arXiv:2303.01951v2 [math.AP] 5 May 2023

具有 $p(\cdot)$-增长的自由不连续问题中极小化子的正则性

CHIARA LEONE、GIOVANNI SCILLA、FRANCESCO SOLOMBRINO 和 ANNA VERDE

Abstract. 本文证明了一个正则性结果，该结果适用于定义在 $SBV^{p(\cdot)}$ 变指数特殊有界变差函数空间上的自由不连续能量，前提是变指数 $p(x)$ 满足对数-H¨older 连续性。我们的分析拓展了非标准增长情形下一类自由不连续问题极小化子的正则性理论。本文可视为对研究常指数情形的论文 [24]，的后续工作。

Contents

1. 引言 1 2. 基本记号与预备知识 4 2.1. 变指数勒贝格空间 4 2.2. BV 和 SBV 函数 5 2.3. 空间 $SBV^{p(\cdot)}$。Poincar´e 型不等式 6 2.4. $SBV^{p(\cdot)}$ 8中的 Lusin 逼近 2.5. 具有 $p(\cdot)$-增长的自由不连续泛函 9 3. 小跳跃集近似极小元的渐近行为 10 4. 具有 $p(\cdot)$-增长的自由不连续泛函的强极小元 14 4.1. 关于能量的假设 14 4.2. 衰减引理 14 4.3. 密度下界 18 致谢 21 参考文献 21

1. 引言

Zhikov [35, 36], 提出的具有非标准增长的积分泛函，常用于描述具有强烈各向异性行为的复合材料。在这种情形下，通常假设变形梯度具有依赖于点的可积性，例如可用变指数空间来刻画（见 [30, 34]）。多年来，变分积分泛函的极小化子在索伯列夫空间 $W^{1,\,p(\cdot)}(\Omega;\,\mathbb{R}^m)$ 中的正则性性质（其中 Ω 为参考构形）一直是研究重点，其形式为

$$\int_\Omega f(x,\nabla u(x))\,\mathrm{d}x\,, \tag{1.1}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 49J45, 46E30, 35B65.*Key words and phrases.*
自由不连续问题， $p(x)$-增长，正则性，极小化子。1

满足 $p(x)$-增长条件

$$c|\xi|^{p(x)} \le f(x,\xi) \le C(1+|\xi|^{p(x)}), \tag{1.2}$$

已有许多研究对此进行了探讨。其中，我们可以提及 [2, 3, 11, 18,19, 29, 37]。这些论文共同的关键假设是 $p(\cdot)$ 的超线性（即 $\min_\Omega p(\cdot) > 1$），以及指数具有（可能是强的）对数-H¨older 连续性。Zhikov 最早在 [37]中考虑了变指数连续模这一条件，以防止拉夫伦季耶夫现象。粗略地说，正如 [15, 引理 3.2] 所指出的，该条件允许在一点周围的小球上固定指数，并且特别适用于吹起方法。除了正则性问题之外，我们还可以举例指出，这一条件在 [1], 中的用途：证明具有增长条件 (1.2) 的松弛泛函的测度表示中，测度的奇异部分消失。

相较之下，本文关注的是变指数空间中自由间断泛函的极小化子的正则性。在这种设定下，跳跃间断可能表现为奇点；而这种设定很自然地用于描述断裂和损伤等失效现象。这类问题的特征在于，一种形式如（1.1）的“体”能量与一种用于计量产生裂纹所耗能量的“表面”能量之间存在竞争（[26, 22]）。因此，一种典型的泛函具有如下形式

$$\int_\Omega f(x,\nabla u(x))\,\mathrm{d}x + \int_{J_u} g\big(x,u^+(x),u^-(x),\nu_u(x)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1}(x). \tag{1.3}$$

上文中， J_u 是 u 的跳跃间断集，其法向量为 ν_u；与梯度∇u 及单侧迹 $u^+(x)$、 $u^-(x)$完全相同，它们通常都需要在近似的测度论意义下理解（见第2.2节）。假设 f满足 $p(\cdot)$-增长条件（1.2），而 g 有正的上下界。

上述问题通常还会加入低阶保真项或边界数据；当 $p(\cdot)$ 为超线性时，这使得我们能够应用 [5, 6] （边界数据情形另见 [23] ），从而得到该泛函在特殊有界变差函数（SBV）空间中的序列强制性，见 [7]。在 g 满足 BV-椭圆性（这保证了曲面积分的下半连续性）的条件下，只要 f 关于梯度变量是凸的，便可根据 [13], 的结果推得极小化问题 (1.3) 在子空间 $SBV^{p(\cdot)}$ 中适定；该子空间由梯度为 $p(\cdot)$-可积的 SBV 函数组成。更一般地，当 f 是拟凸的且指数满足对数-H¨lder 连续时，也可根据 [12], 的结果得到这一结论。我们还请读者参阅近期的 [4], ，其中证明了仅需 p 连续，就足以保证体能量的下半连续性。不过，我们提醒读者，在讨论正则性问题时，对数-H¨lder 连续性仍将发挥核心作用。还值得一提的是，除了材料科学之外，变指数在有界变差函数框架中的应用早已出现在图像重建领域 [10, 27, 28, 31]。自由不连续问题最初便是在这一框架下引入的 [32]。

现在，对于 $g \equiv c$ 且 $c > 0$, (1.3) 可视为该问题的弱形式

$$\int_{\Omega\setminus K} f(x,\nabla u(x))\,\mathrm{d}x + c\mathcal{H}^{d-1}(K) \tag{1.4}$$

对于一个闭集 K（事先并未规定），以及一个在 K 外光滑的形变 u，人们希望证明：给定 (1.3) 的极小化子 u，则 $(u,\overline{J}_u)$ 确实为 (1.4) 的极小化子。当 $\mathcal{H}^{d-1}(\overline{J}_u \setminus J_u) = 0$ 时，显然情况如此；注意，一旦这一点得以实现，令 $K = \overline{J}_u$，便可根据 Sobolev空间中变分积分的正则性理论，进一步推出 u 在 $\Omega \setminus K$ 中的光滑性。对于模型情形

$$f(x,\nabla u(x)) = |\nabla u(x)|^p,$$

其中 p 为常指数，这一困难任务最早在奠基性论文 [14] 中得以完成。在该文中，他们证明了 $\mathcal{H}^{d-1}(\overline{S}_u \setminus S_u) = 0$，其中 S_u 是 u 的奇异集，是 J_u 的超集；在 BV 情形下，它与后者的差异仅为一个 $\mathcal{H}^{d-1}$-零测集。为了获得他们的结果，一个关键估计就是所谓的密度下界

$$\mathcal{H}^{d-1}(S_u \cap B_\rho(x_0)) \geq \theta_0 \rho^{d-1}$$

对于 $x_0 \in S_u$，以及充分小的球 $B_\rho(x_0)$，其中 θ_0 与 x_0 和 ρ无关。这需要对小球上的能量进行精细的衰减分析，而体能量的齐次性在一定程度上简化了这一分析，因为它确保极小性在适当的重新缩放下保持不变。

如果放弃齐次性，那么文献 [24]，已针对 (1.3) 中具有 p-增长的一类非齐次体被积函数的极小化子，得到了正则性结果；本文将这些结果推广到变增长情形。

本文结果概述。本文着重研究标量值情形 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$，并考虑 (1.3) 中的 $f(x,\xi) = |\xi|^{p(x)} + h(x,\xi)$，其中 h 是连续函数，在 ξ 上为凸，并具有 $p(x)$-增长。我们假设变指数具有强对数-H¨older 连续性（见 (2.4)），并证明弱形式 (1.3) 的极小化子是上文所阐明意义下的强极小元。

关键密度下界的证明与 [14, 24]，中完全相同，通过一个衰减引理（见引理 4.4）来完成。反设能量在跳跃点 x_0 附近的衰减速度快于 ρ^{d-1}。令 $\bar{p} = p(x_0)$，利用能量的小性可以证明，放大序列的一个缩放副本收敛于某个变分积分的光滑极小子，其形式为

$$\int_{B_1} (|\nabla u|^{\bar{p}} + h_\infty(\nabla u))\,\mathrm{d}x$$

对于该积分，通过 [3]，可以获得与 $\bar{p}$ 无关的衰减估计，从而导出矛盾。函数 h_∞ 是将作用于缩放变形梯度的 h 的缩放版本取局部一致极限得到的。尽管存在变指数，强对数-H¨older 连续性假设对于适当选择缩放常数至关重要，以确保极限函数的极小性。这还需要为具有变增长的泛函序列证明一种 Γ-下极限型不等式（见定理 3.1 的步骤 1）；该不等式借助 [12，定理 3.1]，中的 Lusin型逼近得到，而该定理已在定理 2.6 中回顾。借助定理 3.1 和引理 4.4 的主要工具，我们可以证明密度下界，并最终在定理 4.8 中得到强极小元的存在性。

本文结构。本文安排如下。第2节中，我们介绍基本记号，并回顾变指数空间（第2.1小节）和 SBV （第2.2小节）中的一些定义；第2.3小节则讨论空间 $SBV^{p(\cdot)}$、Poincar´e 不等式及其若干在后文中有用的推论。第2.4小节回顾 $SBV^{p(\cdot)}$ 中的一个 Lusin型逼近结果，第2.5小节则给出变指数框架下自由不连续问题的一些定义和结果。第3节专门证明一个技术工具，该工具涉及跳跃集较小的近似极小元的渐近行为。本文的主要结果见第4节：第4.1小节陈述问题并列出关于能量的主要假设；第4.2小节为我们的泛函建立关键的衰减估计；第4.3小节证明密度下界，并通过定理 4.7 给出主要结果。

2. Basic notation and preliminaries

我们先介绍一些基本记号。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为开且有界集。对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ 和$r > 0$ ，我们用 $B_r(x) \subset \mathbb{R}^d$ 表示以 x 为中心、半径为 r的开球。若 $x = 0$，我们常使用简写 B_r。对于 x，$y \in \mathbb{R}^d$，我们用 $x \cdot y$ 表示标量积，用$|x|$ 表示欧几里得范数。此外，令 $\mathbb{S}^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ ，并用 $\mathbb{R}^d_0$表示集合 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$。 $\mathbb{R}^m$ 中单位球的 m 维 Lebesgue 测度，对每个 $m \in \mathbb{N}$记为γ_m 。我们分别用 $\mathcal{L}^d$ 和 $\mathcal{H}^k$ 表示 d 维 Lebesgue 测度和k 维豪斯多夫测度。 A 的闭包记作 $\overline{A}$。 A 的直径记为 diam(A)。对于任意 $A \subset \mathbb{R}^d$，我们用 χ_A 表示其示性函数，它在 A 上取值为 1，在其他地方取值为 0。若 A 是有限周长集，则其本质边界记为$\partial^* A$，参见 [7, 定义 3.60]。

2.1. 变指数勒贝格空间。我们简要回顾变指数和变指数勒贝格空间的概念。关于该主题的全面论述，请参阅 [16] 。

称可测函数 $p : \Omega \to [1, +\infty)$ 为变指数。相应地，对每个 $A \subset \Omega$，我们定义

$$p_A^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in A} p(x) \quad \text{and} \quad p_A^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in A} p(x)\,,$$

而Ω 和p^- Ω 分别记为 p^+ 和 p^-。

对于可测函数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ，我们将模定义为

$$\varrho_{p(\cdot)}(u) := \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\,\mathrm{d}x$$

以及（Luxembourg）范数

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} := \inf\{\lambda > 0 : \ \varrho_{p(\cdot)}(u/\lambda) \le 1\}\,.$$

变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 定义为满足如下条件的可测函数 u 的集合：对于某个 $\lambda > 0$，有 $\varrho_{p(\cdot)}(u/\lambda) < +\infty$ 。当 $p^+ < +\infty$时， $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 与满足 $\varrho_{p(\cdot)}(u)$ 有限的函数集合重合。可以验证，$\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ 是 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 上的一个范数。此外，若 $p^+ < +\infty$，则有

$$\varrho_{p(\cdot)}(u)^{\frac{1}{p^+}} \le \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \le \varrho_{p(\cdot)}(u)^{\frac{1}{p^-}} \tag{2.1}$$

若$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} > 1$，则成立；交换 p^- 和 p^+ 的角色，可得类似的不等式，条件为$0 \le \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \le 1$。当 $p^+ < +\infty$时，模还有如下一个有用性质：

$$\min\{\lambda^{p^+}, \lambda^{p^-}\}\varrho_{p(\cdot)}(u) \le \varrho_{p(\cdot)}(\lambda u) \le \max\{\lambda^{p^+}, \lambda^{p^-}\}\varrho_{p(\cdot)}(u) \tag{2.2}$$

对所有 $\lambda > 0$均成立。

若函数 $p : \Omega \to \mathbb{R}$ 在 Ω 上满足 log-H ¨older 连续，则其 $p(x)$的连续模满足

$$\omega(|x - y|) \le \frac{C}{-\log|x - y|}\,, \quad \forall x, y \in \Omega\,,\ |x - y| \le \frac{1}{2}\,.$$

其中 C 为正常数。换言之

$$\limsup_{\rho \to 0} \omega(\rho) \log\left(\frac{1}{\rho}\right) < +\infty. \tag{2.3}$$

为证明我们的正则性结果，将把前述条件加强为强对数-H ¨older 连续性

$$\limsup_{\rho\to 0}\omega(\rho)\log\left(\frac{1}{\rho}\right)=0, \tag{2.4}$$

这与变指数 Sobolev 框架中的正则性理论完全一致（见 [3]）。

下面的引理将经典 Lebesgue 空间的著名嵌入性质（例如见 [16, 推论 3.3.4]）推广到了变指数框架。

引理 2.1. 设 p、q 是 Ω 上的可测变指数，并假设 $\mathcal{L}^d(\Omega)<+\infty$。则 $L^{p(\cdot)}(\Omega)\hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ 当且仅当对 Ω 中 $\mathcal{L}^d$-几乎处处的 x，有 $q(x)\le p(x)$。嵌入常数小于或等于 $2(1+\mathcal{L}^d(\Omega))$，以及 $2\max\{\mathcal{L}^d(\Omega)^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})^+,(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})^-}\}$。

2.2. BV 函数和 SBV 函数。关于 BV 函数和 SBV 函数空间的综述，我们可参阅例如 [7]。下面我们仅回顾后文中有用的一些基本定义。

若 $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 $x\in\Omega$，则 u 在 x 处的精确代表定义为唯一的值 $\widetilde{u}(x)\in\mathbb{R}$，使得

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{1}{\rho^d}\int_{B_\rho(x)}|u(y)-\widetilde{u}(x)|\,\mathrm{d}x=0\,.$$

Ω 中 x 的精确代表未定义的点集称为 u 的近似奇异集，记为 S_u。若存在 a、$b\in\mathbb{R}$ 和 $\nu\in\mathbb{S}^{d-1}$，使得 $a\neq b$ 且.....，则称点 $x\in\Omega$ 是 u 的近似跳跃点。

$$\lim_{\rho\to 0^+}\fint_{B_\rho^+(x,\nu)}|u(y)-a|\,\mathrm{d}y=0\qquad\text{and}\qquad\lim_{\rho\to 0^+}\fint_{B_\rho^-(x,\nu)}|u(y)-b|\,\mathrm{d}y=0$$

其中 $B_\rho^\pm(x,\nu):=\{y\in B_\rho(x):\ \langle y-x,\nu\rangle\gtrless 0\}$。三元组 (a,b,ν) 由上述公式唯一确定，除 a、b 的置换以及 ν 的符号改变外，并记为 $(u^+(x)\ u^-(x)\ \nu_u(x))$。Borel 函数 u^+ 和 u^- 称为 u 在点 $x\in\Omega$ 处的上近似极限和下近似极限。u 的近似跳跃点集记为 $J_u\subseteq S_u$。

有界变差函数空间 $BV(\Omega)$ 定义为所有 $u\in L^1(\Omega)$ 的集合，其中其分布梯度 Du 是 Ω 上取值于 $\mathbb{R}^d$ 的有界 Radon 测度。此外，通常的分解

$$Du=\nabla u\,\mathcal{L}^d+D^cu+(u^+-u^-)\otimes\nu_u\,\mathcal{H}^{d-1}\lfloor J_u$$

成立，其中 ∇u 是 Du 相对于 Lebesgue 测度的 Radon-Nikod´ym 导数，而 D^cu 是 Du的 Cantor 部分。若 $u\in BV(\Omega)$，则 $\nabla u(x)$ 是 u在几乎处处的 $x\in\Omega$ 处的近似梯度：

$$\lim_{\rho\to 0}\fint_{B_\rho(x)}\frac{|u(y)-u(x)-\nabla u(x)(y-x)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y=0\,.$$

为简便起见，我们用 $D^su=D^cu+(u^+-u^-)\otimes\nu_u\,\mathcal{H}^{d-1}\lfloor J_u$ 表示。若 $u\in BV(\Omega)$，则 $\mathcal{H}^{d-1}(S_u\setminus J_u)=0$；因此在下文中，我们将基本上把这两个集合视为相同。

我们回顾一下，特殊有界变差函数的空间 $SBV(\Omega)$ 定义为所有满足 D^su 集中在 S_u 上的 $u\in BV(\Omega)$ 构成的集合；也就是说，$|D^su|(\Omega\setminus S_u)=0$。最后，对于$p>1$，空间 $SBV^p(\Omega)$ 是满足 $\nabla u\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ 且 $\mathcal{H}^{d-1}(S_u)<\infty$ 的 $u\in SBV(\Omega)$ 的集合。

2.3. 空间 $SBV^{p(\cdot)}$。庞加莱型不等式。我们用 $SBV^{p(\cdot)}(\Omega)$ 表示满足 $\nabla u \in L^{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ 且 $\mathcal{H}^{d-1}(S_u) < +\infty$ 的函数 $u \in SBV(\Omega)$ 构成的集合。

为了在 $SBV^{p(\cdot)}$ 中陈述 Poincar´e-Wirtinger 不等式，我们首先按照 [9] 固定一些记号。给定 a、$b \in \mathbb{R}$，记 $a \wedge b := \min(a,b)$，以及 $a \vee b := \max(a,b)$。设 B 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个球。对于每个可测函数 $u\colon B \to \mathbb{R}$，令

$$u_*(s;B) := \inf\{t \in \mathbb{R} :\ \mathcal{L}^d(\{u < t\} \cap B) \geq s\} \qquad \text{for } 0 \leq s \leq \mathcal{L}^d(B),$$

and

$$\operatorname{med}(u;B) := u_*\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}^d(B);B\right).$$

对于满足以下条件的每个 $u \in SBV^{p(\cdot)}(\Omega)$

$$\left(2\gamma_{\mathrm{iso}}\mathcal{H}^{d-1}(S_u \cap B)\right)^{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}^d(B)\,,$$

我们定义

$$\tau'(u;B) := u_*\left(\left(2\gamma_{\mathrm{iso}}\mathcal{H}^{d-1}(S_u \cap B)\right)^{\frac{d}{d-1}};B\right),$$

$$\tau''(u;B) := u_*\left(\mathcal{L}^d(B) - \left(2\gamma_{\mathrm{iso}}\mathcal{H}^{d-1}(S_u \cap B)\right)^{\frac{d}{d-1}};B\right),$$

以及截断算子

$$T_B u(x) := (u(x) \wedge \tau''(u;B)) \vee \tau'(u;B)\,, \tag{2.5}$$

其中，γ_{iso} 是相对等周不等式中的维数常数。

对于任意 $M > 0$，我们也定义

$$u^M := M \wedge u \vee (-M)\,. \tag{2.6}$$

我们回顾以下适用于球内跳跃集较小的 SBV 函数的 Poincar´e-Wirtinger 不等式。该不等式最初在标量情形下于 [14, 定理 3.1]，中证明，随后推广到向量值函数，并见于 [9, 定理 2.5]。

定理 2.2. 设 $u \in SBV(B)$，并假设

$$\left(2\gamma_{\mathrm{iso}}\mathcal{H}^{d-1}(S_u \cap B)\right)^{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}^d(B)\,. \tag{2.7}$$

若 $1 \leq p < d$，则函数 $T_B u$ 满足 $|DT_B u(B)| \leq 2\int_B |\nabla u|\,\mathrm{d}y$,

$$\left(\int_B |T_B u - \operatorname{med}(u;B)|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \frac{2\gamma_{\mathrm{iso}}p(d-1)}{d-p}\left(\int_B |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.8}$$

and

$$\mathcal{L}^d(\{T_B u \neq u\} \cap B) \leq 2\left(2\gamma_{\mathrm{iso}}\mathcal{H}^{d-1}(S_u \cap B)\right)^{\frac{d}{d-1}}, \tag{2.9}$$

其中 $p^* := \frac{dp}{d-p}$。若 $p \geq d$，则对于任意 $q \geq 1$,

$$\left(\int_B |T_B u - \operatorname{med}(u;B)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leq c(q,N,\gamma_{\mathrm{iso}})(\mathcal{L}^d(B))^{\frac{1}{q}+\frac{1}{N}-\frac{1}{p}}\left(\int_B |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.10}$$

作为定理 2.2 的第一个应用，可以得到以下关于给定点处近似极限存在性的充分条件（见 [7, 定理 7.8]）。

定理 2.3。设 $u \in SBV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 $x \in \Omega$。若存在 p、$q > 1$ 使得

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^{d-1}} \left[\int_{B_\rho(x)} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}y + \mathcal{H}^{d-1}(S_u \cap B_\rho(x)) \right] = 0 \quad and \quad \limsup_{\rho\to 0} \fint_{B_\rho(x)} |u(y)|^q \, \mathrm{d}y < \infty \,,$$

那么 $x \notin S_u$。

定理 2.2 的另一个推论是以下紧性结果，它略微推广了 [33, 定理 2.8] 中建立的结果（另请参见 [12, 定理 4.1]，其中在附加的更强假设 (2.3) 下得到了相关结果）。受引理 4.4 的放大分析启发，我们将针对一个固定的球以及一个一致收敛的连续变指数序列 $p_h\colon B \to (1,+\infty)$ 证明该结果，其中该序列满足：

$$1 < p^- \le p_h(y) \le p^+ < +\infty, \qquad \forall y \in B, \tag{2.11}$$

其中 p^- 和 p^+ 满足

$$p^- < d \ \text{ and } \ p^+ < (p^-)^* \ \text{ or } \ p^- \ge d. \tag{2.12}$$

定理 2.4. 设 $B \subset\Omega$ 为一个球，$(p_h)_{h\in\mathbb{N}}$ 为一个变指数序列 $p_h\colon B \to(1,+\infty)$，满足 (2.11) 和 (2.12)，并一致收敛于 B 中的某个 $\bar p\colon B \to(1,+\infty)$。设 $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset SBV^{p_h(\cdot)}(B)$ 满足

$$\sup_{h\in\mathbb{N}} \int_B |\nabla u_h|^{p_h(y)} \, \mathrm{d}y < +\infty \,, \quad \lim_{h\to+\infty} \mathcal{H}^{d-1}(S_{u_h} \cap B) = 0 \,. \tag{2.13}$$

于是存在一个函数 $u_0 \in W^{1,\,\bar p(\cdot)}(B)$ 以及 $\{u_h\}$ 的一个子序列（不重新编号），使得

$$\begin{aligned}
&(i) \ \lim_{h\to+\infty} \int_B |T_B u_h - \operatorname{med}(u_h; B) - u_0|^{p_h(y)} \, \mathrm{d}y = 0 \,, \\
&(ii)\, u_h - \operatorname{med}(u_h; B) \to u_0 \quad \mathcal{L}^d - a.e. \ in \ B \,, \\
&(iii) \int_B |\nabla u_0|^{\bar p(y)} \, \mathrm{d}y \le \liminf_{h\to+\infty} \int_B |\nabla u_h|^{p_h(y)} \, \mathrm{d}y \,, \\
&(iv) \lim_{h\to+\infty} \mathcal{L}^d(\{T_B u_h \ne u_h\} \cap B) = 0 \,.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

证明。关于定理 2.8 的扩展在 [33] 中仅涉及（2.14）中的下半连续性不等式。我们重复这一论证，因为这也使我们有机会展开一些细节。

首先，注意到 $\bar p(\cdot)$ 也满足（2.11），且常数相同。为简便起见，记 $\bar u_h := T_B u_h - \operatorname{med}(u_h; B)$，并根据 p^- 和 p^+ 的取值分为两种情形。

步骤 1。在此我们假设

$$p^- < d \text{ and } p^+ < (p^-)^*.$$

根据定理 2.2 和（2.13），我们有

$$\sup_{h\in\mathbb{N}} \|\bar u_h\|_{L^{(p^-)^*}(B)} < +\infty \tag{2.15}$$

且 $|D\bar u_h|(B) \le 2\int_B |\nabla u_h| \, \mathrm{d}y$。根据 BV 函数的紧性定理（例如，参见[7, 定理 3.23]），存在函数 $u_0 \in BV(B)$ 以及 $\bar u_h$的一个子序列（不再另行标记），使得 $\bar u_h \rightharpoonup u_0$ 在 BV 中弱收敛于*（因此，特别是在 L^1 中）。现在，对每个 $M > 0$，令 $\bar u_h^M$和 u_0^M分别为 $\bar u_h$ 和 u_0根据 (2.6) 作出的截断。然后，应用

将紧性定理应用于 $\bar{u}_h^M$（ SBV([7, 定理 4.8]）， 可得对于任意 $q>1$， $u_0^M \in SBV(B)$ 在 L^q 中 $\bar{u}_h^M \to u_0^M$，在 L^1 中弱收敛于 $\nabla \bar{u}_h^M \rightharpoonup \nabla u_0^M$，并且

$$\mathcal{H}^{d-1}(S_{u_0^M}) \le \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{H}^{d-1}(S_{\bar{u}_h^M}) = 0\,, \tag{2.16}$$

这意味着 $u_0^M \in W^{1,\,1}(B)$。现在，我们将 De Giorgi 半连续性定理（[13]）应用于由 f 定义的积分泛函 $\int_B f(p(y)\ w(y))\,\mathrm{d}y$： $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$，其中 $f(p,\xi) = |\xi|^{p\vee 1}$。连续函数 f 关于 ξ 是凸的，因此，只要 p_j 在 $L^1(B)$ 中强收敛，且 w_j 在 $L^1(B,\mathbb{R}^d)$ 中弱收敛，就能保证该泛函具有序列下半连续性。这意味着

$$\int_B |\nabla u_0^M|^{\bar{p}(y)}\,\mathrm{d}y \le \liminf_{h\to+\infty} \int_B |\nabla \bar{u}_h^M|^{p_h(y)}\,\mathrm{d}y \le \liminf_{h\to+\infty} \int_B |\nabla \bar{u}_h|^{p_h(y)}\,\mathrm{d}y,$$

并且 ∇u_0^M B $\mathbb{R}^d$ $M\to+\infty$ $u_0\in$ 在 $L^{\bar{p}(\cdot)}(\,,\,)$ $W^{1\,\bar{p}(\cdot)}$ B 2 14 iii 2 15 $p^+ < p^{-\,*}$ $|\bar{u}_h|^{p^+}$ 中一致有界。因此，令，我们得到，( )，并且 (.)( ) 成立。由 (.)，由于 ( )，我们得到其一致可积，故 $\bar{u}_h$ 在 $L^{p^+}(B)$ 中强收敛到 u_0 。现在，(2.14)(i) 根据引理 2.1 得出，而 (2.14)(ii) 和 (iv) 可由 (2.9) 和 (2.13) 推得。

步骤 2。这里我们假设 $p^- \ge d$。在这种情况下，证明与步骤 1 完全相同，只需用定理 2.2 中的 (2.10) 代替 (2.8)。

□

注 2.5。我们注意到，如果序列 $p_h(\cdot)$ 一致收敛到常值函数 $\bar{p}$，那么前述假设 (2.11) 和 (2.12) 总是成立。事实上，如果 $\bar{p}\le d$，那么我们可以找到 $\eta>0$ ，使得当 h 足够大时，

$$\bar{p}-\eta < p_h(\cdot) < \bar{p}+\eta \quad\text{and}\quad \bar{p}+\eta < (\bar{p}-\eta)^*.$$

如果 $\bar{p}>d$，那么我们可以找到 $\eta>0$ ，使得当 h 足够大时，

$$d < \bar{p}-\eta < p_h(\cdot) < \bar{p}+\eta,$$

这正是前一个定理中的两种情形。

2.4. $SBV^{p(\cdot)}$ 中的 Lusin 逼近。设 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 上一个正的有限 Radon 测度。极大函数定义为

$$M(\mu)(x) := \sup_{\varrho>0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\mathcal{L}^d(B_\varrho)}\,,\quad x\in\mathbb{R}^d\,.$$

由 Besicovitch 覆盖定理可知（例如，参见 [20]），可以证明

$$\mathcal{L}^d(\{x\in\mathbb{R}^d:\ M(\mu)(x)>\lambda\}) \le \frac{c}{\lambda}\mu(\mathbb{R}^d) \tag{2.17}$$

其中常数 c 仅取决于 d。

我们回顾一下针对 $SBV^{p(\cdot)}$ 函数的 Lipschitz 截断结果，该结果在 [12, 定理 3.1] 中得到证明（另见 [17]）。这里我们以略作修改的形式陈述这一结果，以适用于我们的目的。

定理 2.6. 设 Ω $\subset\mathbb{R}^d$ 是一个具有 Lipschitz 边界的有界开集，且 p: Ω $\to$(1, $+\infty$) 在 Ω 上对数-H ¨older 连续，并且对每个 $x\in$ Ω 都有 $1<p^-\le p(x) \le p^+<\infty$。设 $\{v_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset SBV^{p}{}_{(\cdot)}$(Ω) 是一列在 Ω 中具有紧支撑的函数，使得

$$\|v_h\|_1 \to 0\,,\quad \sup_{h\in\mathbb{N}} \|v_h\|_\infty < +\infty\,,\quad \sup_{h\in\mathbb{N}} \int_\Omega |\nabla v_h|^{p(x)}\,\mathrm{d}x < +\infty\,.$$

设 $\{\theta_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ 是一列严格正数，使得 $\theta_h \to 0$ 且 $\frac{\|v_h\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}}{\theta_h} \to 0$。那么对每个 h，都存在数列 μ_j、$\lambda_{h,j} > 1$，使得对每个 h，$j \in \mathbb{N}$

$$2^j \le \mu_j \le \lambda_{h,j} \le \mu_{j+1},$$

并且存在一个序列 $\{v_{h,j}\} \subset W^{1,\infty}(\Omega)$，使得对于每个 $h, j \in \mathbb{N}$

$$\|v_{h,j}\|_\infty \le \theta_h, \quad \|\nabla v_{h,j}\|_\infty \le C\lambda_{h,j}$$

对于某个常数 C，其取决于 d、p^-、p^+、$p(\cdot)$ 的对数-H¨尔德常数，以及取决于以 $\|v_h\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$ 表示的 v_h。此外，除去一个零测集外，

$$\{v_{h,j} \ne v_h\} \subset \{M(|v_h|) > \theta_h\} \cup \{M(|Dv_h|) > 3K\lambda_{h,j}\}$$

对于某个常数 K，其取决于 d、p^-、p^+、$p(\cdot)$ 的对数-H¨尔德常数，以及取决于以 $\|v_h\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$ 表示的 v_h。对于每个 $j \in \mathbb{N}$

$$\nabla v_{h,j} \rightharpoonup^* 0 \quad in\ L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)\ as\ h \to +\infty.$$

最后，存在一个序列 $\varepsilon_j > 0$，满足 $\varepsilon_j \to 0$，使得对于每个 $h, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\|\nabla v_{h,j}\chi_{\{M(|v_h|)>\theta_h\}\cup\{M(|\nabla v_h|)>2K\lambda_{h,j}\}}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\\ &\le C\|\lambda_{h,j}\chi_{\{M(|v_h|)>\theta_h\}\cup\{M(|\nabla v_h|)>2K\lambda_{h,j}\}}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \le C\frac{\|v_h\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}}{\theta_h}\mu_{j+1} + \varepsilon_j.\end{aligned}$$

2.5. 具有 $p(\cdot)$-增长的自由不连续泛函。本段考虑如下形式的积分泛函

$$F(u,c,A) := \int_A f(x,\nabla u) + c\mathcal{H}^{d-1}(S_u \cap A), \tag{2.18}$$

定义在 $SBV_{\text{loc}}(\Omega)$ 上，其中 $c > 0$ 且 $A \subset \Omega$ 是开集。Carath´eodory 函数 $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 满足以下增长条件:

$$L^{-1}|\xi|^{p(x)} \le f(x,\xi) \le L(1 + |\xi|^{p(x)}), \tag{2.19}$$

对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^d$，几乎处处 $x \in \Omega$，其中 $L \ge 1$ 且变指数 $p : \Omega \to (1, +\infty)$ 是有界函数。我们用 $F(u, A)$ 表示 $F(u, 1, A)$。

我们回顾偏离极小性的经典定义（参见例如 [7]），该定义给出了 u 在 Ω 中偏离 F 极小化子的程度的估计。

定义 2.7（偏离极小性）。满足以下条件的函数 $u \in SBV_{\text{loc}}(\Omega)$ 的偏离极小性定义为最小的 $\lambda \in [0, +\infty]$，使得对于所有开集 $A \subset\subset \Omega$，均有 $F(u, c, A) < +\infty$

$$F(u,c,A) \le F(v,c,A) + \lambda$$

对所有满足 $\{v \ne u\} \subset\subset A \subset\subset \Omega$ 的 $v \in SBV_{\text{loc}}$。记作 $\text{Dev}(u, c, \Omega$).

若 $\text{Dev}(u, c, \Omega) = 0$，则称 u 是 $F(u, c, \Omega)$ 在 Ω 中的局部极小化子。

下面的引理比较球 $B_{\rho'}$ 内函数 u 的能量与函数 $v\chi_{B_\rho} + u\chi_{B_{\rho'}\setminus B_\rho}$ 的能量，其中 $\rho < \rho'$。证明是对 [7, 引理 7.3] 的直接改写。

引理 2.8. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为开且有界集，并设 $B_R \subset\subset \Omega$，$\rho < \rho' < R$。对于任意满足 f（2.19）的（2.18）型泛函 F，以及任意 u、$v \in SBV_{\text{loc}}(B_R)$，使得 $F(u, c, B_{\rho'}) < +\infty$、$F(v, c, B_{\rho'}) < +\infty$，且 $\mathcal{H}^{d-1}(S_v \cap \partial B_\rho) = 0$，则

$$\begin{aligned}&F(u,c,B_\rho) \le F(v,c,B_\rho) + c\mathcal{H}^{d-1}(\{\tilde v \ne \tilde u\} \cap \partial B_\rho) + \text{Dev}(u,c,B_{\rho'}),\\ &\text{Dev}(v,c,B_\rho) \le F(v,c,B_\rho) - F(u,c,B\rho) + c\mathcal{H}^{d-1}(\{\tilde v \ne \tilde u\} \cap \partial B_\rho) + \text{Dev}(u,c,B_{\rho'}).\end{aligned} \tag{2.20}$$

3. Asymptotic behavior of almost minimizers with small jump sets

本节致力于证明一个关于具有变增长的泛函序列的辅助 Γ-收敛型结果。具体而言，我们将考虑一列连续函数f_h： $B_R \times \mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$ 满足

$$L^{-1}|\xi|^{p_h(x)} \le f_h(x,\xi) \le L(1+|\xi|^{p_h(x)}), \tag{3.1}$$

对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^d$, $x \in \Omega$， $p_h : \Omega \to (1,+\infty)$ 一致对数-Hölder 连续，满足（2.3）和（2.11），并且 $L \ge 1$。若 $v \in SBV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$， $c>0$，则记

$$F_h(v,c,B_\rho) := \int_{B_\rho} f_h(x,\nabla v)\,\mathrm{d}x + c\mathcal{H}^{d-1}(S_v \cap B_\rho),$$

并将相应的偏离极小性记为 $\mathrm{Dev}_h(v,c,B_\rho)$。

下一个定理描述了泛函 F_h 的一列“近似极小元” u_h 的行为，其中函数 f_h 在紧集上一致收敛于 f，且不连续集 S_{u_h} 的测度趋于零。证明沿用 [24, 中定理 2.6 的证明思路，并利用 [12, 中证明的下半连续性结果，即在变增长的 SBV 情形下对定理 4.1] 所作的略微修改。

定理 3.1. 设 $f_h : B_R \times \mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$ 是一列连续函数，关于第二个变量凸，且满足 (3.1)，其中 p_h 在 B_R 中一致收敛于某个 $\bar p \in (1,+\infty)$。设 $u_h \in SBV(B_R)$， $m_h := \mathrm{med}(u_h, B_R)$， $c_h \in (0,+\infty)$。假设

$$\sup_h F_h(u_h,c_h,B_R) < +\infty, \tag{3.2}$$

$$\lim_{h\to+\infty} \mathcal{H}^{d-1}(S_{u_h}) = 0, \tag{3.3}$$

$$\lim_{h\to+\infty} \mathrm{Dev}_h(u_h,c_h,B_R) = 0, \tag{3.4}$$

$$\lim_{h\to+\infty} u_h - m_h = u_0 \in W^{1,\bar p}(B_R) \quad \mathcal{L}^d\text{-a.e. in } B_R. \tag{3.5}$$

那么，若 f_h 收敛于 f: $\mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$，且 $L^{-1}|\xi|^{\bar p} \le f(\xi) \le L|\xi|^{\bar p}$ 在 $B_R \times \mathbb{R}^d$ 的紧子集上一致收敛，则函数 u_0 是泛函 $v \to \int_{B_R} f(\nabla v)\,\mathrm{d}x$ 在 $W^{1,\bar p}(B_R)$ 的局部极小化子，并且

$$\lim_{h\to+\infty} F_h(u_h,c_h,B_\rho) = \int_{B_\rho} f(\nabla u_0)\,\mathrm{d}x, \quad \forall \rho \in (0,R). \tag{3.6}$$

证明. 将 u_h 替换为 $u_h - m_h$ 后，我们始终可以假设对所有 h 都有 $m_h = 0$。由假设 (3.2) 和 (3.3)，我们可以应用定理 2.4（另见注 2.5）。由此并通过检查其证明可知， $u_0 \in W^{1,\bar p}(B_R)$， $\nabla \bar u_h^M \rightharpoonup \nabla u_0^M$ 在 L^1 中，

$$\mathcal{L}^d(B_R \cap \{u_h \ne \bar u_h\}) \to 0, \quad \text{and} \quad \lim_{h\to+\infty} \int_B |\bar u_h - u_0|^{p_h(y)}\,\mathrm{d}y = 0, \tag{3.7}$$

其中我们仍使用记号 $\bar u_h := T_{B_R} u_h$。我们将证明分为三个步骤。

步骤 1：一个下半连续性结果。我们声称，对于几乎处处的 $\rho \in (0,R)$，有

$$\int_{B_\rho} f(\nabla u_0)\,\mathrm{d}y \le \liminf_{h\to+\infty} \int_{B_\rho} f_h(y,\nabla \bar u_h)\,\mathrm{d}y, \tag{3.8}$$

进而，考虑到 (3.3)，可得

$$\int_{B_\rho} f(\nabla u_0)\,\mathrm{d}y \le \liminf_{h\to+\infty} F_h(\bar u_h,c_h,B_\rho). \tag{3.9}$$

如果我们证明 $\nabla \bar{u}_h^M \rightharpoonup \nabla u_0^M$在 L^1中弱收敛时满足下半连续性不等式 (3.8)，则结论得证，因为 $f_h(y,0) \to f(0) = 0$在 B_ρ上一致。因此，以 $\bar{u}_h^M$替换 $\bar{u}_h$后，我们可以假设 $\bar{u}_h$ 关于 h一致有界。记 $v_h := \bar{u}_h - u_0$，则对每个 $q \geq 1$，都有 $v_h \to 0$ 属于 $L^q(B_R)$。现在我们将定理 4.1] 的证明调整到我们的情形。尽管只有少数改动较为重要，为求完整起见，我们仍将写出证明。

可以考虑将 v_h 乘以截断函数 $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$，该函数在 B_R 中具有紧支撑，且在 B_ρ 中恒等于 1。这样，不失一般性，我们可以假设函数 $v_h \in SBV(\mathbb{R}^d)$ 在 B_R 中具有紧支撑。固定 $\eta > 0$，使得 $p_\eta := \bar{p} - \eta > 1$ 且 $\|p_h - \bar{p}\|_{L^\infty(B_R)} < \eta$，其中 h 足够大，从而

$$\sup_h \int_{B_R} |\nabla v_h|^{p_\eta} \,\mathrm{d}y \leq \sup_h \left[\int_{B_R} |\nabla v_h|^{p(x)} + \mathcal{L}^d(B_R)| \right] < +\infty \,,$$

$$\gamma_h := \|v_h\|_{L^{p_\eta}(B_R)} \to 0 \,, \qquad \sup_h \|v_h\|_{L^\infty(B_R)} < +\infty \,.$$

因此，我们可以对 v_h 应用定理 2.6：给定 θ_h，满足 $\gamma_h/\theta_h \to 0$，存在序列 $\varepsilon_j \in (0,1)$ $\mu_j, \lambda_{h,j} > 1$，满足 $\varepsilon_j \to 0$, $\mu_j \to +\infty$，以及 $\mu_j \leq \lambda_{h,j} \leq \mu_{j+1}$；并且存在序列 $v_{h,j} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$，使得 $v_{h,j} = 0$ 在 $\mathbb{R}^d \setminus B_R$ 中，$\|v_{h,j}\|_\infty \leq \theta_h$，$\|\nabla v_{h,j}\|_\infty \leq C\lambda_{h,j}$，$\{v_{h,j} \neq v_h\} \subset B_R \cap \{|M(|v_h|) > \theta_h\} \cup \{M(|Dv_h|) > 3K\lambda_{h,j}\}$，并且

$$\lambda_{h,j}^{p_\eta} \mathcal{L}^d(B_R \cap \{|M(|v_h|) > \theta_h\} \cup \{M(|\nabla v_h|) > 2K\lambda_{h,j}\}) \leq C \left[\frac{\gamma_h}{\theta_h} \mu_{j+1} + \varepsilon_j \right]^{p_\eta} , \tag{3.10}$$

其中 K 和 C两个与 h、j、η无关的常数。此外，对于每个 $j \in \mathbb{N}$ 以及 $h \to \infty$,

$$\nabla v_{h,j} \rightharpoonup 0 \quad \text{weakly}^* \text{ in } L^\infty(B_R, \mathbb{R}^d).$$

对于任意 $r > 0$，我们有

$$\int_{B_\rho} f_h(y, \nabla \bar{u}_h) \,\mathrm{d}y = \int_{B_\rho} f_h(y, \nabla u_0 + \nabla v_h) \,\mathrm{d}y \geq \int_{E_r \cap \{v_h = v_{h,j}\}} f_h(y, \nabla u_0 + \nabla v_{h,j}) \,\mathrm{d}y,$$

wh这里 $E_r = \{y \in B_\rho : \ |\nabla u_0| \leq r\}$。回顾 f_h 收敛到 f，我们推得

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho} f_h(y, \nabla \bar{u}_h) \,\mathrm{d}y &\geq \int_{E_r \cap \{v_h = v_{h,j}\}} [f_h(y, \nabla u_0 + \nabla v_{h,j}) - f(\nabla u_0 + \nabla v_{h,j})] \,\mathrm{d}y \\
&+ \int_{E_r \cap \{v_h = v_{h,j}\}} f(\nabla u_0 + \nabla v_{h,j}) \,\mathrm{d}y = \int_{E_r \cap \{v_h = v_{h,j}\}} [f_h(y, \nabla u_0 + \nabla v_{h,j}) - f(\nabla u_0 + \nabla v_{h,j})] \,\mathrm{d}y \\
&+ \int_{E_r} f(\nabla u_0 + \nabla v_{h,j}) \,\mathrm{d}y - \int_{E_r \cap \{v_h \neq v_{h,j}\}} f(\nabla u_0 + \nabla v_{h,j}) \,\mathrm{d}y \,,
\end{aligned}$$

当 $h \to +\infty$ 时，得到

$$\begin{aligned}
\liminf_{h \to +\infty} \int_{B_\rho} f_h(y, \nabla \bar{u}_h) \,\mathrm{d}y &\geq \liminf_{h \to +\infty} \int_{E_r} f(\nabla u_0 + \nabla v_{h,j}) \,\mathrm{d}y \\
&\quad - \limsup_{h \to +\infty} \int_{E_r \cap \{v_h \neq v_{h,j}\}} f(\nabla u_0 + \nabla v_{h,j}) \,\mathrm{d}y \\
&\geq \int_{E_r} f(\nabla u_0) \,\mathrm{d}y - L \limsup_{h \to +\infty} \int_{E_r \cap \{v_h \neq v_{h,j}\}} |\nabla u_0 + \nabla v_{h,j}|^{\bar{p}} \,\mathrm{d}y \,,
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式应用了 De Giorgi 半连续性定理（[13]）以及对 f 的增长假设。现在我们处理最后一项:

$$\begin{aligned}\int_{E_r\cap\{v_h\neq v_{h,j}\}}|\nabla u_0+\nabla v_{h,j}|^{\bar p}\,\mathrm{d}y &\le c\left(r^{\bar p}+\lambda_{h,j}^{\bar p}\right)\mathcal{L}^d(\{y\in B_R: v_h\neq v_{h,j}\})\\ &\le c\left(r^{\bar p}+\lambda_{h,j}^{\bar p}\right)\Big[\mathcal{L}^d(B_R\cap\{M(|v_h|>\theta_h\}\cup\{M(|\nabla v_h|)>2K\lambda_{h,j}\})\\ &\qquad+\mathcal{L}^d(B_R\cap\{M(|D^s v_h|)>K\lambda_{h,j}\})\Big].\end{aligned}$$

回顾（2.17），我们有

$$c\left(r^{\bar p}+\lambda_{h,j}^{\bar p}\right)\mathcal{L}^d(B_R\cap\{M(|D^s v_h|)>K\lambda_{h,j}\})\le c\left(r^{\bar p}+\lambda_{h,j}^{\bar p}\right)\frac{1}{\lambda_{h,j}}\mathcal{H}^{d-1}(S_{v_h}),$$

由于 $\mu_j\le\lambda_{h,\ j}\le\mu_{j+1}$，当 $h\to+\infty$ 时该量是无穷小量。因此，我们只需估计

$$\mathcal{I}_{h,j}:=c\left(r^{\bar p}+\lambda_{h,j}^{\bar p}\right)\mathcal{L}^d(B_R\cap\{M(|v_h|>\theta_h\}\cup\{M(|\nabla v_h|)>2K\lambda_{h,j}\}),$$

对此，我们可以使用（3.10），从而得到

$$\mathcal{I}_{h,j}\le c\frac{r^{\bar p}+\lambda_{h,j}^{\bar p}}{\lambda_{h,j}^{p_\eta}}\left[\frac{\gamma_h}{\theta_h}\mu_{j+1}+\varepsilon_j\right]^{p_\eta}\le c\frac{r^{\bar p}}{\mu_j^{p_\eta}}\left[\frac{\gamma_h}{\theta_h}\mu_{j+1}+\varepsilon_j\right]^{p_\eta}+c\mu_{j+1}^{\eta}\left[\frac{\gamma_h}{\theta_h}\mu_{j+1}+\varepsilon_j\right]^{p_\eta},$$

由此可得

$$\limsup_{j\to+\infty}\lim_{\eta\to0}\limsup_{h\to+\infty}\mathcal{I}_{h,j}=0.$$

综上，我们得到

$$\liminf_{h\to+\infty}\int_{B\rho}f_h(y,\nabla\bar u_h)\,\mathrm{d}y\ge\int_{E_r}f(\nabla u_0)\,\mathrm{d}y,$$

令 r 趋于 $+\infty$，我们证明了下半连续性结果 (3.8)。

步骤 2：渐近性。现在我们关于 ρ 对 $\mathcal{H}^{d-1}(\{\tilde{\tilde u}_h\neq\tilde u_h\}\cap\partial B_\rho)$ 进行积分，并利用余面积公式和 (2.9)，得到

$$\begin{aligned}a_h:=c_h\int_0^R\mathcal{H}^{d-1}(\{\tilde{\tilde u}_h\neq\tilde u_h\}\cap\partial B_\rho)\,\mathrm{d}\rho&=c_h\mathcal{L}^d(B_R\cap\{\bar u_h\neq u_h\})\\ &\le 2c_h\left(2\gamma_{\mathrm{iso}}\mathcal{H}^{d-1}(S_{u_h}\cap B_R)\right)^{\frac{d}{d-1}}.\end{aligned}$$

我们将证明 $\lim_{h\to+\infty}a_h=0$。我们需要根据极限 $c_\infty:=\lim_h c_h$ 的取值区分两种情形；该极限在取一个子序列后（不重新标记）存在。若 $c_\infty<+\infty$，则该断言立即由 (3.3) 得出。若 $c_\infty=+\infty$，则由 (3.2) 有

$$c_h\left(2\gamma_{\mathrm{iso}}\mathcal{H}^{d-1}(S_{u_h}\cap B_R)\right)^{\frac{d}{d-1}}\le c_h\left(2\gamma_{\mathrm{iso}}\frac{M}{c_h}\right)^{\frac{d}{d-1}}\le\left(\frac{1}{c_h}\right)^{\frac{1}{d-1}}(2\gamma_{\mathrm{iso}}M)^{\frac{d}{d-1}}$$

于是结论再次成立。

那么，取一个子序列后，我们可以假设，对几乎处处的 $\rho\in(0,R)$，

$$\lim_{h\to+\infty}c_h\,\mathcal{H}^{d-1}(\{\tilde{\tilde u}_h\neq\tilde u_h\}\cap\partial B_\rho)=0\,.\tag{3.11}$$

由于对于任意 h，且对于 $\mathcal{L}^1$-几乎处处的 $\rho\in(0,R)$，$\mathcal{H}^{d-1}(S_{\bar u_h}\cap\partial B_\rho)=0$，我们可以应用引理 2.8，得到

$$F_h(u_h,c_h,B_\rho)\le F_h(\bar u_h,c_h,B_\rho)+c_h\mathcal{H}^{d-1}(\{\tilde{\tilde u}_h\neq\tilde u_h\}\cap\partial B_\rho)+\mathrm{Dev}_h(u_h,c_h,B_R)\,,\tag{3.12}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{Dev}_h(\bar u_h,c_h,B_\rho)\le{}& F_h(\bar u_h,c,B_\rho)-F_h(u_h,c_h,B_\rho)+c_h\mathcal{H}^{d-1}(\{\tilde{\bar u}_h\neq\tilde u_h\}\cap\partial B_\rho)\\&+\mathrm{Dev}_h(u_h,c_h,B_R)\,.\end{aligned}\tag{3.13}$$

此外，根据关于 f_h 的增长假设 (3.1)，并考虑到 $\bar u_h$ 是 u_h 的截断，我们还有

$$F_h(\bar u_h,c_h,B_\rho)\le F_h(u_h,c_h,B_\rho)+L\,\mathcal{L}^d(B_\rho\cap\{\bar u_h\neq u_h\})\,.\tag{3.14}$$

因此，若我们对所有 $\rho<R$ 令，

$$\alpha(\rho):=\lim_{h\to+\infty}F_h(u_h,c_h,B_\rho)\,,$$

由于函数 $\rho\mapsto F_h(u_h,c_h,B_\rho)$ 单调递增且一致有界（由 (3.12)、(3.14)、(3.11)、(3.4) 和 (3.7) 可知），故其极限存在，我们可以得出，对于 $\mathcal{L}^1$-几乎处处的 $\rho\in(0,R)$，

$$\alpha(\rho)=\lim_{h\to+\infty}F_h(\bar u_h,c_h,B_\rho)\,.\tag{3.15}$$

由此以及 (3.13)，我们还可得

$$\lim_{h\to+\infty}\mathrm{Dev}_h(\bar u_h,c_h,B_\rho)=0\,.$$

现在我们注意到，Radon 测度序列

$$\mu_h=|\nabla\bar u_h|^{p_h(y)}\mathcal{L}^d+c_h\mathcal{H}^{d-1}|S_{\bar u_h}$$

根据 (3.2)，其总质量一致有界，因此它弱* 收敛（取一个子序列后）到 B_R 上的某个 Radon 测度 μ。

步骤 3：结论。为得到最终结果，取 $v\in W^{1,\bar p}(B_R)$ 使得 $\{v\neq u_0\}\subset\subset B_R$。我们还考虑 v 的正则化函数 $v^\varepsilon\in W^{1,\infty}(B_R)$，它在 $W^{1,\bar p}(B_R)$ 中强收敛于 v。令 $\rho<\rho'\in(0,R)$，其中 ρ' 使得 (3.15) 成立，$\mu(\partial B_{\rho'})=\mu(\partial B_\rho)=0$ 且 $\{v\neq u_0\}\subset\subset B_\rho$。取 $\varphi\in C_c^\infty(B_{\rho'})$ 使得 $\varphi=1$ 在 B_ρ 上成立，并定义 $\zeta_h=\varphi v^\varepsilon+(1-\varphi)\bar u_h$；由于 $\{\zeta_h\neq\bar u_h\}\subset\subset B_{\rho'}$，直接计算得到

$$\begin{aligned}F_h(\bar u_h,c_h,B_{\rho'})&\le F_h(\zeta_h,c_h,B_{\rho'})+\mathrm{Dev}_h(\bar u_h,c_h,B_{\rho'})\\&\le F_h(v^\varepsilon,c_h,B_\rho)+c\left[\int_{B_{\rho'}\setminus B_\rho}\left(1+|\nabla v^\varepsilon|^{p_h(y)}+|\nabla\bar u_h|^{p_h(y)}+\frac{|v^\varepsilon-\bar u_h|^{p_h(y)}}{(\rho'-\rho)^{p_h(y)}}\right)\mathrm{d}y\right]\\&\quad+c_h\mathcal{H}^{d-1}(S_{\bar u_h}\cap B_{\rho'}\setminus\overline{B}_\rho)+\mathrm{Dev}_h(\bar u_h,c_h,B_{\rho'})\,,\end{aligned}$$

对于一个仅取决于 L 和 p^+、p^- 的适当常数 $c\ge1$。令 $h\to+\infty$ 并利用 (3.7)，可得

$$\alpha(\rho')\le\int_{B_\rho}f(\nabla v^\varepsilon)\,\mathrm{d}y+c\left[\int_{B_{\rho'}\setminus B_\rho}\left(1+|\nabla v^\varepsilon|^{\bar p}+\frac{|v^\varepsilon-u_0|^{\bar p}}{(\rho'-\rho)^{\bar p}}\right)\mathrm{d}y\right]+c\,\mu(B_{\rho'}\setminus B_\rho)\,.$$

现在令 $\varepsilon\to0$，并回忆 $v=u_0$ 在 B_ρ 外成立，我们容易得到

$$\alpha(\rho)\le\alpha(\rho')\le\int_{B_\rho}f(\nabla v)\,\mathrm{d}y+c\left[\int_{B_{\rho'}\setminus B_\rho}\left(1+|\nabla v|^{\bar p}\right)\mathrm{d}y\right]+c\,\mu(B_{\rho'}\setminus B_\rho)\,.$$

因此，令 ρ' 趋于 ρ，最终可得，对于 $\mathcal{L}^1$ -几乎处处的 ρ 以及任意 $v\in W^{1,\bar p}(B_R)$，只要满足 $\{v\neq u_0\}\subset\subset B_\rho$，就有

$$\limsup_{h\to+\infty}F_h(\bar u_h,c_h,B_\rho)=\limsup_{h\to+\infty}F_h(u_h,c_h,B_\rho)\le\int_{B_\rho}f(\nabla v)\,\mathrm{d}y\,.$$

在前一个不等式中取 $v = u_0$，并考虑到 (3.9)，可得

$$\lim_{h\to+\infty} F_h(u_h, c_h, B_\rho) = \int_{B_\rho} f(\nabla u_0)\,\mathrm{d}y$$

并且 u_0 具有所声称的极小化性质。至此，证明完成。

□

4. Strong minimizers of free-discontinuity functionals with $p(\cdot)$-growth

4.1. 关于能量的假设。考虑一个变指数 $p\colon \Omega \to (1,+\infty)$，满足

$$1 < p^- \le p(x) \le p^+ < +\infty, \qquad \forall x \in B\,. \tag{4.1}$$

对于 $K \subset \mathbb{R}^d$ 为一个闭集且 $u \in W^{1,\,p(\cdot)}(\Omega \setminus K)$，我们定义泛函

$$\mathcal{G}(K,u) := \int_{\Omega\setminus K} f(x,\nabla u)\,\mathrm{d}x + \alpha\int_{\Omega\setminus K} |u-g|^q\,\mathrm{d}x + \mathcal{H}^{d-1}(K\cap\Omega) \tag{4.2}$$

其中 $\alpha > 0$、$q \ge 1$和 $g \in L^\infty(\Omega)$。相应地，我们用 $\mathcal{F}$ 表示 $\mathcal{G}$的弱形式，即具有以下形式的自由不连续泛函

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega f(x,\nabla u)\,\mathrm{d}x + \alpha\int_\Omega |u-g|^q\,\mathrm{d}x + \mathcal{H}^{d-1}(S_u\cap\Omega)\,, \tag{4.3}$$

定义于 $u \in SBV^{p(\cdot)}(\Omega)$ 上。

我们假设函数 $f\colon \Omega\times\mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$ 具有如下形式

$$f(x,\xi) = |\xi|^{p(x)} + h(x,\xi), \tag{4.4}$$

其中 h 是一个连续函数，在 ξ 中为凸函数，并且满足

$$0 \le h(x,\xi) \le L(1+|\xi|^{p(x)}), \tag{4.5}$$

对每个 $(x,\xi) \in \Omega\times\mathbb{R}^d$，以及

$$|h(x,\xi) - h(x_0,\xi)| \le L\,\omega(|x-x_0|)(|\xi|^{p(x)} + |\xi|^{p(x_0)})(1+|\log|\xi||) \tag{4.6}$$

对任意 $\xi \in \mathbb{R}^d$, $x, x_0 \in \Omega$，且其中 $L \ge 1$。这里 $\omega\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 是一个非递减的连续函数，满足 $\omega(0) = 0$，它表示 $p(\cdot)$ 的连续模。从现在起，我们假设 ω 满足 (2.4)。

4.2. 衰减引理。我们首先证明能量 F 在小球中的一个关键衰减性质。证明采用了基于放大过程的经典论证，是针对具有 p-增长的能量提出的变指数对应形式（例如参见 [7, 引理 7.14]）。将其推广到变指数框架并非易事，因为缺少了其中一个主要要素——体密度的齐次性。[24, 引理 3.3] 通过引入一个非齐次修正，即上述函数 h，为这一方向迈出了第一步，但此时 p 仍为常数。

在陈述并证明我们的衰减引理之前，我们先回顾 [3] 中关于自治变分积分的 Sobolev 极小化子的一个正则性结果（参见其中的定理 3.2），该结果将在我们的证明中用到。

命题 4.1. 设 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，满足

$$L^{-1}(\mu^2+|\xi^2|)^{p/2} \le f(\xi) \le L(\mu^2+|\xi|^2)^{p/2} \tag{4.7}$$

对所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$，其中 $0 \le \mu \le 1$、$L \ge 1$、$1 < p^- \le p \le p^+$，且

$$\int_Q f(\xi + \nabla\varphi)\mathrm{d}x \ge \int_Q [f(\xi) + L^{-1}(\mu^2 + |\xi|^2 + |\nabla\varphi|^2)^{(p-2)/2}|\nabla\varphi|^2]\,\mathrm{d}x, \tag{4.8}$$

对所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\varphi \in C_0^1(Q)$，Q 为单位立方体。设 B_R 为 $\mathbb{R}^d$ 中的一个球，并设 $v \in W^{1,p}(B_R)$ 是泛函 $w \mapsto \int_{B_R} f(\nabla w)\,\mathrm{d}x$ 的局部极小化子。则存在常数 $C_0 = C_0(p^-, p^+, L)$，使得

$$\sup_{B_{R/2}} (\mu^2 + |\nabla v|^2)^{p/2} \le C_0 \fint_{B_R} (\mu^2 + |\nabla v|^2)^{p/2}\mathrm{d}x\,. \tag{4.9}$$

注 4.2. 注意，前面的定理可以应用于

$$f(\xi) = (\mu^2 + |\xi|^2)^{p/2} + h(\xi)$$

其中 h 是一个凸函数，满足 $0 \le h(\xi) \le C(\mu^2 + |\xi|^2)^{p/2}$。事实上，根据 [21, 命题 2.2]，满足 (4.7) 的连续函数 f 存在上述分解，当且仅当 (4.8) 成立。

以下结果是对 [24, 引理 3.2] 关于函数序列的一个小推广。

引理 4.3. 设 $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $g_j\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ 是一列拟凸函数，且 $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个有界序列，其中 $p_j \ge 1$ 对每个 $j \in \mathbb{N}$都成立。假设

$$0 \le g_j(\xi) \le L(1 + |\xi|^{p_j}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \forall j \in \mathbb{N},$$

并设 $(t_j) \subset (0,\infty)$ 是一列满足 $\lim_j t_j = +\infty$ 的函数。于是，令

$$\hat{g}_j(\xi) := \frac{g_j(t_j\xi)}{t_j^{p_j}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,\ j \in \mathbb{N},$$

存在一个子序列 (t_{j_k})，使得 $\hat{g}_{j_k}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 的紧子集上一致收敛到一个拟凸函数 g_∞。此外，若对某个 $p \ge 1$ 有 $p_j \to p$，则

$$g_\infty(\xi) \le L|\xi|^p, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

证明。注意到每个 g_j 都是连续的，并利用估计式（例如，参见引理 5.2] [25,），即可按标准方法得出该结论。

$$|g_j(\xi_1) - g_j(\xi_2)| \le C(1 + |\xi_1|^{p_j-1} + |\xi_2|^{p_j-1})|\xi_1 - \xi_2|, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d,\ \forall j \in \mathbb{N},$$

其中 $C = C(L, \sup_j p_j)$。于是，序列 $\hat{g}_j$ 一致有界，并且在任意球上都一致等度连续。□

现在我们可以陈述并证明前面提到的衰减性质。

引理 4.4（衰减估计）。设 f 是一个满足 (4.4)、(4.5)、(4.6) 的函数，其中 $p(\cdot)$ 是满足 (4.1) 的强对数-H ¨older 连续指数。存在常数 $C_1 = C_1(d, L, p^-, p^+)$，使得对于每个 $\tau \in (0,1)$，存在 $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$、$\theta = \theta(\tau)$ 属于 $(0,1)$，从而如果 $u \in SBV(\Omega)$ 满足：对于 $x \in \Omega$ 以及 $B_\rho(x) \subset\subset \Omega$，$\rho < \varepsilon^2$，

$$F(u, B_\rho(x)) \le \varepsilon\rho^{d-1}, \qquad \mathrm{Dev}(u, B_\rho(x)) \le \theta F(u, B_\rho(x)),$$

then

$$F(u, B_{\tau\rho}(x)) \le C_1\tau^d F(u, B_\rho(x)). \tag{4.10}$$

证明。只需假设 $\tau \in (0,1/2)$（否则直接取 $C_1 = 2^d$ 即可）。我们采用反证法，并假设 (4.10) 不成立。在这种情况下，存在一个序列 $u_j \in SBV(\Omega)$、非负数序列 ε_j、 θ_j、 ρ_j，满足 $\lim_j \varepsilon_j = \lim_j \theta_j = 0$, $\rho_j \le \varepsilon_j^2$，以及 $x_j \in \Omega$，其中 $B_{\rho_j}(x_j) \subset\subset \Omega$，使得

$$F(u_j, B_{\rho_j}(x_j)) \le \varepsilon_j \rho_j^{d-1}, \qquad \mathrm{Dev}(u_j, B_{\rho_j}(x_j)) \le \theta_j F(u_j, B_{\rho_j}(x_j)), \tag{4.11}$$

and

$$F(u_j, B_{\tau\rho_j}(x_j)) > C_1 \tau^d F(u_j, B_{\rho_j}(x_j)), \tag{4.12}$$

其中 $C_1 = (1+L)C_0$ and C_0 来自命题 4.1 中的 (4.9)。

对于每个 j，我们考虑指数 $\bar{p}_j := p(x_j)$、缩放变指数 $p_j : B_1 \to (1, +\infty)$ 以及函数 $v_j : B_1 \to \mathbb{R}$，定义如下

$$p_j(y) := p(x_j + \rho_j y)$$

and

$$v_j(y) := (\rho_j \gamma_j)^{1/\bar{p}_j} u_j(x_j + \rho_j y) \rho_j^{-1},$$

分别，其中 $\gamma_j := 1/\varepsilon_j$。现在，若我们令

$$F_j(v, \gamma_j, B_\rho) := \int_{B_\rho} f_j(x, \nabla v)\, \mathrm{d}y + \gamma_j \mathcal{H}^{d-1}(S_v, B_\rho)$$

其中 $f_j(y,\xi) := \gamma_j \rho_j f(x_j + \rho_j y, (\gamma_j \rho_j)^{-1/\bar{p}_j} \xi)$，则 (4.11) 和 (4.12) 可分别改写为

$$F_j(v_j, \gamma_j, B_1) \le 1, \qquad \mathrm{Dev}_j(v_j, \gamma_j, B_1) \le \theta_j, \tag{4.13}$$

and

$$F_j(v_j, \gamma_j, B_\tau) > C_1 \tau^d F_j(v_j, \gamma_j, B_1). \tag{4.14}$$

(4.13) 中的第一个界进一步意味着

$$\mathcal{H}^{d-1}(S_{v_j} \cap B_1) \le \varepsilon_j,$$

and

$$\int_{B_1} |\nabla v_j|^{p_j(y)}\, \mathrm{d}y \le \gamma_j \rho_j \int_{B_1} |\nabla u_j(x_j + \rho_j y)|^{p_j(y)}\, \mathrm{d}y \le 1,$$

其中我们使用了 $\gamma_j \rho_j \le 1$。

最终再提取一个子序列（为方便起见仍记作原记号），我们还可假设 $x_j \to x_0$，且 $x_0 \in \Omega$，从而令 $\bar{p} := p(x_0)$，有

$$\sup_{y \in B_1} |p_j(y) - \bar{p}| \le \sup_{y \in B_1} |p(x_j + \rho_j y) - p(x_j)| + |p(x_j) - p(x_0)| \le \omega(\rho_j) + o(1) \to 0$$

当 $j \to +\infty$ 时。因此，$p_j(y) \to \bar{p}$ 在 B_1 上一致。结合定理 2.4 和注 2.5，我们得到一个函数 $v_0 \in W^{1,\bar{p}}(B_1)$，使得 (2.14) 中所述的收敛成立。

现在我们证明，函数 $f_j(y,\xi)$ 在 $B_1 \times \mathbb{R}^d$ 的紧子集上一致收敛于凸函数 $f_\infty(\xi)$。此外，$|\xi|^{\bar{p}} \le f_\infty(\xi) \le L(1 + |\xi|^{\bar{p}})$。令

$$\tilde{f}_j(\xi) := \gamma_j \rho_j f(x_j, (\gamma_j \rho_j)^{-1/\bar{p}_j} \xi), \tag{4.15}$$

我们首先证明，如果 $y \in B_1$、 $|\xi| \le R$,

$$|f_j(y,\xi) - \tilde{f}_j(\xi)| \le \omega_{j,R}$$

对于某个 $\omega_j,\ R$ 当 $j\to+\infty$ 时其为无穷小。事实上，我们观察到

$$\begin{aligned}|f_j(y,\xi)-\tilde f_j(\xi)|&\le\gamma_j\rho_j\left||\xi|^{p_j(y)}(\gamma_j\rho_j)^{-\frac{p_j(y)}{\bar p_j}}-|\xi|^{\bar p_j}(\gamma_j\rho_j)^{-1}\right|\\&\quad+\gamma_j\rho_j\left|h(x_j+\rho_j y,(\gamma_j\rho_j)^{-1/\bar p_j}\xi)-h(x_j,(\gamma_j\rho_j)^{-1/\bar p_j}\xi)\right|\\&=:\mathcal{I}_j+\mathcal{J}_j\,.\end{aligned}$$

我们首先估计 $\mathcal{I}_j$：由三角不等式可得

$$\mathcal{I}_j\le\left(\frac{1}{\gamma_j\rho_j}\right)^{\frac{p_j(y)}{\bar p_j}-1}\left||\xi|^{p_j(y)}-|\xi|^{\bar p_j}\right|+|\xi|^{\bar p_j}\left|\left(\frac{1}{\gamma_j\rho_j}\right)^{\frac{p_j(y)}{\bar p_j}-1}-1\right|=:\mathcal{I}_{j,1}+\mathcal{I}_{j,2}\,.$$

至于 $\mathcal{I}_{j,1}$ 的系数，我们注意到

$$\left|\left(\frac{1}{\gamma_j\rho_j}\right)^{\frac{p_j(y)-\bar p_j}{\bar p_j}}-1\right|\le\mathrm{e}^{\frac{|p_j(y)-\bar p_j|\log\left(\frac{1}{\gamma_j\rho_j}\right)}{\bar p_j}}-1\le\mathrm{e}^{-\frac{1}{p^-}\omega(\gamma_j\rho_j)\log(\gamma_j\rho_j)}-1\,,$$

由此

$$\lim_{j\to+\infty}\left(\frac{1}{\gamma_j\rho_j}\right)^{\frac{p_j(y)}{\bar p_j}-1}=1,\tag{4.16}$$

因为 $\lim_j(\gamma_j\rho_j)=0$ and ω 满足 (2.4)。另一方面，容易证明，当 $|\xi|\le R$ 时，$|\xi|^{p_j(y)}-|\xi|^{\bar p_j}$ 在 B_1 上一致收敛于 0。现在我们处理 $\mathcal{I}_{j,2}$：我们有

$$\mathcal{I}_{j,2}\le R^{\bar p_j}\left|\left(\frac{1}{\gamma_j\rho_j}\right)^{\frac{p_j(y)-\bar p_j}{\bar p_j}}-1\right|\le\max\{R^{p^-},R^{p^+}\}\left|\left(\frac{1}{\gamma_j\rho_j}\right)^{\frac{p_j(y)-\bar p_j}{\bar p_j}}-1\right|,$$

根据 (4.16)，右端的项在 $j\to+\infty$ 时是无穷小量。我们只需估计 $\mathcal{J}_j$：由 (4.6) 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_j&\le L\,\gamma_j\rho_j\,\omega(\rho_j)\left[|\xi|^{p_j(y)}(\gamma_j\rho_j)^{-\frac{p_j(y)}{\bar p_j}}+|\xi|^{\bar p_j}(\gamma_j\rho_j)^{-1}\right]\left[1+|\log(|\xi|(\gamma_j\rho_j)^{-\frac{1}{\bar p_j}})\right]\\&\le c\,L\,\max\{R^{p^-},R^{p^+}\}\log|R|\,\omega(\gamma_j\rho_j)\left[1+\log\left(\frac{1}{\gamma_j\rho_j}\right)\right]\left[\left(\frac{1}{\gamma_j\rho_j}\right)^{\frac{p_j(y)}{\bar p_j}-1}+1\right],\end{aligned}$$

最后一项再次由 (4.16) 控制。因此,

$$\mathcal{J}_j\le c\,\max\{R^{p^-},R^{p^+}\}\log|R|\,\omega(\gamma_j\rho_j)\left[1+\log\left(\frac{1}{\gamma_j\rho_j}\right)\right]=:\omega_{j,R}.$$

现在，由于 $\tilde f_j(\xi)=|\xi|^{\bar p_j}+\hat{}g_j(\xi)$，应用于序列 $p_j:=\bar p_j$，$g_j(\xi):=h(x_j,\xi)$ 且满足 $t_j:=(\gamma_j\rho_j)^{-1/\bar p_j}$ 的引理 4.3 使我们可以得出结论：再取一个子序列后

$$f_j(y,\xi)\to|\xi|^{\bar p}+g_\infty(\xi)$$

在 $B_1\times K$ 上一致，其中 K 是 $\mathbb{R}^d$ 中的紧子集，对于满足 $0\le g_\infty(\xi)\le L|\xi|^{\bar p}$ 的凸函数 g_∞。现在，令 $f_\infty(\xi):=|\xi|^{\bar p}+g_\infty(\xi)$。因此，由定理 3.1 可得，$v_0$ 是泛函 $v\mapsto\int_{B_1}f_\infty(\nabla v)\,\mathrm{d}x$ 的局部极小化子，并且

$$\lim_{j\to+\infty}F_j(v_j,\gamma_j,B_\rho)=\int_{B_\rho}f_\infty(\nabla v_0)\,\mathrm{d}x\quad\forall\rho\in(0,1).$$

注意，得益于命题 4.1 和注 4.2， v_0 满足

$$\sup_{B_\tau} |\nabla v_0|^{\bar{p}} \le C_0 \fint_{B_1} |\nabla v_0|^{\bar{p}} \, \mathrm{d}y \le C_0 \fint_{B_1} f_\infty(\nabla v_0) \, \mathrm{d}y \, .$$

总之

$$\begin{aligned} \lim_{j\to+\infty} F_j(v_j, \gamma_j, B_\tau) &= \int_{B_\tau} f_\infty(\nabla v_0) \, \mathrm{d}y \le (1+L) \sup_{B_\tau} |\nabla v_0|^{\bar{p}} \tau^d \mathcal{L}^d(B_1) \\ &\le (1+L) C_0 \tau^d \int_{B_1} f_\infty(\nabla v_0) \, \mathrm{d}y \le (1+L) C_0 \tau^d \limsup_{j\to+\infty} F_j(v_j, \gamma_j, B_1) \, , \end{aligned}$$

这与 (4.14) 矛盾。

□

4.3. 密度下界。为了研究跳跃集 S_u 的正则性，一个关键工具是 Ahlfors 型正则性结果，它保证 $F(u, B_\rho(x))$ 具有上下界，其中 $B_\rho(x)$ 是以跳跃点 $x \in S_u$ 为中心的任意球。

我们首先回顾准极小化子的定义（见 [7, 定义 7.17]）。

定义 4.5. 若存在常数 $\kappa \ge 0$，使得对所有满足 $\subset\subset\Omega$ 的球 $B_\rho(x)$，均有下式成立，则函数 $u \in SBV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 是泛函 $F(v, \Omega)$ 的准极小化子：

$$\mathrm{Dev}(u, B_\rho(x)) \le \kappa \rho^d \, . \tag{4.17}$$

满足 (4.17) 的准极小化子类记为 $\mathcal{M}_\kappa(\Omega)$。

容易验证（例如参见 [7, 注 7.16]），泛函 $\mathcal{F}$ （见 (4.3)）的任意极小化子 u 都属于 $\mathcal{M}_\kappa(\Omega)$，其中 $\kappa := 2^q \alpha \gamma_d \|g\|_\infty^q$。

以下上界由标准比较论证即可直接得到。注意，这里实际上不需要假设 $x \in S_u$。

引理 4.6（能量上界）。假设 f 满足 (4.4)，并设 $u \in \mathcal{M}_\kappa$。那么，对于所有球 $B_\rho(x) \subset\subset \Omega$ (Ω).

$$\int_{B_\rho(x)} f(y, \nabla u) \, \mathrm{d}y + \mathcal{H}^{d-1}(S_u \cap B_\rho(x)) \le d\gamma_d \rho^{d-1} + \kappa' \rho^d, \tag{4.18}$$

其中 $\kappa' = \kappa + L\gamma_d$。

证明。参见例如 [7, 引理 7.19], , 将 κ 替换为 κ' 即可，因为 $f(x, 0) \le L$ 于 $B_\rho(x$). □

相反，下面关于 $F(u, B_\rho(x))$ 的下界要求小球 $B_\rho(x)$ 以 $x \in S_u$ 为中心。该证明基于引理 4.4 的衰减估计，并遵循 [7, 定理 7.21] 的证明思路，其中 p 为常数。不同之处在于引入了集合 Σ，在该集合上，L^1_{loc}-函数 $|\nabla u|^{p(\cdot)}$ 局部较大（见下文 (4.29)），而该集合结果证明是 $\mathcal{H}^{d-1}$-可忽略的。为完整起见，我们愿意给出所有细节。

定理 4.7（密度下界）。设 f 是一个满足 (4.4)、(4.5)、(4.6) 的函数，其中指数 p 强对数-H¨连续并满足 (4.1)。存在依赖于 d、p^-、p^+ 和 L 的 θ_0 和 ρ_0，使得若 $u \in SBV(\Omega)$ 是 Ω 中 F 的准极小化子，则

$$F(u, B_\rho(x)) > \theta_0 \rho^{d-1} \tag{4.19}$$

对于所有以 $x \in \overline{S}_u$ 为中心、半径为 $\rho < \frac{\rho_0}{\kappa'}$ 的球 $B_\rho(x) \subset \Omega$，其中 κ' 是式 (4.18) 中的量。此外，

$$\mathcal{H}^{d-1}((\overline{S}_u \setminus S_u) \cap \Omega) = 0. \tag{4.20}$$

证明。不失一般性，我们可以假设 $x=0$。固定 $0<\tau<1$，使得$\sqrt{\tau}\le\frac{1}{C_1}$，并设 $\varepsilon_0:=\varepsilon(\tau)$，其中 C_1 和 $\varepsilon(\tau)$ 由引理 4.4 给出。取 $0<\sigma<1$ 使得

$$\sigma\le\frac{\varepsilon_0}{C_1(d\gamma_d+1)}\,, \tag{4.21}$$

并设

$$\rho_0:=\min\{1,\varepsilon(\sigma)^2,\varepsilon_0\tau^d\theta(\tau),\varepsilon_0\sigma^{d-1}\theta(\sigma)\}\,, \tag{4.22}$$

其中 $\theta(\tau)$ 和 $\theta(\sigma)$ 分别是引理 4.4 中对应于 τ 和 σ 的常数。首先，我们声称，若 $\rho<\frac{\rho_0}{\kappa}$ 和 $B_\rho\subset\Omega$，则

$$F(u,B_\rho)\le\varepsilon(\sigma)\rho^{d-1} \tag{4.23}$$

推出

$$F(u,B_{\sigma\tau^m\rho})\le\varepsilon_0\tau^{\frac{m}{2}}(\sigma\tau^m\rho)^{d-1}\,,\quad\forall m\in\mathbb{N}\,. \tag{4.24}$$

我们先对 $m=0$ 证明 (4.24)。由 (4.23)、(4.22) 以及若

$$\mathrm{Dev}(u,B_\rho)\le\theta(\sigma)F(u,B_\rho) \tag{4.25}$$

成立，结合 (4.10)、(4.18) 以及 σ (4.21) 的选取，我们可推出

$$\begin{aligned}F(u,B_{\sigma\rho})&\le C_1\sigma^dF(u,B_\rho)\le C_1\sigma^d(d\gamma_d\rho^{d-1}+\kappa'\rho^d)\\&\le(\sigma\rho)^{d-1}C_1\sigma(d\gamma_d+1)\\&\le\varepsilon_0(\sigma\rho)^{d-1}\,,\end{aligned} \tag{4.26}$$

如所期望的那样。若 (4.25) 不成立，则根据 ρ_0 的定义以及 u 的拟极小性，我们推得

$$F(u,B_{\sigma\rho})\le F(u,B_\rho)\le\frac{1}{\theta(\sigma)}\mathrm{Dev}(u,B_\rho)\le\frac{\kappa\rho^d}{\theta(\sigma)}\le\varepsilon_0(\sigma\rho)^{d-1}\,,$$

从而再次证明了 $m=0$ 的 (4.24)。

现在，假设对于某个 $m\ge0$，(4.24) 成立，并且

$$\mathrm{Dev}(u,B_{\sigma\tau^m\rho})\le\theta(\tau)F(u,B_{\sigma\tau^m\rho})\,. \tag{4.27}$$

于是，由引理 4.4 以及 τ 的选取，我们得到

$$\begin{aligned}F(u,B_{\sigma\tau^{m+1}\rho})&\le C_1\tau^dF(u,B_{\sigma\tau^m\rho})\\&\le C_1\tau^d\varepsilon_0\tau^{\frac{m}{2}}(\sigma\tau^m\rho)^{d-1}\\&\le\varepsilon_0\tau^{\frac{(m+1)}{2}}(\sigma\tau^{m+1}\rho)^{d-1}\,,\end{aligned}$$

这对应于 $m+1$ 的 (4.24)。若 (4.27) 不成立，利用 (4.17)，我们得到

$$\begin{aligned}F(u,B_{\sigma\tau^{m+1}\rho})\le F(u,B_{\sigma\tau^m\rho})\le\frac{1}{\theta(\tau)}\mathrm{Dev}(u,B_{\sigma\tau^m\rho})&\le\frac{\kappa}{\theta(\tau)}(\sigma\tau^m\rho)^d\\&\le\varepsilon_0\tau^{\frac{m+1}{2}}(\sigma\tau^{m+1}\rho)^{d-1}\,.\end{aligned}$$

这就证明了该断言。

现在，假设对于某个球 $B_\rho\subset\Omega$，$\rho<\frac{\rho_0}{\kappa}$ 满足 (4.23)。由 (4.24) 可得

$$\lim_{r\to0}\frac{F(u,B_r)}{r^{d-1}}=0\,,$$

因此，利用不等式 $|\xi|^{p^-}\le1+|\xi|^{p(\cdot)}$，我们推得

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{r^{d-1}}\int_{B_r(x)}|\nabla u|^{p^-}\,\mathrm{d}y=0\,.$$

因此，由定理 2.3 以及 $p = p^-$ 和 $q = 1^*$ 可知 $0 \in I$，其中

$$I = \left\{ x \in \Omega : \limsup_{r \to 0} \fint_{B_r(x)} |u(y)|^{1^*} \, \mathrm{d}y = +\infty \right\}.$$

于是，（4.19）对所有 $x \in S_u \setminus I$ 都成立。利用估计的一致性，通过稠密性论证，该不等式对于以 $x \in \overline{S_u \setminus I}$ 为中心的球仍然成立。接下来只需证明 $\overline{S_u \setminus I} = \overline{S}_u$。令 $x \notin \overline{S_u \setminus I}$；我们首先注意到集合 I 是 $\mathcal{H}^{d-1}$-可忽略的（见 [7, 引理 3.75]）。因此，我们可以找到 x 的一个邻域 V，使得 $\mathcal{H}^{d-1}(V \cap S_u) = 0$，从而按照标准方式可得 $u \in W^{1,\, p^-}(V)$。现在，利用索伯列夫函数的经典 Poincar´e 不等式以及上界（4.18），我们得到

$$\fint_{B_\rho(x)} \left| \frac{u - (u)_{x,\rho}}{\rho^\alpha} \right|^{p^-} \mathrm{d}y \le c\,, \tag{4.28}$$

其中，$(u)_{x,\,\rho}$ 表示 u 在 $B_\rho(x)$ 中的平均值，而 $\alpha := (p^- - 1)/p^-$。结合（4.28）以及 Campanato 对 H¨older 连续性的刻画（例如见 [8]），我们推知 u 的一个代表属于 $C^{0,\,\alpha}(V)$。因此，$x \notin \overline{S}_u$，这就完成了（4.19）的证明。

至于 (4.20)，由 (4.19) 可通过几何测度论中的一个论证得到。定义集合

$$\Sigma := \left\{ x \in \Omega : \ \limsup_{r \to 0} \frac{1}{r^{d-1}} \int_{B_r(x)} f(y, \nabla u) \, \mathrm{d}y > 0 \right\}. \tag{4.29}$$

由于 $|\nabla u|^{p(\cdot)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，成立 $\mathcal{H}^{d-1}(\Sigma) = 0$（例如参见 [20, 第 2.4.3 节，定理 3]）。另一方面，若 $x \in \Omega \cap (\overline{S}_u \setminus \Sigma)$，由 (4.19) 可推出密度

$$\Theta_{d-1}(S_u, x) := \limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^{d-1}(S_u \cap B_r(x))}{d\gamma_d r^{d-1}} \ge \theta_0 > 0\,.$$

对于任意博雷尔集 $E \subset \mathbb{R}^d$，定义 Radon 测度 $\mu(E) = \mathcal{H}^{d-1}(E \cap S_u)$。由于由 $\Theta_{d-1}(E, x) \ge \theta_0$ 对每个 $x \in B$, B 博雷尔集均成立，我们推得 $\mu \ge \theta_0 \, \mathcal{H}^{d-1} \lfloor B$（例如参见 [7, 定理 2.56]）；取 $B = \Omega \cap (\overline{S}_u \setminus S_u) \setminus \Sigma$，可得 $\mu(\Omega \cap (\overline{S}_u \setminus S_u) \setminus \Sigma) \ge \theta_0 \, \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap (\overline{S}_u \setminus S_u) \setminus \Sigma)$。因此得到 $\mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap (\overline{S}_u \setminus S_u) \setminus \Sigma) = 0$，进而推出 (4.20)，因为 $\mathcal{H}^{d-1}(\Sigma) = 0$。

□

现在我们可以证明以下关于 (4.3) 中定义的 $\mathcal{F}$ 的极小化子的存在性结果。由于被积函数 f 与 u 无关，显然可通过截断验证 $\mathcal{F}(u)$ 单调不增。因此，为了极小化 $\mathcal{F}$，我们可以将范围限制为满足 $\|u\|_\infty \le M$ 的那些 $u \in SBV(\Omega)$，其中 $M := \|g\|_\infty$。

定理 4.8. 设 f 满足定理 4.7 的假设。则存在一个极小化子 $u \in SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，使其对应于 (4.3) 中定义的 $\mathcal{F}$。此外，$(\overline{S}_u, u)$ 是泛函 $\mathcal{G}$ (4.2) 的一个极小化子。

证明。由于对每个 $x \in \Omega$，$f(x, \cdot)$ 都是凸的，且 $p(\cdot)$ 是超线性的，因此可以通过标准方法，结合 SBV 中的经典闭性和紧性结果（参见 [7, 定理 4.7 和 4.8]），利用 [13] 的下半连续性结果，证明上述极小化子 u 的存在性。利用 u 的极小性，与常值函数 $v = 0$ 比较可得 $u \in W^{1,\, p(\cdot)}(\Omega \setminus \overline{S}_u)$。此外，式 (4.20) 成立。现在，设 (K, v) 是任意一个满足 $\mathcal{G}(K, v) < +\infty$ 的竞争对手。由于这些泛函在截断下单调不增，因此不妨

假设 $v \in L^\infty(\Omega)$，于是（参见 [7, 定理 4.4]） $v \in SBV(\Omega)$，且 $\mathcal{H}^{d-1}(S_v \setminus K) = 0$。再次利用 u 的极小性，我们得到 $\mathcal{G}(\overline{S}_u, u) = \mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(v) \le \mathcal{G}(K, v)$。□

Acknowledgements

作者均为 INdAM 下属数学分析、概率及其应用国家小组（GNAMPA）的成员。G. Scilla 和 F. Solombrino 获得了 STAR PLUS 2020 – Linea 1 (21-UNINA-EPIG-172) 项目“连续介质力学变分建模的新视角”的资助。F. Solombrino 的工作属于 PRIN 2017 项目“针对具有奇点和界面的平稳与演化问题的变分方法”，该项目由意大利教育、大学与研究部资助。

References

[1] E. Acerbi、G. Bouchitt

Ann. Inst. e 和 I.

Henri Poincare (C) Anal. Non Lineaire **20** 2003 359 390
Fonseca，《凸泛函的松弛：间隙现象》。( )，–。[2] E. Acerbi 和 G. Mingione，具有非标准增长的一类拟凸泛函的正则性结果。*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4) 30 (2001)，第 2 期，311–339。[3] E. Acerbi 和 G. Mingione，具有非标准增长的一类泛函的正则性结果。

Arch. ( )，–。[4]

Rational Mech. Anal. **156** 2001 121 140
S. Almi、D. Reggiani 和 F. Solombrino，非标准增长自由不连续泛函的下半连续性与松弛，arXiv:2301.07406 (2023)。[5] L. Ambrosio，一类新型有界变差函数的紧性定理。

Boll. Un. Mat. Ital. ( ) ( )，第 –

B 7 **3** 1989 4, 857 881
期。[6] L. Ambrosio，一类新型变分问题的存在性理论。 *Arch. Rat. Mech.* 111 (1990)，291–322。[7] L. Ambrosio 、N. Fusco 和 D. Pallara， *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*。牛津数学专著丛书，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000。[8] S. Campanato，若干类函数的赫尔德连续性性质。`a di h¨olderianit` a di alcune classi di funzioni。 *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa CL Sci.* (3)，17 (1963)，175–188。[9] M. Carriero 和 A. Leaci，以 L^p 梯度范数为极小值的 S^k值映射及其自由不连续性。
Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze **18**(3) (1991)，321–352。[10] Y. Chen、S. Levine 和 M. Rao，图像复原中的变指数线性增长泛函，

SIAM J. ( ) ( )，–。

Appl. Math. **66** 4 2006 1383 1406
[11] A. Coscia 和 G. Mingione，( )-调和映射梯度的赫尔德连续性，( )，第 – 期。[12] V. De Cicco、C. Leone 和 A. Verde，变增长积分在

SBV *SIAM* 中的下半

J. Math. Anal. **42** 6 2010 3112 3128
连续性。，( ) ( )，–。[13] E. De Giorgi，变分法中的半连续性定理，1968—69 学年在意大利国家高等数学研究所讲授的课程，罗马，1969。[14] E. De Giorgi、M. Carriero 和 A. Leaci，具有自由不连续集的极小化问题的存在性定理。
Arch. Rational Mech. Anal.，108 (1989)，195–218。[15] L. Diening，广义勒贝格空间上的极大函数 $L^{p(\cdot)}$，
Math. Inequal. Appl. **7**(2) (2004)，245–253。[16] L. Diening、P. Harjulehto、P. H¨ast¨o 和 M. Ruzicka，
Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents。数学讲义，Springer (2010)。[17] L. Diening、J. Malek 和 M. Steinhauer，关于索伯列夫函数的利普希茨截断（变指数情形）及其若干应用， *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*，14 (2008)，211–232。[18] L. Diening 和 S. Schwarzacher， $p(\cdot)$-拉普拉斯算子的全局梯度估计。 *Nonlinear Anal.*，106 (2014 70 85)，– M. Eleuteri 和 A. Passarelli di Napoli，变指数变分积分极小化子的利普希茨正则性。
[19]
Nonlinear Analysis: Real World Applications，71 (2023)，103815。[20] L.C. Evans 和 R.F. Gariepy，
Measure Theory and Fine Properties of Functions。高等数学研究丛书，CRC 出版社，博卡拉顿，1992。[21] I. Fonseca、N. Fusco、P. Marcellini，通过正则性证明一个非凸变分问题的存在性结果。
ESAIM: Control Optim. Calc. Var.，7 (2002)，69–95

[22] G.A. Francfort 和 J.J. Marigo，将脆性断裂重新视为能量极小化问题，

J. Mech. ( )，第 – 期。

Phys. Solids **46** 1998 8, 1319 1342
[23] M. Friedrich， $GSBV^p$ 中的一个紧性结果及其在自由不连续问题的 Γ-收敛中的应用。 *Calc. Var.* 58:86 (2019)。
[24] N. Fusco、G. Mingione、C. Trombetti，一类各向异性自由不连续问题的极小化子的正则性。 *J. Convex Anal.* **8** (2001)，349–367。[25] E. Giusti， *Direct Methods in the Calculus of Variations*，世界科学出版公司，里弗埃奇 (2003)。[26] A.A. Griffith，固体中的断裂与流动现象。 *Philos. Trans. R. Soc. London* **221** (1921)，163–198。[27] P. Harjulehto、P. H¨ast¨o、V. Latvala，变指数非一致凸狄利克雷能量的极小化子。 *Journal de Math. Pures et Appl.* **89** (2) (2008)，174–197。[28] P. Harjulehto、P. H¨ast¨o、V. Latvala 和 O. Toivanen，图像复原中的临界变指数泛函。 *Appl. Math. Lett.* **26**(1) (2013)，56–60。[29] P. H

¨ ¨

J. Eur. Math. asto 和 J.

Soc. (JEMS) **24** 2022 1285 1334
Ok，非自治泛函局部极小化子的最大正则性。( )，–。[30] O. Kov´acik 和 J. R´akosn´ık，关于空间 $L^{p(x)}$ 与 W^1， $^{p(x)}$。 *Czechoslovak Math. J.*，41(116) (1991)，592–618。[31] F. Li、Z. Li 和 L. Pi，A 图像复原中的变指数泛函。

Applied Mathematics and Computation **216** 2010 870 882 ，( )，–。

[32] D. Mumford 和 J. Shah，通过分段光滑函数及相关变分问题进行最优逼近。 *Comm. Pure Appl. Math.* **42** (1989)，577–685。[33] G. Scilla、F. Solombrino 和 B. Stroffolini，

Integral representation and Γ-convergence for free-discontinuity problems with p · -growth 2204 09530 2022 ( )，

arXiv: 。( )。[34] I. I. Sharapudinov，在空间 $L^{p(t)}([a,b])$的度量下的函数逼近与求积公式（俄文）。载于 *Constructive function theory '81*(瓦尔纳，1981)，第 189–193 页。保加利亚科学院出版社，索非亚，1983。[35] V.V. Zhikov，变分法中一类泛函的收敛、对偶性与平均化问题。 *Dokl. Akad. Nauk SSSR*，267 (1982)，524–528。[36] V.V. Zhikov，变分法泛函与弹性理论的平均化。

Izv. Akad. Nauk , ( ) –。

SSSR Ser. Mat. **50** 1986 675 710
[37] V.V. Zhikov，关于若干变分问题。 *Russ. J. Math. Phys.* **5** (1997)，105–116。(Chiara Leone)

Department of Mathematics and Applications "R. Caccioppoli", University of Naples Federico II Via Cintia Monte S. Angelo 80126 Naples Italy , , , ,

Email address: chiara.leone@unina.it (Giovanni Scilla)

Department of Mathematics and Applications "R. Caccioppoli", University of Naples Federico II Via Cintia Monte S. Angelo 80126 Naples Italy , , , ,

Email address, Giovanni Scilla: giovanni.scilla@unina.it (Francesco Solombrino)

Department of Mathematics and Applications "R. Caccioppoli", University of Naples Federico II Via Cintia Monte S. Angelo 80126 Naples Italy , , , ,

Email address: francesco.solombrino@unina.it (Anna Verde)

Department of Mathematics and Applications "R. Caccioppoli", University of Naples Federico II Via Cintia Monte S. Angelo 80126 Naples Italy , , , ,

Email address: anna.verde@unina.it