f \in \widetilde{H}^1$在所有边的所有端点处的取值组成的向量

$$f|_{\partial\Gamma} \in \mathbb{C}^{2E}$$

。注意， $f|_{\partial\Gamma}$ 描述了与（$F(v)$)$_{v\in\mathcal{V}}$相同的边界值，只是排序不同。特别地，如果对于某个如命题 2.1 中所述的自伴 Schr¨odinger 算子 H ，有 $f \in$dom H，则顶点条件可以用向量 $f|_{\partial\Gamma}$ 和 $f'|_{\partial\Gamma}$ 表示；在后一种情况下，导数沿指向内部的方向取值。还要注意， $f'|_{\partial\Gamma}$描述了与（$F'(v)$)$_{v\in\mathcal{V}}$相同的导数边界值，只是排序不同。此外，定义

$$D_0 := D_0(\mathcal{E}_0) := \{F \in \mathbb{C}^{2E} : \ F_{l(e)} = F_{r(e)},\ e \in \mathcal{E}_0\},$$
$$N_0 := N_0(\mathcal{E}_0) := \{F' \in \mathbb{C}^{2E} : \ F'_{l(e)} = -F'_{r(e)},\ e \in \mathcal{E}_0\}.$$

下面我们将考虑把 Γ 的边集分解为 $\mathcal{E}$ =$\mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_0$ ，其中 $\mathcal{E}_+ \cap \mathcal{E}_0 = \emptyset$ ，并将 $\mathcal{E}_0$ 中的边长缩减为零；与此同时， $\mathcal{E}_+$ 中的边的边长也可以改变，但其极限将趋于一个正数。令 Γ_+ 为由边集 $\mathcal{E}_+$ 构成的 Γ 的子图，并通过 $\Gamma(L)$表示 Γ 对长度函数的依赖；如果形式上选择 L ，使得对于所有 $e \in \mathcal{E}_0$均有 $L(e) = 0$ ，则 $\Gamma(L) = \Gamma_+$。

考虑自伴算子序列 $H(L)$，其中 $H(L)$ 在 $\Gamma(L)$ 上作用为拉普拉斯算子， $L(e)$ 对所有 $e \in \mathcal{E}$ 均成立，并且所有算子 $H(L)\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$均配备相同的顶点条件。若 $L \to L,\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，则 $H(L)$ 的自然极限算子 H 是定义在所有满足所选顶点条件的函数 f 在 Γ_+ 上的限制上的拉普拉斯算子；此外， $L(e)$ 对所有 $e \in \mathcal{E}_0$ 均成立，且 $L(e)$ 对所有 $e \in \mathcal{E}_+$ 均成立，

$$f|_{\partial\Gamma} \in D_0 \quad \text{and} \quad f'|_{\partial\Gamma} \in N_0. \tag{4.3}$$

下一个定理将采用关于度量图上自伴拉普拉斯算子 H的顶点条件的以下假设。

假设 4.14。假设对于所有 $f \in \operatorname{dom} H$，若 $f|_{\partial\Gamma} \in D_0$ 且$f'|_{\partial\Gamma} \in N_0$，并且若 $f|_{\partial\Gamma_+} = f'|_{\partial\Gamma_+} = 0$，则 $f|_{\partial\Gamma} = 0$。

对于拉普拉斯算子的特殊情形，以下定理汇总了 [15, 定理 3.1、3.5、3.6], 中的结果，其中耦合条件是通过顶点处取值的拉格朗日子空间来表述的；另见 [70]。

定理 4.15。设 $\Gamma = \Gamma(L)$ 是一个紧致度量图，且 $H(L)$ 是定义在 $L^2(\Gamma(L))$ 上的拉普拉斯算子，在每个顶点处满足任意的、与 L 无关的自伴耦合条$\widehat{}$件。设假设 4.14 成立，并设 H 是定义在满足原顶点条件以及 (4.3) 的函数限制上的拉普拉斯算子。那么 H 是自伴的， $H(L)$ 在广义范数$\widetilde{}$预解算子意义下收敛到 H ，当 $L \to L$ 时，参见注 4.17；并且当 $\mathcal{E}_0$ 的边长趋于零时， H 的谱收敛到 H 的谱（按多重集的豪斯多夫意义）。

注释 4.16. 假设 4.14 已在 [15] 中得到非常详尽的分析。其中， [15, 引理 3.3] 表明，对于不含罗宾部分的顶点条件（即 $P_{v,\,\mathrm{R}} = 0$ 对所有 $v \in \mathcal{V}$均成立），假设 4.14 成立，当且仅当满足所给顶点条件、在 Γ_0 的每条边上均为常数且在 Γ_+上恒为零的函数只有零函数。此外， [15, 引理 3.4] 还表明，对于要求每个顶点处连续的所有顶点条件，假设 4.14 均成立，即适用于 δ 顶点条件，包括连续性-基尔霍夫条件这一特殊情形。

$\widetilde{}$注释 4.17. 定理 4.15 所示的 $H(L)$ 在广义范数预解式意义下收敛至 H ，可见 [74, 第 351], 页，另见 [66, 第 4], 章，且这意味着

$$\|J_L(\widetilde{H} + \mathrm{i})^{-1} - (H(L) + \mathrm{i})^{-1} J_L\| \to 0$$

$\widetilde{}$作为 $L \to L$，其中 $\|\cdot\|$ 表示从 $L^2(\widetilde{\Gamma})$到 $L^2(\Gamma)$的有界线性算子空间中的范数，而 J_L 是从 $L^2(\widetilde{\Gamma})$到 $L^2(\Gamma(L))$的嵌入，由下式给出

$$(J_L f)_e(x) := \begin{cases} \sqrt{\frac{\widetilde{L}(e)}{L(e)}} f_e\left(\frac{\widetilde{L}(e)}{L(e)} x\right) & x \in (0, L(e)),\, e \in \mathcal{E}_+, \\ 0 & e \in \mathcal{E}_0, \end{cases}$$

也就是说， J_L 在线段 $\mathcal{E}_+$ 上作线性缩放，并在边 $\mathcal{E}_0$上平凡地延拓为零。

我们通过两个例子来说明上述结果 s.

例4.18。考虑一个由区间 e_1 和环e_2构成的“套索图”；见图9。我们施加反基尔霍夫耦合条件；这可简化为区间末端一度顶点处的狄利克雷条件。我们令

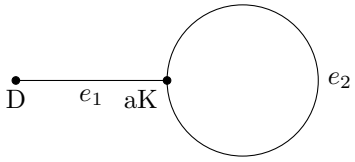


FIGURE 9. 套索图。

将其中一条或另一条边的边长趋于零:

(a) 令 $\mathcal{E}_+ = \{e_1\}$ 和 $\mathcal{E}_0 = \{e_2\}$。则假设 4.14 得以满足。事实上，根据注释 4.16，如果 $f = 0$ 在 e_1 上，而 f 在 e_2 上为常数（这尤其意味着 $f_{e_2}(0) = f_{e_2}(L(e_2))$），那么结合顶点处的反基尔霍夫条件，即 $f_{e_2}(0) + f_{e_2}(L(e_2)) = 0$，我们得到$f = 0$ 在 e_2上。

缩短 e_2 的长度至零后得到的极限图是一个区间图，左端满足狄利克雷条件，右端满足诺伊曼条件。

(b) 设 $\mathcal{E}_+ = \{e_2\}$ 和 $\mathcal{E}_0 = \{e_1\}$。那么假设 4.14 也成立。事实上，再结合注释 4.16，若 $f = 0$ 在 e_2 上，且 f 在e_1上为常数，则 e_1 左端点处的狄利克雷条件（以及 e_1右端点处的反基尔霍夫耦合）给出 $f_{e_1} = 0$。

将 e_1 的长度缩短至零后得到的极限图是一个环图，其顶点处满足反基尔霍夫条件。

套索图的久期方程为

$$2\cos(kL(e_1))\cos(kL(e_2)) + 2\cos(kL(e_1)) - \sin(kL(e_1))\sin(kL(e_2)) = 0,$$

因此，特征值由 $\lambda = k^2$给出，其中 k 是久期方程的一个解。隐函数定理表明，缩短一条边时，解 k （从而特征值）会收敛。这与定理 4.15 中的谱收敛相似。

例 4.19. 取一个至少有两个顶点、且满足反基尔霍夫耦合条件的圆图，如图 10 所示。我们希望将一条边缩短至零，即对某个固定的 $e_0 \in \mathcal{E}$，有 $\mathcal{E}_0 = \{e_0\}$ 和 $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E} \setminus \{e_0\}$。由注释 4.16 可知，假设 4.14 很容易得到满足。下面确定极限图的耦合条件。为此，假设各边按逆时针方向参数化，且$\check{e}$ 是位于 e_0 之前的边，$\hat{e}$ 是位于 e_0 之后的边。那么，在 e_0 左端点处的反基尔霍夫条件为

$$-f'_{\check{e}}(L(\check{e})) = f'_{e_0}(0), \quad f_{\check{e}}(L(\check{e})) + f_{e_0}(0) = 0,$$

类似地，对于 e_0 的右端点，我们得到

$$-f'_{e_0}(L(e_0)) = f'_{\hat{e}}(0), \quad f_{e_0}(L(e_0)) + f_{\hat{e}}(0) = 0.$$

此外，利用 D_0 上的边界值可得

$$f_{e_0}(0) = f_{e_0}(L(e_0)),$$

而利用 N_0 上的（朝内）导数边界值可得

$$f'_{e_0}(0) = f'_{e_0}(L(e_0)).$$

综上，将 e_0 的长度缩短至零可得耦合条件

$$f_{\check{e}}(L(\check{e})) = f_{\hat{e}}(0), \quad -f'_{\check{e}}(L(\check{e})) = -f'_{\hat{e}}(0),$$

因此，我们得到一个连续性-基尔霍夫条件，将边$\check{e}$ 与$\hat{e}$联系起来。

我们指出，该定理通常不适用于具有反基尔霍夫条件或 δ' 顶点条件的图，以下示例说明了这一点。

例 4.20. 考虑一个“南瓜”图，它由两个顶点 v_1, v_2 和三条边 e_1, e_2, e_3 组成，三条边均连接 v_1 和 v_2，且长度任意为正，见图 11。在 v_1 和 v_2 处施加反 Kirchhoff 条件或 δ' 顶点条件，并令 $\mathcal{E}_0 = \{e_1, e_2\}$ 和 $\mathcal{E}_+ = \{e_3\}$。因此，我们的目标是使 $L(e_1)$ 和 $L(e_2)$ 趋于零。然而，定理 4.15 并不适用。事实上，函数 f 在 e_1 上恒为 1，在 e_2 上为 -1，并在 e_3 上为零，属于 dom (H)，即它满足所施加的顶点条件。此外，在 $\mathcal{E}_0$ 中的每条边上，该函数



FIGURE 10. 左：带有反 Kirchhoff 耦合条件的圆图，以及将边 e_0 缩短至零长度后得到的圆图。

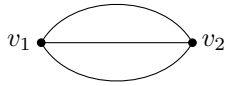


FIGURE 11. 具有三条边的南瓜图。

在两个端点处取值相同，且导数为零，因此 $f|_{\partial\Gamma} \in D_0$ 和 $f'|_{\partial\Gamma} \in N_0$ 以及 $f|_{\partial\Gamma_+} = f'|_{\partial\Gamma_+} = 0$。但是，显然， f 在边 e_1 和 e_2 上的边界值非零；因此假设 4.14 不成立。

如需了解更多有启发性的示例，请参阅 [15, 第 3] 节。

5. GRAPH MANIPULATIONS PRESERVING THE TOTAL LENGTH

本节将考察保持图的总长度不变的图操作，并研究这些操作对薛定谔算子特征值的影响。在某些情况下，顶点处的耦合条件也会发生变化。

5.1. 改变耦合强度。我们首先考察改变耦合条件的强度所产生的影响。我们针对具有非平凡罗宾部分的耦合条件给出一个一般性结论。 δ 和 δ' 耦合的情形随后将作为简单推论得出。

定理 5.1. 设 Γ 是一个紧致度量图， $q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实数， $v_0 \in \mathcal{V}$ 和 H 是 Γ 上具有势 q 的施罗丁格算子，在顶点 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_0\}$ 处满足命题 2.1 中任意的自伴耦合条件，并在顶点 v_0 处满足带有非平凡罗宾部分的自伴耦合条件， $P_{v_0,\,\mathrm{R}} \neq 0$。记 $\widetilde{\ }$ 为 Λ_{v_0} ，它是作用于 $\operatorname{ran} P_{v_0,\,\mathrm{R}}$ 上的自伴可逆耦合算子；再设 Λ_{v_0} 是作用于 $\operatorname{ran} P_{v_0,\,\mathrm{R}}$ 上的另一个自伴可逆算子，且满足 $\Lambda_{v_0} \leq \Lambda_{v_0}$。记 $\widetilde{\ }$ 为 H ，它是通过将 Γ 上 H 在 v_0 处的耦合算子 Λ_{v_0} 替换为 Λ_{v_0} 而得到的施罗丁格算子。那么

$$\lambda_k(\widetilde{H}) \leq \lambda_k(H) \tag{5.1}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。如果特征值 $\lambda_k(H)$ 是单重的，且对于相应的特征函数 f 及其在 $\widetilde{\ }$ 顶点 v_0 处的边界取值所组成的关联向量 $F(v_0)$，有 $P_{v_0,\mathrm{R}}F(v_0) \notin \ker(\Lambda_{v_0} - \Lambda_{v_0})$，则

$$\lambda_k(\widetilde{H}) < \lambda_k(H).$$

$\widetilde{\ }$ 证明。设 h 为与 H 相关联的二次型， h 为与 H 相关联的二次型 $\widetilde{\ }$。此外，记 F 为各空间 $\ker(H - \lambda_j(H))$ 的张成空间

对于 $1 \le j \le k$。则 $\dim F \ge k$，且对所有 $f \in F$，有

$$h(f) - \widetilde{h}(f) = \left\langle \Lambda_{v_0} P_{v_0,\mathrm{R}} F(v), P_{v_0,\mathrm{R}} F(v) \right\rangle - \left\langle \widetilde{\Lambda}_{v_0} P_{v_0,\mathrm{R}} F(v), P_{v_0,\mathrm{R}} F(v) \right\rangle \ge 0. \tag{5.2}$$

因此，断言 (5.1) 可由极小极大原理立即推出。

现在假设对于某个 k， $\lambda_k(H)$ 是单重的，且 (5.1) 中等号成立。那么

$$\lambda_{k-1}(\widetilde{H}) \le \lambda_{k-1}(H) < \lambda_k(H) = \lambda_k(\widetilde{H});$$

特别地，对于空间 F_{k-1} 中由 $1 \le j \le k-1$ 对应的 $\ker(H - \lambda_j(H))$ 张成空间里的所有非零 f，

$$\widetilde{h}(f) \le \lambda_{k-1}(H) \int_\Gamma |f|^2 < \lambda_k(H) \int_\Gamma |f|^2.$$

~因此，假设 $\lambda_k(H) = \lambda_k(H)$ 意味着对所有 $f \in \ker(H - \lambda_k(H))$，(5.2) 中等号成立。这意味着

$$P_{v_0,\mathrm{R}} F(v_0) \in \ker(\Lambda_{v_0} - \widetilde{\Lambda}_{v_0}).$$

对于所有 $f \in \ker(H - \lambda_1(H))$，并由此证明第二个断言。 □

对于在 v_0 处采用 δ 和 δ' 耦合条件的情形，我们得到以下两个推论。

推论 5.2（[14, 定理 3.1。8]）。设 Γ 是一个紧致度量图， $q \in L^\infty$（Γ）为实数， $v_0 \in \mathcal{V}$，并设 H 是作用在 Γ 上的薛定谔算子，其势为 q，在顶点 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_0\}$ 处满足任意自伴耦合条件，并在 v_0 处满足强度为 $\alpha_{v_0} \in \mathbb{R}$ 的 δ 耦合条件。令 $\widetilde{\alpha}_{v_0} < \alpha_{v_0}$，并以 H 表示作用在 Γ 上的薛定谔算子，其势与 H 相同，在所有 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_0\}$ 处的耦合条件也相同，并在 v_0 处满足强度为 $\widetilde{\alpha}_{v_0}$ 的 δ 耦合条件。那么

$$\lambda_k(\widetilde{H}) \le \lambda_k(H)$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。如果特征值 λ_k（H）是单重的且 f（v_0）$\neq 0$，那么

$$\lambda_k(\widetilde{H}) < \lambda_k(H).$$

~特别地，如果在所有顶点处施加 δ 耦合条件，则 $\lambda_1(H) < \lambda_1(H)$。

证明。由定理 5.1 可立即得出这一结论，因为在这种情况下， $\Lambda_{v_0} = {}^{\alpha_{v_0}}\!/_{\deg(v_0)}$ 以及 $\mathrm{dom}\, H$ 中的函数都是连续的。□

因此，对于 δ 耦合，每个强度对应的特征值都是单调的。然而，对于 δ' 耦合，情况则更为复杂。注意，以下定理包含强度为零的 δ' 耦合情形，即反基尔霍夫条件。

推论 5.3. 设 Γ 为一个紧致度量图， $q \in L^\infty(\Gamma)$为实数， $v_0 \in \mathcal{V}$ 且令H 为作用于 Γ 上的薛定谔算子，其势为 q，在顶点 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_0\}$ 处满足任意自伴耦合条件，并在 v_0处满足强度为~ ~$\beta_{v_0} \in \mathbb{R}$ 的 δ' 耦合条件。令 $\beta_{v_0} \in \mathbb{R}$。记 H 为作用于 Γ 上的薛定谔算子，其势为 q，在所有 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_0\}$ 处满足与 H 相同的耦合条件，并在 v_0处满足强度为 β_{v_0} 的~δ' 耦合条件。假设以下条件之一成立：

~(a) $0 < \beta_{v_0} < \beta_{v_0}$,

~(b) $\beta_{v_0} < \beta_{v_0} < 0$,~

(c) $\beta_{v_0} < 0 < \beta_{v_0}$,~

(d) $\beta_{v_0} < \beta_{v_0} = 0$.

Then

$$\lambda_k(\widetilde{H}) \leq \lambda_k(H)$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。

~~~证明。若 $\beta_{v_0}, \beta_{v_0} \neq 0$，则结论可由定理 5.1 和$\Lambda_{v_0} = $ 度$_{\beta_{v_0}} v_0$立即得出。对于假设 (d) 的情~~形，~~与~~ ~~~
~~~

我们对 H 施加基尔霍夫（即诺伊曼）条件，对 H 施加反基尔霍夫（即˜狄利克雷）条件。于是

$$\lambda_1(H) = 0 < \frac{\pi^2}{4L^2} = \lambda_1(\widetilde{H}),$$

其中 L 表示区间长度。

作为这一例子的补充，需要指出的是，在某些情况下，连续性-基尔霍夫顶点条件和反基尔霍夫顶点条件会导出相同的正特征值；参见 [56]。

5.3. 合并两个顶点。给定一个图，我们可以通过将两个顶点识别为同一点来合并它们˜。更具体地说，图 Γ 由 Γ 得到：将两个顶点v_1、v_2 替换为一个新顶点 v_0，其中 deg$(v_0) =$ deg$(v_1) +$ deg(v_2)，使得

$$\mathcal{E}_{v_0} = \mathcal{E}_{v_1} \cup \mathcal{E}_{v_2};$$

见图12。现在我们回顾薛定谔算子的特征值在此变换下的变化情况。我们从在该处满足 δ 耦合条件的情形开始

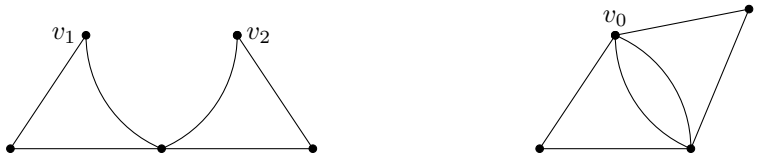


FIGURE 12. 将顶点 v_1 和 v_2 合并为一个新顶点 v_0。

待连接的顶点。

定理 5.6 ([33, 定理 2], [13, 定理 5.3])。设 Γ 为一个紧致度量图，$q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实数，$v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ 满足 $v_1 \neq v_2$，且 H 为作用在 Γ 上的薛定谔算子，其势为 q；在顶点 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_1, v_2\}$处满足任意自伴耦合条件，并且在 v_1和 v_2处分别满足强度为 α_{v_1}和 $\alpha_{v_2} \in \mathbb{R}$的 δ耦合条件。记 Γ 为由 Γ 通过连接 v_1 与 v_2 并将其合并为一个顶点 v_0 所得到的图。设 $\widetilde{H}$ 为作用于 $L^2(\widetilde{\Gamma})$ 上的自伴薛定谔算子，除 v_0 外，其在所有顶点处的势和耦合条件均与 H 相同，并且在 v_0 处满足强度为 $\alpha_{v_0} := \alpha_{v_1} + \alpha_{v_2}$ 的 δ 耦合条件。那么

$$\lambda_k(H) \leq \lambda_k(\widetilde{H})$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。

˜ ˜证明。分别与 H 和 H 相关联的二次型 h 和 h 满足 ˜ ˜dom $h \subseteq$ dom h。特别地，每个 $f \in$ do m h 都满足 $f(v_0) = f(v_1) = f(v_2)$，由引理 2.3 可得

$$\widetilde{h}(f) - h(f) = \alpha_{v_0}|f(v_0)|^2 - \alpha_{v_1}|f(v_1)|^2 - \alpha_{v_2}|f(v_2)|^2 = 0.$$

根据极小极大原理，即可得到所述结论。 □

以上述方式连接两个 δ 耦合可能只会增大特征值，而对于 δ' 耦合，情况则更为复杂。

定理 5.7（[69, 定理 4.2]）。设 Γ 为紧致度量图，$q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实数，v_1、$v_2 \in \mathcal{V}$ 满足 $v_1 \neq v_2$，并设 H 为作用于 $L^2(\Gamma)$ 上的 Schr ¨odinger 算子，其势为 q，在顶点 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_1, v_2\}$处满足任意自伴耦合条件，并在 v_1 和 v_2处分别满足强度为 β_{v_1}、$\beta_{v_2} \in \mathbb{R}$ 的 δ' 耦合条件。˜记由 Γ 通过连接 v_1 和 v_2 形成一个单一

顶点 v_0得到的图为 $\widetilde{H}$ 。此外，设 $\widetilde{H}$ 为作用于 $L^2(\widetilde{\Gamma})$ 上的自伴 Schr¨odinger 算子，它在除 v_0 外的所有顶点处具有与 H 相同的势和耦合条件，并在 v_0 处满足强度为 $\beta_{v_0} := \beta_{v_1} + \beta_{v_2}$ 的 δ' 耦合条件。

(i) *If* $\beta_{v_1}, \beta_{v_2} \geq 0$, *or* $\beta_{v_1} \cdot \beta_{v_2} < 0$ *and* $\beta_{v_0} < 0$, *then* $\lambda_k(\widetilde{H}) \leq \lambda_k(H)$ *for all* $k \in \mathbb{N}$.

(ii) *If* $\beta_{v_1}, \beta_{v_2} < 0$, *or* $\beta_{v_1} \cdot \beta_{v_2} < 0$ *and* $\beta_{v_0} \geq 0$, *then* $\lambda_k(H) \leq \lambda_k(\widetilde{H})$ *for all* $k \in \mathbb{N}$.

~ ~证明。再次考虑分别对应于 H 和 H 的二次型 h 和 h , ~。首先，考虑 β_{v_1}、 β_{v_2}、 $\beta_{v_0} \neq 0$ 的情形。此时 dom $h =$ dom h，且对于 $f \in \operatorname{dom} h$ ，有

$$\widetilde{h}(f) - h(f) = \frac{1}{\beta_{v_0}} \left| \sum_{j=1}^{\deg(v_0)} F_j(v_0) \right|^2 - \frac{1}{\beta_{v_1}} \left| \sum_{j=1}^{\deg(v_1)} F_j(v_1) \right|^2 - \frac{1}{\beta_{v_2}} \left| \sum_{j=1}^{\deg(v_2)} F_j(v_2) \right|^2 .$$

现在，根据 β_{v_1}、 β_{v_2}、 β_{v_0} 的符号进行分类讨论，即可得到相应的结论。

对于 $\beta_{v_0} = 0$，我们有 $\beta_{v_1} = -\beta_{v_2}$，并且 dom $\widetilde{h} \subseteq$ dom h，且对于 $f \in \operatorname{dom} h$， $\sum^{\deg(v_0)}{}_{j=1}$ $F_j(v_0) = 0$，因此

$$\sum_{j=1}^{\deg(v_1)} F_j(v_1) = - \sum_{j=1}^{\deg(v_2)} F_j(v_2).$$

~ ~因此，对于所有 $f \in \operatorname{dom} h$，均有 $h(f) - h(f) = 0$，结论得证。

在$h(f) = h(f)$ 或 $\beta_{v_1} = \beta_{v_2} = 0$ 对所有 $f \in \operatorname{dom} h$ 的情形下，我们有 dom $\widetilde{h} \subseteq$ dom h 并且再次 ~

5.4. 平行边和悬挂边的展开。本节考察一种称为展开的变换，它将若干条平行边或若干条悬挂边替换为一条边。若边 e_1、 . . .、 $e_r \in \mathcal{E}$ 均与同一对顶点关联，则称它们为平行边。也就是说，要么存在 v_1、 $v_2 \in \mathcal{V}$ ，使得 $v_1 \neq v_2$ 和 $\{e_1, \ldots, e_r\} \subseteq \mathcal{E}_{v_1} \cap \mathcal{E}_{v_2}$；要么边 e_1、 . . .、 e_r 均为连接到同一顶点 $v \in \mathcal{V}$ 的环。

定义 5.8. 设 Γ 为一个紧致度量图，其中边 e_1、 . . .、 e_r ~彼此平行。若图 Γ 由 Γ 通过展开平行边 ~（即边 e_1、 . . .、 e_r）得到，则称之为如此： Γ 与 Γ具有相同的顶点集，且除 e_1、 . . .、 e_r 外，与 Γ 具有相同的边集和边长；此外， Γ 还有一条长度为 $L(e_1) + \cdots + L(e_r)$ 的边 $\widehat{e}$，它与边 e_1、 . . .、 e_r 中的每一条都关联到相同的顶点；参见图13。

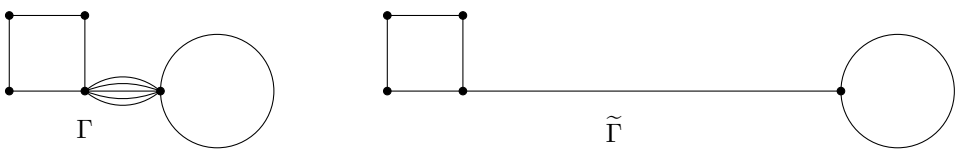


FIGURE 13. Γ中的展开平行边。

以下定理将针对 δ 顶点条件进行表述。更一般地，包括连续性-Kirchhoff 顶点条件下的最低非平凡特征值的情形，已在 [12, 定理 3.18] 中证明。与 [12], 不同，我们允许边上存在势，并证明 [12] 中的证明也适用于这种情形。

定理 5.9. 设 Γ 是一个紧致度量图，其中边 e_1、...、 e_r 相互平行。设 H 是作用于 Γ 上的 Schr ¨odinger 算子，其边上具有实势 $q \in L^\infty(\Gamma)$，并满足

$$q|_{e_j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, r,$$

~并在所有顶点处施加 δ 顶点条件。此外，设 Γ 为通过展开平行边 e_1，.....，e_r而得到的图~，并设 H为定义在 Γ 上的薛定谔算子¨~；除新边 $\widehat{e}$ 外，其在所有边上的势与 H 相同，且在 $\widehat{e}$上取常数零势~。此外，对于 H，我们假设在所有顶点 δ处施加与 H 具有相同强度的耦合条件。则

$$\lambda_1(\widetilde{H}) \leq \lambda_1(H)$$

~成立。若 $\lambda_1(H) \neq 0$，则甚至有 $\lambda_1(H) < \lambda_1(H)$。

证明。我们将在 $r = 2$的情形下证明该定理，即展开两条平行边 e_1、 e_2的情形。一般情形可通过迭代以下过程得到。设 v_1 和 v_2 为 e_1 和 e_2 所关联的顶点。我们仅考虑 v_1 和 v_2 为不同顶点的情形； $v_1 = v_2$的情形，即 e_1 和 e_2为环的情形，完全类似。

根据定理 3.1，我们可以选取 $f \in \ker(H - \lambda_1(H))$，使其在 Γ 上严格为正。分别考虑 f 在 e_1 和 e_2 上的限制 f_1 和 f_2 。不失一般性，令

$$a := f_1(0) = f_2(0) > 0, \qquad b := f_1(L(e_1)) = f_2(L(e_2)) > 0,$$

并且不失一般性地假设 $a < b$。此外，选取 $x_0 \in [0, L(e_1)]$，使得

$$f_1(x_0) = a \quad \text{and} \quad f_1([x_0, L(e_1)]) = [a, b].$$

我们区分两种情况。

情况 1： $\lambda_1(H) \geq 0$。在这种情况下，与 H~ ~对应的二次型 h 满足 $h(f) \geq 0$。在图 H 上定义函数 f：除 $\widehat{e}$ 外，在所有边上令其等于 f（将这些边按自然方式与 Γ 中的边对应）。在 $\widehat{e}$ 上，将其视为 $[0, L(e_1) + L(e_2)]$,，我们通过在点 x_0 处将边 e_2 及其上的函数 f_2 插入 e_1 中来定义 f，并令其在 x_0 左侧等于 f_1 （若非 $x_0 = 0$），在右侧恒等于 b 。也就是说，

$$\widetilde{f}_{\widehat{e}}(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [0, x_0], \\ f_2(x - x_0), & x \in [x_0, x_0 + L(e_2)], \\ b, & x \in [x_0 + L(e_2), L(e_1) + L(e_2)]. \end{cases}$$

该构造使得函数 $\widetilde{f}$属于 $\widetilde{H}^1(\widetilde{\Gamma})$，并满足

$$\widetilde{f}(v_1) = a = f(v_1) \quad \text{and} \quad \widetilde{f}(v_2) = b = f(v_2),$$

~ ~特别地，它属于与 H 对应的二次型 h 的定义域。此外，

$$\widetilde{h}(\widetilde{f}) = h(f) - \int_{e_1 \cup e_2} \left(|f'|^2 + q|f|^2 \right) + \int_{\widehat{e}} |\widetilde{f}'|^2 \leq h(f),$$

其中我们利用了 q 在 $e_1 \cup e_2$ 上也是非负的，以及

$$\int_{e_1 \cup e_2} |f'|^2 \geq \int_{\widehat{e}} |\widetilde{f}'|^2. \tag{5.3}$$

此外,

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} |\widetilde{f}|^2 = \int_{\Gamma} |f|^2 - \int_{e_1 \cup e_2} |f|^2 + \int_{\widehat{e}} |\widetilde{f}|^2 \geq \int_{\Gamma} |f|^2 \tag{5.4}$$

由于

$$\int_{\widehat{e}} |\widetilde{f}|^2 = \int_0^{x_0} |f_1|^2 + \int_0^{L(e_2)} |f_2|^2 + b^2(L(e_1) - x_0) \geq \int_{e_1} |f_1|^2 + \int_{e_2} |f_2|^2.$$

由 (5.3)、(5.4) 及 $h(f) \geq 0$ 可得

$$\lambda_1(\widetilde{H}) \leq \frac{\widetilde{h}(\widetilde{f})}{\int_{\widetilde{\Gamma}} |\widetilde{f}|^2} \leq \frac{h(f)}{\int_{\Gamma} |f|^2} = \lambda_1(H). \tag{5.5}$$

情形 2： $\lambda_1(H) < 0$。在此情形下，我们通过如下定义，对情况 1 中的构造作一点修改

$$\widetilde{f}_{\widehat{e}}(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [0, x_0], \\ a, & x \in [x_0, L(e_1)], \\ f_2(x - L(e_1)), & x \in [L(e_1), L(e_1) + L(e_2)]. \end{cases}$$

随后，类似于情况 1 中的计算可得

$$\widetilde{h}(\widetilde{f}) \leq h(f) < 0$$

and

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} |\widetilde{f}|^2 \leq \int_{\Gamma} |f|^2.$$

最后两个关系再次导出 (5.5)。

若 $\lambda_1(H) \neq 0$，则 f_1 不为常数，因此不等式 (5.5)（以及情形 2 中相应的不等式）是严格的。证明至此完成。□

上述证明中的论证关键依赖于特征函数在顶点处的连续性。由此可以构造一个在整个展开后的边 $\widehat{e}$ 上连续的检验函数。对于不要求函数在顶点处连续的顶点条件，定理 5.9 的结论未必成立，下面的例子便说明了这一点。

例 5.10。考虑一个图 Γ，它由两个顶点 v_1、v_2 和两条连接它们的任意有限长度的平行边 ℓ_1、ℓ_2 组成。令 H 为图 Γ 上对应于边上的恒等函数 $q = 0$、并在两个顶点 v_1 和 v_2 处满足反 Kirchhoff 顶点条件的 Schr¨odinger 算子。则 $\lambda_1(H) = 0$，相应的特征空间由如下函数张成：该函数在第一条边上恒为 1，而在第二条边上为~ -1。另一方面，将 Γ 展开后，得到图 $\widetilde{\Gamma}$，它同构于长度为 $\ell_1 + \ell_2$ 的区间（见图 14），而拉普拉斯算子 H 作用在

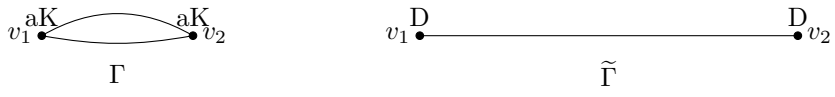


FIGURE 14. 例 5.10 中图的平行边展开。

$\sim\Gamma$ 满足反基尔霍夫顶点条件的算子等于区间上在两个端点处均满足 Dirichlet 边界条件的拉普拉斯算子。特别地,

$$\lambda_1(\widetilde{H}) > 0 = \lambda_1(H).$$

我们想指出的是，如果将上述示例中的反基尔霍夫条件替换为具有正强度的 δ' 顶点条件，则完全相同的构造仍然适用。

开放问题 5.11。例 5.10 表明，对于某些 δ' 顶点条件，展开平行边会使主特征值增大。能否针对 δ' 顶点条件证明这类一般性结论，并可能考虑耦合强度的符号?

接下来，我们考察一种相关的图操作，即 [12], 中提出的悬挂边展开；如果一条边 e 与一个度为1的顶点相接，我们就称它为悬挂边。

定义 5.12。设 Γ 为一个紧致度量图，其中边 e_1、.....、e_r 均为悬挂边，且都与同一个顶点 v_0 相接；也就是说， e_j 与 v_0~ 以及一个度为1的顶点 v_j 相接。若图 Γ 与 Γ 具有相同的顶点集（但不包括 v_1、.....、v_r），且具有相同的边集（但不包括 e_1、.....、e_r），此外还有一条长度为 $L(e_1) + \cdots + L(e_r)$ 的边 $\widehat{e}$，连接 v_0 与一个度为1的新顶点 $\widehat{v}$，则称图 Γ 是由 Γ 通过展开悬挂边~ e_1、.....、e_r 得到的；参见图 15。

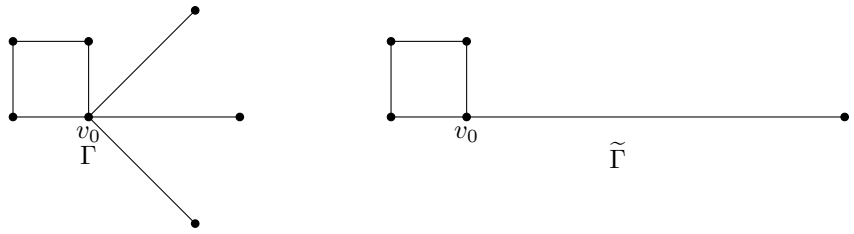


FIGURE 15. Γ中悬挂边的展开。

下面的定理是 [12], 中定理 3.18 (4) 的一个变体；该文考虑了在所有顶点施加 δ 或狄利克雷条件的情形，并纳入了连续性-基尔霍夫条件下第二特征值的情形；另一方面， [12] 中的定理是在无势情形下陈述的。

定理 5.13. 设 Γ 为一个紧致度量图，其中边 e_1、.....、e_r 均为悬挂边，且连接到同一顶点 v_0；设 v_j 表示与 v_0 不同、且 e_j、 $j = 1$、.....、r 与之相连的顶点。设 H 为作用在 Γ 上的 Schr¨odinger 算子，其各边上的实势为 $q \in L^\infty(\Gamma)$，并满足

$$q|_{e_j} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, r,$$

并且在每个顶点 $v \in \mathcal{V}$ 处施加强度为 α_v 的 δ 顶点条件。我们假设

$$\alpha_{v_j} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

~此外，设 Γ 为通过将悬挂边 e_1、.....、e_r~ 展开为一条连接到一个新的度为1的顶点 $\widehat{v}$ 的边 $\widehat{e}$ 而得到的图；设 H 为作用在 Γ 上的 Schr¨odinger~算子，除新边 $\widehat{e}$ 外，其余各边上的势均与 H 相同，而在 $\widehat{e}$ 上取恒定零势。此外，对于 H ，我们假设除 $\widehat{v}$ 外（但包括 v_0）的所有顶点上均施加与 H 相同强度的 δ 顶点条件，并在 $\widehat{v}$ 上施加诺伊曼边界条件。于是

$$\lambda_1(\widetilde{H}) \leq \lambda_1(H)$$

~成立。如果 $\lambda_1(H) \neq 0$，那么甚至 $\lambda_1(H) < \lambda_1(H)$ 也成立。

证明。证明与定理 5.9 的证明非常相似，这里仅作简要说明。我们可以假设这里 $r = 2$，即只展开两条悬挂边。一般情形可通过多次应用此情形得到。从一个处处为正的函数 $f \in \ker(H - \lambda_1(H))$ 出发，我们考虑定义在 Γ 上的检验函数 $\sim f$，它在除 $\widehat{e}$ 以外的所有边上都等于 f；此处利用这些边与原图 Γ中的边之间的自然对应关系。在新边 $\widehat{e}$ 上，我们根据 $\lambda_1(H)$ 是非负还是负来定义 $\sim f$。如果 $\lambda_1(H) \geq 0$，取 $x_0 \in e_1 \cup e_2$ 使得 $f|_{e_1 \cup e_2}$ 在 x_0 处取得最大值；不失一般性，假设 $x_0 \in e_1$。然后，在与区间 $[0, L(e_1) + L(e_2)]$, 相对应的 $\widehat{e}$ 上，我们令

$$\widetilde{f}_{\widehat{e}}(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [0, x_0], \\ f_1(x_0), & x \in [x_0, x_0 + L(e_2)], \\ f_1(x - L(e_2)), & x \in [x_0 + L(e_2), L(e_1) + L(e_2)]; \end{cases}$$

换言之，我们将边 e_2 在位置 x_0 移植到 e_1 上，并用一个适当的常数替换原特征函数在 e_2 上的取值。由此构造得到一个定义在 Γ 上的函数 f，它在每条边内部以及连接顶点 v_0 处连续，并属于与 H 相关的二次型 h 的定义域。现在，进行与定理 5.9 的证明类似的计算，可得

$$\lambda_1(\widetilde{H}) \leq \frac{\widetilde{h}(\widetilde{f})}{\int_{\widetilde{\Gamma}} |\widetilde{f}|^2} \leq \frac{h(f)}{\int_\Gamma |f|^2} = \lambda_1(H).$$

对于 $\lambda_1(H) \leq 0$ 的情形，可以类似处理；唯一的区别是，x_0 的选取应使 $f|_{e_1 \cup e_2}$ 在此处取得最小值，而非最大值。

如果 $\lambda_1(H) \neq 0$，那么 f_2 并非常数，因此上述计算甚至能给出瑞利商的严格不等式。这意味着严格的特征值不等式。□

前一个证明中的构造利用了这样一个事实：移除悬挂边（以便将其移植到其他位置）既不会改变顶点 v_0 处二次型定义域所要求的顶点条件，也不会改变二次型中的顶点项。对于例如 δ' 或反基尔霍夫顶点条件，情况则截然不同。事实上，下面的例子表明，对于这类条件，前一个定理的结论可能不成立。

例 5.14. 考虑一个星形图 Γ，它由两条长度分别为 ℓ_1、ℓ_2 的悬挂边组成，并连接到同一顶点 v_0；在 Γ 上考虑拉普拉斯算子，在 v_0 处施加反基尔霍夫顶点条件，并在度为一的顶点处施加 Neumann 顶点条件。则 $\lambda_1(H) = 0$，且特征空间由如下函数张成：该函数在一条边上恒为 1，而在另一条边上为 -1。然而，将悬挂边展开并在 v_0 处保持反基尔霍夫条件后，实际上得到一个区间，其一端满足 Dirichlet 边界条件，另一端满足 Neumann 边界条件，见图 16。然而，拉普拉斯算子 H



FIGURE 16. 例 5.14 中悬挂边的展开。

满足这些条件

$$\lambda_1(\widetilde{H}) = \frac{\pi^2}{4(\ell_1 + \ell_2)^2} > 0 = \lambda_1(H).$$

如果将反基尔霍夫条件替换为强度为正的 δ' 条件，完全相同的构造仍然适用。在这种情况下，也会出现相同的谱效应。

开放问题 5.15。在例 5.14 中，我们看到了一种情况：展开悬挂边可使 δ' 顶点条件下的第一特征值增大。能否证明此类结论的一般形式，且结论可能取决于 δ' 耦合的强度符号？

6. Hadamard-type formulas

本节研究哈达玛型公式，即特征值和特征向量关于顶点条件扰动的变化。

注 6.1。一般而言，顶点条件由某些矩阵参数化，即由巴拿赫空间中的元素参数化，因此求导需按例如弗雷歇导数的意义来理解：设 X 为巴拿赫空间，$U \subseteq X$ 为开集，且 $F\colon U \to \mathbb{C}$ 弗雷歇可微；参见 [75, 第 21]节。那么 F' 是从 U到 $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ 的映射，其中 $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$表示 X上有界线性泛函的空间。因此，对于 $x \in U$, $F'(x)\colon X \to \mathbb{C}$是线性且有界的。在我们的情形中，$X$将是有限维的，$X = \mathbb{C}^{d\times d}$ 对某个 d成立；于是对于 $x \in U$，我们可以用偏导数矩阵表示$F'(x)$。

定理 6.2. 设 Γ 为一个紧致度量图，$q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实数，$v_0 \in \mathcal{V}$ 和H 是定义在 Γ 上、势为 q 的薛定谔算子，在顶点 $v \in \mathcal{V}\setminus\{v_0\}$ 处满足命题 2.1 中任意的自伴耦合条件，并在顶点 v_0 处满足一个具有非平凡罗宾部分的自伴耦合条件 $P_{v_0,\mathrm{R}} \neq 0$。记 Λ_{v_0} 为 $\operatorname{ran} P_{v_0,\mathrm{R}}$ 中自伴且可逆的耦合算子。设 λ 为 H 的一个单特征值，f 为相应的归一化特征函数。那么 λ 和 f 关于 Λ_{v_0} 可微，并且有

$$\lambda'(\Lambda_{v_0})\colon \widetilde{\Lambda_{v_0}} \mapsto \left\langle \widetilde{\Lambda_{v_0}} P_{v_0,\mathrm{R}} F(v_0), P_{v_0,\mathrm{R}} F(v_0)\right\rangle$$

也就是说，

$$\lambda'(\Lambda_{v_0})(\widetilde{\Lambda_{v_0}}) = \left\langle \widetilde{\Lambda_{v_0}} P_{v_0,\mathrm{R}} F(v_0), P_{v_0,\mathrm{R}} F(v_0)\right\rangle$$

对 $\operatorname{ran} P_{v_0,\mathrm{R}}$ 中的所有算子 Λ_{v_0}，均有。

注 6.3. 我们想指出，$\operatorname{ran} P_{v_0,\mathrm{R}}$ 是一个有限维向量空间，因此 Λ_{v_0} 可以表示为厄米矩阵。因此，关于 Λ_{v_0} 求导实际上就是在一个有限维空间上求导。

定理 6.2 的证明。根据 [13, 定理 3.8 和定理 3.10]，以及描述顶点条件的不同等价方式（例如参见 [49, 定理 5]），特征值和特征函数关于 Λ_{v_0} 可微。令 $d := \dim \operatorname{ran} P_{v_0,\mathrm{R}} > 0$和 $j,k \in \{1,\dots,d\}$。我们简记 $\partial_{jk} := \dfrac{\partial}{\partial (\Lambda_{v_0})_{j,k}}$为偏导数。

我们检验 f 关于参数各分量的偏导数仍属于 $\operatorname{dom} h$。只需检验其导数属于 $\widetilde{H}^1(\Gamma)$，因为条件$P_{v,\mathrm{D}} F(v) = 0$ 对所有 $v \in \mathcal{V}$ 都成立，是一个闭条件，因此对关于参数取偏导数的运算保持稳定。注意，在每条边 $e \in \mathcal{E}$ 上，f 都是满足特征值方程 $-f'' + qf = \lambda f$ 的两个基函数的线性组合；f 对 Λ_{v_0} 的依赖仅体现在这些基函数的系数中。因此，在每条边上，$\partial_{jk} f$ 仍属于 H^1（因为边的长度有限）。于是，$\partial_{jk} f \in \widetilde{H}^1(\Gamma)$，从而 $\partial_{jk} f \in$ 属于 $\operatorname{dom} h$。

由于 f 已归一化，我们得到

$$2\operatorname{Re}\langle f, \partial_{jk} f\rangle = 0, \quad j,k = 1,\dots,d.$$

此外，由于 $h(f) = \lambda$，我们得到

$$\partial_{jk}\lambda(\Lambda_{v_0}) = \big(P_{v_0,\mathrm{R}}F(v_0)\big)_k\overline{\big(P_{v_0,\mathrm{R}}F(v_0)\big)_j} + 2\,\mathrm{Re}\,h(f,\partial_{jk}f).$$

现在，由于 $f \in \mathrm{dom}\,H \text{ with } Hf = \lambda f \text{ and } \partial_{jk}f \in \mathrm{dom}\ h$，我们观察到

$$\mathrm{Re}\,h(f,\partial_{jk}f) = \mathrm{Re}\langle Hf,\partial_{jk}f\rangle = \lambda\,\mathrm{Re}\langle f,\partial_{jk}f\rangle = 0,$$

因此

$$\partial_{jk}\lambda(\Lambda_{v_0}) = \big(P_{v_0,\mathrm{R}}F(v_0)\big)_k\overline{\big(P_{v_0,\mathrm{R}}F(v_0)\big)_j}.$$

我们注意到，这个偏导数实际上是常数。

关于典范基 $\big((\delta_{jk,\ lm})_{l,\ m\in\{1,\dots,d\}} :\ j,k\ \in\ \{1,\dots,d\}\big)$ of$\mathbb{C}^{d\times d}$，我们观察到

$$\begin{aligned}\lambda'(\Lambda_{v_0})((\delta_{jk,lm})) = \partial_{jk}\lambda(\Lambda_{v_0}) &= \big(P_{v_0,\mathrm{R}}F(v_0)\big)_k\overline{\big(P_{v_0,\mathrm{R}}F(v_0)\big)_j}\\ &= \big\langle((\delta_{jk,lm})P_{v_0,\mathrm{R}}F(v_0), P_{v_0,\mathrm{R}}F(v_0)\big\rangle.\end{aligned}$$

由此得到所述结论。 □

现在我们将专门讨论 δ 和 δ' 耦合条件；我们将以两个推论的形式表述。

推论 6.4（[13, 命题 4.2]）。设 Γ 是一个紧致度量图，$q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实数，$v_0 \in \mathcal{V}$ 且 H 是定义在 Γ 上、势为 q 的薛定谔算子；在顶点 $v \in \mathcal{V}\setminus\{v_0\}$ 处满足命题 2.1 中的任意自伴耦合条件，并在顶点 v_0 处满足强度为 α 的 δ 耦合条件。设 λ 是一个单特征值，f 是对应的归一化特征函数。那么 λ 和 f 关于 α 可微，并且有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha) = |f(v_0)|^2.$$

证明。由定理 6.2 可得此结论；此外，对于 δ 耦合条件，Λ_{v_0} 是乘以 $^{\alpha}\,_{\deg(v_0)}$ 的算子。□

推论 6.5。设 Γ 是一个紧致度量图，$q \in L^\infty(\Gamma)$ 为实数，$v_0 \in \mathcal{V}$ 且 H 是定义在 Γ 上、势为 q 的薛定谔算子；在顶点 $v \in \mathcal{V}\setminus\{v_0\}$ 处满足命题 2.1 中的任意自伴耦合条件，并在顶点 v_0 处满足强度为 β 的 δ' 耦合条件。设 λ 是一个单特征值，f 是对应的归一化特征函数。那么 λ 和 f 关于 $\frac{1}{\beta}$ 及 β 均可微，并且有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\frac{1}{\beta}}(\beta) = \left|\sum_{j=1}^{\deg(v_0)} F_j(v_0)\right|^2 \qquad and \qquad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\beta}(\beta) = -\frac{1}{\beta^2}\left|\sum_{j=1}^{\deg(v_0)} F_j(v_0)\right|^2.$$

证明。第一个等式的证明由定理 6.2 以及以下事实得出：对于 δ' 耦合条件，我们有 Λ_{v_0} 是乘以$\deg_\beta{}^{v_0}$的乘法算子。随后可通过链式法则求得 λ 关于 β 的导数。□

7. Bounds for the lowest eigenvalue

在本节最后，我们回顾度量图上 Schr¨odinger 算子的基态特征值在某些特殊顶点条件下的一些已知界。我们有意不讨论连续性-Kirchhoff 顶点条件的情形，此时$\lambda_1(H) = 0$；不过需要指出，已有大量文献研究最低正特征值（亦称谱隙）及其高阶特征值的估计。相关内容及其中的参考文献可参见

[3, 12, 18, 19, 23, 36, 37, 50, 51,53, 63, 64, 67, 68] 。

对于 δ 耦合条件，有如下下界，其中 H 的总正相互作用强度和总负相互作用强度分别定义为

$$I_+ := \int_\Gamma q_+ + \sum_{v:\alpha_v>0} \alpha_v \quad \text{and} \quad I_- := \int_\Gamma q_- - \sum_{v:\alpha_v<0} \alpha_v, \tag{7.1}$$

分别表示势 q 的正部和负部。

定理 7.1（[33, 定理 1]）。设 Γ 是一张总长度为 L 的紧致连通度量图，并设 H 是定义在 Γ 上、具有实值势 $q \in L^\infty(\Gamma)$ 的薛定谔算子，且每个顶点 $v \in \mathcal{V}$ 处均满足强度为 α_v 的 δ 耦合条件。此外，设 H 的正、负相互作用强度总量由（7.1）给出。则第一特征值 $\lambda_1(H)$ 满足

$$\lambda_1(H) \geq \lambda_1(\widehat{H}),$$

其中，$\widehat{H}$ 是定义在长度为 L 的区间上的薛定谔算子，其势为零（即拉普拉斯算子）；区间一端满足强度为 I_+ 的 δ 顶点条件（即罗宾边界条件），另一端满足强度为 I_- 的 δ 顶点条件。换言之，$\lambda_1(H)$ 的下界为 k^2，其中 k 是久期方程的最小解

$$\left(k + \frac{I_-I_+}{k}\right)\tan(kL) = I_+ - I_-;$$

参见图 17。

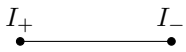


FIGURE 17. 图以及 H的 δ 强度。

后一个定理可以被视为一个等周结果：在所有长度固定且正、负相互作用强度总和固定、在所有图上均带有 δ 耦合条件的 Schr¨o-丁格算子中，第一特征值在不带边势函数的区间上取得最小值。

下面的例子表明，在具有 δ顶点条件的情况下，$\lambda_1(H)$的上界或许存在，并且仅取决于 δ 耦合的强度和图的总长度。对于具有连续性-基尔霍夫顶点条件的拉普拉斯算子的首个非平凡特征值，这样的上界不可能存在，简单的反例即可说明这一点；例如参见 [37]。然而，在这种情况下，最低特征值始终为零，因此是有界的。

例 7.2。考虑一个总长度为 $L = 1$ 的星形图，它有 E 条长度为$l = 1/E$的边，见图 18。我们在所有度为1的顶点处施加诺伊曼边界条件，并在星形顶点处施加一个强度为 $\alpha = 1$ 的 δ 耦合条件。若将各条边参数化为区间 $(0, l)$ 的 E 个副本，并令端点 l对应于星形顶点，则 f 在任意边 $e \in \mathcal{E}$ 上的限制 f_e 由下式给出

$$f_e(x) = A_e \cos(kx), \quad x \in (0, l),$$

其中，$\lambda = k^2$ 是特征值。此外，星形顶点处的顶点条件可以表述为

$$f_e(l) \text{ is independent of } e \quad \text{and} \quad -\sum_{e\in\mathcal{E}} f_e'(l) = f_e(l), \quad e \in \mathcal{E}.$$

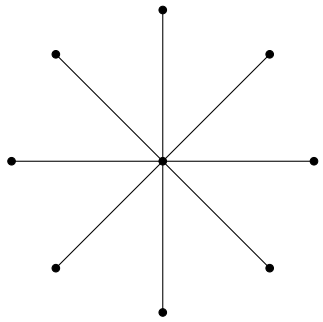


FIGURE 18. 等边 E星形图， $E = 8$。

通过简单计算，可得到两种情况，即

$$k \in \frac{\pi}{2l}\mathbb{N}$$

或 k 求解

$$\frac{1}{k} = E \tan\left(\frac{k}{E}\right).$$

当右端趋于 k 时， $E \to \infty$存在一列上述问题的解k_E ，当 $E \to \infty$时收敛于 1。因此，最低特征值保持有界。

将任意常数函数代入瑞利商，即可得到带有 δ 耦合条件的拉普拉斯算子最低特征值的一个平凡上界：

命题 7.3。设 H 是紧致度量图Γ 上的一个薛定谔算子，其实值势为 q ，且每个顶点 $v \in \mathcal{V}$处均满足强度为 α_v 的 δ 耦合条件。那么

$$\lambda_1(H) \leq \frac{1}{L(\Gamma)}\left(\int_\Gamma q + \sum_{v\in\mathcal{V}} \alpha_v\right),$$

其中 $L(\Gamma)$ 表示 Γ的总长度。

上述估计仅在 $q = 0$ 且对所有 $v \in \mathcal{V}$均有 $\alpha_v = 0$ 时取等号，此时 $\lambda_1(H) = 0$。然而，一般而言，该估计可能相当粗略，尤其是在耦合系数较大的情况下：若对所有 v均有 $\alpha_v \to +\infty$ ，则 $\lambda_1(H)$ 收敛于每个顶点处满足狄利克雷边界条件的薛定谔算子的最低特征值——在无势情形下，该值为

$$\frac{\pi^2}{L_{\max}^2} \leq \frac{E^2\pi^2}{L(\Gamma)^2},$$

其中 $L_{\max}$ 是 Γ中最长的边长。然而，在这种情况下，命题 7.3 中的界趋于 $+\infty$ 。

下述命题表明，仔细研究花图的特征值或许能得到更好的界。

命题 7.4. 设 Γ 是一张紧致度量图，其顶点集为 $\mathcal{V}$，边集为 $\mathcal{E}$，边长为 $L(e)$、$e \in \mathcal{E}$。设 H 是作用于 Γ 上的薛定谔算子，具有实值势 q ，且在每个顶点 $v \in \mathcal{V}$ 处满足强度为 α_v 的 δ 耦合条件。我们假设

$$\alpha := \sum_{v\in\mathcal{V}} \alpha_v > 0.$$

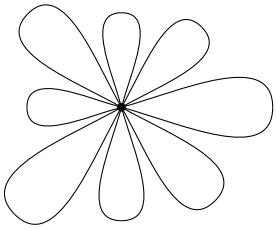


FIGURE 19. 一个带有 $E = 8$ 条边的花图。

^此外，设 Γ 是具有 E 条边的花图，见图 19，其边长与 Γ 相同，均为^；设 H 是作用于 Γ 上的薛定谔算子，具有相同的势 q，^按自然方式移植到 Γ 上，并在唯一的顶点处满足强度为 α 的 δ 顶点条件。那么

$$\lambda_1(H) \le \lambda_1(\widehat{H}). \tag{7.2}$$

特别地，如果 $q = 0$在 Γ上为常数，那么 $\lambda_1(H)$的上界为 $\lambda = k^2$，其中 k 是久期方程的最小非负解

$$2k \sum_{e \in \mathcal{E}} \tan\left(\frac{kL(e)}{2}\right) = \alpha. \tag{7.3}$$

^ ^证明。图 Γ 和算子 H 可以通过将所有^个顶点连接起来，由 Γ 和 H 得到，而定理 5.6 给出了（7.2）。剩下需要证明的是，在 $q = 0$ 恒等的情况下，$\lambda_1(H)$对应于（7.3）的最低非负解。事实上，由于⌢$\lambda_1(H) > 0$，相应的特征函数是一个正弦型函数，并且根据定理 3.1，可以^在所有 Γ 上取正值。此外，其限制 f_e 到任意边e，参数化为 $[-L(e)/2, L(e)/2]$，在端点 $L(e)/2$处的取值与在 $L(e)/2$处的取值相同。因此，

$$f_e(x) = A_e \cos(kx), \quad x \in \left[-\frac{L(e)}{2}, \frac{L(e)}{2}\right],$$

^对每条边 e均成立。将其代入 δ 唯一顶点处的 Γ顶点条件，可得（7.3）。□

如果所有耦合系数均为负数，则利用定理 5.7 (ii)，可以对 δ' 顶点条件进行类似推理。这得到以下结论。

命题 7.5. 设 Γ 为一个紧致度量图，其顶点集为 $\mathcal{V}$，边集为 $\mathcal{E}$，边长为 $L(e)$，$e \in \mathcal{E}$。设 H 为定义在 Γ 上的薛定谔算子，其势 q 为实值，并且在每个顶点 $v \in \mathcal{V}$处满足强度为 $\beta_v < 0$ 的 δ' 耦合条件。令

$$\beta := \sum_{v \in \mathcal{V}} \beta_v.$$

^此外，设 Γ为具有 E 条边且边长与 Γ相同的花图，并且^设 H 为定义在 Γ 上的薛定谔算子，其势 q与前者相同，以自然方式移植到⌢Γ 上，并在唯一顶点处满足强度为 β 的 δ' 顶点条件。那么

$$\lambda_1(H) \le \lambda_1(\widehat{H}).$$

我们以提出两个开放问题作为本节的结尾。

开放问题 7.6. 证明带有顶点耦合的 Schr ¨odinger 算子的主特征值存在一个尖锐的上界，例如，当耦合系数趋于 ∞ 时，该上界在渐近意义下是尖锐的。

注意， [4, 定理 1.7] 以及 [16, 命题 7] 给出了带有 δ 耦合与连续性-基尔霍夫条件的特征值之差的上界。在 [4, 定理 1.7]的情况下，该差值随 δ 顶点耦合强度线性增长。

开放问题 7.7. 证明带有依赖于图的总长度和耦合强度的 δ' 顶点条件的薛定谔算子最低特征值的紧上界和下界。

References

[1] L. Alon 和 R. Band, *Neumann domains on quantum graphs*, 《亨利·庞加莱年刊》22（2021年），第10期, 3391–3454页。[2] L. Alon、R. Band 和 G. Berkolaiko, *Nodal statistics on quantum graphs*, 《数学物理通讯》362（2018年），第3期，909–948页。[3] R. Band 和 G. L´evy, *Quantum graphs which optimize the spectral gap*, 《亨利·庞加莱年刊》18（2017年），第10期，3269–3323页。[4] R. Band、H. Schanz 和 G. Sofer, *Differences between Robin and Neumann eigenvalues on metric graphs* 2212 12531 2022 30 , arXiv 预印本。（），第[5] 页。*Schrödinger and polyharmonic operators on infinite graphs: parabolic well-posedness and p-independence of spectra* 495 S. Becker、F. Gregorio 和 D. Mugnolo, [6] , 《应用数学与分析杂志》（2021年），第2期，论文编号124748，共44页。*Spectral enclosures for non-self adjoint extensions of symmetric operators* 275 2018 1808 1888 J. Behrndt、M. Langer、V. Lotoreichik 和 J. Rohleder, [7] 《函数分析杂志》（），*Schrödinger operators with δ and δ′-interactions on Lipschitz surfaces and chromatic numbers of associated partitions* 26 J. Behrndt、P. Exner 和 V. Lotoreichik, [8] 《数学物理评论》（2014年），第8期，1450015，共43页。*On the number of negative eigenvalues of the Laplacian on a metric graph* 43 2010 474006, 11 J. Behrndt 和 A. Luger, [9] , 《物理学杂志 A》（），第 *A characteristic equation associated to an eigenvalue problem on c 2 -networks*页。[10] J. von Below, *Three-dimensional elastic beam frames: rigid joint conditions in variational and differential formulation* 148 2022 4, 1586 1623 , 《线性代数及其应用》71（1985年），309–325页。[11] G. Berkolaiko 和 M. Ettehad, *Edge connectivity and the spectral gap of combinatorial and quantum graphs* 50 2017 36, 365201, 29 , 《应用数学研究》（），第–期。[12] G. Berkolaiko、J. B. Kennedy、P. Kurasov 和 D. Mugnolo, *Surgery principles for the spectral analysis of quantum graphs* 372 2019 7, 5153 5197 , 《物理学杂志 A》（），第[13] 页。*Dependence of the spectrum of a quantum graph on vertex conditions and edge lengths* 117 137, 84, G. Berkolaiko、J. B. Kennedy、P. Kurasov 和 D. Mugnolo, [14] , 《美国数学会汇刊》（），第–期。[15] G. Berkolaiko 和 P. Kuchment, *Limits of quantum graph operators with shrinking edges* 352 2019 632 669 , 《谱几何》，–, 《纯粹数学专题讨论会论文集》，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012年。[16] G. Berkolaiko 和 P. Kuchment, 《量子图导论》，《数学调查与专著》186，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2013年。*Comparing the spectrum of Schrödinger operators on quantum graphs* 2212 13954 2022 10 G. Berkolaiko、Y. Latushkin 和 S. Sukhtaiev, [17] , 《数学进展》（），–。*Spectral Statistics for the Dirac Operator on Graphs* P. Bifulco 和 J. Kerner, [18] , arXiv 预印本，（），第。*Sharp diameter bound on the spectral gap for quantum graphs* 149 2021 7, 2879 2890 页。[19] J. Bolte 和 J. Harrison, *Gaps between consecutive eigenvalues for compact metric graphs* 2301 07149 , 《物理学杂志A辑：数学与一般》36（2003年），2747–2769页：[20] D. Borthwick、L. Corsi 和 K. Jones, *The spectrum of the continuous Laplacian on a graph*, 《美国数学会会刊》（），第–期。[21] D. Borthwick、E. M. Harrell II 和 H. Yu, *On the ground state of quantum graphs with attractive δ couplings*, 预印本，arXiv：。。[22] C. Cattaneo, *Spectral theory of infinite quantum graphs* ´ 19 2018 11, 3457 3510 , 《数学月刊》124（1997年），第3期，215–235页。[23] P. Exner 和 M. Jex, *Extremal properties of eigenvalues for a metric graph*, 《物理快报 A》376（2012年），713–717页。 P. Exner、A. Kostenko、M. Malamud 和 H. Neidhardt, , 《亨利·庞加莱年刊》（），第–期。 L. Friedlander, , 《傅里叶研究所年刊》55（2005年），199–211页。

[24] F. Gregorio 和 D. Mugnolo, *Bi-Laplacians on graphs and networks*, 《演化方程杂志》20（2020年），第1期，191–232页。[25] F. Gregorio 和 D. Mugnolo, *Higher order operators on networks: hyperbolic and parabolic theory* 92 2020 6, 50, 22 , 《积分方程与算子理论》（），第[26] 期，论文编号，第 *On Agmon metrics and exponential localization for quantum graphs* 359 2018 2, 429 448 页。[27] E. M. Harrell II 和 A. V. Maltsev, *Localization and landscape functions on quantum graphs*, 《数学物理通讯》（），第–期。[28] E. M. Harrell II 和 A. V. Maltsev, ¨ *On Pleijel's nodal domain theorem*, 《美国数学会 *for quantum graphs* ´ 22 2021 11, 3841 3870 汇刊》373（2020年），第3期，1701–1729页。[29] M. Hofmann、J. B. Kennedy、D. Mugnolo 和 M. Pl *Bounds on the negative eigenvalues of Laplacians on finite metric graphs*umer, 《亨利·庞加莱年刊》（），第–期。[30] A. Hussein, ´, 《积分方程与算子理论》76（2013年），第3期，381–401页。 *Non-self-adjoint graphs*A. Hussein、D. Krejčiřík 和 P. Siegl, [31] *Quantum graphs with mixed dynamics: the transport/diffusion case* 46 2013 , 《美国数学会汇刊》367（2015年），第4期，2921–2957页。[32] A. Hussein 和 D. Mugnolo, *Dirichlet forms for singular one-dimensional operators and on graphs* 9 2009 637 659 , 《物理学杂志A》（），第23期，235202，共19页。[33] U. Kant、T. Klaus、J. Voigt 和 M. Weber, *Schrödinger operators on graphs: Symmetrization and Eulerian cycles* 144 2016 1197 1207 。《演化方程杂志》（），–。[34] G. Karreskog、P. Kurasov 和 I. Trygg Kupersmidt, [35] ,《美国数学会会刊》（），–。[T. Kato, 《线性算子的扰动理论》, Springer-Verlag, 柏林, 1995年。] 358, M. Keller、D. Lenz 和 R. Wojciechowski, 《图与离散狄利克雷空间》, 数学科学基础丛书 [36] 数学科学基本原理 *A family of diameter-based eigenvalue bounds for quantum graphs*Springer, Cham, 2021年。¨J. B. Kennedy, [37] ,《网络理论中的离散与连续模型》，213–239页，《算子理论：进展与应用》281, Birkhäuser/Springer, Cham, 2020年。 ´ *On the spectral gap of a quantum* J. B. Kennedy、*graph* ´ 17 2016 9, 2439 2473 P. Kurasov、G. Malenov[38] a 和 D. Mugnolo,《亨利·庞加莱年刊》（），第–期。 *On the eigenvalues of quantum graph Laplacians with large complex δ couplings* 77 2020 2, 133 161 J. B. Kennedy 和 R. Lang, [39] ,《葡萄牙数学》（），第–期。 *On the hot spots of quantum graphs*J. B. Kennedy 和 J. Rohleder, [40] ,《纯粹与应用分析通讯》20（2021年），第9期，3029–3063页。 *Self-adjoint and Markovian extensions of infinite quantum graphs* 2 105 2022 2, 1262 1313 A. Kostenko、D. Mugnolo 和 N. Nicolussi, [41] ,《伦敦数学会杂志》（）（），第–期。 *Laplacians on infinite graphs: discrete vs. continuous*A. Kostenko 和 N. Nicolussi, [42] , 第八届欧洲数学大会论文集（2021年），即将出版。[43] A. Kostenko 和 N. Nicolussi, 《无限图上的拉普拉斯算子》,《欧洲数学会回忆录》，即将出版。 *Spectral estimates for infinite quantum graphs*A. Kostenko 和 N. Nicolussi, [44] ,《Calc. Var. Partial Differential Equations》58（2019年），第1期，论文编号15，共40页。 *Quantum graphs on radially symmetric antitrees*A. Kostenko 和 N. Nicolussi, [45] ,《谱理论杂志》11（2021年），第2期，411–460页。 *Kirchoff's rule for quantum wires*V. Kostrykin 和 R. Schrader, [46] ,《物理学杂志A辑：数学与一般》32（1999年），595–630页。 *Laplacians on metric graphs: eigenvalues resolvents and semigroups* V. Kostrykin、415, J. Potthoff 和 R. Schrader: [47] ,《量子图及其应用》, *Contraction semigroups on metric graphs*, 《当代数学》，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（2006年），201–225页。[48] V. Kostrykin、J. Potthoff 和 R. Schrader: *Quantum graphs: I. Some basic structures*。载于：《图上的分析及其应用》，P. Exner（编）等，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，《纯粹数学专题讨论会论文集》77（2008年），423–458页。[49] P. Kuchment, *Quantum graphs: an introduction and a brief survey*, 《波与随机介质》14（2004年），第1期，S107—S128页。[50] P. Kuchment: *On the spectral gap for Laplacians on metric graphs*。载于：《图上的分析及其应用》，P. Exner（编）等，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，《纯粹数学专题讨论会论文集》77（2008年），291–314页。[51] P. Kurasov, *Spectral gap for complete graphs: upper and lower estimates*, 《波兰物理学报A辑》124（2013年），1060–1062页。[52] P. Kurasov, *On the ground state for quantum graphs* 109 2019 11, , 《网络的数学 2491 2512 技术》，121–132页，Springer 数学与统计会议论文集，128，Springer，Cham，2015年。[53] P. Kurasov, ´ *Spectral gap for quantum graphs and their con-* , 《物理快报》*nectivity* 46 2013 275309 （），第–期。P. Kurasov、G. Malenova 和 S. Naboko, 《物理学杂志 A》（），。

[54] P. Kurasov 和 J. Muller, *On the spectral gap for networks of beams*, 薛¨定谔算子、谱分析与数论, 169–179, Springer 数学与统计会议论文集, 348, Springer, Cham, 2021年。[55] P. Kurasov 和 S. Naboko, *Rayleigh estimates for differential operators on graphs*, 《谱理论杂志》4（2014年）, 211–219。[56] P. Kurasov 和 J. Rohleder, *Laplacians on bipartite metric graphs*, Oper. Matrices 14（2020年）, 535–553。[57] P. Kurasov 和 A. Serio, *Optimal potentials for quantum graphs*, Ann. Henri Poincar´e 20（2019年）, 第5期, 1517–1542。[58] D. Mugnolo, 《网络上的演化方程半群方法》, Springer, 柏林, 2014年。[59] D. Mugnolo、D. Noja 和 C. Seifert, *Airy-type evolution equations on star graphs*。Anal. PDE 11（2018年）, 第7期, 1625–1652。[60] D. Mugnolo 和 M. Pl¨umer, *Lower estimates on eigenvalues of quantum graphs*, Oper. Ma- trices 14（2020年）, 第3期, 743–765。[61] D. Mugnolo 和 M. Pl¨umer, *On torsional rigidity and ground-state energy of compact quantum graphs*, Calc. Var. Partial Differential Equations（）, 第期, 论文编号 pp.[62] J. Muller 和 J. Rohleder, *The Krein–von Neumann extension for Schrödinger operators on metric graphs*, Complex Anal. Oper. Theory（）, 第期, 论文编号 pp。[63] S. Nicaise, *Spectre des résaux topologiques finis*, Bull. Sci. Math. 111（1987年）, 401–413。[64] M. Pl¨umer, *Upper eigenvalue bounds for the Kirchhoff Laplacian on embedded metric graphs*, 《谱理论杂志》11（2021年）, 第4期, 1857–1894。[65] M. Pl¨umer 和 M. T¨aufer, *On fully supported eigenfunctions of quantum graphs*, Lett. Math. Phys. 111（2021年）, 第6期, 论文编号153, 23页。[66] O. Post, 《类图空间的谱分析》, Springer 讲义丛书2039, 2012年。[67] J. Rohleder, *Eigenvalue estimates for the Laplacian on a metric tree*, 《美国数学会会刊》145（2017年）, 2119–2129。[68] J. Rohleder, *Quantum trees which maximize higher eigenvalues are unbalanced*, 《美国数学会会刊》B辑9（2022年）, 50–59。[69] J. Rohleder 和 C. Seifert, *Spectral monotonicity for Schrödinger operators on metric graphs*, 《算子理论：进展与应用》281（2020年）, 291–310。[70] C. Schubert、C. Seifert、J. Voigt 和 M. Waurick, *Boundary systems and (skew-)self-adjoint operators on infinite metric graphs*, Math. Nachr.（-）（）, –。[71] C. Seifert 和 J. Voigt, *Dirichlet forms for singular diffusion on graphs*, Oper. Matrices 5(4)（2011年）, 723–734。[72] C. Seifert, *The linearised Korteweg–de Vries equation on general metric graphs*, 《应用算子理论的多样性与美》, 449–458, 《算子理论：进展与应用》, 268, Birkh¨auser/Springer, Cham, 2018年。[73] M. Waurick 和 M. Kaliske, *On the well-posedness of evolutionary equations on infinitegraphs*, 谱理论、数学系统理论、演化方程、微分方程与差分方程, 653–666, 《算子理论：进展与应用》, 221, Birkh¨auser/Springer Basel AG, 巴塞尔, 2012年。[74] J. Weidmann, 《希尔伯特空间中的线性算子。第1部分》, 《数学指南》。[数学教材], B. G. Teubner, 斯图加特, 2000年。[75] E. Zeidler, 《应用泛函分析》, 《应用数学科学》, 第109卷, Springer-Verlag, 纽约, 1995年。

（J. Rohleder）
Matematiska institutionen, Stockholms Universitet, 106 91 Stockholm, Sweden
Email address: jonathan.rohleder@math.su.se
（C. Seifert）
Technische Universität Hamburg, Institut für Mathematik, Am Schwar-zenberg-Campus 3, Gebäude E, 21073 Hamburg, Germany*Email address*: christian.seifert@tuhh.de