arXiv:2303.01942v3 [math.OA] 1 Aug 2023

因子型 W^*-丛的超积

ANDREA VACCARO

Abstract. 本文研究因子型 W^*-丛及其超积。更确切地说，若与其纤维对应的冯·诺依曼代数全都是因子，则称一个 W^*-丛为 *factorial*。设 $\mathcal{M}$ 是定义在紧豪斯多夫空间上的一族因子型 W^*-丛的迹超积，其中这些空间的覆盖维数有限且一致有界。我们证明，在此情形下，$\mathcal{M}$ 中的极限迹集在迹空间$T(\mathcal{M})$中弱*-稠密。特别地，这意味着 $\mathcal{M}$ 是因子型的。另一方面，我们还给出一个因子型 W^*-丛的超积不具因子型的例子。最后，我们得到一些模型论方面的结果：若 A 和 B 是正合的、$\mathcal{Z}$-稳定的 C^*-代数，或者二者都具有严格比较性质，那么 $A \equiv B$ 蕴含 $T(A)$ 是鲍尔单纯形，当且仅当 $T(B)$ 是鲍尔单纯形。此外，若 $T(A)$ 和 $T(B)$ 都是第二可数的鲍尔单纯形，则极端迹集 $\partial_e T(A)$ 和 $\partial_e T(B)$ 具有相同的覆盖维数。

1. Introduction

W^*-丛最早由 Ozawa 在 [Oza13] 中引入，作为 C^*-丛和 $C(X)$-代数的迹 W^*类比，是出现在紧拓扑空间之上的丛，其纤维为带迹冯·诺伊曼代数（定义 2.1）。

由于其混合性质，W^*-丛通常主要发挥桥梁作用，连接带迹冯·诺伊曼代数与稳定有限的C^*-代数。事实上，Ozawa 在 [Oza13] 中凭远见将这一类单独提出来，源于松井和佐藤的著名论文 [MS12]，以及随后的一系列研究 [KR14, Sat12, TWW15], ；这些工作考察了迹空间为鲍尔单纯形的 C^*-代数的 Toms–Winter 猜想。W^*-丛是此类 C^*-代数的迹完备化（依照 [Oza13], 的含义，见定义 5.7），人们系统地利用它们开展依赖于逼近及相关性质的论证，其中会用到迹 2-范数；它们也在等变框架中有诸多应用（[BBS+19, Lia16, Lia17, Wou21]）。

本文从更抽象的角度研究 W^*-丛，将其视为一类独立的对象，采用的方法更接近 [EP16, Evi18] 中的方法。本文的主要动机是 Carri´on、Castillejos、Evington、Gabe、Schafhauser、Tikuisis 和 White 即将发表的关于迹完备 C^*-代数 [CCE+] 的研究。我们在此简要介绍他们的项目中涉及的一些基本概念和开放问题，以便为本文的结果提供恰当的背景和动机。我们感谢 [CCE+] 的作者允许我们在此介绍他们研究中的部分内容；在撰写本文时，这些内容尚未公开发表。

[CCE+] 中所考虑的基本定义是迹完备的 C^*-代数，它为研究 C^*-代数的迹完备化提供了一个抽象框架，正如 [Oza13]中所定义的那样。

作者获得德国研究联合会（DFG）资助，资助项目包括德国卓越战略下的 EXC 2044 –390685587“明斯特数学：动力学—几何—结构”（通过 SFB 1442）、欧洲研究委员会高级资助项目 834267 - AMAREC，以及欧盟地平线 2020 研究与创新计划下的玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议 No. 891709。

定义 1.1（[CCE+]）。固定一个 C^*-代数 $\mathcal{M}$ 以及一个非空集合 X，其中元素为 $T(\mathcal{M})$，即 $\mathcal{M}$的迹态。考虑2-半范数

$$\|a\|_{2,X} = \sup_{\tau\in X} \tau(a^*a)^{1/2},\ a \in \mathcal{M}.$$

迹完备的 C^*-代数是一个二元组 $(\mathcal{M}, X)$，其中 $\mathcal{M}$ 是一个含幺[1] C^*-代数，且 X是 $\mathcal{M}$ 的迹空间 $T(\mathcal{M})$ 的一个紧致、非空、凸子集，使得 $\|\cdot\|_{2,X}$ 是 $\mathcal{M}$ 上的一个范数，并且 $\mathcal{M}$ 的 C^*-范数单位球是 $\|\cdot\|_{2,X}$-完备的。若迹完备的 C^*-代数 $(\mathcal{M}, X)$ 还满足 X 是 $T(\mathcal{M})$ 的一个闭面，则称其为因子型。

迹完备的 C^*-代数最基本的例子是带迹冯·诺依曼代数 $(\mathcal{M}, \tau)$，其中 τ是一个忠实正规迹。这是 $X = \{\tau\}$ 的情形。 W^*-丛构成了另一类重要的迹完备 C^*-代数（见 §2.1）；在因子型情形下，它们恰好对应于满足 X 为鲍尔单纯形的那些 $(\mathcal{M}, X)$（这是 [Oza13, 定理 3] 的推论；见定理 2.3）。

迹冯·诺依曼代数 $(\mathcal{M}, \tau)$ 作为迹完备的 C^*-代数是因子型的，当且仅当它是一个因子，因而得名。之所以在 [CCE+] 中单独考察因子型迹完备 C^*-代数这一类，部分原因在于，与一般的迹完备 C^*-代数相比，这类代数往往更易于处理和研究。这一点既体现在技术性和基础性的事实中（例如引理 5.1、引理 3.1 或命题 5.4），也体现在更具雄心且更为精深的结果中，例如 [CCE+] 中宣布的分类定理。

本文讨论以下问题，该问题曾出现在 [CCE+] 的早期版本中。

问题 1.2（[CCE+]）。设 $((\mathcal{M}_i, X_i) \mid i \in I)$ 是一列因子型迹完备的 C^*-代数，令 $\mathcal{M} = \prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ 为相应的迹超积，并令 X 为 $\mathcal{M}$ 上所有极限迹集合的弱 * 闭包。$(\mathcal{M}, X)$ 是否为因子型?

$\mathcal{M}$ 上的极限迹，是通过对迹的序列 $(\tau_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ 取 $\mathcal{U}$-极限而得到的迹（见 §2.2）。问题 1.2 中所考虑的迹超积 $(\mathcal{M}, X)$，是带迹完备的 C^*-代数范畴中适当的超积概念（关于 W^*-丛的情形，见 §2.2；关于一般的带迹完备 C^*-代数，见 §5.2），因此，问题 1.2 实际上是在询问取超积时因子性是否得以保持。对于带迹冯·诺伊曼代数，答案是肯定的；事实上，众所周知，一族有限因子的迹超积（在此情形下对应于通常的冯诺依曼超积）仍然是有限因子（例如见 [FHS14]）。

在 [Oza13 中，定理 8] Ozawa 证明，对于正合 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*代数的超积，极限迹集在迹空间中按弱*稠密。用问题 1.2 的框架重新表述，[Oza13，定理 8] 表明，由作为正合 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*代数的迹完备化而得到的一列因子型迹完备 C^*代数的超积 $(\mathcal{M}, X)$ 满足 $X = T(\mathcal{M})$，因此特别是因子型的。类似的结果见 [CETW21，命题 2.5]，由此可推出：若 $(\mathcal{M}, X)$ 是一个因子型迹完备 C^*代数的迹超幂，而该代数是具有补全单位分割的可分 C^*代数的迹完备化，那么同样有 $X = T(\mathcal{M})$，因此 $(\mathcal{M}, X)$ 是因子型的。补全单位分割（通常称为 CPoU）是 [CET+21，定义 3.1]，中引入的技术条件；例如，对于 $\mathcal{Z}$-稳定的核 C^*代数，该条件是自动满足的（[CET+21，定理 3.8]）。最后，我们提及 [APRT23] 的近期且更一般的论述，其中运用 Cuntz 半群技术讨论极限迹何时在 (C^*-范数) 超积的迹空间中按弱*稠密。

[1]在 [CCE+] 中，已证明含幺性假设是多余的。

CPoU 是研究 C^*代数中迹完备对象的极其强大的工具，见 [CCE$^+$]；它有效地将这些代数划分为两个子类：一类较为易处理，其中 CPoU 的存在使得可以将冯·诺依曼代数理论中的众多结果和技术迁移过来；另一类则是其补集，理解程度低得多。本文聚焦于后者，同时限于 W^*丛。

下述定理表明，对于 W^*-丛的超积，问题 1.2 有肯定答案；即使没有补全单位分割，只要它们的基空间具有有界的覆盖维数即可。

定理 1.3. 设 $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ 是紧豪斯多夫空间 K_i 上因子型 W^*-丛的一个序列。假设存在 $d\in\mathbb{N}$，使得对每个 $i\in I$ 都有 $\dim(K_i)\leq d$。设 $\mathcal{M}$ 是相应的超积，它是基于超余积 $\sum^{\mathcal{U}} K_i$ 的 W^*-丛。那么，极限迹的集合在 $T(\mathcal{M})$ 中弱*稠密，特别地，$\mathcal{M}$ 是一个因子型 W^*-丛。

我们还证明，如果去掉定理 1.3 中对 K_i 的覆盖维数的统一上界，那么其结论可能不成立。事实上，我们表明，问题 1.2 一般而言有否定答案，即使将范围限制为 W^*-丛也是如此。

定理 1.4. 存在一个因子型 W^* 丛序列，其超积不是因子型。

我们用于定理 1.4 的序列可追溯至 [PP70], ，它由 2-齐次 C^* 代数组成，这些代数源自有限维复射影空间上的某些向量丛。我们指出，这一族与 [Oza13] 中考察的族相同；该文借此给出了一个超积实例，其极限迹集合在整个迹空间中并非弱 *-稠密。

请注意，定理 1.4 中考察的序列由 W^* 丛构成，其纤维是矩阵代数，因而属于 I 型。这与 [CCE$^+$] 的主要关注点，以及文献中 W^* 丛和迹完备化的大多数应用形成对比；后者主要涉及纤维为无限维的迹完备 C^* 代数。在 [CCE$^+$] 中，这些代数被称为 II 型$_1$ 迹完备 C^* 代数。值得探究的是，问题 1.2 对这类代数是否也有否定答案。

本文最后一部分带有模型论色彩，探讨 C^* 代数的一阶理论如何决定其迹空间的拓扑性质。下述结果的先导可见于 [FHL$^+$21 第 3 节5], ，其中证明了，对于 Cuntz–Pedersen 零集可定义的 C^* 代数类（定义见 [FHL$^+$21 第 3] 章），单迹性在初等等价下得以保持。

定理 1.5. 设 A、B 是两个含幺 C^* 代数，它们正合且具有 $\mathcal{Z}$-稳定性，或具有严格比较，或属于 Cuntz–Pedersen 零集可定义的其他任意一类。假设 A 与 B 初等等价。那么，$T(A)$ 是鲍尔单纯形，当且仅当 $T(B)$ 是鲍尔单纯形。此外，若 $T(A)$ 和 $T(B)$ 均为第二可数的鲍尔单纯形，则 $\partial_e T(A)$ 和 $\partial_e T(B)$ 具有相同的覆盖维数。

定理 1.5 的证明运用了因子型 W^*-束的 Dixmier 平均性质的迹类比（命题 5.4），这使我们能够证明，因子型 W^*-束序列的超积的中心与各中心的超积同构（定理 5.6）。

本文结构如下。§2 给出后续各节所需的定义和预备知识，§3 专门证明定理 1.3，§4 则证明定理 1.4。最后，§5 介绍证明定理 1.5 所需的背景知识并给出相应证明。

致谢。感谢 [CCE+] 的作者与我分享他们工作的初步版本，并允许我在本文中引用其中的部分内容。此外，也感谢他们对本稿早期草稿提出的有益意见。最后，感谢匿名审稿人认真审阅本文并提出宝贵意见。

2. Preliminaries

给定一个 C^*-代数 A，分别用 A_1、A_{sa} 和 A_+ 表示 A 中所有压缩元、自伴元和正元的集合。我们用 $Z(A)$ 表示 A 的中心；给定 a、$b \in A$，将交换子 $ab - ba$ 简写为 $[a, b]$。

A 的迹空间 $T(A)$ 是 A 上所有迹态的集合，我们简称其为迹。对于 $\tau \in T(A)$，在 A 上定义 2-半范数 $\|\cdot\|_{2,\tau}$ 为

$$\|a\|_{2,\tau} = \tau(a^*a)^{1/2}, \text{ for every } a \in A.$$

给定一个非空的 $X \subseteq T(A)$，与 X 相关联的 A 上的 2-半范数为

$$\|a\|_{2,X} = \sup_{\tau \in X} \|a\|_{2,\tau}, \text{ for every } a \in A.$$

注意到 $\|\cdot\|_{2,X} = \|\cdot\|_{2,\overline{\mathrm{conv}}(X)}$，其中 $\overline{\mathrm{conv}}(X)$ 是 X 的闭凸包。给定一个凸集 X，我们用 $\partial_e X$ 表示 X 的极端点集合。等式 $\|\cdot\|_{2,X} = \|\cdot\|_{2,\partial_e X}$ 由克莱因–米尔曼定理得出。

给定含幺 C^*-代数 A，其迹空间 $T(A)$ 以及它的任何其他闭凸子集 X都是肖凯单纯形（[Alf71，第 3] 节）。特别地，对每个 $x \in X$，都存在唯一的边界测度 μ_x（依照 [Alf71，命题 I.4.5] 的定义），使得对每个连续仿射函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$，$f(x) = \int_X f(t) d\mu_x$。鲍尔单纯形$X$ 是边界 $\partial_e X$ 闭的肖凯单纯形。

2.1. W^*-丛。

定义 2.1（[Oza13，第 5] 节）。在（紧豪斯多夫空间）K 上的 W^*-丛是一个含幺 C^*-代数 $\mathcal{M}$，其中 $C(K)$ 含幺嵌入到 $\mathcal{M}$ 的中心中，并且存在忠实含幺条件期望 $E\colon \mathcal{M} \to C(K)$，使得

(1) E 是迹型的，即对所有 a、$b \in \mathcal{M}$，$E(ab) = E(ba)$；(2) $\mathcal{M}$ 的 C^*-范数单位球关于由 E 诱导的范数 $\|\cdot\|_{2,\,K}$ 完备，该范数定义为 $\|a\|_{2,\,K} = \|E(a^*a)\|^{1/2}$，对所有 $a \in \mathcal{M}$成立。

设 $\mathcal{M}$ 是定义在 K 上的一个带有条件期望 $E\colon \mathcal{M} \to C(K)$ 的 W^*-丛，并固定 $\lambda \in K$。本文中，我们将迹记为 τ_λ，其中 $\mathrm{ev}_\lambda \circ E$，并将对应于 τ_λ的 GNS 表示记为 π_λ。冯·诺依曼代数 $\pi_\lambda(\mathcal{M})''$ 是对应于 λ的纤维。

更一般地，每个定义在 K 上的正则博雷尔概率测度 μ 都会自然诱导一个迹 τ_μ，其定义在 $a \in \mathcal{M}$ 上如下：

$$\tau_\mu(a) = \int_K E(a)\, d\mu.$$

令 $X = \{\tau_\mu \mid \mu \in \mathrm{Prob}(K)\}$。$E$ 的忠实性意味着，$\|\cdot\|_{2,\,X}$ 是 $\mathcal{M}$上的一个范数，而定义 2.1 的第 2 项表明 $(\mathcal{M}, X)$ 是一个迹完备的 C^*-代数，因为 $\|\cdot\|_{2,\,X} = \|\cdot\|_{2,\,\partial_e X} = \|\cdot\|_{2,\,K}$。我们有时将 X 和 $\partial_e X$ 分别与 $\mathrm{Prob}(K)$ 和 K 等同。请注意，记号 $\|\cdot\|_{2,\,\partial_e X}$ 和 $\|\cdot\|_{2,\,K}$ 与这种等同方式一致。我们总是默认将 W^*-丛 $\mathcal{M}$ 视为迹完备的C^*-代数；特别地，若 $(\mathcal{M}, \mathrm{Prob}(K))$ 是一个因子型迹完备 C^*-代数，我们就称 $\mathcal{M}$ 是因子型的。

以下命题概括了因子性的若干有用等价表述。其陈述及证明源自 [CCE+]早期版本中出现的一些类似陈述。

命题2.2. 设 $(\mathcal{M}, X)$ 是一个迹完备的 C^*-代数。以下条件等价。

(1) $(\mathcal{M}, X)$ 是因子型的。(2) $\partial_e X \subseteq \partial_e T(\mathcal{M})$。
(3) 对每个 $\lambda \in \partial_e X$， $\pi_\lambda(\mathcal{M})''$ 都是一个因子。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 成立，因为面的每个极值点都必须是单纯形本身的极值点。

对于 (2) $\Rightarrow$ (1)，令 $F = \mathrm{conv}(\partial_e X)$ 为 $\partial_e X$ 的凸包。给定 $x \in F$，则$x \in \mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_n)$，其中某些 $x_1, \ldots, x_n \in \partial_e X$ 满足此式。集合 $\mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_n)$ 是 $\partial_e X \subseteq \partial_e T(\mathcal{M})$ 中某个紧子集的（闭）凸包，因此根据 [Goo86，推论 11.1.19]，它是 $T(\mathcal{M})$ 的一个面。由此可知，若对于 $\lambda \in (0, 1)$， $x = \lambda y + (1-\lambda) z$，且 $y, z \in T(\mathcal{M})$，则 $y, z \in \mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_n) \subseteq F$，因此 F 是 $T(\mathcal{M})$ 的一个面。最后，根据[Roy75，命题 4.4]， $X = \overline{F}$ 是一个面。

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 源于一个众所周知的事实：对于 $\tau \in T(\mathcal{M})$ 及其对应的 GNS 表示 π_τ， $\pi_\tau(\mathcal{M})''$ 是因子，当且仅当 $\tau \in \partial_e T(\mathcal{M})$。□

总之， W^*-丛 $\mathcal{M}$ 在 K 上诱导出一个迹完备的 C^*-代数 $(\mathcal{M}, X)$，其中 X 是一个鲍尔单纯形，其边界同胚于 K。反过来，在因子型情形下也成立：每个基空间为鲍尔单纯形的因子型迹完备 C^*-代数，都可以自然地赋予一个 W^*-丛结构。这个结论直接源自 [Oza13，定理 3]，，其以下述形式陈述并证明；这一形式归功于 [CCE+]。

定理 2.3（[Oza13，定理 3]，[CCE+]）。设 $(\mathcal{M}, X)$ 是一个因子型迹完备C^*-代数，且 X 是一个鲍尔单纯形。那么存在一个嵌入 θ: $C(\partial_e X) \to Z(\mathcal{M})$，使得

$$\tau(\theta(f)a) = \int_{\partial_e X} f(\sigma)\sigma(a)\, d\mu_\tau(\sigma), \ \textit{for every } \tau \in X, f \in C(\partial_e X), a \in \mathcal{M}.$$

此外，$(\mathcal{M}, X)$ 可赋予一个在 $\partial_e X$ 上的 W^*-丛结构，其条件期望 E: $\mathcal{M} \to C(\partial_e X)$ 定义为：对于 $\tau \in \partial_e X$， $E(a)(\tau) = \tau(a)$。

证明。存在如陈述所述的嵌入 θ: $C(\partial_e X) \to Z(\mathcal{M})$，这是 [Oza13，定理 3] 的推论。该结果针对 X 可度量化面（在 [Oza13] 的记号中记作 S）证明，其中要求可度量性，仅仅是为了确保 $\partial_e X$ 是博雷尔的。在我们的情形下，这一点自动成立，因为假设 $\partial_e X$ 是闭的。给定 $a \in \mathcal{M}$，令 $\hat{a} \in C(\partial_e X)$ 对每个 $\tau \in \partial_e X$ 定义为 $\hat{a}(\tau) = \tau(a)$。令E 为条件期望 $E(a) = \theta(\hat{a})$。显然可验证，由 E 诱导的 2-范数与 $\|\cdot\|_{2,\, \partial_e X} = \|\cdot\|_{2,\, X}$ 相同。根据假设， $\mathcal{M}_1$ 是 $\|\cdot\|_{2,\, X}$-完备的，因此 $\mathcal{M}$ 是一个在 $\partial_e X$ 上的 W^*-丛。□

2.2. W^*丛的超幂与超积。固定一个无限指标集 I 和其上的自由超滤子 $\mathcal{U}$。设 $((A_i, X_i) \mid i \in I)$ 是一列有序对，其中对每个 $i \in I$， A_i 是含幺C^*代数，且 X_i 是 $T(A_i)$的非空子集。这列对象的迹超积是 C^*代数

$$\prod\nolimits^{\mathcal{U}} (A_i, X_i) = \frac{\prod_{i \in I} A_i}{\{(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \mid \lim_{i \to \mathcal{U}} \|a_i\|_{2, X_i} = 0\}}.$$

对于常值序列 $(A_i, X_i) = (A, X)$，我们使用记号 $A_X^{\mathcal{U}}$，并将该C^*代数称为 (A, X) 的迹超幂。如果 $X = T(A)$，我们记作 $A^{\mathcal{U}}$。本文中我们只考虑满足以下条件的情形：对每个 $i \in I$，$\|\cdot\|_{2,\, X_i}$ 是一个范数。

当上下文清楚时，我们会从记号中省略 X_i，直接写作 $\prod^{\mathcal{U}} A_i$。例如，设 $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ 是定义在 K_i 上的 W^*-丛。那么，依据 $\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$，我们所指的是序列 $((\mathcal{M}_i, K_i) \mid i \in I)$ 的迹超积。

给定 $((A_i, X_i) \mid i \in I)$，每个迹序列 $\bar{\tau} = (\tau_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ 都确定了 $\prod^{\mathcal{U}} A_i$ 上的一个迹，其在每个表示序列上的定义为

$$\bar{\tau}((a_i)_{i\in I}) = \lim_{i,\mathcal{U}} \tau_i(a_i).$$

我们用 $\prod_{\mathcal{U}} X_i$ 表示以这种方式得到的迹的集合，并称它们为极限迹。$\prod_{\mathcal{U}} X_i$ 对应于 $(X_i)_{i\in I}$ 的集合论超积。这是 $\prod^{\mathcal{U}} A_i$ 的迹空间的一个凸子集，但不一定是闭集。令 $\sum^{\mathcal{U}} X_i$ 表示它的弱*-闭包。若对每个 $i \in I$ 都有 $X_i = X$，则将此闭包简记为 $X^{\mathcal{U}}$。当每个 X_i 都是紧的（例如在 W^*-丛的情形下），空间 $\sum^{\mathcal{U}} X_i$ 也可以表示为序列 $(X_i)_{i\in I}$ 的超余积，即满足 $C(\sum^{\mathcal{U}} X_i) \cong \prod_{\mathcal{U}} C(X_i)$ 的紧豪斯多夫空间；其中后者（下标为 $\mathcal{U}$）是典范的 C^*-范数超积。

迹超积 $\prod^{\mathcal{U}} A_i$ 的单位球关于 2-范数$\|\cdot\|_{\sum^{\mathcal{U}} X_i}$是完备的（见 §5.2）；特别地，对于 W^*-丛的超积，我们有如下结论。

命题 2.4（[BBS+19，命题 3.9]）。设 $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ 是定义在 K_i 上、带有条件期望 $E_i\colon \mathcal{M}_i \to C(K_i)$ 的 W^*-丛序列。迹超积 $\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$是定义在 $\sum^{\mathcal{U}} K_i$ 上的 W^*-丛，其条件期望为

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{U}}\colon \prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i &\to C\Big(\sum^{\mathcal{U}} K_i\Big) \\ (a_i)_{i\in I} &\mapsto (E_i(a_i))_{i\in I} \end{aligned}$$

它诱导的范数为 $\|\cdot\|_{\sum^{\mathcal{U}} K_i}$。

3. W^*-Bundles with Finite-Dimensional Base Space

尽管采用了不同的技巧，[Oza13，定理 8] 和 [CETW21，命题 2.5] 的证明都首先表明：相对于所有迹都很小的元素，可以用交换子之和来逼近；随着逼近精度的变化，求和项数保持不变，或至少受到控制。定理 1.3 也不例外，它基于以下引理。

引理 3.1. 设 $\mathcal{M}$ 是定义在空间 K 上的因子型 W^*-丛。假设 K 的覆盖维数 d 有限，并令 $a \in \mathcal{M}_{sa}$ 为一个压缩算子，使得 $E(a) = 0$。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在压缩元 w_i、$z_i \in \mathcal{M}$，使其适用于 $i = 1$、……、$10d$，满足

$$\Big\| a - 24 \sum_{i\le 10d} [w_i, z_i] \Big\|_{2,K} < \varepsilon.$$

证明。令 $\lambda \in K$。回顾一下，τ_λ 表示 $\mathcal{M}$ 上的迹 $\mathrm{ev}_\lambda \circ E$，而 π_λ 表示与 τ_λ 对应的 GNS 表示。固定如陈述中所述的 $a \in \mathcal{M}_{sa}$。由于 $\mathcal{M}$ 是因子型的，根据命题2.2，冯·诺依曼代数 $\pi_\lambda(\mathcal{M})''$ 是一个因子。假设$E(a)(\lambda) = 0$ 因而意味着，$\pi_\lambda(a)$在 $\pi_\lambda(\mathcal{M})''$上的唯一迹下映射为零。根据 [FdlH80, 定理2.3]，存在压缩元 $\tilde{w}_1^\lambda, \ldots, \tilde{w}_{10}^\lambda, \tilde{z}_1^\lambda, \ldots, \tilde{z}_{10}^\lambda \in \pi_\lambda(\mathcal{M})''$，使得

$$\pi_\lambda(a) = 24 \sum_{k\le 10} [\tilde{w}_k^\lambda, \tilde{z}_k^\lambda].$$

根据 Kaplansky 稠密性定理，对于每个 $k \leq 10$，都存在压缩元 $w_k^\lambda, z_k^\lambda \in \mathcal{M}$，它们对 $\tilde{w}_k^\lambda$ 和 $\tilde{z}_k^\lambda$ 的逼近足够好，从而

$$\left\| a - 24 \sum_{k \leq 10} [w_k^\lambda, z_k^\lambda] \right\|_{2,\tau_\lambda} = \left\| \pi_\lambda(a) - 24 \sum_{k \leq 10} [\pi_\lambda(w_k^\lambda), \pi_\lambda(z_k^\lambda)] \right\|_{2,\tau_\lambda} < \varepsilon.$$

由 2-范数的连续性，对于每个 $\lambda \in K$，存在 λ 的一个开邻域 U_λ，使得

$$\left\| a - 24 \sum_{k \leq 10} [w_k^\lambda, z_k^\lambda] \right\|_{2,\tau_{\lambda'}} < \varepsilon, \text{ for every } \lambda' \in U_\lambda. \tag{3.1}$$

由 K 的紧性，存在 K 的一个有限开覆盖 $\mathcal{V}$，其中对于每个 $U \in \mathcal{V}$，都有$\lambda_U \in K$ 使得 $U = U_{\lambda_U}$。此外，由于 K 的覆盖维数等于 d，$\mathcal{V}$ 可以分解为 $\mathcal{V}_0 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{V}_d$，使得每个 $\mathcal{V}_j$ 中的元素两两不交（[BK04，引理 3.2]）。

令 $\{f_U\}_{U \in \mathcal{V}} \subseteq C(K) \subseteq \mathcal{M}$ 为 K 上的一个单位分解，使得对于每个 $U \in \mathcal{V}$，$\mathrm{supp}(f_U) \subseteq U$。对于每个 $j = 0, \ldots, d$ 和 $k = 1, \ldots, 10$，定义以下 $\mathcal{M}$ 的元素

$$w_{k+10j} = \sum_{U \in \mathcal{V}_j} f_U^{1/2} w_k^{\lambda_U},$$

$$z_{k+10j} = \sum_{U \in \mathcal{V}_j} f_U^{1/2} z_k^{\lambda_U}.$$

注意，由于函数 $\{f_U\}_{U \in \mathcal{V}_j}$ 的支集两两不交，上述定义的元素仍然是压缩元，并且满足等式

$$[w_{k+10j}, z_{k+10j}] = \sum_{U \in \mathcal{V}_j} f_U [w_k^{\lambda_U}, z_k^{\lambda_U}], \tag{3.2}$$

对每个 $j = 0$、…、d 以及 $k = 1$、…、10。

我们断言 $\{w_i, z_i\}_{i \leq 10d}$ 是所需的元素。事实上，对于任意 $\lambda \in K$ 和$0 \leq j \leq d$，至多存在一个 $U_j \in \mathcal{V}_j$ 使得 $\lambda \in U_j$（若不存在，只需任意选取一个 $U_j \in \mathcal{V}_j$），因此

$$\begin{aligned}
\left\| a - 24 \sum_{i \leq 10d} [w_i, z_i] \right\|_{2,\tau_\lambda} &\overset{(3.2)}{=} \left\| \sum_j \sum_{U \in \mathcal{V}_j} f_U(\lambda) a - 24 \sum_{k,j} \sum_{U \in \mathcal{V}_j} f_U(\lambda) [w_k^{\lambda_U}, z_k^{\lambda_U}] \right\|_{2,\tau_\lambda} \\
&= \left\| \sum_j f_{U_j}(\lambda) a - 24 \sum_{k,j} f_{U_j}(\lambda) [w_k^{\lambda_{U_j}}, z_k^{\lambda_{U_j}}] \right\|_{2,\tau_\lambda} \\
&\leq \sum_j f_{U_j}(\lambda) \left\| a - 24 \sum_k [w_k^{\lambda_{U_j}}, z_k^{\lambda_{U_j}}] \right\|_{2,\tau_\lambda} \\
&\overset{(3.1)}{<} \sum_j f_{U_j}(\lambda) \varepsilon \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

我们得出结论：

$$\left\| a - 24 \sum_{i \leq 10d} [w_i, z_i] \right\|_{2,K} = \sup_{\lambda \in K} \left\| a - 24 \sum_{i \leq 10d} [w_i, z_i] \right\|_{2,\tau_\lambda} < \varepsilon.$$

□

我们先证明 $I = \mathbb{N}$ 情形下的定理 1.3，以便不太熟悉模型论的读者更容易理解。一个初等的模型论论证（我们将其推迟到 §5.2）表明，该定理的结论对以任意指标集为指标的超积也成立。

定理 3.2. 设 $(\mathcal{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是紧 Hausdorff 空间 K_n 上的因子型 W^*-丛。假设存在 $d \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\dim(K_n) \leq d$。令 $\mathcal{M} = \prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_n$ 为相应的超积。则极限迹集合在 $T(\mathcal{M})$ 中是弱 *-稠密的，特别地，$\mathcal{M}$ 是一个因子型 W^*-丛。

证明。根据命题 2.4，超积 $\mathcal{M} = \prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_n$ 是一个在 $K = \sum^{\mathcal{U}} K_n$ 上的 W^*-丛。按照 [CET+21、引理 4.4] 以及 [Oza13、定理 8]，中的论证，通过应用 Hahn–Banach定理，只需证明对每个 $a \in \mathcal{M}_{sa}$，下列等式成立：

$$\sup_{\lambda\in K} |\tau_\lambda(a)| = \sup_{\tau\in T(\mathcal{M})} |\tau(a)|. \tag{3.3}$$

因此，固定一个压缩算子 $a \in \mathcal{M}_{sa}$，并设 $\sup_{\lambda\in K} |\tau_\lambda(a)| \leq \delta$ 对某个 $\delta \geq 0$ 成立。若我们能够提供 c、w_1、……、w_{10d}、z_1、……、$z_{10d} \in \mathcal{M}$，使得 $\|c\| \leq \delta$ 且

$$a - c = \sum_{i\leq 10d} [w_i, z_i]. \tag{3.4}$$

设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 a 的自伴压缩算子代表序列。对 a_n 进行适当缩放后，我们可以假设对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\sup_{\lambda\in K_n} |\tau_\lambda(a_n)| \leq \delta$。于是得到

$$\|E_n(a_n)\| \leq \delta, \text{ for every } n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

此外，根据引理 3.1，存在 $w_{1,\ n}$、...、$w_{10d,\ n}$、$z_{1,\ n} \cdots$、$z_{10d,\ n} \in \mathcal{M}_n$，其范数均有界于 48（因为 $\|a_n - E_n(a_n)\| \leq 2$），使得

$$\left\| a_n - E_n(a_n) - \sum_{i\leq 10d} [w_{i,n}, z_{i,n}] \right\|_{2,K_n} < \frac{1}{n}, \text{ for every } n \in \mathbb{N}.$$

元素 $c = (E_n(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$、$w_i = (w_{i,\ n})_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $z_i = (z_{i,\ n})_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (3.4) 中的等式，并且根据 (3.5) 有 $\|c\| \leq \delta$，正如所需。□

4. A non-factorial Ultraproduct

我们为定理 1.4 给出的例子是齐次 C^*–代数的超积。命题 4.1 证明了含幺齐次 C^*–代数可以赋予一种在其谱上的 W^*–丛结构，而这直接源于 Dauns–Hoffman 定理（[RW98，定理 A.34]）。

C^*-代数称为 n-齐次的，如果每个不可约表示的维数都是 n。C^*-代数称为齐次的，如果它对于某个 $n \in \mathbb{N}$是 n-齐次的。齐次 C^*-代数具有连续迹（[Bla06，命题 IV.1.4.14]），并且在含幺情形下，其谱——即所有不可约表示按酉等价分类所得的集合——是带有雅各布森拓扑的紧豪斯多夫空间。对于 C^*-代数 A，令 A 表示其谱。若 A 具有连续迹，则谱 A 与 A的本原理想空间同胚。在下文中，我们将每个 $t \in A$ 与 A中相应的原始理想等同起来。给定 $a \in A$，我们用 $a(t)$表示 a 在商 A/t中的类。

命题 4.1. 设 A 是一个含幺的 n 齐次 C^*-代数。那么，A 是一个以 A 为底空间、带有条件期望 E: $A \to C(A)$ 的因子型 W^*- ˆ ˆ 束，其定义为 $E(a)(t) = \mathrm{tr}_n(a(t))$，其中 tr_n 是 $n \times n$ 上矩阵的归一化迹。

$\hat{}$ 证明. 由于 A 具有连续迹，且对每个 $t \in A$ 都有 $A/t \cong M_n$，因此，对每个 $a \in A$，将 $\hat{}\,\hat{}t \in A$ 映射到 $\mathrm{tr}_n(a(t))$ 的函数 $\hat{}a$ 在 A 上连续。根据 Dauns–Hoffman 定理[RW98, 定理 A.34]，存在一个同构 θ，将 $C(\hat{}A)$ 映到 $Z(A)$ 的中心 $Z(A)$，其中 A，使得

$$(\theta(f)a)(t) = f(t)a(t), \text{ for every } t \in \hat{A},\ f \in C(\hat{A}),\ a \in A. \tag{4.1}$$

作为这些事实的结果，映射

$$E\colon A \to C(\hat{A})$$
$$a \mapsto \hat{a}$$

是从 A 到 $Z(A)$ 的迹条件期望（在 θ 意义下）。此外，映射 E 是忠实的，因为 tr_n 是忠实的，并且对于每个 $a \in A_+$，都存在某个 $t \in A$，使得 $a(t) > 0$。

接下来我们断言，A 上的每个极端迹都具有如下形式：对于某个 $t \in A$，为 $\mathrm{ev}_t \circ E$。为此，固定 $\tau \in \partial_e T(A)$，并令 π_τ 为相应的 GNS 表示。中心$Z(A)$ 经 π_τ 映射到 $Z(\pi_\tau(A)'')$ 中；由于 τ 是极端的，该集合仅由标量组成。因此，π_τ 限制在 $\theta(C(A))$ 上是一个点求值，这意味着存在 $s \in A$，使得当 $f \in C(\hat{}A)$ 验证 $f(s) = 0$ 时，$\pi_\tau(\theta(f)) = 0$。这一事实可用于证明 π_τ 可经由商映射 $A \to A/s$分解。事实上，给定满足 $\hat{}a(s) = 0$ 且满足 $\epsilon > 0$的 $a \in A$，我们可以找到 s 在 A 中的一个开邻域 U，使得对于 $\hat{}$ 每个 $t \in U$ ([RW98，引理 5.2.b])，$\|a(t)\| < \varepsilon$。接下来取范数为 1 的 $g \in C(A)$，使得 $g(s) = 0\hat{}$且 $g \restriction A \setminus U \equiv 1$。于是

$$\|a - \theta(g)a\| \overset{(4.1)}{=} \sup_{t \in \hat{A}} \|a(t) - g(t)a(t)\| < 2\varepsilon.$$

由于 $g(s) = 0$，可得 $\theta(g)a \in \ker \pi_\tau$。由此我们证明了 a 可以用 $\ker \pi_\tau$中的元素逼近，因此 $\pi_\tau(a) = 0$，且 π_τ和 τ都经由A/s分解。由于后者有唯一迹，我们得出，对于每个$a \in A$，$\tau(a) = E(a)(s)$。

为了得出 A 是一个 W^*-丛，我们需要证明 A的单位球在由 E诱导的 2-范数下是完备的。注意，由于 A 上的每个极端迹都由 E捕获，因此由 E 诱导的 2-范数等于 $\|\cdot\|_{2,\,T(A)}$。由于 A 是n-齐次的，C^*-范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_{2,\,T(A)}$ 等价，事实上我们有

$$n^{-1/2}\|a\| \le \|a\|_{2,T(A)} \le \|a\|, \text{ for every } a \in A. \tag{4.2}$$

不等式 $\|a\|_{2,\,T(A)} \le \|a\|$ 总是成立。对于另一个不等式，由于对每个 $t \in A$都有 $A/t \cong M_n\hat{}$，我们有

$$\|a(t)\| \le n^{1/2}\mathrm{tr}_n(a^*a(t))^{1/2} = n^{1/2}\widehat{a^*a}(t)^{1/2}, \text{ for every } a \in A.$$

因此我们得出结论：对于每个 $a \in A$

$$\|a\| = \sup_{t \in \hat{A}} \|a(t)\| \le n^{1/2}\|E(a^*a)\|^{1/2} = n^{1/2}\|a\|_{2,T(A)}.$$

这意味着 A 是 $\|\cdot\|_{2,\,T(A)}$-完备的。

最后，我们验证命题2.2的第三个条件，以证明 A 是因子型的。$\hat{}$对于$t \in A$，任何形式为 $\mathrm{ev}_t \circ E$ 的迹 τ 在原始理想 t上都为零。A/t 是单纯的，因此 $\pi_\tau(A) \cong A/t \cong M_n$，这进而意味着 $\pi_\tau(A)'' \cong M_n$是一个因子，从而迹 τ 是极端的。□

利用前一个证明中的论证，还可以进一步推导出映射ˆ从 A 到 $\partial_e T(A)$，将 $t \mapsto$ 映为 $\mathrm{ev}_t \circ E$，是一个同胚。

我们用来证明定理 1.4 的因子型 W^*-丛序列可追溯至 [PP70]。我们在此简要回顾其定义，详细内容请参阅 [PP70 中引言之前的讨论、引理 3.5] 以及 [BF15 第 2] 节。给定 $n \in \mathbb{N}$，令 A_n 为以下向量丛在n维复射影空间 $\mathbb{C}P^n$上的连续截面构成的 C^*-代数

$$B_n = \left\{ \left(x, \begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & d \end{pmatrix} \right) : a, d \in \mathbb{C}, \mathbf{b} \in x, \bar{\mathbf{c}} \in x \right\},$$

其中 $\bar{}\mathbf{c} = \overline{(c_1, \dots, c_{n+1})} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{n+1})$，乘法和伴随运算按点定义如下

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & \mathbf{b}' \\ \mathbf{c}' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}' & a\mathbf{b}' + d'\mathbf{b} \\ a'\mathbf{c} + d\mathbf{c}' & dd' + \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{b}} & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

该丛的所有纤维都同构于 M_2（例如参见 [PP70，第 201] 页），因此每个 A_n 都是 2-齐次 C^*-代数。

我们回顾一下，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 C^*-范数超积定义为

$$\prod\nolimits_{\mathcal{U}} A_n = \frac{\prod_n A_n}{\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_n A_n \mid \lim_{n\to\mathcal{U}} \|a_n\| = 0\}}.$$

正如 Ozawa 在陈述 [Oza13, 定理 8], 之前所指出的，C^*-范数超积$\mathcal{M} = \prod_{\mathcal{U}} A_n$ 是一个例子，其中极限迹集合在 $T(\mathcal{M})$ 中并非弱*-稠密。其原因在于，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在非零投影 $p_n, q_n \in A_n$，使得 $p_n - q_n$ 可以用形如 $a^*a - aa^*$的交换子有限和来逼近，但无法用少于 $n+1$ 个这样的交换子之和来逼近（参见 [PP70, 引理 3.5] 或 [BF15, 定理 2.1]）。因此，$\mathcal{M}$ 中的投影 $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和$q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：每个极限迹在 $p - q$ 上的取值都为零；但另一方面，$p - q$ 无法在 $\mathcal{M}$中用交换子的有限和来逼近。也就是说，$p - q$不属于 $\mathcal{M}$ ([CP79], , 另见 §5.2) 的 Cuntz–Pedersen 零集 $\mathcal{M}_0$，因此由 [CP79, 命题 2.7] 可知，极限迹集合的弱*-闭包并未覆盖 $T(\mathcal{M})$。

这一构造结合一些初等论证，即使在 W^*-丛的情形下，也能回答问题 1.2。

推论 4.2. 存在一个因子型 W^*-丛序列，其超积不是因子型的。

证明. 设 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为上文讨论的 C^*-代数序列。由于对每个 $n \in \mathbb{N}$，A_n 都是含幺且 2-齐次的，根据命题 4.1，每个 A_n 都可自然赋予一个ˆ结构，使其成为底空间为 $\partial_e T(A_n) \cong A_n \cong \mathbb{C}P^n$上的因子型 W^*-丛。根据命题 2.4，迹超积$\prod^{\mathcal{U}} A_n$ 是底空间为 $K = \sum^{\mathcal{U}}$ˆ A_n 的 W^*-丛。每个 A_n 都是 2-齐次的，因此从 C^*-范数超积 $\mathcal{M} = \prod_{\mathcal{U}} A_n$ 到迹超积 $\prod^{\mathcal{U}} A_n$ 的商映射是一个同构。事实上，该商映射的核是

$$\left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod\nolimits_{\mathcal{U}} A_n \mid \lim_{n\to\mathcal{U}} \|a_n\|_{2,T(A_n)} = 0 \right\},$$

在此情形下，这等于满足 $\lim_{n\to\mathcal{U}} \|a_n\| = 0$ 的那些 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的集合，因为对于每个 n，按照命题 4.1 证明中的论证，我们有

$$\|a\|_{2,T(A_n)} \leq \|a\| \leq 2^{1/2} \|a\|_{2,T(A_n)}, \text{ for every } a \in A_n.$$

这也意味着 C^*-范数和 $\|\cdot\|_{2,\ K} = \lim_{n\to\mathcal{U}} \|\cdot\|_{2,\ T(A_n)}$ 在 $\mathcal{M}$ 上是等价的，特别是

$$\|a\|_{2,K} \leq \|a\| \leq 2^{1/2}\|a\|_{2,K}, \text{ for every } a \in \mathcal{M}. \tag{4.3}$$

将 K 视为 $T(\mathcal{M})$ 的子空间，并令 X 为其闭凸包，即 $\mathcal{M}$ 上所有极限迹集合的弱*闭包（如有疑问，可参阅方程（5.5）前的讨论）。为证明 $(\mathcal{M}, X)$ 不是因子型的，我们采用反证法，假设 X 是 $T(\mathcal{M})$ 的一个闭面。令 $\sigma \in T(\mathcal{M}) \setminus X$，其存在性由推论陈述之前的讨论保证。根据 [Alf71，推论 II.5.20] 和 [KR14，引理 6.2]，存在 $a \in \mathcal{M}_+$ 使得

(1) 对每个 $\tau \in X$，$\tau(a) < 1/4$；
(2) $\sigma(a) > 1/2$。

于是 $\|a^{1/2}\|_{2,\ X}^2 < 1/4$，因此由 (4.3) 可得 $\|a^{1/2}\|^2 < 1/2$，这与上述第 2 项矛盾，因为

$$\|a^{1/2}\|^2 = \|a\| \geq \sigma(a) > 1/2.$$

□

5. Center of the Ultraproduct and Consequences in Model Theory

我们以一个预备结果（定理 5.6）作为本节的开端。该结果推广了[FHS13 的推论 4 3]，：我们证明，一族因子型 W^*-丛的超积的中心，等于各中心的超积。随后，我们将证明定理 1.5。

5.1. 超积的中心。定理 5.6 是命题 5.4 的推论；命题 5.4 指出，因子型 W^*-丛满足强 Dixmier 平均性质的一个迹类比（[Bla06，定义 III.2.5.16]）。[Oza13]，中既未明确陈述也未证明这一事实，但它可由该文中类似的论证得出，且作者早已知晓这一点，并用它证明了 [Oza13，定理 15]。为方便读者，我们给出完整证明，并先介绍若干预备引理。第一个引理的论证归功于 [CCE$^+$] 的作者。

引理 5.1（[CCE$^+$]）。设 A 是一个含幺 C^*-代数，且 $X \subseteq T(A)$ 非空。令 $\pi = \bigoplus_{\tau\in X} \pi_\tau$，并令 $\sigma \in T(\pi(A)'')$。那么，A 上的迹 $\sigma \circ \pi$ 属于 $T(A)$ 中由 X 生成的闭面。

证明。令 F 为 $T(A)$ 中由 X 生成的闭面。只需对正规迹证明该引理，因为 F 是闭的，且正规迹集合在弱*意义下稠密于 $T(\pi(A)'')$。于是设 $\sigma \in T(\pi(A)'')$ 是正规迹，并假设 $\sigma \circ \pi \notin F$。根据 [Alf71，推论 II.5.20]，存在连续仿射函数 $f\colon T(A) \to [0,1]$，使得 $f(\sigma \circ \pi) = 1$ 且 $f \restriction F \equiv 0$。根据 [KR14，引理 6.2]，存在一个序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_+$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\tau\in T(A)} |\tau(a_n) - f(\tau)| = 0.$$

这意味着，对于每个 $\tau \in F$，$\tau(a_n) \to 0$；而由 $a_n \geq 0$，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，可知 $\pi(a_n)$ 在强拓扑下收敛到零。迹 σ 是正规迹，因此 $\sigma(\pi(a_n))$ 也收敛到零，这与以下事实矛盾

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\pi(a_n)) = f(\sigma \circ \pi) = 1.$$

□

引理 5.2. 设 A 是一个含幺 C^*-代数，且 $X \subseteq T(A)$ 是一个非空闭面。设 $\pi = \bigoplus_{\tau\in X} \pi_\tau$，并令 ctr: $\pi(A)'' \to Z(\pi(A)'')$ 为 $\pi(A)''$ 上的中心值迹。那么

$$\|a\|_{2,X} = \|\mathrm{ctr}(\pi(a^*a))\|^{1/2},\ \forall a \in A.$$

证明。根据 [Bla06，定理 III.2.5，7] 将 $Z(\pi(A)'')$ 的态空间映射到 $T(\pi(A)'')$，并将 φ 映至 $\varphi\circ$ctr 的映射是双射，因此

$$\|\mathrm{ctr}(b^*b)\|^{1/2} = \|b\|_{2,T(\pi(A)'')},\ \text{for every } b \in \pi(A)''.$$

对于 $a \in A$，引理中以 $b = \pi(a)$ 替代的结论由引理 5.1 得出。 □

引理 5.3。设 $\mathcal{M}$ 是定义在 K 上、带有条件期望 $E\colon \mathcal{M} \to C(K)$ 的因子型 W^*-丛。设 $\pi = \bigoplus_{\mu\in Prob(K)} \pi_{\tau_\mu}$，令 $\mathcal{N} = \pi(\mathcal{M})''$，并以 ctr 表示 $\mathcal{N}$ 的中心值迹。那么，对于每个 $a \in \mathcal{M}$

$$\pi(E(a)) = ctr(\pi(a)).$$

证明。假设对于某个 $b \in \mathcal{M}$，有 $\pi(E(a)) \neq \mathrm{ctr}(\pi(a))$。根据 [Bla06，定理 III.2.5，7]存在 $\tau \in T(\mathcal{N})$，使得 $\tau(\pi(E(a))) \neq \tau(\mathrm{ctr}(\pi(a)))$。由于 $\mathcal{M}$ 是因子型的，根据引理 5.1，存在 $\mu \in \mathrm{Prob}(K)$，使得 $\tau\circ\pi = \tau_\mu$。特别地，$\tau_\mu \circ E = \tau_\mu$，因此一方面我们有

$$\tau(\pi(E(a))) = \tau_\mu(E(a)) = \tau_\mu(a).$$

另一方面

$$\tau(\mathrm{ctr}(\pi(a))) = \tau(\pi(a)) = \tau_\mu(a),$$

这就产生了矛盾。 □

命题 5.4. 设 $\mathcal{M}$ 是定义在 K 上、带有条件期望 $E\colon \mathcal{M} \to C(K)$ 的因子型 W^*-丛。对于每个 $a \in \mathcal{M}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在酉元 $u_1, \ldots, u_k \in \mathcal{M}$，使得

$$\Big\| E(a) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} u_i a u_i^* \Big\|_{2,K} < \varepsilon.$$

证明。证明与 [Oza13, 定理 3] 的证明非常相似。固定 $a \in \mathcal{M}$ 和 $\varepsilon > 0$。令 π 为直和 $\bigoplus_{\mu\in\mathrm{Prob}(K)} \pi_{\tau_\mu}$，并设 $\mathcal{N} = \pi(\mathcal{M})''$。记 ctr : $\mathcal{N} \to Z(\mathcal{N})$ 为 $\mathcal{N}$ 的中心值迹。由 Dixmier 平均定理（[Bla06, 定理 III.2.5.19]）和引理 5.3，元素 $\pi(E(a))$ 属于 $\{u\pi(a)u^* \mid u \in \mathcal{U}(\mathcal{N})\}$ 的凸包的范数闭包。

设 $C = \{\pi(uau^*) \mid u \in \mathcal{U}(\mathcal{M})\}$。由 Kaplansky 稠密性定理，每个 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{N})$ 都是来自 $\pi(\mathcal{M})$ 的一列酉元的强极限。由于伴随运算在正规算子上强连续（[Mur90，定理 4.3.1]），且乘法在有界集上强连续（[Mur90，注 4.3.1]），因此存在一列 $\{b_\lambda\}_\lambda$，其中每个b_λ 都属于 C 的凸包，并且该列在强拓扑下收敛到 $b = \pi(E(a))$。由此可知，网 $\{(b_\lambda - b)^*(b_\lambda - b)\}_\lambda$ 在弱算子拓扑下收敛到 0，因此作为有界网，它也在超弱拓扑下收敛到 0。由于中心值迹 ctr 在超弱拓扑下连续，这尤其意味着

$$\varphi\Big(\mathrm{ctr}((b_\lambda - b)^*(b_\lambda - b))\Big) \to 0,\ \text{for every } \varphi \in Z(\mathcal{N})_*, \tag{5.1}$$

其中 $Z(\mathcal{N})_*$ 表示 $Z(\mathcal{N})$ 上的正规泛函集合。

我们声称，（5.1）蕴含

$$\varphi\Big(\mathrm{ctr}((b_\lambda - b)^*(b_\lambda - b))\Big) \to 0,\ \text{for every } \varphi \in Z(\mathcal{N})^*. \tag{5.2}$$

事实上，令 $\varphi \in Z(\mathcal{N})^*$。那么 $\varphi\circ\mathrm{ctr} \in T(\mathcal{N})$，因此根据引理 5.1，存在 $\mu \in \mathrm{prob}(K)$，使得 $\varphi\circ\mathrm{ctr} \upharpoonright \pi(\mathcal{M}) = \tau_\mu$。后者可延拓为 $\mathcal{N}$ 上的正规迹，因此存在

$\varphi' \in Z(\mathcal{N})_*$，使得 $\varphi \circ \mathrm{ctr} \restriction \pi(\mathcal{M}) = \varphi' \circ \mathrm{ctr} \restriction \pi(\mathcal{M})$。由引理 5.3，我们得出 φ 和 φ' 在 $\{\mathrm{ctr}((b_\lambda - b)^*(b_\lambda - b))\}_\lambda$ 上相等，因此 (5.2) 得证。

因此，由 Hahn–Banach定理，存在有限多个 $\alpha_j > 0$，满足 $\sum_j \alpha_j = 1$，使得

$$\Big\| \sum_j \alpha_j \mathrm{ctr}((b_{\lambda_j} - b)(b_{\lambda_j} - b)^*) \Big\| < \varepsilon. \tag{5.3}$$

令 $c = \sum_j \alpha_j b_{\lambda_j}$，并注意到

$$c = \begin{bmatrix} \alpha_1^{1/2} \dots \alpha_m^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{1/2} b_{\lambda_1} \\ \vdots \\ \alpha_m^{1/2} b_{\lambda_m} \end{bmatrix} =: rs.$$

因此 $c^*c \le s^*r^*rs \le \|r\|^2 s^*s = \sum_j \alpha_j b_{\lambda_j}^* b_{\lambda_j}$，进而得到

$$\begin{aligned} \mathrm{ctr}((c-b)^*(c-b)) &= \mathrm{ctr}(c^*c - b^*c - c^*b + b^*b) \\ &\le \mathrm{ctr}\Big(\sum_j \alpha_j b_{\lambda_j}^* b_{\lambda_j} - b^* \sum_j \alpha_j b_{\lambda_j} - \sum_j \alpha_j b_{\lambda_j}^* b + b^*b \Big) \\ &= \mathrm{ctr}\Big(\sum_j \alpha_j (b_{\lambda_j} - b)^* (b_{\lambda_j} - b) \Big). \end{aligned}$$

因此，由 (5.3) 可得 $\|\mathrm{ctr}((c-b)^*(c-b))\| < \varepsilon$。综上，存在酉元$u_1$、……、 $u_\ell \in \mathcal{M}$ 以及 $\beta_i \ge 0$，满足 $\sum_{i \le \ell} \beta_i = 1$，使得 $c = \pi(\sum_{i \le \ell} \beta_i u_i a u_i^*)$；由引理 5.2及上述不等式可知

$$\Big\| E(a) - \sum_{i \le \ell} \beta_i u_i a u_i^* \Big\|_{2,K}^2 = \|\mathrm{ctr}((b-c)^*(b-c))\| < \varepsilon.$$

□

在证明定理 5.6之前，我们还需要最后一个引理（另见 [FHS13，引理 4.2]）。

引理 5.5. 设 $\mathcal{M}$ 是 K 上的因子型 W^*-丛，且条件期望为 $E\colon \mathcal{M} \to C(K)$。那么，对每个 $a \in \mathcal{M}$，以下结论成立

$$\|a - E(a)\|_{2,K} \le \sup_{b \in \mathcal{M}_1} \|[a,b]\|_{2,K} \le 2\|a - E(a)\|_{2,K}.$$

证明. 设 $a \in \mathcal{M}$ 和 $b \in \mathcal{M}_1$。命题中的右侧不等式可由下列计算得到

$$\begin{aligned} \|ab - ba\|_{2,K} &\le \|ab - E(a)b\|_{2,K} + \|bE(a) - ba\|_{2,K} \\ &\le \|a - E(a)\|_{2,K}\|b\| + \|b\|\|E(a) - a\|_{2,K} \\ &\le 2\|E(a) - a\|_{2,K}. \end{aligned}$$

对于另一个不等式，给定 $\epsilon > 0$，由命题 5.4 可知，存在酉元 u_1、……、 $u_k \in \mathcal{M}$，使得

$$\Big\| E(a) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k u_i a u_i^* \Big\|_{2,K} < \varepsilon. \tag{5.4}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\|a - E(a)\|_{2,K} &< \Big\|a - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} u_i a u_i^*\Big\|_{2,K} + \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\|au_i - u_i a\|_{2,K} + \varepsilon \\ &\leq \sup_{b\in\mathcal{M}_1}\|[a,b]\|_{2,K} + \varepsilon.\end{aligned}$$

□

定理 5.6. 设 $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ 是一列因子型 W^*-丛。则

$$Z\Big(\prod\nolimits^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i\Big) = \prod\nolimits^{\mathcal{U}} Z(\mathcal{M}_i).$$

证明. 包含 $\prod^{\mathcal{U}} Z(\mathcal{M}_i) \subseteq Z(\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i)$ 总是成立。为证明反向包含，设 $(a_i)_{i\in I} \in Z(\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i)$。只需证明 $(a_i)_{i\in I} = (E_i(a_i))_{i\in I}$。对每个 $i \in I$，令$b_i \in (\mathcal{M}_i)_1$ 满足 $2\|[a_i, b_i]\|_{2,K_i} \geq \sup_{c\in(\mathcal{M}_i)_1}\|[a_i, c]\|_{2,K_i}$。由引理 5.5 得到

$$\|a_i - E_i(a_i)\|_{2,K_i} \leq \sup_{c\in(\mathcal{M}_i)_1}\|[a_i, c]\|_{2,K_i} \leq 2\|[a_i, b_i]\|_{2,K_i}, \text{ for every } i \in I.$$

最右侧的项在 $i \to \mathcal{U}$ 时趋于零，因为 $(a_i)_{i\in I} \in Z(\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i)$，因此 $(a_i)_{i\in I} = (E_i(a_i))_{i\in I}$。□

5.2. 模型论中的推论。在证明定理 1.5 之前，我们先建立一个适用于迹完备 C^*-代数的模型论框架。

关于 C^* 代数连续模型论所需的全部背景知识，请参阅 [FHL+21]（关于算子代数之外更一般的研究方法，另请参阅 [BYBHU08]）。在 [FHL+21] 中，含幺 C^* 代数被表示为多类结构，其语言为 $\mathcal{L}_{C^*} = \{\|\cdot\|, +, \cdot, ^*, \{z\}_{z\in\mathbb{C}}, 0, 1\}$，其中各类被解释为闭球，代表量化域。这种语言不便于研究迹完备的 C^* 代数，因为这类代数的行为更接近带迹的冯·诺依曼代数（例如参见 [FHS14]）。

为预先铺垫将在 [FHH+] 中介绍的迹完备 C^* 代数的模型论分析，令 $\mathcal{L}_2 = \{\|\cdot\|_2, +, \cdot, ^*, \{z\}_{z\in\mathbb{C}}, 0, 1\}$ 为一种语言，它具有单类和可数多个量化域 D_k，包含两个常元符号 0 和 1、表示代数运算 $+$、$\cdot$ 和 * 的符号、针对每个 $z \in \mathbb{C}$ 的符号 z，以及表示迹范数 $\|\cdot\|_2$ 的符号。代数运算所赋予的连续模按自然方式选取。这与 [FHS14] 中所考察的冯·诺依曼代数语言类似，不同之处在于谓词 tr；在带迹的冯·诺依曼代数中，它被解释为迹。

一个带迹完备的 C^*-代数 $(\mathcal{M}, X)$ 是一个 $\mathcal{L}_2$-结构，其中符号 $\|\cdot\|_2$ 被解释为 $\|\cdot\|_{2,\,X}$，运算符号按通常方式解释，而 D_k 被解释为算子范数中的 k-球。

给定一个迹完备的 C^*-代数序列 $((\mathcal{M}_i, X_i) \mid i \in I)$，可以验证，在 §2.2 中引入的迹超积 $\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ 对应于度量结构的标准超积（参见 [BYBHU08，第 5] 节），该超积是将每个 $(\mathcal{M}_i, X_i)$ 视为一个 $\mathcal{L}_2$-结构时得到的。事实上，可以验证范数的超积$\|\cdot\|_{2,\,X_i}$ 恰好是 $\|\cdot\|_{2,\,\sum^{\mathcal{U}} X_i}$，也就是说

$$\|(a_i)_{i\in I}\|_{2,\sum^{\mathcal{U}} X_i} = \lim_{i\to\mathcal{U}}\|a_i\|_{2,X_i}, \text{ for every } (a_i)_{i\in I} \in \prod\nolimits^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i.$$

这尤其意味着 $\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ 的单位球是$\|\cdot\|_2,\ \sum^{\mathcal{U}} X_i$-完备的（参见 [BYBHU08，命题 5.3]），因此 $(\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i, \sum^{\mathcal{U}} X_i)$ 自动成为一个迹完备的C^*-代数。在本节中，我们特别指出，将 $\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ 视为一个带有由 $\sum^{\mathcal{U}} X_i$ 诱导的 2-范数的 $\mathcal{L}_2$-结构，因此我们称序列 $((\mathcal{M}_i, X_i) \mid i \in I)$ 的超积为有序对 $(\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i, \sum^{\mathcal{U}} X_i)$。

若序列 $((\mathcal{M}_i, X_i) \mid i \in I)$ 由 W^*-丛组成，且 $X_i = \mathrm{Prob}(K_i)$，那么如命题 2.4 中所述，在 $K = \sum^{\mathcal{U}} K_i$ 之上由 $\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ 诱导的 W^*-丛结构使得 $(\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i, \mathrm{Prob}(K))$ 成为一个迹完备的 C^*-代数（参见命题 2.2 之前的讨论）。另一方面，将 $((\mathcal{M}_i, X_i) \mid i \in I)$ 视为 $\mathcal{L}_2$-结构时，其超积为 $(\prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i, \sum^{\mathcal{U}} X_i)$。这两种表示对应同一个对象，事实上 $\sum^{\mathcal{U}} X_i = \mathrm{Prob}(K)$。确实，给定 $(a_i)_{i\in I} \in \prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$，我们有

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in \sum^{\mathcal{U}} X_i} |\tau((a_i)_{i\in I})| &= \lim_{i \to \mathcal{U}} \sup_{\tau \in X_i} |\tau(a_i)| \\ &= \lim_{i \to \mathcal{U}} \sup_{\tau \in K_i} |\tau(a_i)| \\ &= \sup_{\tau \in K} |\tau((a_i)_{i\in I})| \\ &= \sup_{\tau \in \mathrm{Prob}(K)} |\tau((a_i)_{i\in I})|. \end{aligned} \tag{5.5}$$

如 [CET+21 中引理 4.4] 所述，应用 Hahn–Banach定理即可得到 $\sum^{\mathcal{U}} X_i = \mathrm{Prob}(K)$，因为它们都是凸且闭的。特别是，在这种情况下 $\partial_e(\sum^{\mathcal{U}} X_i) = \sum^{\mathcal{U}} \partial_e X_i$。

在此模型论框架下，直接应用 Łoś 定理即可得到定理 1.3，适用于指标集不同于 $\mathbb{N}$ 的超幂。

定理 1.3 的证明。设 $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ 是定义在 K_i 上的一列因子型 W^*-丛，并假设存在 $d \in \mathbb{N}$，使得对每个 $i \in I$ 都有 $\dim(K_i) \leq d$。那么 $\mathcal{M} = \prod^{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ 是定义在 $K = \sum^{\mathcal{U}} K_i$ 上的一个 W^*-丛；如定理 3.2 的证明所示，只需证明对每个 $a \in \mathcal{M}_{sa}$

$$\sup_{\lambda \in K} |\tau_\lambda(a)| = \sup_{\tau \in T(\mathcal{M})} |\tau(a)|. \tag{5.6}$$

考虑公式

$$\varphi(x, y) = \inf_{\substack{w_1,\dots,w_{10d} \\ z_1,\dots,z_{10d}}} \left\| x - y - 48 \sum_{i \leq 10d} [w_i, z_i] \right\|_2,$$

其中，inf 是在对应于单位球的类型上取下确界。固定一个压缩算子 $a = (a_i)_{i\in I} \in \mathcal{M}$。由引理 3.1 可知，对于每个 $i \in I$，都有 $\varphi^{(\mathcal{M}_i, \text{概率}(K_i))}(a_i, E_i(a_i)) = 0$。于是，根据 Łoś 定理（[BYBHU08，定理 5.4]），我们还有

$$\varphi^{(\mathcal{M}, \mathrm{Prob}(K))}(a, E^{\mathcal{U}}(a)) = 0. \tag{5.7}$$

若 $\sup_{\lambda\in K} |\tau_\lambda(a)| \leq \delta$ 对某个 $\delta \geq 0$ 成立，则 $\|E^{\mathcal{U}}(a)\| \leq \delta$，因此，按照定理 3.2 的证明进行论证，可得

$$\sup_{\tau \in T(\mathcal{M})} |\tau(a)| \leq \delta.$$

式 (5.6) 中的等式成立，因为 δ 是任意选取的。 □

定理 1.5 的表述中所考虑的 C^*-代数 A 和 B，假设作为 $\mathcal{L}_{C^*}$-结构是初等等价的。为了使用前几节中发展的工具，我们希望能够比较它们的迹完备化，如 [Oza13] 中的定义。

定义 5.7。给定一个含幺 C^*-代数 A，其迹空间 $T(A)$ 非空，则其迹完备化是如下的 C^*-代数

$$\overline{A}^{T(A)} = \frac{\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(A) \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ is a } \|\cdot\|_{2,T(A)}\text{-Cauchy sequence}\}}{\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(A) \mid \lim_{n\to\infty} \|a_n\|_{2,T(A)} = 0\}}$$

每个迹 $\tau \in T(A)$ 都可规范地延拓为 $\bar{\tau}$ 在 $\overline{A}^{T(A)}$ 上的一个迹，该迹在每个表示柯西序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 上定义为

$$\bar{\tau}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} \tau(a_n).$$

因此，我们可以将 $T(A)$ 视为 $\overline{A}^{T(A)}$ 的迹空间的一个子集，并且很容易验证，$(\overline{A}^{T(A)}, T(A))$ 是一个因子型迹完备 C^*-代数。

下面的引理 5.8 是 [FHL+21，命题 3.5.1]，的直接推广，它表明，对于 Cuntz–Pedersen 零集可定义的类而言，C^*-代数的一阶 $\mathcal{L}_{C^*}$ 理论完全决定了其迹完备化的 $\mathcal{L}_2$ 理论，其意义与 [FHL+21，第 3] 章中的定义相同。给定一个 C^*-代数 A，其 Cuntz–Pedersen 零集A_0（由 [CP79]，引入）是自伴交换子 $[a, a^*]$ 集合的线性张成的范数闭包。[CP79，定理 2.9] 将一个元素的 2-范数 $\|\cdot\|_{2,\ T(A)}$ 与其到 A_0 的距离紧密联系起来；更确切地说，它表明

$$\|a\|^2_{2,T(A)} = \sup_{\tau\in T(A)} \tau(a^*a) = d(a^*a, A_0),\ \forall a \in A. \tag{5.8}$$

[FHL+21，定理 3.5.5] 列出了若干类，其中 Cuntz–Pedersen 零集是 $\mathcal{L}_{C^*}$-可定义的。例子包括正合的 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*-代数，以及具有严格比较的 C^*-代数类；以下引理和定理 1.5 适用于这些代数。

引理 5.8. 设 A 和 B 是属于某一类的 C^*-代数，该类中的 Cuntz-Pedersen 零集是可定义的。若 $A \equiv B$作为 $\mathcal{L}_{C^*}$-结构，则 $(\overline{A}^{T(A)}, T(A)) \equiv (\overline{B}^{T(B)}, T(B))$ 作为$\mathcal{L}_2$-结构。

证明。若 $T(A)$ 和$T(B)$ 都是单元素集，则此结论由 [FHL+21，命题 3.5.1] 得出。更一般地，给定一个 C^*-代数 A，A_0 的可定义性意味着范数 $\|\cdot\|_{2,\ T(A)}$ 也是一个可定义谓词，这由 [FHL+21，定理 3.2.2] 及 (5.8) 得出。

由此可知，若 A 是属于某个 Cuntz-Pedersen 零集可定义类的 C^*-代数，那么在 A 上对 $\mathcal{L}_2$-公式的所有解释都是 $\mathcal{L}_{C^*}$-可定义谓词。这可通过对公式的复杂度进行归纳证明：原子情形由 $\|\cdot\|_{2,\ T(A)}$ 是可定义谓词所涵盖，而量词情形则由 A_1 在 $(\overline{A}^{T(A)})_1$中稠密所涵盖。□

以下引理表明，保持 2-范数的迹完备 C^*-代数之间的同构，也会在诱导 2-范数的迹集之间诱导仿射同胚。该论证运用了 Hahn–Banach定理，出自 [CCE+]的作者。

引理 5.9（[CCE+]）。设 $(\mathcal{M}, X)$ 和 $(\mathcal{N}, Y)$ 是两个迹完备 C^*-代数，且 $\theta\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是一个同构，使得对每个 $a \in \mathcal{M}$，都有 $\|a\|_{2,\ X} = \|\theta(a)\|_{2,\ Y}$。那么$\theta^*(Y) = X$。

证明。假设 $\theta^*(Y) \neq X$，且存在 $\tau \in X \setminus \theta^*(Y)$（$\tau \in \theta^*(Y) \setminus X$ 的情形类似）。由于 $\theta^*(Y)$ 是闭凸集，根据 Hahn–Banach定理，存在一个定义在 $T(\mathcal{M})$ 上的仿射、正、连续函数 f，并且 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得$f(\tau) > \alpha$，且对每个 $\sigma \in \theta^*(Y)$ 都有 $f(\sigma) < \alpha$。根据 [KR14，引理 6.2]，我们可以逼近

f，使其与 $\mathcal{M}$ 的正元上的取值任意接近，因此存在 $a \in \mathcal{M}_+$，使得

$$\sup_{\sigma \in \theta^*(Y)} \sigma(a) < \tau(a).$$

这给出 $\|\theta(a^{1/2})\|_{2,\ Y} < \|a^{1/2}\|_{2,\ X}$，这与关于 θ 的假设矛盾。 □

在下一个证明中，我们反复用到这样一个事实：由一个标准的稠密性论证可知，含幺 C^*-代数 A 的迹超积 $A^{\mathcal{U}}$ 等于其迹完备化的超幂 $(\overline{A}^{T(A)})^{\mathcal{U}}_{T(A)^\circ}$

定理 5.10。设 A、B 是属于任意一个 Cuntz–Pedersen 零集可定义的类的两个含幺 C^*-代数。假设 $A \equiv B$ （作为 $\mathcal{L}_{C^*}$-结构）。那么，$T(A)$ 是鲍尔单纯形，当且仅当 $T(B)$ 是鲍尔单纯形。此外，如果 $T(A)$ 和 $T(B)$ 都是第二可数的鲍尔单纯形，那么 $\partial_e T(A)$ 和 $\partial_e T(B)$ 的覆盖维数相同。

证明。固定陈述中的 A 和 B 。根据引理 5.8，它们的迹完备化作为 $\mathcal{L}_2$-结构初等等价，因此由 [BYBHU08 定理 5.7] ，存在一个指标集 I和一个定义在 I上的超滤子 $\mathcal{U}$，使得 $(A^{\mathcal{U}}, T(A)^{\mathcal{U}}) \cong (B^{\mathcal{U}}, T(B)^{\mathcal{U}})$，且存在一个 $\|\cdot\|_{2,T(A)^{\mathcal{U}}}$ - $\|\cdot\|_{2,T(B)^{\mathcal{U}}}$- 等距同构。假设 $T(A)$ 是一个鲍尔单纯形。由定理 2.3 和命题 2.4，数对 $(A^{\mathcal{U}}, T(A)^{\mathcal{U}})$ 可赋予一个以 $(\partial_e T(A))^{\mathcal{U}} = \partial_e(T(A)^{\mathcal{U}})$ 为底空间的 W^*-丛结构，因此 $T(A)^{\mathcal{U}}$ 是一个鲍尔单纯形（另见 (5.5) 中计算之前的讨论）。进而，由引理 5.9 可知， $T(B)^{\mathcal{U}}$ 是一个鲍尔单纯形。

固定 $\tau \in \overline{\partial_e T}(B)$。我们证明， τ到 $B^{\mathcal{U}}$ 的典范延拓（仍记为τ）属于 $T(B)^{\mathcal{U}}$的边界。这足以得出 $\tau \in \partial_e T(B)$，因为 τ 在 $T(B)$中的任何非平凡凸分解，都会诱导出 τ作为 $T(B)^{\mathcal{U}}$中元素的一个非平凡凸分解。单纯形 $T(B)^{\mathcal{U}}$是鲍尔的，因此只需证明 τ属于 $\partial_e(T(B)^{\mathcal{U}})$的闭包。为此，取 $\varepsilon > 0$和$a_1, \ldots, a_m \in B^{\mathcal{U}}$。固定一个表示序列 $(a_{j,\ i})_{i \in I}$，它表示a_j，对所有 $j \leq m$均成立。对每个 $i \in I$，令 $\sigma_i \in \partial_e T(B)$满足

$$\max_{j \leq m} \{|\sigma_i(a_{j,i}) - \tau(a_{j,i})|\} < \varepsilon. \tag{5.9}$$

注意，极限迹 $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I}$在 $T(B^{\mathcal{U}})$中是极端的。这是因为根据 GNS 表示的唯一性，$B^{\mathcal{U}}$ 上的恒等映射诱导出一个满同构

$$\pi_\sigma(B^{\mathcal{U}})'' \to \prod^{\mathcal{U}} \pi_{\sigma_i}(B)'',$$

由对应于 σ 的 GNS 表示生成的冯·诺依曼代数 $\pi_\sigma(B^{\mathcal{U}})''$ 与对应于 σ_i 的那些代数的迹超积之间。每个 σ_i 都是极端的，因此每个 $\pi_{\sigma_i}(B)''$ 都是因子，其超积也如此。由此得出，$\pi_\sigma(B^{\mathcal{U}})''$ 是因子，因此 σ 是 $T(B^{\mathcal{U}})$ 中逼近 τ 的一个极端点。

我们依靠定理 5.6 来证明该陈述的第二部分。具体而言，根据定理 2.3，完备化 $\overline{A}^{T(A)}$是 $\partial_e T(A)$ 上的因子型 W^*-丛；由于因子性，其中心等于 $C(\partial_e T(A))$。 B也同样如此。关系 $A^{\mathcal{U}} \cong B^{\mathcal{U}}$蕴含 $Z(A^{\mathcal{U}}) \cong Z(B^{\mathcal{U}})$，因此由定理 5.6 可得 $C(\partial_e T(A))^{\mathcal{U}} \cong C(\partial_e T(B))^{\mathcal{U}}$。进而可得，作为 $\mathcal{L}_{C^*}$-结构， $C(\partial_e T(A)) \equiv C(\partial_e T(B))$，因为对于阿贝尔 C^*-代数，迹超幂等于C^*-范数超幂。 X的覆盖维数等于 $C(X)$ 的分解秩（[KW04，命题 3.3]; 这是唯一用到 $T(A)$ 和 $T(B)$ 为第二可数这一事实的步骤），而后者

可由公式的一致族定义（[FHL+21，定理 5.7.3]），因此结论成立。□

References

[Alf71] E.M. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, 《数学及其边界领域成果》，第57卷，Springer，1971年。[APRT23] R. Antoine、F. Perera、L. Robert和H. Thiel, *Traces on ultrapowers of C*-algebras*，预印本 arXiv:2303.01929（2023）。[BBS+19] J. Bosa、N. P. Brown、Y. Sato、A. Tikuisis、S. White和W. Winter, *Covering dimension of *-algebras and 2-coloured classification* **257** 2019 1233, C, 《美国数学会回忆录》（），第 vii +97号。MR 3908669[BF15] T. Bice和I. Farah, *Traces, ultrapowers and the Pedersen-Petersen C*-algebras*, 《休斯敦数学杂志》 **41** 2015 4, 1175 1190 3455354（），第–号。MR BK E. Blanchard和E. Kirchberg, [04] *Global Glimm halving for C*-bundles*, 《算子理论杂志》 **52** 2004 2, 385 420 2120237（），第–号。MR [06] *Operator algebras* Bla B. Blackadar, 《数学科学百科全书》，第122卷，Springer-Verlag，柏林，2006年。 2188261 *C*代数与冯·诺依曼代数理论*, 《算子代数与非交换几何》III。MR [08] BYBHU I. Ben Yaacov、A. Berenstein、C. W. Henson和A. Usvyatsov, *Model theory for metric structures*, 《模型论及其在代数与分析中的应用》第2卷，《伦敦数学会讲义丛书》第350卷，剑桥大学出版社，剑桥，2008年，第315–427页。MR 2436146[CCE+] J. Carri´on、J. Castillejos、S. Evington、J. Gabe、C. Schafhauser、A. Tikuisis和S. White, *Tracially complete C*-algebras*，准备中的手稿。[CET+21] J. Castillejos、S. Evington、A. Tikuisis、S. White和W. Winter, *Nuclear dimension of simple* C **-algebras* **224** 2021 1, 245 290 4228503，《数学发明》（），[21] 第–号。MR CETW J. Castillejos、S. Evington、A. Tikuisis和S. White, *Classifying maps into uniform tracial sequence algebras* ¨ **14** 2021 2, 265 281，《明斯特数学杂志》（），第–号。4359832 MR [79] *Equivalence and traces on C*-algebras* CP J. Cuntz和G. K. Pedersen, 《泛函分析杂志》33（ 1979 2, 135 164 546503），第–号。MR EP S. Evington和U. Pennig, [16] *Locally trivial W*-bundles* **27** 2016 11, ,《国际数学杂志》（），第号。MR 1650088, 25 3570373 [18] *W*-bundles* Evi S. Evington, 《博士论文》，格拉斯哥大学，2018年。[FdlH80] T. Fack和P. de la Harpe, *finies continues* **30** 1980 3, 49 73 *Sommes de commutateurs dans les algèbres de von Neumann*，《〈傅里叶研究所年刊〉》（格勒诺布尔）（），第–号。MR [+] 597017

FHH I. Farah、B. Hart、I. Hirshberg、C. Schafhauser、A. Tikuisis和A. Vaccaro, *A tracial transfer property*，准备中的手稿。[FHL+21] I. Farah、B. Hart、M. Lupini、L. Robert、A. Tikuisis、A. Vignati和W. Winter, *Model theory of C*-algebras* **271** 2021 1324, +127，《美国数学会回忆录》（），第 viii 号。MR [13] 4279915 *Model theory of operator algebras I: stability* FHS I. Farah、B. Hart和D. Sherman, 《伦敦数学会会报》 **45** 2013 4, 825 838 3081550（），第–号。MR FHS, , [14] ——— *Model theory of operator algebras II: model theory*《以色列数学杂志》201 1，477 2014 505 3265292（），第–号。MR [Goo86] K. R. Goodearl, *Partially ordered abelian groups with interpolation*, 《数学调查与专著》丛书，第 20, 1986 845783 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，。MR [14] KR E. Kirchberg和M. Rørdam, *Central sequence C*-algebras and tensorial absorption of the Jiang-Su algebra* **695** 2014 175 214，《纯粹与应用数学杂志》（），–。3276157 MR [04] *Covering dimension and quasidiagonality* KW E. Kirchberg和W. Winter, 《国际数学杂志》 **15** 2004 1, 63 85 2039212（），第–号。MR Lia H.-C. Liao, [16] *A Rokhlin type theorem for simple C*-algebras of finite nuclear dimension*, 《泛函分析杂志》 **270** 2016 10, 3675 3708 3478870（），第–号。MR Lia, , , 《国际数学杂志》28（[17] 2017），第 ——— *Rokhlin dimension of $\mathbb{Z}^m$-actions on simple C*-algebras* 7, 1750050, 22 3667895 号。MR MS H. Matui和Y. Sato, [12] *Strict comparison and $\mathcal{Z}$-absorption of nuclear C*-algebras*, 《数学学报》 **209** 2012 1, 179 196 2979512（），第–号。MR Mur G. J. Murphy, *C*-algebras and operator theory*, [90] 学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1990年。MR 1074574[Oza13] N. Ozawa, *Dixmier approximation and symmetric amenability for C*-algebras*, 《东京大学数学科学杂志》20（2013），第3号，349–374。MR 3156986

[PP70] G. K. Pedersen和N. H. Petersen, *Ideals in a C^*-algebra*, 《斯堪的纳维亚数学学报》27（1970），193–204（1971 308797）。MR Roy A. K. Roy, *Closures of faces of compact convex sets*, 《〈傅里叶研究所年刊〉》[75]（格勒诺布尔）25（1975），第 2, 221 234 390714 –号。MR RW I. Raeburn和D. P. Williams, [98] *Morita equivalence and continuous-trace C^*-algebras*, 《数学调查与专著》丛书，第60卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1998年。MR 1634408[Sat12] Y. Sato, *Trace spaces of simple nuclear C^*-algebras with finite-dimensional extreme boundary* 1209 3000 2012 ，预印本 arXiv:。（）。[TWW15] A. S. Toms、S. White和W. Winter, *$\mathcal{Z}$-stability and finite-dimensional tracial boundaries*, 《国际数学研究通知》（2015 10, 2702 2727 3352253），第–号。MR Wou L. Wouters, [21] *Equivariant $\mathcal{Z}$-stability for single automorphisms on simple C^*-algebras with tractable trace simplices* 2105 04469 2021 ，预印本 arXiv:。（）。

Mathematisches Institut、 Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Münster、Einsteinstrasse 62 48149 Münster 、Germany.*Email address*: avaccaro@uni-muenster.de*URL*: https://sites.google.com/view/avaccaro