排版后的文章将在此处显示适用于该文章类型的横幅

arXiv:2303.01945v1 [physics.flu-dyn] 3 Mar 2023

自然对流系统中的海水冻结模式

杜一鸿[1]†、王子琦[1]‡、蒋林峰[1]，Enrico Calzavarini[2]¶和孙超[1,3]‖

[1]清华大学燃烧能源中心、教育部热科学与动力工程重点实验室、低碳清洁能源创新国际联合实验室及能源与动力工程系，中国北京 100084

[2]里尔大学，里尔力学研究所——J. Boussinesq（UML）ULR 7512，法国里尔 F-59000

[3]清华大学航天航空学院工程力学系，中国北京 100084

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

海冰在许多自然过程和人类活动中至关重要。理解海冰的形成、增长和平衡与其界面及内部发生的丰富流体力学过程之间的动力学耦合，对从地球物理学到海洋工程等诸多领域都具有重要意义。在此，我们通过实验研究标准自然对流系统（即典型的 Rayleigh-Bénard胞）中溶解有盐的水的完整冻结过程。由于存在糊状相，该系统比相同条件下淡水的冻结过程复杂得多（Wang 等2021*c*）。我们测量了不同溶液初始盐度和胞体两侧温差下，动力学平衡态的冰厚度和孔隙率。这些观测量与系统的控制参数之间存在非简单关系，因为它们取决于胞体内的热输运模式。我们在实验中识别出 6 种可能的热传输模式中的 5 种。我们重点指出了卤水穿过糊状冰发生对流，以及冰下方稳定分层液体中发生穿透对流的现象。本文提出一种一维多层热通量模型，该模型建立在液体和多孔介质自然对流系统中全局热输运的已知标度关系之上。给定测得的冰孔隙率，该模型便可预测相应的冰厚度，从而建立统一的分析框架。

关键词：

† 共同贡献作者
‡ 共同贡献作者 ¶ 通讯邮箱：enrico.calzavarini@univ-lille.fr ‖
通讯邮箱：chaosun@tsinghua.edu.cn

1. 引言

海冰演化对许多环境和地质过程以及人类活动都有重要影响。例如，海洋环流（Clark 等 1999；Straneo & Heimbach 2013；Joughin 等 2012；Hanna 等 2013；Stevens 等 2020）、全球海平面上升（Wadhams & Munk 2004）、陆面反照率（Curry 等 1995；Perovich 等 2002；Scagliarini 等 2020）、生物多样性（Post 等 2013）、微塑料扩散与封存（Peeken 等 2018；Obbard 等 2014），以及高纬度地区和极地区域的冬季航行（de Andrés 等 2018；Ho 2010）。通常，海冰演化与海洋中发生的复杂流体动力学过程密切相关，这些过程涉及广泛的空间和时间尺度。在地球物理背景下通过数值模型对其进行描述时，会用到所谓的微尺度物理参数化，而这些参数化对预测结果的可靠性和准确性起着关键作用（Rae 等 2015；Rousset等 2015）。

本研究重点考察浮力驱动的自然对流在决定海冰上表面生长及实现动力学平衡中的作用。为此，我们在高度可控的实验室环境中，利用瑞利-贝纳德单元（见下文）开展实验。采用这种方法，我们旨在为上述广泛应用中的地球物理尺度计算模型提供高度可靠的小尺度参数化，而这一过程对这些模型至关重要。

瑞利-贝纳德（RB）系统是一个流体层，其上下分别被较暖的水平底板和较冷的顶板平行约束，侧面则与外界隔热（Ahlers等2009；Lohse 和 Xia 2010；Chillà 和 Schumacher 2012）。它是非线性系统物理学和流体力学中的典型模型系统。数十年来，人们一直在研究其行为；该系统对于深入理解流体动力学不稳定性、混沌转变、湍流和湍流输运至关重要。如今，其在广泛状态范围内的局部和全局性质已得到充分表征（Ahlers等2009；Chillà 和 Schumacher 2012）。近年来，研究已证明，RB系统也适用于研究液固相变与流体流动现象之间的耦合（Esfahani 等2018；Favier 等2019）。该系统尺度适合实验室研究，且为封闭系统，可测量进出能量通量，因此具有高度可控性，同时能够再现非定常湍流条件下水冻结的复杂过程。近期有多项研究探讨了温度（Wang 等2021*c*；Yang 等2023*b*）、倾斜角度（Wang 等2021*d*；Yang 等2022）、旋转（Ravichandran 等2022）、初始条件和纵横比（Wang等2021*b*）对RB系统中淡水冻结/融化的影响。然而，海水中溶解盐的存在使过程变得更加复杂。具体而言，要恰当研究海冰的演变，必须考虑两个因素。

首先是海冰的糊状结构（Feltham 等2006），它使间隙流体运动得以发生，即盐水排泄和热对流可在海冰中进行。许多研究探讨了水溶液凝固过程中形成的糊状结构，重点主要包括对流盐水排流的起始条件（Wettlaufer 等1997）、糊状相形态（Peppin 等2008）、冰层生长速率（Kerr 等1990）、冰孔隙率（Wettlaufer 等1997）、糊状相内部的流动结构（Chen，1995；Worster 与 Wettlaufer，1997），以及液相中的盐度（Wettlaufer 等1997；Peppin 等2008）。这些研究连同相关综述（Worster，1997；Anderson 与 Guba，2020；Wells 等2019年），从详尽、全面且多角度的视野阐明了盐水排泄和糊状相结构；然而，糊状结构与邻近的强烈热对流流动之间的相互作用却鲜有研究。少数讨论海冰生长的研究则

着重建立适用于数值模拟的控制动量方程和能量方程（Feltham 等2006；Covello 等2016；Wells 等2019年），或提出将冰生长视为纯粹由扩散控制的理论模型（Worster 和 Rees Jones，2015年；Notz，2005年）。

第二个因素是盐水特殊的状态方程（状态方程），尤其是其密度对盐度和温度的依赖关系（Gebhart 与 Mollendorf，1977年）以及冰点降低现象（Bodnar，1993年）。对于盐度为 3.5% 的普通海水（即溶解盐的质量浓度），温度从冰点升高时，密度会单调降低。然而，盐度较低的水（例如河口附近的水）或淡水并非如此，其最大密度出现在 $[0, 4]$°C 区间内（Pawlowicz，2015年；Lyman 和 Fleming，1940年）。盐水特殊的密度依赖关系可能会导致 RB 单元中液相出现不同的稳定／不稳定分层组合。在一个类似但更简单的情形中，研究发现，稳定分层与不稳定分层湍流的组合会显著影响淡水的冻结动力学和平衡冰层厚度（Townsend，1964年；Wang等 2021*c*）。其他研究指出，与融化前沿接触的分层类型（稳定或不稳定）对决定水溶液中纯冰层的融化速率起着关键作用（Rosevear等 2021；Mondal 等 2019；Sugawara 和 Irvine，2000年；Yang 等 2023*a*）。然而，这些研究关注的是线性化状态方程盐水混合物在双扩散对流中由盐度梯度造成的分层，也就是说，它们忽略了上述密度对温度和盐度的重要非线性依赖关系。

在这项工作中，我们研究盐水中的冰生长与流体动力学如何相互耦合、共同演化，直至瑞利–贝纳德自然对流系统达到平衡。我们旨在揭示海冰生长速率如何通过与糊状相对流，以及与下方液相中出现的各种密度分层模式和流体流动相互作用，依赖于受控的环境条件。

本文的结构安排如下。§2 介绍实验装置和测量方法。§3 介绍实验结果，重点关注冰层的生长动力学和平衡形态。为初步理解这一复杂过程，在§4 中，我们讨论平衡冰层厚度、其孔隙率和饱和时间如何取决于温度和盐度条件，以及这些全局性质之间的相关性。§5 介绍一种一维多层热通量模型，该模型描述平衡冰层厚度对系统控制参数的依赖关系，并识别实验系统中 6 种可能热输运模式中的 5 种。最后，我们在§6中总结并展望。

2. 实验

实验在一个长方体瑞利–贝纳德单元中进行（高度为 $H = 0.12$ m，纵横比为 $\Gamma = L/H = 2$，宽高比为$W\!H = 0.5$，即所谓的准二维系统）。连接了一个膨胀容器，以补偿冻结过程中的体积变化，从而监测糊状相的生长，见图1(a)。顶板和底板温度通过热敏电阻测量，并由循环浴控制。侧壁采用泡沫材料隔离，以接近理想的绝热边界条件。单元最初充满初始盐度为S_i的脱气盐水。这里使用氯化钠（NaCl）作为盐，它是海水的主要溶质（Lyman & Fleming 1940）。 S_i 在0（淡水）到3.5%（平均海洋盐度）之间变化，相应的冰点T_{0i}（Hall等 1988）则在0到−2.1◦C之间变化。（热）底板温度 T_b等于初始液体温度，范围为0.4到12.9

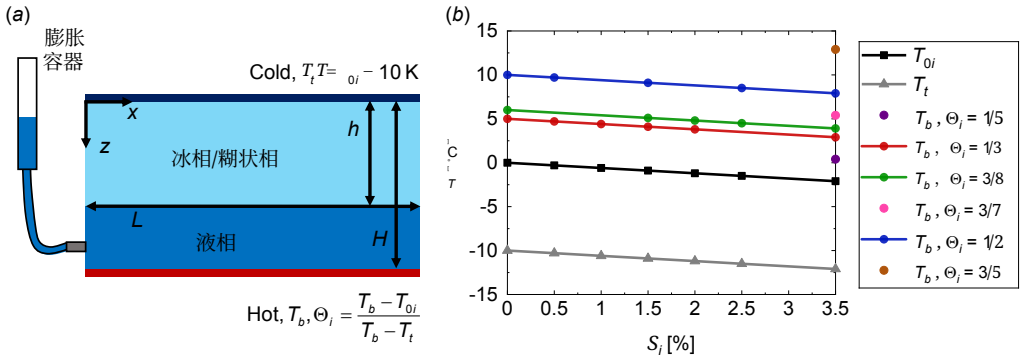


图 1：实验系统示意图及温度-盐度参数空间。(a) 实验装置示意图。单元高度为 $H = 0。12$ m，纵横比为 $\Gamma = L/H = 2$，宽高比为 $W/H = 0。5$。连接了一个膨胀容器，用于补偿体积变化并监测糊状相的生长。底板温度保持在 T_b，顶板温度 T_t 维持在冰点 T_{0i} 以下 10 K，初始盐度为 S_i。无量纲底部过热参数定义为 $\Theta_i = (T_b - T_{0i})/(T_b - T_t)$。(b) 温度-盐度参数空间。本研究测试 $\Theta_i = 1/5$（紫色）、1/3（红色）、3/8（绿色）、3/7（粉色）、1/2（蓝色）和 3/5（棕色）。初始盐度 S_i 的变化范围为 0 至 3.5%。每种情况均显示 T_b（圆点）。同时还绘出了 T_{0i}（黑色方块）和 T_t（灰色三角形）随 S_i的变化。

。C，而（冷）顶板温度 T_t 设定为比冰点低10 K，因此为$T_t = T_{0i} - 10$ K（从−10到−12.1 。C，取决于 S_i）。于是可以定义无量纲底部过热度参数为 $\Theta_i = (T_b - T_{0i})/(T_b - T_t)$。该参数表征液相中允许的初始温差与贯穿单元总间隙的温差之比。在实验过程中，该参数也可能发生轻微变化。这是因为熔化温度取决于实际盐度，而在平衡态下 S_e 和T_{0e} 因此可能不同于初始值（实际上 S_e 最高可达7%，当 $T_{0e} \approx -4.2$ 。C 时，见图5b））。由于溶质总量保持不变，预计液体中的盐度会因糊状相排出盐分而升高（从而使 Θ增加）。

在本研究中，我们首先测试盐度分别为 $\Theta_i = 1/3$（红色）、3/8（绿色）和 1/2（蓝色）的状态$S_i \in [0, 3。5]$%。此外，我们还进行了盐度为 $\Theta_i = 1/5$（紫色）、3/7（粉色）、3/5（棕色）和 $S_i = 3。5$% 的实验，以便在更宽的温度范围内检验结果。图1（b）展示了实验中探索的温度-盐度参数空间。图中报告了不同 T_b（圆点）、T_{0i}（黑色方块）和 T_t（灰色三角形）对应的温度值，以及不同的 Θ_i 和S_i。在这种实验配置中，冰/糊状相从顶板开始生长，直至系统达到平衡。我们假定，当平均糊状相厚度h（t）（见图 1a）在八小时内的变化小于 1% 时，系统即达到此状态；实验最长持续三天。冰层或糊状相的厚度及其孔隙率ϕ（t）（即冰或糊状相中残余液体的体积分数）可分别通过在系统照片中确定冰-液界面，以及结合膨胀容器读数和系统总质量守恒的假设来获得。膨胀容器中的蒸发可以忽略，因为它造成的质量损失不到系统总质量的 0.1%。有关测量规程的更多详情，请参阅附录A 。

3. 糊状相形态与生长动力学

图 2（a）、（c）显示了两种典型情形下实验达到平衡态时的照片（$S_i = 0$、3.5%和 $\Theta_i = 3/8$）。可以很容易地观察到

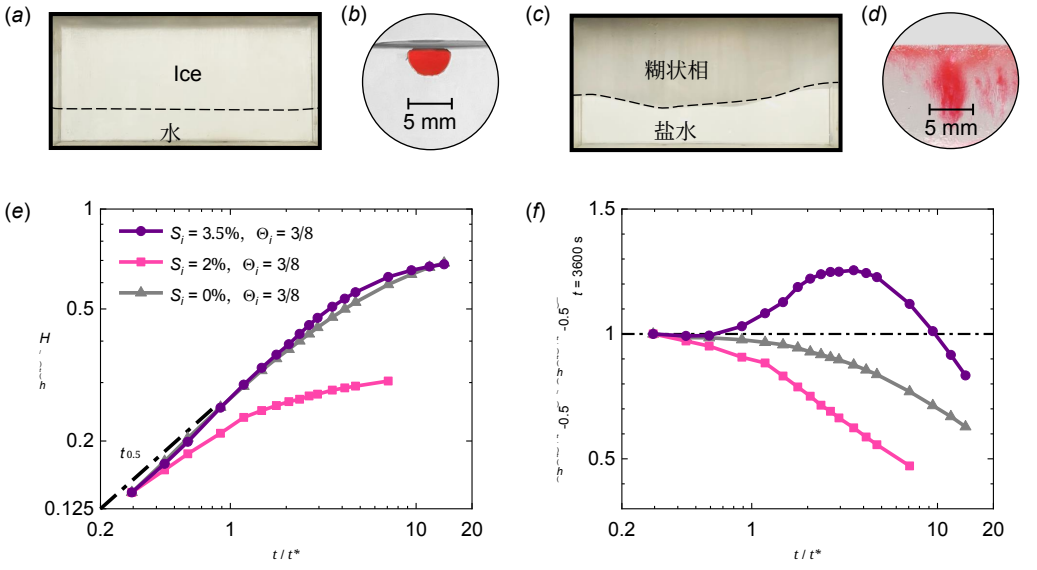


图 2：冰层图像及其内部结构，以及冻结前沿的演变。(a-d)，无孔隙率（a、b）和有孔隙率（c、d）的冰/糊状相照片。(a、b)的实验条件为 $S_i = 0\%$，(c、d)为 $S_i = 3.5\%$，二者均使用 $\Theta_i = 3/8$。在（b、d）中，将相同用量、相同浓度的红色染料滴入（a、c）中相应固体基质上表面同一位置刻出的一个小半球形凹坑内。（a、b）中的冰是透明的，染料不会扩散。（c、d）中具有孔隙率的糊状相相对不透明，染料呈各向异性地扩散，这可能表明存在通道。（e）冻结前沿的动力学。糊状区厚度$h(t)$以 H 无量纲化，并绘制为时间的函数；时间以扩散时间尺度 $t^* = H^2/\kappa_{ice} = 1.22 \times 10^4$ s 无量纲化（其中 κ_{ice} 为冰热扩散率），对应三组实验。（f）对（e）中的相同数据按扩散行为进行补偿，$h(t)/\sqrt{t}$（以第一个数据归一化，以便比较不同情况）。

冰化区域（盐水情形下较薄）以及两种情形之间不同的界面形状。然而，它们的差异不仅体现在体积和形态上，也体现在结构上。为说明这一点，我们在冰基质的顶部水平表面挖出一个很小的（5 mm）半球形空腔，并在其中滴入一滴红色染料。图 2（b）、（d）显示了染料滴沉积形成5分钟后的两张侧视照片。我们观察到，当 $S_i = 0$ （图 b ）时，冰相是透明的，染料不会扩散到其中，这表明基质具有致密结构。相反，在 $S_i = 3_{\circ}5\%$ （图d）时，冰相呈不透明状，染料发生各向异性扩散，这凸显出一种充满液体的复杂多孔介质（即糊状相结构），其中包含内部垂直通道。

值得注意的是，不同的冰相结构对应着不同的冻结动力学。图 2(e)、(f) 清楚地展示了这一点，其中给出了三组实验条件下冻结前沿的时间演化：纯水、中等盐度和海水盐度，且均为 t)。在 $\Theta_i = 3/8$。尽管这三种情况最初都表现出扩散性冰相生长，即 $h \propto \sqrt{t}$，但随后 $S_i = 0$ （灰色三角形）和 2%（粉色方块）情况下的生长速率会降低；而当 $S_i = 3.5\%$ （紫色圆点）时，瞬时生长速率会增加，甚至在达到平衡前超过扩散生长速率。还值得注意的是，平衡高度并不与盐度简单成正比。上述盐溶液中冰生长的时间演化取决于糊状相的内部结构，而该结构也可能随时间变化（例如，由于卤水通道的形成（Wettlaufer等 1997年；Worster 与 Wettlaufer，1997））。要定量描述这一过程颇具挑战，因为它

需要详细了解糊状微观结构。任何试图表征固-流体界面形态的工作也面临同样的问题。因此，接下来我们聚焦于一个更简单的问题，尝试研究随时间渐近达到的全局平均平衡态。换言之，我们旨在理解控制冰冻糊状相平均厚度（记为 h_e）的因素。

4. 平衡态的全局性质

我们在图3中展示了平衡时糊状相的两个重要空间平均性质（下文以下标 e 表示）：无量纲厚度 h_e/H 和孔隙率 ϕ_e。此外，我们还报告了饱和时间（或达到平衡的时间），记为 $t_e^{90\%}$。出于实际考虑，此处将其定义为达到平衡厚度 90% 所需的时间，并用扩散时间尺度 $t^* = H^2/\kappa_{ice} = 1.22\times10^4$ s 进行无量纲化。厚度 h_e 随初始盐度 S_i 的变化关系在不同控制参数 Θ_i 下差异很大（见图3a）：当 Θ_i = 1/3、3/8 时，h_e 呈现相似的非单调（下降—上升—下降）变化模式；而当 Θ_i = 1/2 时则单调下降。这些趋势在 $\phi_e(S_i)$ 关系中也有所体现：尽管在中等盐度范围内波动显著，但在所有 Θ_i 情况下，其整体趋势均为上升（见图3b）。

多孔性更高的冰基质（ϕ_e较高）能够向液体中释放更多盐分，因此降低溶液的最终冰点，T_{0e}，进而减小 h_e，这一事实或许可以合理解释总体上观察到的趋势。然而，仅凭这一点还不足以解释 h_e 和 ϕ_e中观察到的任何波动或非单调依赖关系。此外，需要注意的是，现有测量结果并不能明显表明 ϕ_e 与 h_e 之间存在相关性（见图3c）。例如，如果质量守恒和几何结构仅仅决定了平衡糊状层厚度与糊状层孔隙率之间的关系，那么就有 $h_e(1-\phi_e) = const$。（其中，该常数表示盐度为零、相应地孔隙率也为零时的冰层高度。）这意味着 h_e 随 ϕ_e增大而增大，而图3(c)显示的趋势恰恰相反（可以注意到，在 Θ_i取固定值时，$h_e(\phi_e)$呈减小趋势）。我们由此得出结论：$h_e(\phi_e)$关系是系统控制参数 S_i 和 Θ_i的非平凡函数。

最后，我们发现，$t_e^{90\%}$的变化趋势反而与h_e（图3d）一致，而且这两个量之间呈现出明显的线性相关性（图3e）。这种对应关系提供了一种估算达到平衡所需时间的方法，只需关注h_e的大小即可。因此，接下来我们将重点对导致h_e变化的物理机制进行建模。我们要探讨的问题是：能否通过一个仅考虑（i）孔隙率的作用和（ii）热分层的作用、并描述它们对系统中热传递过程稳态的影响，同时不考虑其复杂瞬态动力学的模型，来理解平衡时的全局性质?

5. 多层热通量模型

要回答上述问题，我们需要理解h_e 与 ϕ_e 之间的关系，以及糊状相中的对流和稳定分层与不稳定分层湍流的共同作用如何影响系统内的热输运。我们将证明，基于流体和多孔介质中自然对流的已知标度定律构建的一维（或积分）多层热通量模型，在将 ϕ_e作为实验输入提供后，能够较准确地解释h_e。另一方面，我们发现，定量描述 ϕ_e 需要建立一个模型来刻画多孔冰基质微观结构的演变。这是一项艰巨的任务，目前超出了我们的能力范围，而且

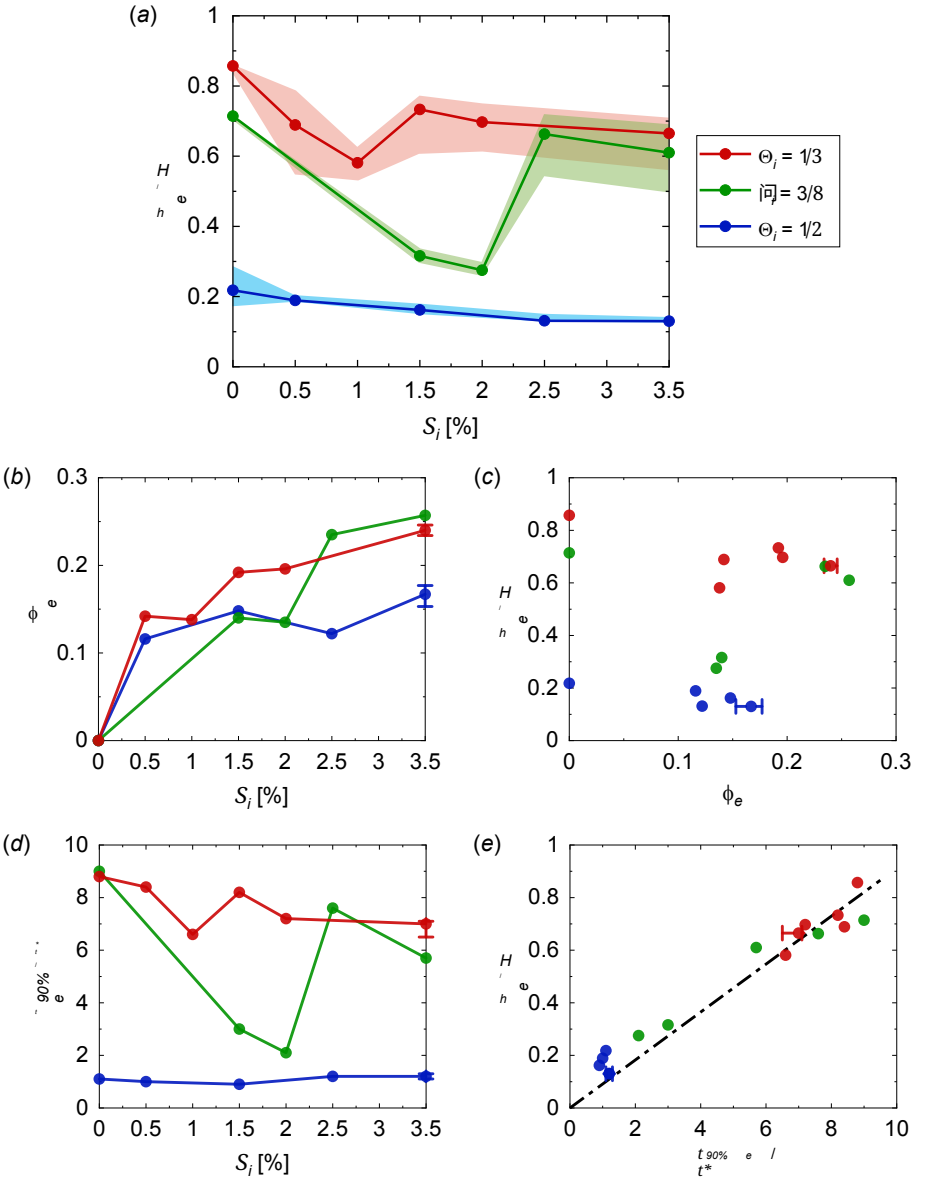


图3：实验所得平衡态的全局性质。初始过热度分别为 $\Theta_i = 1/3$（红色）、3/8（绿色）和 1/2（蓝色），初始盐度 S_i 在 0 到 3.5% 之间变化。在 $S_i = 3.5\%$ 和 $\Theta_i = 1/3$、1/2 两种情况下，通过重复实验测得误差棒。（a）对于三种过热度，平均糊状相厚度 h_e（圆点）最初随 S_i 增加而减小，随后在 $\Theta_i = 1/3$ 和 3/8 两种情况下急剧增加。阴影区域表示糊状相厚度空间变化的最小值和最大值。厚度以 H无量纲化。（b）平均糊状相孔隙率 ϕ_e（方块）随 S_i呈现非单调但总体上升的趋势。（c）h_e 与 ϕ_e不存在显著统计相关性。（d）饱和时间 $t^{90\%}_e$（三角形）定义为达到平衡糊状相厚度 h_e 的 90% 所需的时间，并以扩散时间尺度 $t^* = 1.22 \times 10^4 s$无量纲化。$t^{90\%}_e$ 随 S_i 的变化与 h_e一致。（e）h_e 与 $t^{90\%}_e$ 呈现明显的正相关。线性拟合得到 $h_e/H = 0.0912 \cdot t^{90\%}_e / t^*$（点划线），相关系数为 $R^2 = 0.9846$。

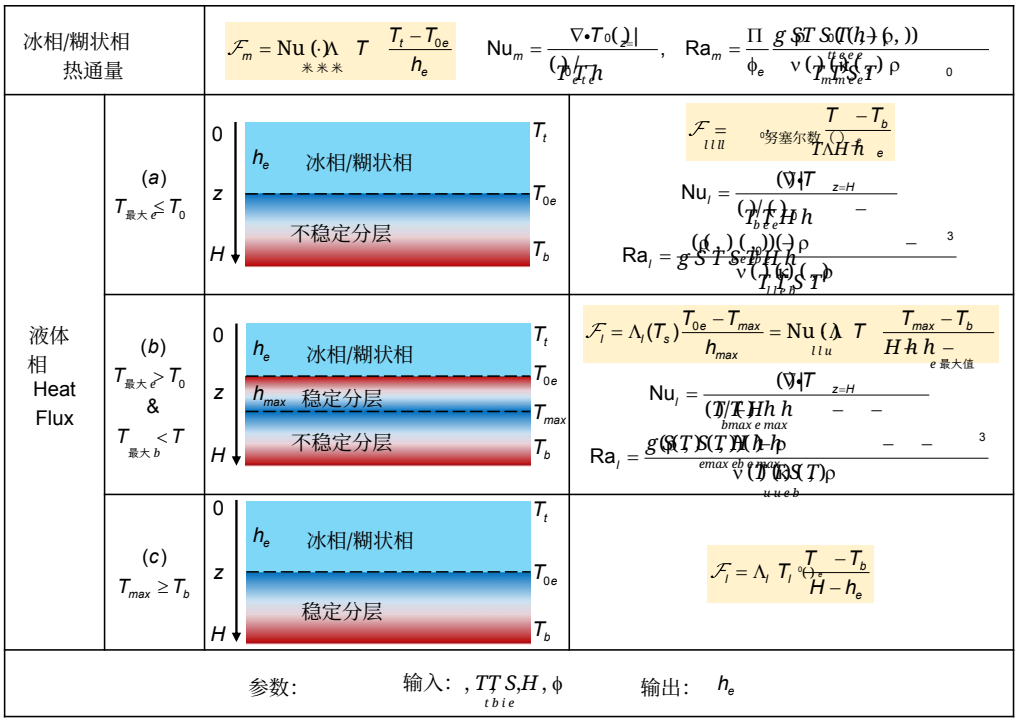


图4：平均多层热通量模型的综合示意图。第1行给出了糊状相全局热通量表达式 F_m 所采用的参数化，以及 Nu_m 和 Ra_m 的定义。第2至4行给出了液相全局热通量表达式 F_l，以及 Nu_l 和 Ra_l 的定义（第4列）。可能存在三种不同的分层组合，分别为：(a) 不稳定，(b) 混合，(c) 不稳定。区分这些组合的判据是温度范围 $[T_{0e}, T_b]$ 内液体密度的单调性，即 T_{0e}、T_b 与最大密度温度 T_{max}（第2列）的相对大小，而最大密度温度取决于盐度 S_e。第3列展示了这些组合的示意图，以及层厚度和界面温度。颜色渐变表示液相中的密度梯度，其中红色代表密度较低的液体，蓝色代表密度较高的液体。该模型还包含五个输入参数，分别为 T_t、T_b、S_i、ϕ_e 和 H；基于各层之间热通量平衡在统计意义上处于稳态的假设，模型可估算 h_e（第5行）。

这一点留待未来研究。总之，下面提出的多层热通量模型能够解释将h_e 与 ϕ_e联系起来的复杂关系，其中后者被视为独立变量。

我们假设，系统在平衡状态下的固-流体界面位置h_e，是糊状相中的平均热通量$\mathcal{F}_m$与液体中的平均热通量$\mathcal{F}_l$ 之间平衡的结果（见图4）。这两个量都需要进行参数化，下面将详细说明。为简洁起见并便于阅读，模型中涉及的众多物理量和材料性质的名称请参见附录1 的表D 。

糊状相：我们将统计稳态条件下穿过糊状相的热通量表示如下：

$$\mathcal{F}_m = \mathrm{Nu}_m \cdot \Lambda_m(T_m)\frac{T_t - T_{0e}}{h_e}. \tag{5.1}$$

方程（5.1）涉及糊状区努塞尔数，Nu_m，即总热传递与

糊状相内的导热之比。其与瑞利数 Ra_m的函数关系已由先前对多孔介质中对流的研究确定。这里我们采用 Gupta & Joseph (1973) 给出的参数化公式：

$$\mathrm{Nu}_m = \begin{cases} 1, & \mathrm{Ra}_m < \mathrm{Ra}_{mcr}, \\ 1.3338 + 0.0099\mathrm{Ra}_m, & \mathrm{Ra}_m \geqslant \mathrm{Ra}_{mcr}, \end{cases} \tag{5.2}$$

其中，糊状层临界瑞利数为 $\mathrm{Ra}_{mcr} = 4\pi^2$。多孔介质中流动的瑞利数（$Ra_m$）定义为：

$$\mathrm{Ra}_m = \frac{\Pi}{\phi_e} \frac{g(\rho(S_t, T_t) - \rho(S_e, T_{0e}))h_e}{\nu(T_m)\kappa(T_m)\rho(S_e, T_m)}. \tag{5.3}$$

该定义涉及对渗透率 Π的评估，渗透率是描述多孔介质对流体流动传导能力的量（Pal 等人，2006）。渗透率是多孔冰基质结构的函数，且众所周知难以测量，尤其是对于冰而言，因为它对环境条件和介质的历史高度敏感。包括 Kawamura 等人（2006）、Petrich等人（2006）和 Polashenski 等人（2017）在内的多项既往研究表明，存在一个临界孔隙率（ϕ_c），低于该值时冰表现为不可渗透。高于该阈值时，渗透率可以用孔隙率的幂律函数很好地近似。我们在此采用类似的函数参数化方法，将 Π 与 ϕ_e关联起来：

$$\Pi = \begin{cases} 0, & \phi_e < \phi_{cr}, \\ C\,(\phi_e - \phi_{cr})^{\alpha}, & \phi_e \geqslant \phi_{cr}, \end{cases} \tag{5.4}$$

其中，三个可调参数选为 $C = 7 \times 10^{-8}\ \mathrm{m}^2$、$\alpha = 3$（取自 Carman–Kozeny 关系的首阶近似（Wells等2019年））以及 $\phi_{cr} = 0$。054，以最佳拟合实验测得的h_e。尽管这些数值是为本研究临时选定的，但模型得到的Π 与海冰实验室和野外研究报告的数值处于同一数量级（Kawamura 等2006；Petrich 等2006；Polashenski 等2017）。

液相：同样，液相中的平均热通量可表示为以下近似形式：

$$\mathcal{F}_l = \begin{cases} \mathrm{Nu}_l \cdot \Lambda_l(T_l) \dfrac{T_{0e} - T_b}{H - h_e}, & T_{max} \leqslant T_{0e}, \\ \Lambda_l(T_s) \dfrac{T_{0e} - T_{max}}{h_{max}} = \mathrm{Nu}_l \cdot \Lambda_l(T_u) \dfrac{T_{max} - T_b}{H - h_e - h_{max}}, & T_{max} \in (T_{0e}, T_b), \\ \Lambda_l(T_l) \dfrac{T_{0e} - T_b}{H - h_e}, & T_{max} \geqslant T_b. \end{cases} \tag{5.5}$$

请注意，根据T_{max}的取值，即液体溶液处于平衡时最大密度对应的温度相对于$[T_{0e}, T_b]$的位置，上述表达式由三种不同情况组成：(a) 不稳定分层；(b) 不稳定层上方有一稳定层；(c) 单一稳定层，见图4。情况 (b) 中出现的尺度h_{max}是中间情况下稳定分层的高度。可通过令液体稳定层和不稳定层中的两个热通量相等来确定该高度。液体中的无量纲热通量用努塞尔数 Nu_l表示，它与瑞利数 Ra_l的关系相对成熟。Wang 等人(2021*c*) 根据其瑞利–贝纳德对流系统中淡水冻结模拟数据的拟合，提出了以下参数化方案，其理论预测与实验结果吻合良好。本研究采用相同的参数化方案：

$$\mathrm{Nu}_l = \begin{cases} 1, & \mathrm{Ra}_l < \mathrm{Ra}_{lcr}, \\ 0.12 + 0.88\mathrm{Ra}_l/\mathrm{Ra}_{lcr}, & \mathrm{Ra}_l \in [\mathrm{Ra}_{lcr}, 1.23\mathrm{Ra}_{lcr}], \\ 0.27(\mathrm{Ra}_l - \mathrm{Ra}_{lcr})^{0.27}, & \mathrm{Ra}_l > 1.23\mathrm{Ra}_{lcr}, \end{cases} \tag{5.6}$$

其中，对流开始时的临界瑞利数为 $\mathrm{Ra}_{lcr} = 1708$。需要指出的是，只有在涉及密度不稳定分层的两种情况下（图4中的情况 (a) 和 (b)），才需要定义液体中的瑞利数。我们采用：

$$\mathrm{Ra_l} = \begin{cases} \dfrac{g(\rho(S_e, T_{0e}) - \rho(S_e, T_b))(H - h_e)^3}{\nu(T_l)\kappa(T_l)\rho(S_e, T_l)}, & T_{max} \leqslant T_{0e}, \\ \dfrac{g(\rho(S_e, T_{max}) - \rho(S_e, T_b)(H - h_e - h_{max})^3}{\nu(T_u)\kappa(T_u)\rho(S_e, T_u)}, & T_{max} \in (T_{0e}, T_b). \end{cases} \tag{5.7}$$

最后，模型调节需要材料性质的数值（见附录 C 中所采用的经验公式），这些数值是在平衡盐度 S_e下计算得到的。鉴于在当前系统中不存在盐度源，糊状相中的液体仅含有少量盐分数，并且盐在液体中要么通过对流剧烈混合，要么通过扩散缓慢混合，我们可以假设 S_e 在液层中是均匀的。因此， S_e 可以通过盐的质量守恒与 h_e 以及模型的输入量建立隐式关系：

$$S_e\rho(S_e, T_{mean})(H - h_e(1 - \phi_e)) = S_i\rho(S_i, T_b)H. \tag{5.8}$$

值得注意的是，方程（5.8）仅适用于当前系统（应用于其他系统时，例如开放系统，必须提供对 S_e 的测量值）。Ra_m 的计算还需要 ρ（S_t、 T_t）的值。由于 T_t 是外部施加的，因此其值已知；而 S_t 的值未知。我们在此假设后者取某一数值，使得 T_t 是局部冰点，T_0（S_t） $= T_t$；换言之，我们假设糊状相内部处于局部热力学平衡状态（Wells 等，2019）。最后，通过同时求解热通量平衡 $\mathrm{F}_m = \mathrm{F}_l$ 与盐的质量守恒方程（5.8），并使用测得的值ϕ_e，该模型得到平衡糊状相厚度 h_e。关于模型如何进行数值实现的更详细说明，请参阅附录 B。

模型结果均展示于图5。图5（a）显示了平均糊状相厚度h_e/H 随 S_i 变化的情况，并将其与实验结果进行了比较。当 $\Theta_i = 1/2$ （蓝色线条和符号）时，冰厚度随盐度增加而减小，模型与实验结果吻合较好。模型表明，在此条件下，热量通过糊状相的传递仍以扩散为主（糊状相扩散，MD状态）。盐度增加会降低冰点，并使冻结层厚度略微减小。孔隙率的作用微乎其微，因为此处孔隙率基本保持不变，随 S_i 变化（见图3b）。当 $\Theta_i = 1/3$ 和$3/8$ （红色和绿色线条及符号）时，模型也捕捉到了这种非单调行为。

此处还需要考虑模型的两个简化版本：一个忽略糊状相中对流的发生（假设 $\mathrm{Nu}_m \equiv 1$，图5a中的点划线），另一个忽略液相中非单调的密度分层（假设密度对温度呈线性依赖，即 $\rho(S_e, T) = \rho(S_e, T_b)\,(1 - \beta(S_e, T_b) \cdot (T - T_b))$，其中 $\beta(S_e, T_b)$ 是底板处液体热膨胀系数，双点划线）。比较这两个简化模型得出的 h_e，有助于解释冰厚度的“跃变”或突然增加是与糊状相中对流的发生（糊状相对流，MC状态）相关的，同时 ϕ_e 也有所增加（见图3b）。对流增强了热输运，促进

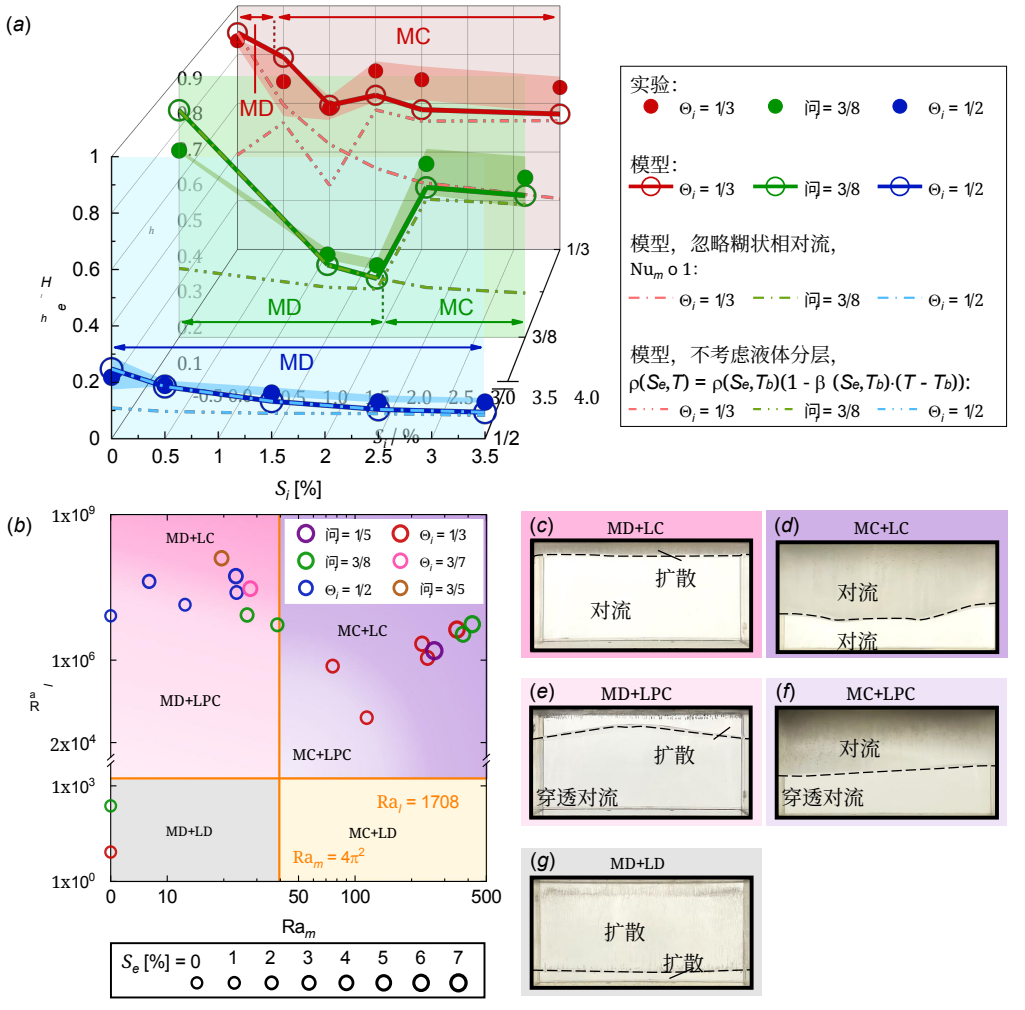


图5：模型计算的冰相/糊状相厚度结果与实验结果的对比，以及热输运模式的识别。MD/MC分别表示糊状相中的扩散/对流传热；同理，LD/LC分别表示液相中的扩散/对流热输运；LPC表示液相中由穿透对流引起的扩散和对流热输运，即当稳定分层位于不稳定分层之上时，扩散与对流热输运的组合。(a) 初始过热度分别为 Θ_i = 1/3（红色）、3/8（绿色）和1/2（蓝色），初始盐度 S_i 在0至3.5%之间变化。计算得到的h_e （带空心圆的线）与实验结果（圆点）吻合较好。图中还包括实验测得的糊状相厚度空间变化（阴影区域），以及忽略糊状相对流的简化模型结果（$\mathrm{Nu}_m \equiv 1$, 点划线）和忽略液体分层的简化模型结果（密度对温度的线性依赖 $\rho(S_e,T) = \rho(S_e,T_b)(1-\beta(S_e,T_b)\cdot(T-T_b)$），双点划线）。(b) 基于两个有效控制参数 Ra_m 和 Ra_l 的相空间图。为便于阅读，第三个有效控制参数 S_e 未作为坐标轴展示，而是用不同大小的圆圈区分不同的 S_e。系统共有6种热输运模式。我们的实验涵盖其中5种情况。不同圆圈颜色用于区分不同的 Θ_i。最高盐度（$S_e \gtrsim 2.7\%$）预计会抑制LPC状态，因为它消除了溶液的密度异常。(c-g) 实验图像，展示了对应于观测到的5种热输运模式的典型情况。

糊状相的生长速率更大，因为 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t \propto \mathrm{F}_m - \mathrm{F}_l$。由于 F_m 与 F_l之间的竞争性平衡，平衡糊状层厚度也随之增加，这是因为糊状相中的传热效率提高了。

然而，仅凭糊状相对流还不足以解释h_e 的变化趋势（见图5a 中的点划线）。尤其当 S_i 较低时，与实验结果的偏差很大，因为此时系统处于 LD（液相扩散）和 LPC（液相穿透对流）状态（见图5b）。在 LD 状态下，液相中只发生扩散传热，这可能是因为整个液相都处于稳定分层状态，也可能是因为液相过薄，无法支持对流。在 LPC 状态下，糊状相上方的不稳定分层湍流（又称穿透对流）始终与一个稳定分层区域相接触。这个稳定层限制了下方的对流运动，并阻止对流直接穿透糊状相。因此，热量在液相中的传输相对较弱，使糊状相得以增厚。当 S_i 增大时，稳定分层区域内的温差减小（从 T_{0e} 到 T_{max}），而不稳定分层湍流区域内的温差增大（从 T_{max} 到 T_b）。因此，对流运动增强并变得更加湍动，从而使热量在液相中的传输显著增强，进而使h_e减小。同样，当 Θ_i 较低时，不稳定分层区域中的温差也较小。不稳定分层湍流较弱，上方稳定分层中的热阻在决定整个液相的热输运时起着更重要的作用。这解释了为何图5（a）中，在 $\Theta_i = 1/3$ 和 3/8 的情况下，点划线（假设整个液相均处于不稳定分层状态）与实验结果之间的误差相对较大；而在 $\Theta_i = 1/2$ 且 S_i相同的情况下，误差较小。进一步增大 S_i后，稳定分层层消失，液相中的热输运完全由对流主导（液相对流，即 LC 状态，见图5b）。

模型与实验之间剩余的差异，很可能与糊状相的建模有关，尤其是忽略了其非均匀内部结构，以及对其渗透率进行参数化时存在的不确定性。还值得一提的是，LPC 状态下的热输运也可以通过 Wang 等人 （2021*a*）提出的两个替代参数清晰地描述。它们分别是所谓的密度反转参数（此处写作（$T_{max} - T_{0e}$）/（$T_b - T_{0e}$））和相对于整个流体层的瑞利数。这是一种与本文采用的方法不同但等效的处理方式。

总之，系统中可能存在 6 种热输运模式，这取决于糊状相中的热输运是纯扩散（MD）还是对流（MC），以及液相中的热输运是纯扩散（液相扩散 LD）、在不同叠加层中分别以扩散和对流方式进行（LPC），还是对流（LC）。这些状态的出现由两个控制参数 Ra_m 和 Ra_l的大小决定。纯扩散（MD 和 LD）与对流（MC、LPC 和 LC）热输运之间的边界分别由临界瑞利数确定，即糊状相中的 $\mathrm{Ra}_{mcr} = 4\pi^2$ 和液相中的 $\mathrm{Ra}_{lcr} = 1708$。另一方面，从 LPC 到 LC 的转变是由于盐水溶液状态方程中的温度异常消失所致。当 $T_{max} < T_{0e}$ 或等价地，大致在 $S_e \gtrsim 2$ 时发生。7%。实验测量结果可以映射到这个后验三维相空间中，该空间由三元组 $(\mathrm{Ra}_m, \mathrm{Ra}_l, S_e)$ 标识，见图 5(b)。值得注意的是，尽管 S_i 在 $[0, 3$范围内变化，$5\%]$，S_e 可以在 0% 到约 7% 的范围内变化。我们发现，6 种可能的平衡态冻结模式中有 5 种（即 MD、MC 状态与 LD、LPC、LC 状态的 2×3 组合）能够在我们的实验中实现，并由模型识别出来。图 5(c-g) 展示了这些典型情况下的界面轮廓照片。我们可以看到，非平坦界面总是与液相、糊状相或二者中的对流运动相关联。

6. 结论与展望

我们通过实验研究了盐水冻结（冰的初始形成、生长和平衡）与流体对流动力学输运过程之间复杂的物理耦合。我们揭示了糊状相中的卤水对流，以及稳定/不稳定分层与传导/对流热传递的组合，对于确定平衡态至关重要。通过恰当考虑这两种机制，利用一种一维多层热通量模型，可以准确解释平衡时的平均糊状层厚度；该模型基于液体和多孔介质中瑞利–贝纳德系统已知的整体热输运标度律特性。

糊状基质内部对流的发生增强了热输运，并加快了冻结前沿的推进。另一方面，稳定分层削弱了液相中的对流和热输运，并使糊状相的扩散生长持续更长时间，这两者都会导致更大的糊状层厚度。最后，不稳定分层湍流促进了液相中的对流和热传递，从而形成更薄的糊状层。平衡态下形成的热传输模式可分为6种状态，具体取决于糊状区域内是否存在对流热传输，以及液相中是否存在纯扩散、纯对流或两者兼有的热传输模式。

仍有许多未解问题有待探索。多层模型需要进一步验证和完善，尤其是渗透率的建模以及孔隙率的演化方面（这里的孔隙率仅作为实验测量的输入）。此外，将这一一维模型扩展以纳入其时间演化也很有价值；鉴于其生长速率发生在远长于流体对流的时间尺度上，这似乎是可行的。在此意义上，对于纯冰所采用的准静态近似，如 Wang等 (2021*d*)中的做法，或许同样适用。然而，要理解糊状相形态界面、卤水通道的作用及相关脱盐过程，则需要更为复杂的空间模型。

本研究为理解这一复杂系统迈出了第一步，也为后续研究奠定了基础。后续研究将考察系统中精细的糊状相结构、界面形态、流动动力学与热输运性能之间的相互作用，并探索其他因素的影响（例如系统的倾斜角度、不同的几何纵横比或容器形状，以及在自然对流旁是否存在强制对流）。我们希望这些发现有助于更好地理解并建立模型，描述涉及液体和多孔介质中的流动以及液态溶液相变的工业、地球物理和气候过程。

附录A. 数据处理

由于流动呈准二维，平衡时的平均糊状相厚度h_e以及糊状相厚度的空间变化，可以根据实验槽前表面上糊状层–液体界面的垂直位置进行估算；该位置可通过处理平衡态的照片获得。时间序列$h(t)$可根据膨胀容器中水位上升的时间序列 $\Delta v(t)$获得（以 H进行无量纲化）：

$$h(t) = \frac{h_e}{\Delta v_e} \cdot \Delta v(t). \tag{A 1}$$

通过求解系统的质量

系统的守恒方程和盐：

$$\rho(S_i,T_b)H=\rho(S_e,T_{mean})(C_1H-C_1(1-\phi_e)h_e+\Delta v_e)+\rho_{ice}(C_1(1-\phi_e)-C_2)h_e. \tag{A 2}$$

$$S_i\rho(S_i,T_b)H=S_e\rho(S_e,T_{mean})(C_1H-C_1(1-\phi_e)h_e+\Delta v_e). \tag{A 3}$$

其中，采用拟合参数 C_1 和 C_2 来补偿实验槽的轻微体积变化以及系统中残余的溶解空气。取值为 $C_1=1.0033$ 和 $C_2=0.0105$，以设定 $\phi_e=0$ 对应于 $S_i=0$ 和 $\Theta_i=1/3$，1。计算得到的$\phi_e\approx 0$对应于 $S_i=0$ 和 $\Theta_i=3/8$，表明这种处理是合理的。

附录 B. 热通量模型的数值实现

§5 中介绍的多层热通量模型通过一种算法实现，其流程总结于图6的流程图中。该算法包含五个主要步骤。首先，输入 T_t、T_b、S_i、ϕ_e和 H后，将冰层高度初始化为 $h_e=0$ （灰色方框）。其次，程序根据盐质量守恒关系式（5.8）计算与 h_e 对应的平衡盐度 S_e （蓝色方框）。第三，程序利用 ϕ_e （5.4）近似计算渗透率 Π，并评估糊状层中的材料性质，从而得到穿过冰相或糊状相的热通量 F_m （5.1）（黄色方框）。第四，根据不同的分层模式（见 §5 中的图4），程序评估液相中的材料性质，并计算穿过液相的热通量（5.5）（绿色方框）。最后（第五步），代码检查 $F_m=F_l$ 是否成立。如果成立，则输出猜测的 h_e ；否则，程序将 h_e 增加一个小步长（$10^{-4}h_e/H$），并重复上述步骤，直到关系 $F_m=F_l$收敛。

如第 §5节所述，盐的质量守恒是针对当前系统所作的一项临时假设，不适用于对开放系统（如海冰的野外研究）的研究。在这种情况下，输入 S_i 以及第二步，即对 S_e 的评估，可以由对 S_e 的独立测量所替代，而不会影响基于热力学平衡建立的模型。有关本研究中用于评估材料性质的经验公式，请参阅附录 C；有关本文所用符号的全部定义，请参阅附录1 中的附录D 。

附录 C. 材料性质

多层热通量模型需要使用材料性质，而材料性质通常取决于温度 T （℃）和盐度 S （%）。其参数化如下所述。所有性质均采用国际单位制单位。

1）冰点 $T_0(S)$ （Hall 等 1988）：

$$T_0(S)=-0.6037S-5.8123\times10^{-4}S^3. \tag{C 1}$$

2）液体热扩散率 $\kappa(S,\ T)$：

$$\kappa(S,T)=\frac{\Lambda_l(S,T)}{\rho(S,T)c_{pl}(S,T)}. \tag{C 2}$$

其中，$\Lambda_l(S,T)$ 为液体热导率（见下文），$\rho(S,T)$ 为液体密度（见下文），$c_{pl}(S,T)$ 为液体比热容。$c_{pl}(S,T)$ 可根据（ Driesner 2007 ）确定：

$$c_{pl}(S,T)=a_1c_{pw}(T_{ref}). \tag{C 3}$$

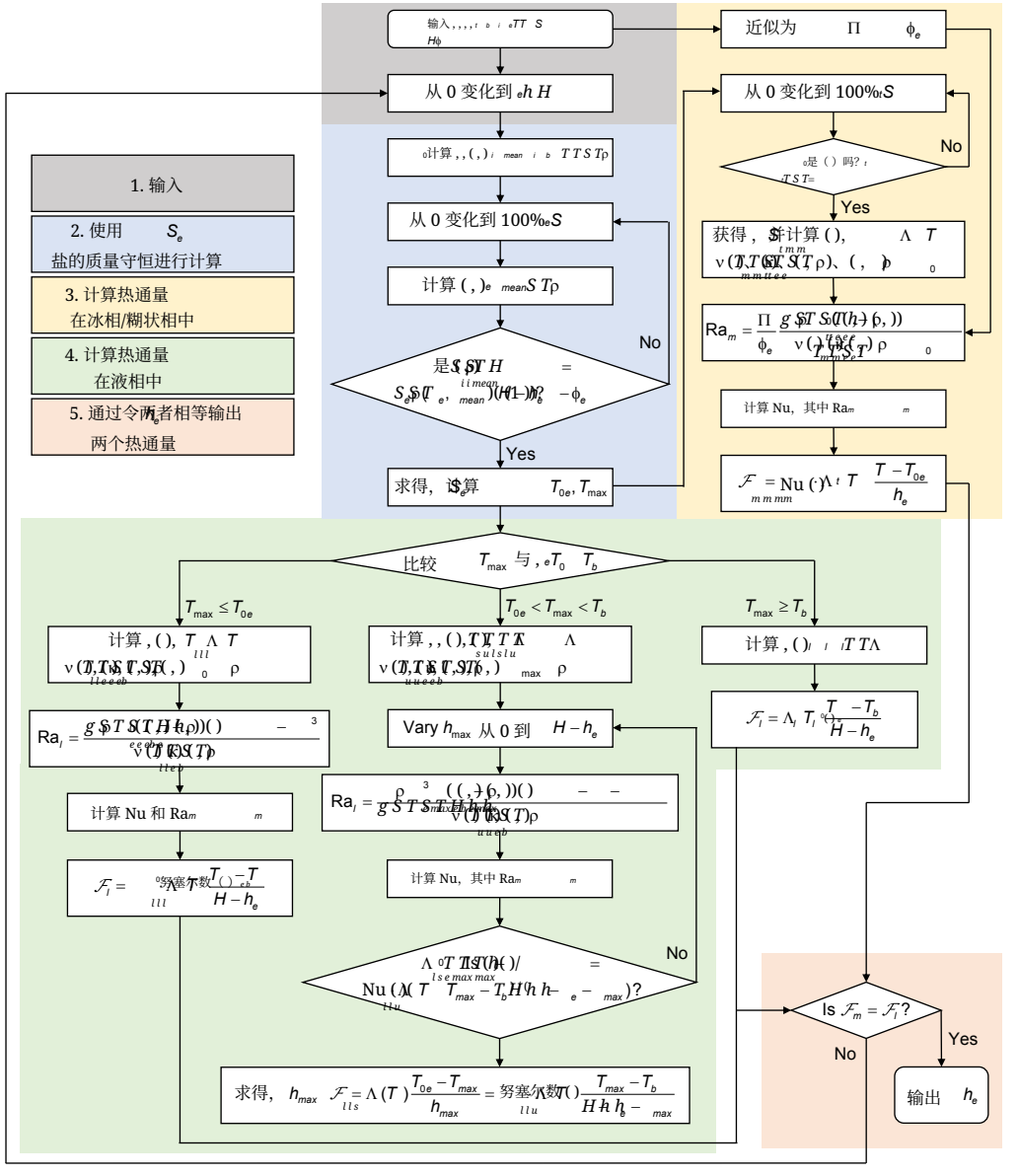


图 6：模型数值实现的流程图。为了获得当前系统中的平衡糊状相厚度 h_e，需要 5 个输入参数（T_t、T_b、S_i、ϕ_e 和 H），并假设一个假设的 h_e（灰色方框）。随后，利用盐的质量守恒隐式计算与假设的 h_e 相对应的 S_e（蓝色方框）。接着，近似计算渗透率 Π，评估冰/糊状相中的材料性质，并计算穿过冰/糊状相的热通量 F_m（黄色方框）。同时，根据不同的分层组合，评估液相中的材料性质，并计算穿过液相的热通量 F_l（绿色方框）。最后，如果 $\mathrm{F}_m = \mathrm{F}_l$，则将假设的 h_e 作为系统的实际 h_e 输出；否则，使用新的假设 h_e 重复上述过程，直至找到最佳 h_e。

其中，$a_1 = 3.3619 - 1.6956(x + 1.9404)^{0.5} - 0.2133x$, $x = {}_{58}^{S}{}_{.443}/({}_{58}^{S}{}_{.443} + {}_{18\,015.}^{100-S})$ 是液体中盐的摩尔分数，而 $c_{pw}(T_{ref})$ 是 $T_{ref}.T_{ref} = a_1 T + a_2$ 时纯水的热容，其中 $a_2 = 47.8954 - 32.1103(1 - x) - 15.7851(1 - x)^2$。$c_{pw}(T)$ 可通过以下公式确定（Chase Jr 1998）：

$$c_{pw}(T) = -11302 + 84.5568T_{abs} - 0.1774T_{abs}^2 + 1.3736 \times 10^{-4}T_{abs}^3 + 2.1401 \times 10^8/T_{abs}^2 \tag{C 4}$$

其中 $T_{abs} = T + 273$。15 为绝对温度。

3）冰热扩散率 $\kappa_{ice}(T)$:

$$\kappa_{ice}(T) = \frac{\Lambda_{ice}(T)}{\rho_{ice}(T)c_{pice}(T)}. \tag{C 5}$$

其中，$\Lambda_{ice}(T)$ 为冰的热导率（见下文），$\rho_{ice}(T)$ 为冰密度（见下文），$c_{pice}(T)$ 为冰热容。$c_{pice}(T)$ 可用以下公式确定（Fukusako 1990）：

$$c_{pice}(T) = 185 + 6.89T. \tag{C 6}$$

3）糊状相热导率 $\Lambda_m(S, T)$:

$$\Lambda_m(S,T) = \phi\Lambda_l(S,T) + (1 - \phi)\Lambda_{ice}(T) \tag{C 7}$$

其中，$\Lambda_l(S, T)$ 为冰的热导率（见下文），$\Lambda_{ice}(T)$ 为冰的热导率（见下文），ϕ 为糊状相孔隙率。

4）冰的热导率 $\Lambda_{ice}(T)$（Fukusako 1990）：

$$\Lambda_{ice}(T) = 2.2156 - 1.0046 \times 10^{-2}T + 3.4452 \times 10^{-5}T^2. \tag{C 8}$$

5) 液体热导率 $\Lambda_l(S, T)$（Yusufova 等，1975年）：

$$\begin{aligned}\Lambda_l(S,T) = \Lambda_w(T)(1 &- (2.3434 \times 10^{-3} - 7.924 \times 10^{-6}T_{abs} + 3.924 \times 10^{-8}T_{abs}^2)S \\ &+ (1.05 \times 10^{-5} - 2 \times 10^{-8}T_{abs} + 1.2 \times 10^{-10}T_{abs})S^2).\end{aligned} \tag{C 9}$$

其中，$\Lambda_w(T)$ 是 T 下纯水的热导率，T_{abs}是绝对温度。$\Lambda_w(T)$ 可通过以下公式确定（Ramires 等，1995）：

$$\Lambda_w(T) = -0.9003 + 2.5006\frac{T_{abs}}{298.15} - 0.9938(\frac{T_{abs}}{298.15})^2. \tag{C 10}$$

6) 液体运动黏度 $\nu(S, T)$:

$$\nu(S,T) = \frac{\mu(S,T)}{\rho(S,T)}. \tag{C 11}$$

其中，$\mu(S, T)$ 是动力黏度，$\rho(S, T)$ 是液体密度（见下文）。$\mu(S, T)$ 可通过以下公式确定（Simion等2015年）：

$$\begin{aligned}\mu(S,T) = 1.257 \times 10^{-4} &+ 1.265 \times 10^{-3}e^{-0.04297T} - 1.105 \times 10^{-3}e^{0.3710x} \\ &+ 2.045 \times 10^{-4}e^{-0.4231(0.01T+x)} + 1.309 \times 10^{-3}e^{-0.3260(0.01T-x)}.\end{aligned} \tag{C 12}$$

其中，x 是液体中盐的摩尔分数。

7) 液体密度 $\rho(S, T)$（Gebhart 与 Mollendorf，1977年）：

$$\rho(S,T) = b_1(1 - b_2|T - b_3|^{1.895}). \tag{C 13}$$

其中，$b_1 = 999.972(1 + 8.046 \times 10^{-3}S)$ 为最大密度，$b_2 = 9.297 \times 10^{-6}(1 - 0.02839S)$，$b_3 = 3.98(1 - 0.5266S)$ 为液体密度达到最大值时的温度。

符号	物理意义	符号	物理意义
g	重力加速度	MD	仅存在扩散传热在糊状相中
H	腔体高度	Nu_l	液相努塞尔数
$h(t)$	时间 t时的糊状区厚度	Nu_m	糊状区努塞尔数
h_e	平衡时的糊状区厚度	Ra_l	液相瑞利数
h_{max}	平衡时的稳定分层厚度	Ra_{lcr}	临界液相瑞利数
L	单元长度	Ra_m	糊状相瑞利数
S_e	液体中的平衡盐度	Ra_{mcr}	临界糊状相瑞利数
S_i	初始盐度	$\Delta v(t)$	膨胀容器中的水位时间为 t
S_t	顶板处的平衡盐度，对应的冰点为 $T_0(S_t) = T_t$	Δv_e	膨胀容器中的水位处于平衡状态
T_{0e}	盐度为 S_e 时的平衡冰点	$\beta(S,\ T)$	液体热膨胀系数盐度为 S、温度为 T时
T_{0i}	盐度为 S_i 时的初始冰点	Γ	单元的纵横比，L/H
T_b	底板温度	$\kappa(T)$	液体热扩散率盐度为 S_e 且温度为 T时
T_l	液相平均温度，$0.5(T_{0e} + T_b)$	κ_{ice}	冰热扩散率在温度 T_m下
T_m	糊状相的平均温度，$0.5(T_t + T_{0e})$	$\Lambda_{ice}(T)$	温度 T下冰的热导率
T_{max}	液体密度对应的温度在盐度 S_e 时达到最大值	$\Lambda_l(T)$	液体热导率在盐度 S_e 和温度 T时
T_{mean}	整个系统的平均温度，$0.5(T_t + T_b)$	$\Lambda_m(T)$	盐度为 S_e 时的糊状相热导率以及温度 T, $\phi_e\Lambda_l(T) + (1-\phi_e)\Lambda_{ice}(T)$
T_s	稳定分层的平均温度，$0.5(T_{0e} + T_{max})$	$\nu(T)$	液体运动黏度在盐度 S_e 和温度 T
T_t	顶板温度	ϕ_e	平衡孔隙度
T_u	不稳定分层的平均温度，$0.5(T_{0e} + T_{max})$	ϕ_{cr}	临界孔隙度
t	Time	Π	渗透率
t^*	扩散时间尺度，H^2/κ_{ice}	$\rho(S,\ T)$	液体密度盐度为 S、温度为 T时
$t_e^{90\%}$	饱和时间 $_e$，达到h的 90% 所需的时间	ρ_{ice}	温度 T_m下的冰密度
W	单元宽度	ρ_t	顶板处的平衡液体密度
LC	仅存在对流热传输在液相中	Θ_i	无量纲底部过热度，$(T_b - T_{0i})/(T_b - T_t)$
LD	存在纯扩散热传输在液相中	$\mathcal{F}_l$	穿过液相的平均热通量
MC	存在对流热传输在糊状相中	$\mathcal{F}_m$	穿过糊状相的平均热通量

表 1：本文所用的符号。

8) 冰密度 $\rho_{ice}(T)$（Fukusako 1990）：

$$\rho_{ice}(T) = 917(1 - 1.17 \times 10^{-4}T). \tag{C 14}$$

附录 D. 符号

本文使用的符号汇总于表1。

致谢

我们感谢杨彦涛进行了富有见地的讨论。本研究得到国家自然科学基金项目（批准号：11988102 和 91852202）以及腾讯基金会通过科学探索奖的资助。

利益声明

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

Ahlers, G., Grossmann, S. & Lohse, D. 2009 湍流瑞利–贝纳德对流中的热传递和大尺度动力学。《现代物理评论》**81** (2), 503. Anderson, D. M. & Guba, P. 2020 **52**, 93 119 糊状层中的对流现象。《流体力学年度评论》– 。de Andrés, C. R. A., Saarinen, S. & Uuskallio, A. 2018 港口区域的冰害挑战与冰管理综述。《海岸工程会议论文集》(36), 79–79. Bodnar, R. J. 1993 用于确定 H_2O-NaCl 溶液冰点降低的修订方程和表格。《地球化学与宇宙化学学报》**57** (3), 683–684. Chase Jr, M. W. 1998 数据载于 NIST 标准参考数据库 69，2005 年 6 月版：NIST 化学网络手册。《物理化学参考数据杂志》**9**, 1–1951. Chen, C. F. 1995 定向凝固过程中糊状层内对流的实验研究。《流体力学杂志》**293**, 81–98. Chillà, F. & Schumacher, J. 2012 湍流瑞利–贝纳德对流的新视角。《欧洲物理学杂志 *E*》**35** (7), 1–25. Clark, P. U., Alley, R. B. & Pollard, D. 1999 北半球冰盖对全球气候变化的影响。*Science* **286** (5442), 1104–1111. Covello, V., Abba, A., Bonaventura, L., Della Rocca, A. & Valdettaro, L. 2016 用于海水结冰数值模拟的多相模型。载于第七届欧洲应用科学与工程计算方法大会（*ECCOMAS 2016*），第 750–771 页。雅典国立技术大学。Curry, J. A., Schramm, J. L. & Ebert, E. E. 1995 海冰–反照率气候反馈机制。《气候杂志》**8** (2), 240–247. Driesner, T. 2007 H_2O–NaCl 体系。第二部分：0 至 1000°C、1 至 5000 bar 和 XNaCl 为 0 至 1 时摩尔体积、焓和定压热容的相关关系。《地球化学与宇宙化学学报》**71** (20), 4902–4919. Esfahani, B. R., Hirata, S. C., Berti, S. & Calzavarini, E. 2018 湍流热对流驱动的底部融化。《物理评论：流体》**3** (5), 053501. Favier, B., Purseed, J. & Duchemin, L. 2019 具有融化边界的瑞利–贝纳德对流。《流体力学杂志》**858**, 437–473. Feltham, D. L., Untersteiner, N., Wettlaufer, J. S. & Worster, M. G. 2006 海冰是一种糊状层。《地球物理研究快报》**33** (14). Fukusako, S. 1990 冰、雪和海冰的热物理性质。《国际热物理学杂志》**11** (2), 353–372. Gebhart, B. & Mollendorf, J. C. 1977 纯水和盐水的一种新密度关系。《深海研究》**24** (9), 831–848. Gupta, V. P. & Joseph, D. D. 1973 多孔层中热输运的界限。《流体力学杂志》**57** (3), 491–514. Hall, D. L., Sterner, S. M. & Bodnar, R. J. 1988 NaCl-KCl-H_2O 溶液的冰点降低。《经济地质学》**83** (1), 197–202. Hanna, E., Navarro, F. J., Pattyn, F., Domingues, C. M., Fettweis, X., Ivins, E. R., Nicholls, R. J.,

Ritz, C., Smith, B., Tulaczyk, S., Whitehouse, P. L. & Zwally, H. J. 2013 冰盖质量平衡与气候变化。Nature 498 (7452), 51–59. Ho, J. 2010 北极海冰消退对航运的影响。Mar. Policy 34 (3), 713–715. Joughin, I., Alley, R. B. & Holland, D. M. 2012 冰盖对海洋强迫的响应。Science 338 (6111), 1172–1176. Kawamura, T., Ishikawa, M., Takatsuka, T., Kojima, S. & S hirasawa, K. 2006 海冰渗透率的测量。载于第 18 届 IAHR国际冰研讨会论文集，第 105–112 页。Kerr, R. C., Woods, A. W., Worster, M. G. & Huppert, H. E. 1990 从上方冷却的合金凝固：第一部分，平衡生长。《流体力学杂志》216, 323–342. Lohse, D. & Xia, K. Q. 2010 湍流瑞利–贝纳德对流的小尺度性质。《流体力学年度评论》42, 335–364. Lyman, J. & Fleming, R. H. 1940 海水组成。《海洋研究杂志》3 (2), 134–146. Mondal, M., Gayen, B., Griffiths, R. W. & Kerr, R. C. 2019 倾斜冰面向极地海水中的消融。《流体力学杂志》863, 545–571. Notz, D. 2005 海冰中的热力学和流体动力学过程。博士论文，剑桥大学，剑桥。Obbard, R. W., Sadri, S., Wong, Y. Q., Khitun, A. A., Baker, I. & Thompson, R. C. 2014 全球变暖使北极海冰中冻结的微塑料遗留物释放出来。Earth’s Future 2 (6), 315–320. Pal, L., Joyce, M. K. & Fleming, P. D. 2006 一种计算多孔介质渗透系数的简便方法。TAPPI Journal 5 (9), 10. Pawlowicz, R. 2015 河水稀释海水后的绝对盐度。《深海研究》101, 71–79. Peeken, I., Primpke, S., Beyer, B., Gütermann, J., Katlein, C., Krumpen, T., Bergmann, M., Hehemann, L. & Gerdts, G. 2018 北极海冰是微塑料的重要时间汇和运输载体。Nat. Commun. 9 (1), 1–12. Peppin, S. S. L., Huppert, H. E. & Worster, M. G. 2008 氯化铵水溶液的稳态凝固。《流体力学杂志》599, 465–476. Perovich, D. K., Grenfell, T. C., Light, B. & Hobbs, P. V. 2002 多年北极海冰反照率的季节演变。《地球物理研究杂志》107 (C10), SHE–20. Petrich, C., Langhorne, P. J. & Sun, Z. F. 2006 海冰中渗透率、有效孔隙率和总孔隙率之间相互关系的建模。Cold Reg. Sci. Technol. 44 (2), 131–144. Polashenski, C., Golden, K. M., Perovich, D. K., Skyllingstad, E., Arnsten, A., Stwertka, C. & Wright, N. 2017 渗流阻塞：一种促使首年北极海冰形成融池的过程。《地球物理研究杂志：海洋》122 (1), 413–440. Post, E., Bhatt, U. S., Bitz, C. M., Brodie, J. F., Fulton, T. L., Hebblewhite, M., Kerby, J., Kutz, S. J., Stirling, I. & Walker, D. A. 2013 海冰消退的生态后果。Science 341 (6145), 519–524. Rae, J. G. L., Hewitt, H. T., Keen, A. B., Ridley, J. K., West, A. E., Harris, C. M., Hunke, E. C. & Walters, D. N. 2015 英国气象局全球耦合模型全球海冰6.0版CICE配置的开发。Geosci. Model Dev. 8 (7), 2221–2230. Ramires, M. L. V., Nieto de Castro, C. A, Nagasaka, Y., Nagashima, A., Assael, M. J. & Wakeham, W. A. 1995 水的热导率标准参考数据。《物理化学参考数据杂志》24 (3), 1377–1381. Ravichandran, S., Toppaladoddi, S. & Wettlaufer, J. S. 2022 浮力、旋转和剪切对相界面演化的综合影响。《流体力学杂志》941. Rosevear, M. G., Gayen, B. & Galton-Fenzi, B. K. 2021 双扩散对流在南极冰架底部融化中的作用。美国国家科学院院刊118 (6). Rousset, C., Vancoppenolle, M., Madec, G., Fichefet, T., Flavoni, S., Barthélemy, A., Benshila, R., Chanut, J., Lévy, C., Masson, S. & Vivier, F. 2015 鲁汶-新鲁汶海冰模型 LIM3.6：全球和区域能力。Geosci. Model Dev. 8 (10), 2991–3005. Scagliarini, A., Calzavarini, E., Mansutti, D. & Toschi, F. 2020 海冰和融池演变建模：对微尺度传热机制的敏感性。载于《气候变化及其影响的数学方法》，第 179–198 页。Springer。Simion, A. I., Grigoraş, C. G., Ros̨u, A. M. & Gavrilă, L. 2015 NaCl 水溶液密度和黏度的数学建模。《农食加工与技术》21 (1), 41–52. Stevens, C., Hulbe, C., Brewer, M., Stewart, C., Robinson, N., Ohneiser, C. & Jendersie, S. 2020

在罗斯冰架下观测到的海洋混合和热输运过程控制着其底部融化。美国国家科学院院刊 117 (29), 16799–16804。Straneo, F. & Heimbach, P. 2013年 北大西洋变暖与格陵兰出口冰川的退缩。Nature 504 (7478), 36–43。Sugawara, M. & Irvine, T. F. 2000年 浓度梯度对水平冰板从上方融化的影响。《国际传热与传质杂志》43 (9), 1591–1601。Townsend, A. A. 1964年 冰表面上方水中的自然对流。《皇家气象学会季刊》90 (385), 248–259。Wadhams, P. & Munk, W. 2004年 海洋淡化、海平面上升、海冰融化。《地球物理研究快报》31 (11)。Wang, Q., Reiter, P., Lohse, D. & Shishkina, O. 2021a年 穿透型湍流瑞利-贝纳德对流的普适性质。《物理评论：流体》6 (6), 063502。Wang, Z., Calzavarini, E. & Sun, C. 2021b年 差分加热矩形槽中冰水界面的平衡态（a）。《欧洲物理快报》135 (5), 54001。Wang, Z., Calzavarini, E., Sun, C. & Toschi, F. 2021c年 冰的生长如何取决于其下方的流体动力学。美国国家科学院院刊 118 (10)。Wang, Z., Jiang, L., Du, Y., Sun, C. & Calzavarini, E. 2021d年 向上对流流对冰前沿的塑形。《物理评论：流体》6 (9), L091501。Wells, A. J., Hitchen, J. R. & Parkinson, J. R. G. 2019年 糊状层生长与对流及其在海冰中的应用。《英国皇家学会哲学汇刊 A 辑》377 (2146), 20180165。Wettlaufer, J. S., Worster, M. G. & Huppert, H. E. 1997年 从上方凝固合金时的自然对流及其在海冰演化中的应用。《流体力学杂志》344, 291–316。Worster, M. G. 1997年 糊状层中的对流。《流体力学年度评论》29 (1), 91–122。Worster, M. G. & Rees Jones, D. W. 2015年 海冰热力学与盐水排泄。《英国皇家学会哲学汇刊 A 辑》373 (2045), 20140166。Worster, M. G. & Wettlaufer, J. S. 1997年 盐水凝固过程中的自然对流、溶质捕获与通道形成。《物理化学杂志 B》101 (32), 6132–6136。Yang, R., Chong, K. L., Liu, H. R., Verzicco, R. & Lohse, D. 2022年 冰从缓慢融化到快速融化的突变。《物理评论：流体》7, 083503。Yang, R., Howland, C. J., Liu, H., Verzicco, R. & Lohse, D. 2023a年 盐水中的冰融化：分层及其对平均盐度的非单调依赖。arXiv p. 2302.02357。Yang, R., Howland, C. J., Liu, H., Verzicco, R. & Lohse, D. 2023b年 从下方受热的融体上方融化固体层的形态演化。《流体力学杂志》956, A23。Yusufova, V. D., Pepinov, R. I., Nikolaev, V. A. & Guseinov, G. M. 1975年 NaCl水溶液的热导率。《工程物理学杂志》29 (4), 1225–1229。