arXiv:2303.01953v1 [math.CO] 3 Mar 2023

关于 Hermitian Veronese曲线及其拟厄米曲面的几何

Michel Lavrauw[1], Stefano Lia[2],和 Francesco Pavese[3]

[1]萨班哲大学工程与自然科学学院，伊斯坦布尔，电子邮箱：michel.lavrauw@sabanciuniv.edu[2]都柏林大学数学与统计学院，都柏林，电子邮箱：stefano.lia@ucd.ie[3]巴里理工大学力学、数学与管理系，巴里，电子邮箱：francesco.pavese@poliba.it

摘要

在（经典）代数簇的射影稳定子作用下，对子空间上的轨道进行完整分类是一项艰巨的任务，而目前仅有少数分类是完整的。本文聚焦于 PGL$(2,q^2)$（以及 PSL$(2,q^2)$）的一种特殊作用，该作用源自 PG$(3,q^2)$ 中的 Hermitian Veronese曲线。它是一条嵌入光滑 Hermitian曲面上的极大有理曲线，具有一些引人入胜的性质。对其轨道的研究带来了一种构造拟厄米曲面的新方法：这类点集与非退化厄米曲面具有相同的组合与几何性质。

关键词：厄米–Veronese 曲线、准 Hermitian 曲面、Veronese 嵌入、二字符集。

1 引言与预备知识

在组合学和有限几何中，对经典群（子群）的各种作用的研究，常常催生出有趣（罕见）几何对象的新构造。这是群与几何相互作用的一个重要特征。一个著名的例子由 Jacques Tits 于 1962年提出：Suzuki 群作用于三维射影空间中的点，由此产生了一种卵形（这一概念由 Beniamino Segre 引入）：它是一个点集，其组合与几何性质与椭圆二次曲面相同（但与之不等价）。此后，这一思想逐渐成熟，而计算机代数系统的出现也极大推动了近年来的发展；许多作者运用所谓的“轨道拼接”来构造新的理想几何结构。这一思想的一个自然实例，是经典代数簇的射影稳定子（子群）的作用。

Mathematics Subject Classification (2010): 主分类号 51E12；次分类号 51E20 51A50

在这类作用下，对子空间轨道进行完整分类是一项艰巨的任务，只有少数分类工作已经完成。

本文聚焦于群 PGL(2, q^2) 和 PSL(2, q^2) 的一个特定作用，该作用源自嵌入在一张光滑厄米曲面上的极大有理曲线，并具有若干引人入胜的性质。研究其在 PG(3, q^2) 的射影子空间上的轨道，通过轨道拼接，得到了准厄米曲面的一种新构造：这类点集具有与非退化厄米曲面相同的组合与几何性质。这是一个更一般对象的三维版本，该对象称为 PG(r, q^2) 的准厄米簇，其中 PG(r, q^2) 是有限域 $\mathbb{F}_{q^2}$ 上的 r 维射影空间。PG(r, q^2) 的准厄米簇是一个点集 $\mathcal{S}$，它与超平面的交数和 PG(r, q^2) 的非退化 Hermitian簇相同。对于 $r \geq 3$，这意味着 $\mathcal{S}$ 的大小与 PG(r, q^2) 的非退化 Hermitian 簇相同，见 [33]。这一概念由 De Winter 和 Schillewaert 在[20] 提出，推广了 De Clerck、Hamilton、O'Keefe 和 Penttila 在 [19] 中研究的二次曲面的类似概念。由于准厄米簇与 PG(r, q^2) 的超平面有两个交数，因此它们可导出强正则图和二重量码，见[7]。具体而言，将 PG(r, q^2) 嵌入 PG($r+1, q^2$) 的一个超平面 Π，并将 PG($r+1, q^2$) 的点 $\setminus \Pi$ 作为顶点；若两个顶点张成的直线与$\mathcal{H}$相交，则称它们邻接，由此得到一个强正则图，记为 $\Gamma(\mathcal{H})$。此外，根据 [8, 定理 3.5]，，给定两个准厄米簇 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$，图 $\Gamma(\mathcal{H})$ 与 $\Gamma(\mathcal{H}')$ 同构，当且仅当存在 PG($r+1, q^2$) 的一个共线变换固定 Π 并将 $\mathcal{H}$ 映射到 $\mathcal{H}'$。

我们研究的主要对象是集合

$$\mathcal{O} = \{(s^{q+1}, s^q t, s t^q, t^{q+1}) : (s,t) \in \mathrm{PG}(1, q^2)\} \subseteq \mathrm{PG}(3, q^2).$$

这个集合与许多经典对象和分类问题有关。在经典几何中，以 Corrado Segre 命名的 Segre簇是映射的像

$$(v_1, \ldots, v_l) \in \mathrm{PG}(n_1 - 1, \mathbb{K}) \times \cdots \times \mathrm{PG}(n_l - 1, \mathbb{K}) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_l \in \mathrm{PG}(N, \mathbb{K})$$

该映射称为 Segre 嵌入。这里 $N = n_1 \cdots n_l - 1$，且 $\mathbb{K}$ 是任意域。群 GL(V_1) $\times \cdots \times$ GL(V_n) 作用于空间 PG($N, \mathbb{K}$)，并保持 Segre 簇不变。对其轨道的研究是一个重要的热点问题，涉及张量、张量的分解及其秩。关于这一主题的大量文献主要研究实数域或代数闭域上的情形。关于有限域的研究则少得多，参见例如 [27], [28]。

本文所考虑的集合 $\mathcal{O}$ 可以看作"扭曲三次曲线的扭曲版本"，这是所谓的 ($d, \boldsymbol{\sigma}$)-Veronese 簇的一个特例，具体如下。与自同构向量 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{d-1}) \in Aut(\mathbb{F}_{q^t}/\mathbb{F}_q)^d$相关联的 ($d, \boldsymbol{\sigma}$)-Veronese 簇 $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\sigma},\ d}$ 是映射的像

$$\nu_{\boldsymbol{\sigma},d} : \mathrm{PG}(n-1, q^t) \longmapsto \mathrm{PG}(n^d - 1, q^t)$$

其中

$$\nu_{\boldsymbol{\sigma},d}(v) = v^{\sigma_0} \otimes v^{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes v^{\sigma_{d-1}}.$$

这一簇最早在 [21] 中被引入。

若 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1} = (id, \ldots, id)$，则 $\mathcal{V}_{\mathbf{1},\,d}$ 是 PG(n, q^t) 中次数为 d 的著名 Veronese 簇。特别地，$\mathcal{V}_{\mathbf{1},\,d} \subset$ PG(N, q^t)，其中 $N = \binom{n+d-1}{d} - 1$。显然，它可以看作 Segre 簇的"对角线"，即 Segre 嵌入的对称版本的像。射影直线上的次数为 d 的 Veronese 簇 $\mathcal{V}_{\mathbf{1},\,d}$ 是有理正规曲线，它们与有限几何中的许多深层问题有关，尤其是 MDS猜想。关于这些联系以及 MDS猜想的最新进展，请参阅 [4] 。特别地，曲线 $\mathcal{V}_{\mathbf{1},\,2}$ 是射影平面中的一条圆锥曲线，而 $\mathcal{V}_{\mathbf{1},\,3}$ 是 PG$(3, q^t)$ 中的扭曲三次曲线。$\mathcal{V}_{\mathbf{1},\,3}$ 的稳定子在 PG$(3, q^t)$ 的点和平面上的轨道很容易得到，例如可参见 [6, 23], ；但其在直线上的轨道分类则要困难得多。近期已有多项研究探讨了这一问题，
[5, 9, 16, 17, 18, 22], 并提出了各种有趣的方法。

当 $\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (1, \sigma, \ldots, \sigma^{t-1})$，其中 σ 是 $Aut(\mathbb{F}_{q^t}/\mathbb{F}_q)$ 的一个生成元时，那么 $\mathcal{V}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}},t}$ 真包含于 PG$(n^t - 1, q)$ 中，且它是 PG$(nt-1, q)$ [29] 中一个 Desarguesian $(t-1)$-扩张的 Grassmann嵌入的像。另见 [32]。设 $H_n(q^2)$ 是 $\mathbb{F}_{q^2}$ 上 Hermitian矩阵的集合。那么 $H_n(q^2)$ 是一个维数为 n^2 的 $\mathbb{F}_q$-向量空间，且群 GL(n, q^2) 通过 $AM(A^q)^t$ 在其上作用。这里 $A \in$ GL(n, q^2)，$M \in H_n(q^2)$，而 A^q 表示将矩阵 A 的所有元素提升至 q 次幂。在 PG$(H_n(q^2))$ 中，特别地有 $\simeq$ PG$(n^2 - 1, q)$，且 PG$(H_n(q^2))$ 中对应于给定秩矩阵的点，在由 GL(n, q^2) 诱导的、同构于 PGL(n, q^2) 的群作用下构成单一轨道。此外，PG$(H_n(q^2))$ 中由 $H_n(q^2)$ 的秩一矩阵所对应的点集称为 PG$(n-1, q^2)$ 的 Hermitian Veronese曲面，且它与 $\mathcal{V}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}},2}$ 同构，见 [10, 15, 24],

本文聚焦于 PG$(1, q^2)$ 的 Hermitian Veronese曲面（或 Hermitian Veronese曲线），即 $\mathcal{O}$。更准确地说，点集 $\mathcal{O}$ 通过下式对应于$H_2(q^2)$ 中的秩一矩阵:

$$\begin{pmatrix} s^{q+1} & s^q t \\ st^q & t^{q+1} \end{pmatrix} \in H_2(q^2) \longmapsto (s^{q+1}, s^q t, st^q, t^{q+1}) \in \mathcal{O}$$

并且它与包含在 PG$(3, q^2)$ 的 Baer 子几何中的椭圆二次曲面 $\mathcal{Q}^-(3, q)$ 射影等价 [24, 第 4 节。3]。

最后，正如前面提到的，Hermitian Veronese曲线 $\mathcal{O}$ 与曲线 $\mathcal{C} = \{(1, t, t^q, t^{q+1}) : t \in \bar{\mathbb{F}}_{q^2}\} \cup \{(0, 0, 0, 1)\}$上的 $\mathbb{F}_{q^2}$- 有理点集重合。曲线 $\mathcal{C}$ 是嵌入在光滑Hermitian曲面 $\mathcal{H}(3, q^2)$ 上的次数为 $q+1$ 的光滑有理曲线，其方程为$X_1^q X_4 + X_1 X_4^q - X_2^{q+1} - X_3^{q+1} = 0$。在射影等价意义下，这是嵌入在 $\mathcal{H}(3, q^2)$上的唯一一条非平面次数为 $q+1$ 的有理曲线，见 [30]。注意，根据自然嵌入定理，$\mathbb{F}_{q^2}$-极大曲线恰好是嵌入在光滑Hermitian簇上的次数为 $q+1$ 的曲线（相差一个双有理同构），见 [26]。近年来，人们利用具有适当自同构群的极大曲线 [25] 构造了厄米曲面中特定子结构的新实例，这些子结构称为半系统。值得注意的是，[14] 中发现的半系统可视为这种构造的一个特例，它是通过使用曲线 $\mathcal{C}$得到的。

本文关注群 PGL 的作用 $(2, q^2)$ 和 PSL $(2, q^2)$ on

PG(3, q^2)的射影子空间。特别是，我们将说明，适当的 PSL(2, q^2)-点轨道拼接可导出一种构造 PG(3, q^2) 的准 Hermitian 曲面的新方法，其中 q 为奇数，见定理 2.29。

本文的组织结构如下。第 2 节致力于构造一族新的准 Hermitian 曲面，并证明我们的主要定理，即定理 2.29。在第 3 节中，我们证明该构造不同构于此前已知的任何准 Hermitian 曲面。最后，在第 4 节中，我们研究群 PGL(2, q^2) 在 PG(3, q^2) 的射影子空间上的轨道，以及一些组合不变量，例如平面的点轨道分布。

2 准 Hermitian 曲面

令 PG(3, q^2) 为配备齐次射影坐标 (X_1, X_2, X_3, X_4) 的三维射影空间。在全文中，q 表示一个奇素数幂，ξ 表示 $\mathbb{F}_{q^2}$ 的一个本原元，$\square_q$ 表示 $\mathbb{F}_q$ 的非零平方元集合。记 s 为 $\mathbb{F}_q$ 中的一个固定非平方元，并记 $\boldsymbol{i}$ 为 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中满足 $\boldsymbol{i}^2 = s$ 的一个元素。于是，$\boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}^q = 0$ 中的每个元素都可以唯一地写成 $X + \boldsymbol{i}Y$ 的形式，其中 X、$Y \in \mathbb{F}_q$。

在本节中，我们确定稳定 Hermitian Veronese 曲线的 PGL(4, q^2) 的子群 $K \cong$ PSL(2, q^2) 在 PG(3, q^2) 的点上的轨道，并给出 PG(3, q^2) 上准厄米曲面的一种新构造，其中 q 为奇数，见定理 2.29。

2.1 $K \simeq$ PSL(2, q^2) $\leq$ PGL(4, q^2) 的点轨道及 PG(3, q^2) 的超曲面 $\mathcal{S}_j$和 $\mathcal{E}_k$

设 $\mathcal{H}$(3, q^2) 为由下式定义的厄米曲面

$$X_1^q X_4 + X_1 X_4^q - X_2^{q+1} - X_3^{q+1} = 0,$$

并设 $\mathcal{Q}^+$(3, q^2) 为由下式定义的双曲二次曲面

$$X_1 X_4 - X_2 X_3 = 0.$$

在 Segre 嵌入下

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathrm{PG}(1, q^2) \times \mathrm{PG}(1, q^2) \mapsto (x_1x_2, x_1y_2, x_2y_1, y_1y_2) \in \mathcal{Q}^+(3, q^2),$$

点对 ((x_1^q, y_1^q),(x_1, y_1)) （其中 $x_1, y_1 \in \mathbb{F}_{q^2}$）映射到 $\mathcal{Q}^+$(3, q^2) 的一个点。令 $x_1, y_1 \in \mathbb{F}_{q^2}$ 取遍，我们得到 $\mathcal{Q}^+$(3, q^2) 的点子集

$$\mathcal{O} = \{(1, t, t^q, t^{q+1}) \mid t \in \mathbb{F}_{q^2}\} \cup \{(0, 0, 0, 1)\}$$

大小为 $q^2 + 1$。设

$$\Sigma = \{(a, b, b^q, c) \mid a, c \in \mathbb{F}_q, b \in \mathbb{F}_{q^2}\} \subset \mathrm{PG}(3, q^2).$$

由于由 $X_1' = X_1^q, X_2' = X_3^q, X_3' = X_2^q, X_4 = X_4^q$ 给出的 PΓL(4, q^2) 的半线性对合 τ 逐点固定 Σ，因此 Σ 是 PG(3, q^2) 的 Baer 子几何。另一方面，存在

一个 PG$(3,q^2)$ 的射影变换，将 $\mathcal{O}$ 映射到 $\{(v,u,u^2-sv^2,1)\mid u,v\in\mathbb{F}_q\}\cup\{(0,0,1,0)\}$。因此，$\mathcal{O}$ 是 Σ 中的椭圆二次曲面 $\mathcal{Q}^-(3,q)$。此外，很容易看出，$\mathcal{H}(3,q^2)\cap\mathcal{Q}^+(3,q^2)=\mathcal{H}(3,q^2)\cap\Sigma=\mathcal{Q}^+(3,q^2)\cap\Sigma=\mathcal{O}$。若 $A,B\in\mathrm{GL}(2,q^2)$，则与$A\otimes B\in\mathrm{GL}(4,q^2)$ 相关联的 PG$(3,q^2)$ 的射影变换稳定 $\mathcal{Q}^+(3,q^2)$，另见 [24, 定理 4.112]。令 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,q^2)$，并考虑由

$$A^q\otimes A=\begin{pmatrix}a^q&b^q\\c^q&d^q\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{q+1}&a^qb&b^qa&b^{q+1}\\a^qc&a^qd&b^qc&b^qd\\c^qa&c^qb&d^qa&d^qb\\c^{q+1}&c^qd&d^qc&d^{q+1}\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(4,q^2).$$

于是 g 稳定 $\mathcal{O}$，而由 $\{A^q\otimes A\mid A\in\mathrm{SL}(2,q^2)\}$ 诱导的射影变换所构成的 PGL$(4,q^2)$ 的子群 K，其阶为 $q^2(q^4-1)/2$，且同构于 PSL$(2,q^2)$。特别地，K 在 $\mathcal{O}$ 的 q^2+1 个点上以自然表示作用。K 在 Σ 的点以及 $\mathcal{H}(3,q^2)$ 的点上的作用广为人知（例如参见 [12, 第 343], [14] 页），并将在下文描述。

引理 2.1. 群 K 在 $\mathcal{O}$ 的点上传递地作用；在 $\Sigma\setminus\mathcal{O}$ 的点上有两个大小相等的轨道 Σ_1、Σ_2，其代表元分别为 $S_1=(1,0,0,1)$ 和 $S_2=(1,0,0,\xi^{q+1})$；在 $\mathcal{H}(3,q^2)$ 的点上有两个轨道 $\mathcal{H}_1$、$\mathcal{H}_2$，其大小分别为 $q^2(q^2+1)(q-1)/2$、$q^2(q^2+1)(q+1)/2$。

令 $\perp$ 为与 $\mathcal{Q}^+(3,q^2)$ 相关联的 PG$(3,q^2)$ 的正交极性。对合 τ 固定 $\mathcal{Q}^+(3,q^2)$、$\mathcal{H}_1$、$\mathcal{H}_2$，并由 [14, p. 5], 给出。

$$\tau\circ\perp=\perp\circ\tau \tag{2.1}$$

是与 $\mathcal{H}(3,q^2)$ 相关联的 PG$(3,q^2)$ 的酉极性，另见 [11, 第 2 节。3]。

接下来，我们研究群 K 在 PG$(3,q^2)\setminus(\mathcal{H}(3,q^2)\cup\Sigma)$ 的点上的作用。拟厄米曲面（定理 2.29）的构造基于如下观察：如引理 2.2 所述，群 K 实际上固定了一族曲面。恰当地选取这一族中的元素，可得到一组非常特殊的几何性质，本文其余部分将对此加以说明，并由此将这族中的两个成员取并，构造出拟厄米曲面。接下来，我们汇总一些关于群 K 作用的有用结果。

引理 2.2. 群 K 稳定 $\mathcal{H}(3,q^2)$、$\mathcal{Q}^+(3,q^2)$ 以及由以下方程给出的超曲面 y

$$F_\gamma(X_1,X_2,X_3,X_4)=X_1^qX_4+X_1X_4^q-X_2^{q+1}-X_3^{q+1}-\gamma(X_1X_4-X_2X_3)^{\frac{q+1}{2}}=0,\qquad\gamma\in\mathbb{F}_{q^2}.$$

证明。设

$$H=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\text{ and }S=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

为定义 $\mathcal{H}(3,q^2)$ 和 $\mathcal{Q}^+(3,q^2)$ 的厄米矩阵和对称矩阵。若 $A\in \mathrm{SL}(2,q^2)$ 且$M=A^q\otimes A$，则

$$M^tHM^q=\det(A)^{q+1}H,\quad M^tSM=\det(A)^{q+1}S. \tag{2.2}$$

因此， K保持不变的有 $\mathcal{H}(3,q^2)$ 和 $\mathcal{Q}^+(3,q^2)$。令 g为由M诱导的 K的射影变换。若 $P=(x_1,x_2,x_2,x_4)$ 是 $\mathrm{PG}(3,q^2)$ 中满足 $F_\gamma(P)=0$ 的一个点，则

$$PH(P^q)^t-\gamma\left(PSP^t\right)^{\frac{q+1}{2}}=0.$$

因此，由（2.2）可得，

$$PM^tHM^q(P^q)^t-\gamma\left(PM^tSMP^t\right)^{\frac{q+1}{2}}=0.$$

由于 $(\det(A)^{q+1})^{\frac{q+1}{2}}=\det(A)^{q+1}$，且这由 $\det(A)^{q+1}\in\square_q\iff\det(A)\in\square_{q^2}$ 成立可知，因此 $F_\gamma(P^g)=0$。 □

考虑以下超曲面

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_j:\quad & X_1^qX_4+X_1X_4^q-X_2^{q+1}-X_3^{q+1}-\left(\xi^{j\frac{q-1}{2}}+\xi^{-j\frac{q-1}{2}}\right)(X_1X_4-X_2X_3)^{\frac{q+1}{2}}=0,\\ &\qquad\qquad j\in\{1,\dots,q\}\setminus\{(q+1)/2\}.\\ \mathcal{E}_k:\quad & X_1^qX_4+X_1X_4^q-X_2^{q+1}-X_3^{q+1}-\left(\xi^{k\frac{q+1}{2}}+\xi^{-k\frac{q+1}{2}}\right)(X_1X_4-X_2X_3)^{\frac{q+1}{2}}=0,\\ &\qquad\qquad k\in\{0,\dots,q-1\}\setminus\{(q-1)/2\}.\end{aligned}$$

引理2.3、2.4和2.5表明，这些曲面确实是两两不同的曲面，且每个曲面都包含 $\mathcal{O}$，并被划分为两个 K-轨道，即集合 $\mathcal{O}$ 及其补集。

引理 2.3. 设

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_1&=\left\{\xi^{j\frac{q-1}{2}}+\xi^{-j\frac{q-1}{2}}\mid j\in\{1,\dots,q\}\setminus\{(q+1)/2\}\right\},\\ \mathcal{Z}_2&=\left\{\xi^{k\frac{q+1}{2}}+\xi^{-k\frac{q+1}{2}}\mid k\in\{0,\dots,q-1\}\setminus\{(q-1)/2\}\right\}.\end{aligned}$$

则 $|\mathcal{Z}_1\cup\mathcal{Z}_2|=2(q-1)$.

证明. 设 $z,z'\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\{0\}$ 满足 $z+\frac{1}{z}=z'+\frac{1}{z'}$，则要么 $z'=z$，要么 $z'=\frac{1}{z}$。若 $(z,z')=\left(\xi^{j_1\frac{q-1}{2}},\xi^{j_2\frac{q-1}{2}}\right)$，其中某个 $1\le j_1<j_2\le q$，则要么 $\xi^{(j_2-j_1)\frac{q-1}{2}}=1$，要么 $\xi^{(j_1+j_2)\frac{q-1}{2}}=1$，其中$0<j_2\pm j_1<2(q-1)$，矛盾。若 $(z,z')=\left(\xi^{k_1\frac{q+1}{2}},\xi^{k_2\frac{q+1}{2}}\right)$，其中某个 $0\le k_1<k_2\le q-1$，则要么 $\xi^{(k_2-k_1)\frac{q+1}{2}}=1$，要么 $\xi^{(k_1+k_2)\frac{q-1}{2}}=1$，其中 $0<k_2\pm k_1<2(q+1)$，矛盾。若 $(z,z')=\left(\xi^{j\frac{q-1}{2}},\xi^{k\frac{q+1}{2}}\right)$，其中某个 $1\le j\le q$，且 $j\neq(q+1)/2$, $0\le k\le q-1$, $k\neq(q-1)/2$，则要么 $\xi^{j\frac{q-1}{2}-k\frac{q+1}{2}}=1$，要么 $\xi^{j\frac{q-1}{2}+k\frac{q+1}{2}}=1$，其中 $-q(q-1)/2\le j\frac{q-1}{2}-k\frac{q+1}{2}\le q(q-1)/2$, $j\frac{q-1}{2}-k\frac{q+1}{2}\neq0$，且 $0<j\frac{q-1}{2}+k\frac{q+1}{2}<q^2-1$，矛盾。 □

引理 2.4. 设

$$\begin{aligned}&U=(0,1,0,0),T_1=(\xi,1,1,0),T_2=(\xi^{q-1},\xi^{q-1},1,0),\\ &R_j=(\xi^j,0,0,1),j\in\{1,\dots,q\},Q_k=(0,\xi^k,1,0),k\in\{1,\dots,q-2\}.\end{aligned}$$

以下结论成立:

$$|K_U| = (q^2-1)/2, \quad |K_{R_j}| = q+1, \quad |K_{Q_k}| = q-1, \quad |K_{T_1}| = |K_{T_2}| = q.$$

证明。直接计算可得 K_U。

关于 K_{T_1}，容易看出， K_{T_1} 中的一个元素必须固定 (1, 0, 0, 0)，因此可以假设$a = 1$, $d \neq 0$。由矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, q^2)$诱导的射影变换固定 T_1 ，当且仅当在相差一个平方标量倍数的意义下， $c = 0, a = 1, d \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \{0\}$ 和 $b \in \mathbb{F}_{q^2}$。

$$\begin{cases} \xi + b + b^q = \xi d \\ d = d^q \end{cases}$$

若 $d \neq 1$，则 $\xi = (b^q + b)/(d-1)$ 且 $d = d^q$，这是不可能的，因为 $\xi \notin \mathbb{F}_q$。因此$d = 1$ 和 b 必须满足 $b^q + b = 0$。于是 $|K_{T_1}| = q$。

现在考虑 K_{T_2}。与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, q^2) \backslash \mathrm{SL}(2, q^2)$相关联的射影变换将 T_1映至 T_2。因此， K_{T_2}和 K_{T_1}在 $\mathrm{PGL}(2, q^2)$ 中共轭，且 $|K_{T_1}| = |K_{T_2}|$。

K_{R_j} 的大小由 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中下列方程组的解在相差一个标量倍数意义下的数量给出。

$$\begin{cases} \xi^j a^{q+1} + b^{q+1} = \xi^j (\xi^j c^{q+1} + d^{q+1}) \\ \xi^j a^q c + d b^q = 0 \\ \xi^j a c^q + b d^q = 0; \end{cases}$$

在条件 $ad - bc \in \square_{q^2}$下。首先注意到 $a \neq 0$，否则将导致矛盾$d = 0$ 和 $\xi^{2j} = (b/c)^{q+1}$。因此，我们可以假设 $a = 1$，并令方程组为

$$\begin{cases} \xi^j + b^{q+1} = \xi^j (\xi^j c^{q+1} + d^{q+1}) \\ \xi^j c + d b^q = 0 \\ \xi^j c^q + b d^q = 0; \end{cases}$$

若 $c \neq 0$，则 $\xi^j = \frac{-db^q}{c} = \frac{-bd^q}{c^q}$，即 $\xi^{jq} = \xi^j$，这是不可能的。因此， $c = 0$、 $b = 0$和 $d^{q+1} = 1$ 成立。这给出了 $q+1$ 个可行解。

类似地， K_{Q_k} 的大小由 $\mathbb{F}_{q^2}$中方程组的解在相差一个标量倍数意义下的数量给出

$$\begin{cases} \xi^k a^q d + b^q c = \xi^k (\xi^k b c^q + a d^q) \\ \xi^k a^q b + a b^q = 0 \\ \xi^k c^q d + c d^q = 0; \end{cases}$$

在条件 $ad - bc \in \square_{q^2}$下。计算表明，我们可以假设 $a = 1$，且$b = c = 0$、 $\xi^k d = \xi^k d^q$。因此 $|K_{Q_k}| = q - 1$。 □

曲面 $\mathcal{S}_j$ 和 $\mathcal{E}_k$ 的主要几何性质汇总于以下引理中。

引理 2.5。以下结论成立：

i) 若 $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, q\} \setminus \{(q+1)/2\}$, $j_1 \neq j_2$, 且 $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, q-1\} \setminus \{(q-1)/2\}$, $k_1 \neq k_2$, 则 $\mathcal{S}_{j_1} \cap \mathcal{S}_{j_2} = \mathcal{E}_{k_1} \cap \mathcal{E}_{k_2} = \mathcal{S}_{j_1} \cap \mathcal{E}_{k_1} = \mathcal{O}$。

ii) $|\mathcal{S}_j| = \frac{q^2(q^2+1)(q-1)}{2} + q^2 + 1$, $j \in \{1, \ldots, q\} \setminus \{(q+1)/2\}$。 iii) $|\mathcal{E}_k| = \frac{q^2(q^2+1)(q+1)}{2} + q^2 + 1$, $k \in \{1, \ldots, q-2\} \setminus \{(q-1)/2\}$。 iv) $|\mathcal{E}_0| = |\mathcal{E}_{q-1}| = \frac{q^3(q^2+1)}{2} + q^2 + 1$。

证明。令 $\gamma \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \{0\}$，并令 $\mathcal{C}_\gamma$ 由 $F_\gamma(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0$ 给出。若 P 是 $\mathcal{C}_\gamma \cap \mathcal{C}_{\gamma'}$ 中的一个点，则

$$0 = \gamma' F_\gamma(P) - \gamma F_{\gamma'}(P) = (\gamma' - \gamma)(PH(P^q)^t),$$
$$0 = F_\gamma(P) - F_{\gamma'}(P) = (\gamma' - \gamma)(PSP^t)^{\frac{q+1}{2}}.$$

因此，要么 $\gamma = \gamma'$ 和 $\mathcal{C}_\gamma = \mathcal{C}_{\gamma'}$，要么 $\gamma \neq \gamma'$ 和 $\mathcal{C}_\gamma \cap \mathcal{C}_{\gamma'} = \mathcal{H}(3, q^2) \cap \mathcal{Q}^+(3, q^2) = \mathcal{O}$。引理 2.3说明了 i)。

由于

$$\frac{\xi^j + \xi^{jq}}{\xi^{\frac{j(q+1)}{2}}} = \xi^{j\frac{q-1}{2}} + \frac{1}{\xi^{j\frac{q-1}{2}}},$$

点 $R_j = (\xi^j, 0, 0, 1)$ 属于 $\mathcal{S}_j$和 $|K_{R_j}| = q+1$, $j \in \{1, \ldots, q\} \setminus \{(q+1)/2\}$; 如果 $k \in \{1, \ldots, q-2\} \setminus \{(q-1)/2\}$，则点 $Q_k = (0, \xi^k, 1, 0)$ 根据$q \equiv 1$或 -1（模 4），分别属于 $\mathcal{E}_k$或 $\mathcal{E}_{q-1-k}$，并且 $|K_{Q_k}| = q-1$。类似地， $T_1 = (\xi, 1, 1, 0)$ 在 $q \equiv 1$或 -1（模 4）时属于 $\mathcal{E}_0$或 $\mathcal{E}_{q-1}$，而 $T_2 = (\xi^{q-1}, \xi^{q-1}, 1, 0)$ 在 $q \equiv 1$或-1 （模 4）时分别属于 $\mathcal{E}_{q-1}$或 $\mathcal{E}_0$，其中 $|K_{T_1}| = |K_{T_2}| = q$。此外，由于 $S_1 \in \mathcal{E}_0$ 和 $S_2 \in \mathcal{E}_{q-1}$，可知 $\Sigma_1 \subset \mathcal{E}_0$和 $\Sigma_2 \subset \mathcal{E}_{q-1}$。由于 $R_j, Q_k, T_1, T_2 \notin \mathcal{O}$，根据轨道-稳定子定理，可得

$$|\mathcal{S}_j| \geq \frac{q^2(q^2+1)(q-1)}{2} + q^2 + 1,$$
$$|\mathcal{E}_k| \geq \frac{q^2(q^2+1)(q+1)}{2} + q^2 + 1,$$
$$|\mathcal{E}_0| = |\mathcal{E}_{q-1}| \geq \frac{q(q^4-1)}{2} + \frac{q(q^2+1)}{2} + q^2 + 1.$$

另一方面，由 i）可得，

$$\sum_{\substack{j=1,\\ j \neq \frac{q+1}{2}}}^{q} |\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}| + \sum_{\substack{k=0,\\ k \neq \frac{q-1}{2}}}^{q-1} |\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O}| \geq q^2(q^2+1)(q^2-q-1) = |\mathrm{PG}(3, q^2) \setminus (\mathcal{H}(3, q^2) \cup \mathcal{Q}^+(3, q^2))|.$$

上述结论随即成立。 □

因此，我们可以陈述以下结果。

命题 2.6。群 K 在 PG$(3, q^2)$ 的点集上有 $2q+4$ 个轨道：

i) $\mathcal{O}$;

ii) Σ_1 代表元为点 S_1;

iii) Σ_2 代表元为点 S_2;

iv) $\mathcal{Q}^+(3,q^2) \setminus \mathcal{O}$ 的代表元为点 U;

v) $\mathcal{H}(3,q^2) \setminus \mathcal{O}$上的两个轨道 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$，其代表元分别为 $R_{\frac{q+1}{2}}, Q_{\frac{q-1}{2}}$，大小分别为$q^2(q^2+1)(q-1)/2$, $q^2(q^2+1)(q+1)/2$;

vi) $\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}$，代表元为点 R_j, $j \in \{1,\dots,q\} \setminus \{(q+1)/2\}$;

vii) 若 $q \equiv 1$ (模 4) 则为 $\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O}$，若 $q \equiv -1$ (模 4) 则为 $\mathcal{E}_{q-1-k}$，代表元为点 Q_k, $k \in \{1,\dots,q-2\} \setminus \{(q-1)/2\}$;

viii) $\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma$，其代表元为点 T_1（当 $q \equiv 1$（模 4）时），或为 T_2（当 $q \equiv -1$（模 4）时）；

ix) $\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma$，其代表元为点 T_1（当 $q \equiv -1$（模 4）时），或为 T_2（当 $q \equiv 1$（模 4）时）。

根据命题 2.6 和引理 2.5，集合

$$\left\{U^\perp, R_1^\perp, \dots, R_q^\perp, Q_0^\perp, \dots, Q_{q-1}^\perp, T_1^\perp, T_2^\perp\right\}$$

构成 PG(3, q^2) 中与 Σ 一条 Baer 子直线共有的平面上的 K-轨道代表元集合。

2.2 $\mathcal{S}_j$ 与 $\mathcal{E}_k$ 同 PG(3, q^2) 中直线的交

在本小节中，我们证明关于超曲面 $\mathcal{S}_j$、$j \in \{1,\dots,q\} \setminus \{(q+1)/2\}$ 以及 $\mathcal{E}_k$、$k \in \{0,\dots,q-1\} \setminus \{(q-1)/2\}$ 与 PG(3, q^2) 中直线的交的一些结果。在此以及下文中，我们将多次使用以下事实：PG(3, q^2) 中的每个点 $\setminus \Sigma$ 都位于 Σ 的唯一一条扩展子直线上。我们还将提及 K 作用于 Σ 的扩展子直线的一些性质，这些性质可通过直接计算得到（另见 [12, 第 343] 页）。

引理 2.7. 以下结论成立。

i) 群 K 将 Σ 的扩展子直线分别置于唯一轨道中，其中这些扩展子直线要么与 $\mathcal{O}$ 相交，要么与其外部；而对于与 $\mathcal{O}$ 相切的 Σ 的扩展子直线，该群有两个轨道 $\mathcal{T}_1$、$\mathcal{T}_2$，每个轨道的大小均为 $(q+1)(q^2+1)/2$。

ii) $\mathcal{T}_i$ 的一条直线有一个 $\mathcal{O}$ 上的点和 Σ_i 上的 q 个点；一条割线扩展子直线有两个 $\mathcal{O}$ 上的点，以及 $(q-1)/2$ 个同时属于 Σ_1 和 Σ_2 的点；而一条外部扩展子直线有 $(q+1)/2$ 个同时属于 Σ_1 和 Σ_2 的点。

iii) 若 $\ell \in \mathcal{T}_1$，则当 $q \equiv -1 \equiv 0$（模 4）时，$\ell^\perp$ 属于 $\mathcal{T}_1$；当 $q \equiv 1 \equiv 0$（模 4）时，$\ell^\perp$ 属于 $\mathcal{T}_2$。

iv) 集合 $\mathcal{E}_0$ 和 $\mathcal{E}_{q-1}$ 分别由 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 上且不在 $\Sigma \setminus \mathcal{O}$ 上的直线上的点组成。

引理 2.8. 以下结论成立。

i) 若 Σ 的扩展子直线与 $\mathcal{H}_1$ 或 $\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}$ 相交，则它与 $\mathcal{O}$ 相割，并与 $\mathcal{H}_1$ 或 $\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}$ 有 $q-1$ 个公共点，$j \in \{1,\dots,q\} \setminus \{(q+1)/2\}$。

ii) 若 Σ 的扩展子直线与 $\mathcal{H}_2$ 或 $\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O}$ 相交，则它位于 $\mathcal{O}$ 的外部，并与 $\mathcal{H}_2$ 或 $\mathcal{E}_k$ 有 $q+1$ 个公共点，$k \in \{1,\dots,q-2\} \setminus \{(q-1)/2\}$。

证明。考虑直线 ℓ_1： $X_2 = X_3 = 0$ 和 ℓ_2： $X_1 = X_4 = 0$。根据引理 2.7，只需注意到 $\ell_1 \cap \mathcal{H}_1$ 或 $\ell_1 \cap \mathcal{S}_j$ 由以下部分构成

$$\left\{\left(d^{2(q+1)}\xi^j, 0, 0, 1\right) \mid d \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \{0\}\right\} \cup \left\{\left(d^{2(q+1)}\xi^{-j}, 0, 0, 1\right) \mid d \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \{0\}\right\}$$

并且 $\ell_2 \cap \mathcal{H}_2$ 或 $\ell_2 \cap \mathcal{E}_k$ 由以下部分构成

$$\left\{\left(0, d^{2(q-1)}\delta^k, 1, 0\right) \mid d \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \{0\}\right\} \cup \left\{\left(0, d^{2(q-1)}\delta^{-k}, 1, 0\right) \mid d \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \{0\}\right\},$$

其中，若 $q \equiv 1$ （模 4），则 δ 等于 ξ^k；若 $q \equiv -1$ （模 4），则为 ξ^{q-1+k}。 □

引理 2.9. 以下结论成立。

i) PG(3, q^2) 中一条与 $\mathcal{Q}^+(3, q^2)$ 相交且恰与 $\mathcal{O}$ 有一个公共点的直线，与 $\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}$, $j \in \{1,\dots,q\} \setminus \{(q+1)/2\}$ 有 $(q-1)/2$ 个公共点。

ii) PG(3, q^2) 中一条与 $\mathcal{Q}^+(3, q^2)$ 相切且恰与 $\mathcal{O}$ 有一个公共点的直线，与 $\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}$, $j \in \{1,\dots,q\} \setminus \{(q+1)/2\}$ 没有公共点。

证明. 群 K 在 PG(3, q^2) 中与 $\mathcal{Q}^+(3, q^2)$ 相交且与 $\mathcal{O}$ 有一个公共点的 $q^2(q^4-1)$ 条直线上传递地作用。事实上，直线 ℓ： $X_2 = X_1 - X_3 = 0$（由 (1, 0, 1, 0) 和 (0, 0, 0, 1) 张成）的稳定子是平凡的。另一方面，点 (1, 0, 1, y) 属于 $\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}$ 当且仅当

$$\begin{aligned} y &= \xi^j x^2, \\ (\xi^j x - \xi^{jq} x^q)(x - x^q) &= 1. \end{aligned}$$

若 $\xi^j = \xi_0^j + \boldsymbol{i}\xi_1^j$ 且 $x = x_0 + \boldsymbol{i}x_1$，则后一个方程变为 $4sx_1(x_0\xi_1^j + x_1\xi_0^j) = 1$，其解为 $q-1$ 对 $(x_0, x_1) \in \mathbb{F}_q$。最后注意，$(x_0, x_1)$ 和 $(-x_0, -x_1)$ 是产生相同 y 的解。这证明了 i)。

为证明 ii)，设 ℓ 是 PG(3, q^2) 中的一条直线，它在 P 处与 $\mathcal{Q}^+(3, q^2)$ 相切，其中 $P \in \mathcal{O}$。于是 $\ell \subset P^\perp$，其中 $|P^\perp \cap \Sigma| = q^2 + q + 1$。由引理 2.8 $|P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = 0$。 □

在 [14], 中，作者证明了以下结果。

引理 2.10. 设 $\mathcal{L}$ 为与 $\mathcal{O}$ 相交于一点的 $\mathcal{H}(3, q^2)$ 中的 $(q+1)(q^2+1)$ 条直线。以下结论成立。

i) $\mathcal{H}(3, q^2)$的一条直线与 $\mathcal{H}_1$至多有（q^2+1）/2 个公共点。

ii) 一条直线　$\mathcal{H}(3,q^2)$中不属于 $\mathcal{L}$ 的点与 $\mathcal{H}$至多有（q^2+1）/2 个公共点　　2.

iii) $\mathcal{L}$ 的直线包含于 $\mathcal{H}_2 \cup \mathcal{O}$中。每个 $\mathcal{H}_2$ 点上都经过 $\mathcal{L}$ 的两条直线，而每个 $\mathcal{O}$ 点上都经过 $\mathcal{L}$的 $q+1$ 条直线。此外，若 $\ell \in \mathcal{L}$，则$|\ell \cap \Sigma| = 1$。

引理 2.11. 若 $k \in \{1,\dots,q-2\} \setminus \{(q-1)/2\}$，则存在一个由 PG$(3,q^2)$ 中的 $(q+1)(q^2+1)$ 条直线构成的集合 $\mathcal{L}_k$，且这些直线包含于 $\mathcal{E}_k$ 中，使得每个 $\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O}$ 点上都经过 $\mathcal{L}_k$的两条直线，而每个 $\mathcal{O}$ 点上都经过 $\mathcal{L}_k$的 $q+1$ 条直线。此外，若 $\ell \in \mathcal{L}_k$，则 $|\ell \cap \Sigma| = 1$。

证明. 若 $P \in \mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O}$，则由引理 2.8 ii)，存在 Σ 的一个扩展子直线 ℓ_2，使得$|\ell_2 \cap \mathcal{O}| = 0$ 且 $P \in \ell_2$。因此 $|\ell_2^{\perp} \cap \mathcal{O}| = 2$。我们断言，将 P与 $\ell_2^{\perp} \cap \mathcal{O}$ 这两点连接所得的两条直线包含于 $\mathcal{E}_k$中。若 $q \equiv 1$（模 4），令 $P = Q_k$。则 $Q_k \in \mathcal{E}_k$，并且容易看出，将 Q_k 与 $\mathcal{O}$ 中的两点 (1, 0, 0, 0) 和 (0, 0, 0, 1) 连接所得的两条直线均包含于 $\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O}$ 中，且与 Σ 恰好交于 $\mathcal{O}$中的一点。特别地，这两条直线各自含有 $\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O}$的 q^2 个点。$q \equiv -1$（模 4）的情形类似。记 $\mathcal{L}_k$为以此方式得到的直线集合。通过对旗标 (P_1,ℓ)，$P_1 \in \mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O}$, $\ell \in \mathcal{L}_k$,$P_1 \in \ell$进行双重计数，可得 $|\mathcal{L}_k| = (q+1)(q^2+1)$。最后，通过对旗标 (P_2,ℓ)，$P_2 \in \mathcal{O}$,$\ell \in \mathcal{L}_k$, $P_2 \in \ell$进行双重计数，我们得到每个 $\mathcal{O}$ 点上都经过 $\mathcal{L}_k$的 $q+1$ 条直线。

□

引理 2.12. 如果 $\ell \in \mathcal{L}_k$，那么 $\ell \subseteq P^{\perp} \iff P \in \mathcal{E}_{q-1-k}$。此外，如果 $P \in \mathcal{E}_{q-1-k}$，那么 $P^{\perp}$恰好包含 $\mathcal{L}_k$中的两条直线。

证明. 设 $P = (0, (-1)^{(q+1)/2}\xi^k, 1, 0) \in \mathcal{E}_{q-1-k}$ 以及 $P' = (0, -(-1)^{(q+1)/2}\xi^k, 1, 0) \in \mathcal{E}_k$。不妨设 $\ell \in \mathcal{L}_k$ 是连接 (1, 0, 0, 0) 与 P' 的直线。对于该陈述的第一部分，只需注意到 $\ell^{\perp} = \langle P$、(0, 0, 0, 1)$\rangle \subset \mathcal{E}_{q-1-k}$即可。为完成证明，直接计算可得，$\langle P'$、(1, 0, 0, 0)$\rangle$ 以及 $\langle P'$、(0, 0, 0, 1)$\rangle$ 是包含于平面$P^{\perp}$中的 $\mathcal{L}_k$ 的直线。

□

引理 2.13. 设 ℓ 是 PG$(3,q^2)$ 中的一条直线。以下结论成立。

i) $|\ell \cap \mathcal{S}_j| \le 2q+2$, $j \in \{1,\dots,q\} \setminus \{(q+1)/2\}$,

ii) 若 $\ell \notin \mathcal{L}_k$，则 $|\ell \cap \mathcal{E}_k| \le 2q+2$, $k \in \{1,\dots,q-2\} \setminus \{(q-1)/2\}$,

证明. 设 ℓ是 PG$(3,q^2)$ 中的一条直线，且满足 $|\ell \cap \mathcal{S}_j| \ge 4$。由于 $\mathcal{O}$中任意三点不共线，直线 ℓ 与 $\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}$至少有两个公共点。根据命题 2.6，不妨设点 R_j 和 $R_j^{A^q \otimes A}$位于 $\ell \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})$ 中。ℓ 点

$$R_j^{A^q \otimes A} + \lambda R_j = \left(\xi^j a^{q+1} + b^{q+1}, \xi^j a^q c + b^q d, \xi^j a c^q + b d^q, \xi^j c^{q+1} + d^{q+1}\right), \quad \lambda \in \mathbb{F}_{q^2},$$

当且仅当属于 $\mathcal{S}_j$

$$F(\lambda) - (\xi^{jq} + \xi^j) G(\lambda)^{\frac{q+1}{2}} = 0, \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}F(\lambda) =&\lambda^{q+1}(\xi^j+\xi^{jq})+\lambda^q(\xi^{j(q+1)}c^{q+1}+\xi^{jq}d^{q+1}+\xi^j a^{q+1}+b^{q+1})\\&+\lambda(\xi^{j(q+1)}c^{q+1}+\xi^{jq}a^{q+1}+\xi^j d^{q+1}+b^{q+1})+(ad-bc)^{q+1}(\xi^j+\xi^{jq}),\\G(\lambda) =&\lambda^2+\lambda(\xi^j c^{q+1}+a^{q+1}+d^{q+1}+\xi^{-j}b^{q+1})+(ad-bc)^{q+1}.\end{aligned}$$

方程（2.3）意味着

$$F(\lambda)^2-(\xi^{jq}+\xi^j)^2G(\lambda)^{q+1}=\lambda^{2q+1}C_{2q+1}+\lambda^{2q}C_{2q}+\ldots=0, \tag{2.4}$$

with

$$\begin{aligned}C_{2q+1} =&(\xi^{jq}-\xi^j)(\xi^j c^{q+1}-a^{q+1}+d^{q+1}-\xi^{-j}b^{q+1}),\\C_{2q} =&(\xi^{j(q+1)}c^{q+1}+\xi^{jq}d^{q+1}+\xi^j a^{q+1}+b^{q+1})^2+(\xi^{jq}+\xi^j)^2(ad-bc)^{q+1}.\end{aligned}$$

由于 $\xi^j\neq\xi^{jq}$，若 $\xi^j c^{q+1}+d^{q+1}\neq a^{q+1}+\xi^{-j}b^{q+1}$，则 $C_{2q+1}\neq 0$，且方程（2.4）至多有 $2q+1$ 个解。因此 $|\ell\cap\mathcal{S}_j|\leq 2q+2$。若 $\xi^j c^{q+1}+d^{q+1}=a^{q+1}+\xi^{-j}b^{q+1}$，则 $C_{2q+1}=0$，且

$$C_{2q}=(\xi^{jq}+\xi^j)^2\left((a^{q+1}+\xi^{-j}b^{q+1})^2-(ad-bc)^{q+1}\right). \tag{2.5}$$

假设 $C_{2q}=0$。由于 $\xi^j\neq-\xi^{jq}$ 且 $ad-bc\in\square_{q^2}$，由方程（2.5）可推得 $(a^{q+1}+\xi^{-j}b^{q+1})^2\in\square_q$，即 $a^{q+1}+\xi^{-j}b^{q+1}\in\mathbb{F}_q\iff b=0$。特别地，$a^{q+1}=d^{q+1}$ 且 $c=0$。因此 $R_j^{A^q\otimes A}=R_j$。

设 ℓ 是 PG$(3,q^2)$ 中的一条直线，$q\equiv 1$（模 4），使得 $|\ell\cap\mathcal{E}_k|\geq 4$。与前面一样，根据命题 2.6，我们可以假设点 Q_k 和 $Q_k^{A^q\otimes A}$ 位于 $\ell\cap(\mathcal{E}_k\setminus\mathcal{O})$ 中。在这种情况下，由下式给出的 ℓ 中的点

$$Q_k^{A^q\otimes A}+\lambda Q_k=\left(\xi^k a^q b+b^q a,\xi^k a^q d+b^q c+\xi^k\lambda,\xi^k bc^q+ad^q+\lambda,\xi^k c^q d+d^q c\right),\quad \lambda\in\mathbb{F}_{q^2},$$

当且仅当属于 $\mathcal{E}_k$

$$F'(\lambda)-(\xi^{k(q+1)}+1)G'(\lambda)^{\frac{q+1}{2}}=0, \tag{2.6}$$

其中

$$\begin{aligned}F'(\lambda) =&-\lambda^{q+1}(\xi^{k(q+1)}+1)-\lambda^q(\xi^{k(q+1)}a^q d+\xi^{kq}b^q c+\xi^k bc^q+ad^q)\\&-\lambda(\xi^{k(q+1)}ad^q+\xi^{kq}b^q c+\xi^k bc^q+a^q d)-(ad-bc)^{q+1}(\xi^{k(q+1)}+1),\\G'(\lambda) =&-\lambda^2-\lambda(\xi^k bc^q+ad^q+a^q d+\xi^{-k}b^q c)-(ad-bc)^{q+1}.\end{aligned}$$

方程（2.6）推出

$$F'(\lambda)^2-(\xi^{k(q+1)}+1)^2G'(\lambda)^{q+1}=\lambda^{2q+1}C'_{2q+1}+\lambda^{2q}C'_{2q}+\ldots=0, \tag{2.7}$$

with

$$\begin{aligned}C'_{2q+1} =&(\xi^{k(q+1)}-1)(a^q d+\xi^{-k}b^q c-ad^q-\xi^k bc^q),\\C'_{2q} =&(\xi^{k(q+1)}a^q d+\xi^{kq}b^q c+\xi^k bc^q+ad^q)^2-(\xi^{k(q+1)}+1)^2(ad-bc)^{q+1}.\end{aligned}$$

由于 $\xi^{k(q+1)} \neq 1$，若 $a^q d + \xi^{-k} b^q c \neq a d^q + \xi^k b c^q$，则 $C'_{2q+1} \neq 0$，方程（2.7）至多有 $2q+1$ 个解，因此 $|\ell \cap \mathcal{E}_k| \leq 2q+2$。若 $a^q d + \xi^{-k} b^q c = a d^q + \xi^k b c^q$，则 $C'_{2q+1} = 0$ 且

$$C'_{2q} = (\xi^{k(q+1)} + 1)^2 \left((ad^q + \xi^k bc^q)^2 - (ad - bc)^{q+1} \right). \tag{2.8}$$

假设 $C'_{2q} = 0$。由于 $\xi^{k(q+1)} \neq -1$ 和 $ad - bc \in \square_{q^2}$，由式 (2.8) 可得 $(ad^q + \xi^k bc^q)^2 \in \square_q$，即 $ad^q + \xi^k bc^q \in \mathbb{F}_q \iff ad^q \in \mathbb{F}_q$，且 $b = 0$ 或 $c = 0$。在这些情况下，$F'(\lambda) - (\xi^{k(q+1)} + 1) G'(\lambda)^{\frac{q+1}{2}} \equiv 0$，而 ℓ 是经过 Q_k 的 $\mathcal{L}_k$ 的两条直线之一。情形 $q \equiv -1$ (模 4) 类似。

□

2.3 PG(3, q^2) 中的一些辅助曲面与曲线

本小节汇集了一些关于下文定义的某些代数集 $\mathcal{Y}_j$ 的技术性结果，这些结果是证明定理 2.29 所必需的。

对于固定的 $i \in \{1, 2, \ldots, q\} \setminus \{(q+1)/2\}$，我们要计算 PG(3, q^2) 中满足以下条件的点的数量

$$\xi^j X_1^{q+1} + X_2^{q+1} + \xi^{i+j} X_3^{q+1} + \xi^i X_4^{q+1} = 0, \tag{2.9}$$

$$X_1 X_4 - X_2 X_3 \in \square_{q^2}, \tag{2.10}$$

其中 $j \in \{1, 2, \ldots, q\} \setminus \{(q+1)/2\}$。令 $\mathcal{X}_j$ 表示 PG(3, q^2) 中满足 (2.9) 的点集，并令 $\mathcal{Y}_j$ 表示 $\mathcal{X}_j$ 中满足 (2.10) 的点集。我们要确定 $\mathcal{Y}_j$ 的大小，其中 $j \in \{1, 2, \ldots, q\} \setminus \{(q+1)/2\}$。容易看出，$\mathcal{Q}^+(3, q^2)$ 与 $\mathcal{X}_j$ 没有公共点。

引理 2.14. $|\mathcal{X}_j \cap \mathcal{Q}^+(3, q^2)| = 0$。

证明. 为了证明 $\mathcal{Q}^+(3, q^2)$ 上没有点落在 $\mathcal{X}_j$ 上，考虑点 $(x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2), x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{F}_{q^2}$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0), (y_1, y_2) \neq (0, 0)$，它属于 $\mathcal{Q}^+(3, q^2)$，并注意到它不满足 (2.9)，否则 $(\xi^j y_1^{q+1} + y_2^{q+1})(x_1^{q+1} + \xi^i x_2^{q+1}) = 0$，这就产生了矛盾。 □

$\mathcal{X}_j$ 的一个点满足 $\xi^{jq} X_1^{q+1} + X_2^{q+1} + \xi^{(i+j)q} X_3^{q+1} + \xi^{iq} X_4^{q+1} = 0$，也就是说，它同时位于两个厄米特簇上

$$\begin{aligned} H_1 &: (\xi^j + \xi^{jq}) X_1^{q+1} + 2 X_2^{q+1} + (\xi^{i+j} + \xi^{(i+j)q}) X_3^{q+1} + (\xi^i + \xi^{iq}) X_4^{q+1} = 0, \\ H_2 &: \boldsymbol{i}(\xi^j - \xi^{jq}) X_1^{q+1} + \boldsymbol{i}(\xi^{i+j} - \xi^{(i+j)q}) X_3^{q+1} + \boldsymbol{i}(\xi^i - \xi^{iq}) X_4^{q+1} = 0; \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{i}^q = -\boldsymbol{i}$。事实上，$\mathcal{X}_j$ 是该铅笔的基 locus

$$\mathcal{P} = \{H_1 + tH_2 \mid t \in \mathbb{F}_q\} \cup \{H_2\}.$$

稍微宽泛地说，我们将二次曲面（或 Hermitian 簇）的秩称为定义它的对称矩阵（或 Hermitian 矩阵）的秩。令 $\xi^k = \xi_0^k + \boldsymbol{i}\xi_1^k$，对某个 $\xi_0^k, \xi_1^k \in \mathbb{F}_q$。于是

$$\begin{aligned} &\mathrm{rk}(H_2) = \mathrm{rk}(\mathrm{diag}(\xi_1^j, 0, \xi_0^j \xi_1^i + \xi_0^i \xi_1^j, \xi_1^i)), \\ &\mathrm{rk}(H_1 + t\boldsymbol{i}H_2) = \mathrm{rk}(\mathrm{diag}(\xi_0^j + ts\xi_1^j, 1, \xi_0^i \xi_0^j + s\xi_i^i \xi_1^j + st(\xi_0^j \xi_1^i + \xi_0^i \xi_1^j), \xi_0^i + st\xi_1^i)). \end{aligned}$$

引理 2.15. 若 $j \in \{i, q+1-i\}$，则铅笔 $\mathcal{P}$ 有一个秩二元素、两个秩三成员和 $q-2$ 个秩四成员；而若 $j \in \{1,2,\dots,q\} \setminus \{i,(q+1)/2,$ 则 $q+1-i\}$, $\mathcal{P}$ 有四个秩三成员和 $q-3$ 个秩四成员。

证明。注意到 $\xi_1^j \neq 0$，如果 $j \in \{1,2,\dots,q\} \setminus \{(q+1)/2\}$ 且

$$\xi_0^j\xi_1^i + \xi_0^i\xi_1^j = 0 \iff \xi^{i+j} \in \mathbb{F}_q \iff \xi^j = \xi^{q+1-i}.$$

因此

$$\mathrm{rk}(H_2) = \begin{cases} 2 & \text{if } j = q+1-i, \\ 3 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

另一方面，不存在满足以下条件的 $t \in \mathbb{F}_q$

$$\begin{aligned} &\xi_0^j + st\xi_1^j = 0, \\ &\xi_0^i\xi_0^j + s\xi_i^i\xi_1^j + st(\xi_0^j\xi_1^i + \xi_0^i\xi_1^j) = 0, \end{aligned}$$

否则

$$0 = \xi_0^i\xi_0^j + s\xi_i^i\xi_1^j + st(\xi_0^j\xi_1^i + \xi_0^i\xi_1^j) = -\frac{\xi_1^i}{\xi_1^j}\xi^{j(q+1)},$$

矛盾。此外

$$\xi_0^i + st\xi_1^j = \xi_0^i + st\xi_1^i = 0 \iff \xi^i = \xi^j.$$

因此

$$\mathrm{rk}(H_1 + t\boldsymbol{i}H_2) = 2 \iff i = j \text{ and } t = -\frac{\xi_0^j}{s\xi_1^j}.$$

结论由此得出。 □

设 $X_i = Y_i + \boldsymbol{i}Z_i$，令 PG(7, q) 为配备射影坐标 ($Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, Y_3, Z_3, Y_4, Z_4$) 的七维射影空间。令 ϕ 表示域约化映射，它将由 (x_1, x_2, x_3, x_4) 表示的 PG(3, q^2) 中的点映射到 PG(7, q) 中由点 ($sz_1, y_1, sz_2, y_2, sz_3, y_3, sz_4, y_4$) 和 ($y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, y_4, z_4$) 张成的直线。映射 ϕ 将 $\mathcal{Q}^+(3, q^2)$ 映射到 PG(7, q) 中由以下对象生成的双曲二次曲面的铅笔 $\mathcal{P}_1$ 的基 locus

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}_1 : Y_1Z_4 + Y_4Z_1 - Y_2Z_3 - Y_3Z_2 = 0, \\ &\mathcal{Q}_2 : Y_1Y_4 + sZ_1Z_4 - Y_2Y_3 - sZ_2Z_3 = 0. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}$ 中秩为四、三或二的成员，经 ϕ 映射后，分别成为双曲二次曲面、顶点为一条直线且底面为 $\mathcal{Q}^-(5, q)$ 的锥，或顶点为一个三维子空间且底面为 $\mathcal{Q}^+(3, q)$ 的锥。特别地，$\mathcal{P}$ 中各元素的像构成 PG(7, q) 中由以下对象生成的二次曲面铅笔 $\mathcal{P}_2$

$$\begin{aligned} &H_1^\phi : \xi_0^j(Y_1^2 - sZ_1^2) + Y_2^2 - sZ_2^2 + (\xi_0^i\xi_0^j + s\xi_i^i\xi_1^j)(Y_3^2 - sZ_3^2) + \xi_0^i(Y_4^2 - sZ_4^2) = 0, \\ &H_2^\phi : \xi_1^j(Y_1^2 - sZ_1^2) + (\xi_0^i\xi_1^j + \xi_0^j\xi_1^i)(Y_3^2 - sZ_3^2) + \xi_1^i(Y_4^2 - sZ_4^2) = 0. \end{aligned}$$

令 $\mathcal{N}$ 为包含 $\mathcal{Q}_1$、H_1^ϕ、H_2^ϕ 的 PG(7, q) 中的二次曲面网，并记 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{N}$ 的基 locus。我们断言 $|\mathcal{Y}_j| = 2|\mathcal{B}|$。

引理 2.16. $|\mathcal{Y}_j| = 2|\mathcal{B}|$。

证明。一方面，若 P是 $H_1 \cap H_2$的一个点，则直线 P^ϕ包含于 $H_1^\phi \cap H_2^\phi$中。另一方面，令 P 为不属于 $\mathcal{Q}^+(3, q^2)$ 的一个点，并满足在 P处取值时定义 $\mathcal{Q}^+(3, q^2)$ 的二次型是 $\mathbb{F}_{q^2}$中的一个平方；由于稳定 $\mathcal{Q}^+(3, q^2)$ 的群 $\mathrm{PSO}^+(4, q^2)$ 在这些平方点上传递，且 $\mathrm{PSO}^+(4, q^2)$ 可嵌入保持 $\mathcal{Q}_1$ 不变的 $\mathrm{PGO}^+(8, q)$ 的一个子群中，因此不妨设 P 由 (1, 0, 0, 1) 表示。于是 $P^\phi = \langle$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)、(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$\rangle$，且直线 P^ϕ是 $\mathcal{Q}_1$的割线。

□

引理 2.15 推出如下结论。

引理 2.17. 若 $j \in \{i, q+1-i\}$，铅笔 $\mathcal{P}_2$ 有一个以三维子空间为顶点、以 $\mathcal{Q}^+(3, q)$ 为底面的锥，两个以直线为顶点、以 $\mathcal{Q}^-(5, q)$ 为底面的锥，以及 $q-2$ 个双曲二次曲面；而若 $j \in \{1, 2, \ldots, q\} \setminus \{i, (q+1)/2\}$，则 $q+1-i$, $\mathcal{P}_2$ 有四个以直线为顶点、以 $\mathcal{Q}^-(5, q)$ 为底面的锥，以及 $q-3$ 个双曲二次曲面。

为了确定 $\mathcal{B}$ 的大小，我们研究二次曲面 $\mathcal{Q}_1 + \alpha\mathcal{H}_1^\phi + \beta\mathcal{H}_2^\phi \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{P}_2, \alpha, \beta \in \mathbb{F}_q$ 的秩。我们有 $\mathrm{rk}(\mathcal{Q}_1 + \alpha\mathcal{H}_1^\phi + \beta\mathcal{H}_2^\phi) = \mathrm{rk}(M_{\alpha,\ \beta})$，其中

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -sA & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -sC & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -sD \end{pmatrix},$$

其中 $A = \alpha\xi_0^j + \beta\xi_1^j$, $C = \alpha(\xi_0^i\xi_0^j + s\xi_i^i\xi_1^j) + \beta(\xi_0^j\xi_1^i + \xi_0^i\xi_1^j)$, $D = \alpha\xi_0^i + \beta\xi_1^i$。

引理 2.18. $\mathcal{Q}_1 + \alpha\mathcal{H}_1^\phi + \beta\mathcal{H}_2^\phi$ 要么是双曲二次曲面，要么是以直线为顶点、以 $\mathcal{Q}^-(5, q)$ 为底面的锥。

证明。注意到

$$\det(M_{\alpha,\beta}) = (sAD + 1)^2(s\alpha C + 1)^2$$

因此，若 $\det(M_{\alpha,\beta}) \neq 0$，则 $\mathcal{Q}_1 + \alpha\mathcal{H}_1^\phi + \beta\mathcal{H}_2^\phi$ 是双曲二次曲面，见 [24, 定理 1.2]。$M_{\alpha,\beta}$ 的每个七阶子式都以 $sAd + 1$ 和 $s\alpha C + 1$ 为因子。删除第三行和第五行以及第四列和第六列，或删除第一行和第七行以及第二列和最后一列，由 $M_{\alpha,\beta}$ 得到的两个六阶子式分别为 $-(aAD + 1)^2$ 和 $-(s\alpha C + 1)^2$。如果

$$0 = sAD + 1 = s(\alpha\xi_0^j + \beta\xi_1^j)(\alpha\xi_0^i + \beta\xi_1^i) + 1, \tag{2.11}$$

$$0 = s\alpha C + 1 = s\alpha^2(\xi_0^i\xi_0^j + s\xi_i^i\xi_1^j) + \alpha\beta(\xi_0^j\xi_1^i + \xi_0^i\xi_1^j) + 1, \tag{2.12}$$

那么 $s(s\alpha^2 - \beta^2)\xi_1^i\xi_1^j = 0$，矛盾。因此 $\mathrm{rk}(M_{\alpha,\beta}) \in \{6, 8\}$。为完成证明，假设 $\mathrm{rk}(M_{\alpha,\beta}) = 6$ 且 $s\alpha C + 1 = 0$，那么五维射影空间 $Y_2 =$

$Z_2 = 0$ 不包含顶点，并与 $\mathcal{Q}_1 + \alpha\mathcal{H}_1^\phi + \beta\mathcal{H}_2^\phi$ 相交于由
$AY_1^2 + 2Y_1Z_4 - sDZ_4^2 - sAZ_1^2 + 2Z_1Y_4 + DY_4^2 + \alpha^{-1}Z_3^2 - (s\alpha)^{-1}Y_3^2 = 0$ 给出的 $\mathcal{Q}^-(5,q)$。
类似地，若 $\mathrm{rk}(M_{\alpha,\beta}) = 6$ 且 $sAD + 1 = 0$ □

命题 2.19。以下结论成立。

- 若 $j \in \{1,2,\ldots,q\} \setminus \{i,(q+1)/2, q+1-i\}$，则 $\mathcal{N}$ 有 $2(q+1)$ 个以直线为顶点、以 $\mathcal{Q}^-(5,q)$ 为底面的锥，以及 q^2-q-1 个双曲二次曲面。
- 若 $j = i$ 且 $q \equiv 1$（模 4），或 $j = q+1-i$ 且 $q \equiv -1$（模 4），则 $\mathcal{N}$ 有一个以三维子空间为顶点、以 $\mathcal{Q}^+(3,q)$ 为底面的锥，$3q+1$ 个以直线为顶点、以 $\mathcal{Q}^-(5,q)$ 为底面的锥，以及 q^2-2q-1 个双曲二次曲面。
- 若 $j = i$ 且 $q \equiv -1$（模 4），或 $j = q+1-i$ 且 $q \equiv 1$（模 4），则 $\mathcal{N}$ 有一个以三维子空间为顶点、以 $\mathcal{Q}^+(3,q)$ 为底面的锥，$q+1$ 个以直线为顶点、以 $\mathcal{Q}^-(5,q)$ 为底面的锥，以及 q^2-1 个双曲二次曲面。

证明。由引理 2.18 的证明可知，二次曲面 $\mathcal{Q}_1 + \alpha\mathcal{H}_1^\phi + \beta\mathcal{H}_2^\phi$ 秩为六，当且仅当 $(\alpha,\beta) \in \mathbb{F}_q^2$ 满足方程 (2.11) 或方程 (2.12)。结合这些数对的数量与引理 2.17，即可得到结论。

若 $j \neq i$ 且 $j \neq q+1-i$，则方程 (2.11)、(2.12) 中每一个都有 $q-1$ 个解 $(\alpha,\beta) \in \mathbb{F}_q^2$。

若 $j = i$，则方程 (2.12) 有 $q-1$ 个解，而方程 (2.11) 化为 $sA^2 + 1 = 0$；当 $q \equiv -1$ 或 1（模 4）时，该方程有 $2q$ 个解，否则无解。

若 $j = q+1-i$，则方程 (2.11) 有 $q-1$ 个解，而方程 (2.12) 化为$0 = s\alpha^2($
$\xi_0^i\xi_0^j + s\xi_i^i\xi_1^j) + 1 = s\alpha^2\xi^{q+1} + 1$；当 $q \equiv 1$ 或–1 （模 4）时，该方程有 $2q$ 个解，否则无解。 □

命题 2.20。

$$|\mathcal{Y}_j| = \begin{cases} \frac{(q+1)(q^3+q^2-q+1)}{2}, & \text{if } j = i \text{ and } q \equiv -1 \pmod 4 \text{ or } j = q+1-i \text{ and } q \equiv 1 \pmod 4, \\ \frac{(q^2-1)^2}{2}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。PG(7, q) 中的一个点，若位于 $\mathcal{B}$ 上，则属于 $\mathcal{N}$ 的所有成员；否则只属于 $\mathcal{N}$ 的 $q+1$ 个成员。因此，$|\mathcal{B}|$ 可通过以下方式计算

$$\sum_{\mathcal{Q}\in\mathcal{N}} |\mathcal{Q}| = \big((q+1)(q^2+1)(q^4+1) - |\mathcal{B}|\big)(q+1) + |\mathcal{B}|(q^2+q+1).$$

由命题 2.19 和引理 2.16 即得该结果。 □

2.4 构造

在本小节的第一部分，我们将计算平面在 K 作用下的点轨道分布，即 PG(3, q^2) 中给定平面上属于 PG(3, q^2) 的点的 K 轨道的点数。随后，我们将给出一种构造 PG(3, q^2) 中拟厄米曲面的新方法，其中 q 为奇数。

引理 2.21. 若 $P \in \mathcal{O}$，则

$$|P^\perp \cap \mathcal{O}| = 1,$$

$$|P^\perp \cap \Sigma_1| = |P^\perp \cap \Sigma_2| = \tfrac{q^2+q}{2},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{Q}^+(3,q^2) \setminus \mathcal{O})| = 2q^2,$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = |P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = 0,\ j \in \{1,\ldots,q\} \setminus \left\{\tfrac{q+1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = q^3+q^2,\ k \in \{1,\ldots,q-2\} \setminus \left\{\tfrac{q-1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3-q}{2}.$$

证明。如果 $P \in \mathcal{O}$，那么 $P^\perp \cap \Sigma$ 是一个 Baer 子平面，并且 $|P^\perp \cap \mathcal{O}| = 1$。特别地，$P^\perp \cap \Sigma$ 有 $(q+1)/2$ 条经过 $\mathcal{T}_i$ 的扩展子直线、$i = 1$、2，以及 q^2 条经过 Σ 且与 $\mathcal{O}$ 外部的扩展子直线，见 [12, 第 343] 页。现在，结论由以下事实得出：与 $\mathcal{O}$ 相切或外部的扩展子直线与 $\mathcal{Q}^+(3,q^2)$ 共有一个或两个点；再结合引理 2.7 和引理 2.8 即可。

□

引理 2.22。如果 $P \in \Sigma_1 \setminus \mathcal{O}$，那么

$$|P^\perp \cap \mathcal{O}| = q+1,$$

$$|P^\perp \cap \Sigma_1| = \tfrac{q^2+(-1)^{\frac{q+1}{2}}q}{2},\ |P^\perp \cap \Sigma_2| = \tfrac{q^2-(-1)^{\frac{q+1}{2}}q}{2},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{Q}^+(3,q^2) \setminus \mathcal{O})| = q^2-q,$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = |P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{q^3-q}{2},\ j \in \{1,\ldots,q\} \setminus \left\{\tfrac{q+1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{q^3-q}{2},\ k \in \{1,\ldots,q-2\} \setminus \left\{\tfrac{q-1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3-q}{2},\ |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = 0,\ \textit{if } q \equiv -1 \pmod 4,$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = 0,\ |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3-q}{2},\ \textit{if } q \equiv 1 \pmod 4.$$

若 $P \in \Sigma_2 \setminus \mathcal{O}$，则

$$|P^\perp \cap \mathcal{O}| = q+1,$$

$$|P^\perp \cap \Sigma_1| = \tfrac{q^2-(-1)^{\frac{q+1}{2}}q}{2},\ |P^\perp \cap \Sigma_2| = \tfrac{q^2+(-1)^{\frac{q+1}{2}}q}{2},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{Q}^+(3,q^2) \setminus \mathcal{O})| = q^2-q,$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = |P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{q^3-q}{2},\ j \in \{1,\ldots,q\} \setminus \left\{\tfrac{q+1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{q^3-q}{2},\ k \in \{1,\ldots,q-2\} \setminus \left\{\tfrac{q-1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3-q}{2},\ |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = 0,\ \textit{if } q \equiv 1 \pmod 4,$$

$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = 0$, $|P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = \frac{q^3-q}{2}$, *if* $q \equiv -1 \pmod 4$.

证明。若 $P \in \Sigma_i$、 $i = 1$、2，则 $P^\perp \cap \Sigma$ 是一个 Baer 子平面。这样的子平面与 $\mathcal{O}$ 相交于一条 Baer二次曲线。此外， $P^\perp$ 有（$q^2 - q$）条 Σ 的扩展子直线与 $\mathcal{O}$ 外部的，($q^2 + q$)条与 $\mathcal{O}$ 相交的扩展子直线，以及在 $P \in \Sigma_2$ 和 $q \equiv 1$（模 4 ）或 $P \in \Sigma_1$ 和 $q \equiv -1$ （模 4 ）时， $\mathcal{T}_1$ 的 $q + 1$ 条扩展子直线；而在 $P \in \Sigma_1$和 $q \equiv 1$ （模 4）或 $P \in \Sigma_2$ 和 $q \equiv -1$ （模 4）时，它有 $q + 1$ 条 $\mathcal{T}_2$ 的扩展子直线。根据引理 2.7 和引理 2.8，结论即得。

□

引理2.23. 若 $P \in \mathcal{Q}^+(3, q^2) \setminus \mathcal{O}$，则

$|P^\perp \cap \mathcal{O}| = 2$,

$|P^\perp \cap \Sigma_1| = |P^\perp \cap \Sigma_2| = \frac{q-1}{2}$,

$|P^\perp \cap (\mathcal{Q}^+(3, q^2) \setminus \mathcal{O})| = 2q^2 - 1$,

$|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = |P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = \frac{(q-1)(q^2+1)}{2}$, $j \in \{1, \ldots, q\} \setminus \left\{\frac{q+1}{2}\right\}$,

$|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = \frac{(q+1)(q^2-1)}{2}$, $k \in \{1, \ldots, q-2\} \setminus \left\{\frac{q-1}{2}\right\}$,

$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = \frac{q^3-q}{2}$.

证明. 若 $P \in \mathcal{Q}^+(3, q^2) \setminus \mathcal{O}$，则 $P^\perp \cap \Sigma = r$ 是 Baer 子直线， $|r \cap \mathcal{O}| = 2$ 且 $|P^\perp \cap \mathcal{Q}^+(3, q^2)| = 2q^2 + 1$。由引理 2.7， $|P^\perp \cap \Sigma_1| = |P^\perp \cap \Sigma_2| = (q - 1)/2$。 $q + 1 + (q^2 - 1)/2$ 条 $\mathcal{T}_i$ 直线与 r 相交于一点，而其中 $(q^3 - q)/2$ 条与 $P^\perp$ 相交于不属于 r 的一点。因此，由引理 2.7 可得 $|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = (q^3 - q)/2$。类似地，由于根据引理 2.12， $\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{L}_k$ 中没有直线包含于 $P^\perp$，因此 $\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{L}_k$ 中有 $2(q + 1)$ 条直线与 r 相交于一点，其中 $(q + 1)(q^2 - 1)$ 条与 $P^\perp$ 相交于不属于 r 的一点。因此 $|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = (q + 1)(q^2 - 1)/2$。记 $\tilde{r}$ 为 $\mathrm{PG}(3, q^2)$ 中包含 r 的唯一直线。设 V 是 $r \cap \mathcal{O}$ 上的一点。在经过 V 且异于 $\tilde{r}$ 的 $P^\perp$ 条直线中，有一条 $\mathcal{Q}^+(3, q^2)$ 的直线，以及 $q^2 - 1$ 条与 $\mathcal{Q}^+(3, q^2)$ 相交且恰好交于 V 的割线。因此，由引理 2.8 和引理 2.9 可得 $|P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = (q - 1)(q^2 + 1)/2$。

□

引理 2.24. 若 $P \in \mathcal{H}_2$，则

$|P^\perp \cap \mathcal{O}| = 2$,

$|P^\perp \cap \Sigma_1| = |P^\perp \cap \Sigma_2| = \frac{q-1}{2}$,

$|P^\perp \cap (\mathcal{Q}^+(3, q^2) \setminus \mathcal{O})| = q^2 - 1$,

$|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = |P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = \frac{(q-1)(q^2+1)}{2}$, $j \in \{1, \ldots, q\} \setminus \left\{\frac{q+1}{2}\right\}$,

$|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = \frac{(q+1)(q^2-1)}{2} + q^2$, $|P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = \frac{(q+1)(q^2-1)}{2}$, $k \in \{1, \ldots, q-2\} \setminus \left\{\frac{q-1}{2}\right\}$,

$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = \frac{q^3-q}{2}$.

证明. 若 $P \in \mathcal{H}_2$，则 $P^\perp \cap \Sigma = r$ 是一个 Baer 子直线，$|r \cap \mathcal{O}| = 2$ 和 $|P^\perp \cap \mathcal{Q}^+(3,q^2)| = q^2+1$。由引理 2.7，$|P^\perp \cap \Sigma_1| = |P^\perp \cap \Sigma_2| = (q-1)/2$。与前一种情况一样，有 $q+1+(q^2-1)/2$ 条 $\mathcal{T}_i$ 的直线与 r 相交于一点，而其中 $(q^3-q)/2$ 条与 $P^\perp$ 相交于一个不属于 r 的点，因此由引理 2.7，$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = (q^3-q)/2$。由 (2.1) 和引理 2.10，$\mathcal{L}$ 中恰有两条直线包含于 $P^\perp$ 中；而由引理 2.12，$\mathcal{L}_k$ 中没有直线位于 $P^\perp$ 中。在此情况下，$|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = (q+1)(q^2-1)/2+q^2$，且 $|P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = (q+1)(q^2-1)/2$。因此，$|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = q^3+q^2+1-(q+1)(q^2-1)/2-q^2-2 = (q-1)(q^2+1)/2$。记 $\tilde{r}$ 为 PG$(3,q^2)$ 中包含 r 的唯一一条直线。设 V 是 $r \cap \mathcal{O}$ 的一个点。在经过 V 且不同于 $\tilde{r}$ 的 $P^\perp$ 的 q^2 条直线中，有一条与 $\mathcal{Q}^+(3,q^2)$ 相切，并且是与 $\mathcal{Q}^+(3,q^2)$ 相交且恰好交于 V 的 q^2-1 条割线之一。因此，由引理 2.8 和引理 2.9 可得，$|P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = (q-1)(q^2+1)/2$。 □

引理 2.25. 若 $P \in \mathcal{E}_i \setminus \mathcal{O}$, $i \in \{1,\dots,q-2\} \setminus \left\{\frac{q-1}{2}\right\}$ 则

$$|P^\perp \cap \mathcal{O}| = 2,$$

$$|P^\perp \cap \Sigma_1| = |P^\perp \cap \Sigma_2| = \tfrac{q-1}{2},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{Q}^+(3,q^2) \setminus \mathcal{O})| = q^2-1,$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = |P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{(q-1)(q^2+1)}{2},\ j \in \{1,\dots,q\} \setminus \left\{\tfrac{q+1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{(q+1)(q^2-1)}{2},\ k \in \{1,\dots,q-2\} \setminus \left\{\tfrac{q-1}{2}\right\},\ \textit{with } k \neq q-1-i,$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1-i} \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{(q+1)(q^2-1)}{2} + q^2,$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3-q}{2}.$$

证明. 若 $P \in \mathcal{E}_i \setminus \mathcal{O}$，则重复前一引理中的相同论证可得$|P^\perp \cap \mathcal{O}| = 2$, $|P^\perp \cap \mathcal{Q}^+(3,q^2)| = q^2+1$, $|P^\perp \cap \Sigma_1| = |P^\perp \cap \Sigma_2| = (q-1)/2$, $|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = (q^3-q)/2$ 以及 $|P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = (q-1)(q^2+1)/2$。 $\mathcal{L}$的任何直线都不包含在$P^\perp$中，因为 $|P^\perp \cap \mathcal{H}(3,q^2)| = q^3+1$，并且根据引理 2.12，$\mathcal{L}_k$中有两条或没有直线位于 $P^\perp$中，分别对应于 $k = q-1-i$ 成立或不成立。因此 $|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = (q+1)(q^2-1)/2$, $k \neq q-1-i$,$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1-k} \setminus \mathcal{O})| = (q+1)(q^2-1)/2+q^2$ 以及 $|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = (q-1)(q^2+1)/2$。 □

引理 2.26. 若 $P \in \mathcal{S}_i \setminus \mathcal{O}$, $i \in \{1,\dots,q\} \setminus \left\{\frac{q+1}{2}\right\}$，则

$$|P^\perp \cap \mathcal{O}| = 0,$$

$$|P^\perp \cap \Sigma_1| = |P^\perp \cap \Sigma_2| = \tfrac{q+1}{2},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{Q}^+(3,q^2) \setminus \mathcal{O})| = q^2+1,$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = |P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{(q-1)(q^2-1)}{2},\ j \in \{1,\dots,q\} \setminus \left\{\tfrac{q+1}{2}\right\},\ \textit{with } j \neq q+1-i \textit{ if } q \equiv -1 \pmod 4,\ \textit{or } j \neq i \textit{ if } q \equiv 1 \pmod 4,$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{S}_{q+1-i} \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{(q-1)(q^2-1)}{2} + q^2,\ \textit{if } q \equiv -1 \pmod 4,$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{S}_i \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{(q-1)(q^2-1)}{2} + q^2, \text{ if } q \equiv 1 \pmod 4,$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{(q+1)(q^2+1)}{2},\ k \in \{1, \ldots, q-2\} \setminus \left\{\tfrac{q-1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3-q}{2}.$$

证明. 若 $P \in \mathcal{S}_i \setminus \mathcal{O}$，则 $P^\perp \cap \Sigma = r$ 是一个 Baer 子直线，$|r \cap \mathcal{O}| = 0$ 和 $|P^\perp \cap \mathcal{Q}^+(3, q^2)| = q^2+1$。由引理 2.7，$|P^\perp \cap \Sigma_1| = |P^\perp \cap \Sigma_2| = (q+1)/2$。有 $(q+1)^2/2$ 条 $\mathcal{T}_i$ 直线与 r 相交于一点，而其中有 $(q^3-q)/2$ 条与 $P^\perp$ 相交于不属于 r 的一点。因此 $|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = (q^3-q)/2$。$\mathcal{L}$ 中没有直线包含于 $P^\perp$，因为 $|P^\perp \cap \mathcal{H}(3, q^2)| = q^3+1$，且由引理 2.12，$\mathcal{L}_k$ 中没有直线包含于 $P^\perp$。此外，$\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{L}_k$ 中没有直线与 r 相交。因此 $|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = (q+1)(q^2+1)/2$，从而 $|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = (q-1)(q^2-1)/2$。现在假设 $P = R_i = (\xi^i, 0, 0, 1) \in \mathcal{S}_i$。为了确定 $|P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})|$，我们统计将点 $R_j = (\xi^j, 0, 0, 1) \in \mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}$ 映射到平面 $P^\perp$: $X_1 + \xi^i X_4 = 0$ 的 K 射影变换。设 $g \in K$ 由 $A^q \otimes A$ 诱导，其中 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$。当且仅当 (a, b, c, d) 作为 PG$(3, q^2)$ 中的一个点同时满足 (2.9) 和 (2.10) 时，$R_j^g \in P^\perp$。由命题 2.20，这些射影变换的数量要么是 $(q^2-1)^2/2$，要么是 $(q+1)(q^3+q^2-q+1)/2$。另一方面，若 R 是 $P^\perp \cap \mathcal{S}_j$ 的一点，且 $\mathcal{Z}$ 表示将 R_j 映射到 R 的射影变换集合，则只要 $g \in \mathcal{Z}$，就有 $\mathcal{Z}g^{-1} = K_{R_j}$。由引理 2.4 可知 $|K_{R_j}| = q+1$，因此当 $j = i$ 且 $q \equiv -1$ (模 4)，或 $j = q+1-i$ 且 $q \equiv 1$ (模 4) 时，$|P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})|$ 等于 $(q-1)(q^2-1)/2 + q^2$；否则，$|P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = (q-1)(q^2-1)/2$。 □

引理 2.27. 如果 $P \in \mathcal{H}_1$，那么

$$|P^\perp \cap \mathcal{O}| = 0,$$

$$|P^\perp \cap \Sigma_1| = |P^\perp \cap \Sigma_2| = \tfrac{q+1}{2},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{Q}^+(3, q^2) \setminus \mathcal{O})| = q^2+1,$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = \tfrac{(q-1)(q^2-1)}{2} + q^2,\ |P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{(q-1)(q^2-1)}{2},\ j \in \{1, \ldots, q\} \setminus \left\{\tfrac{q+1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{(q+1)(q^2+1)}{2},\ k \in \{1, \ldots, q-2\} \setminus \left\{\tfrac{q-1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3-q}{2}.$$

证明。如果 $P \in \mathcal{H}_1$，那么前一引理中使用的相同论证给出 $|P^\perp \cap \mathcal{O}| = 0$,$|P^\perp \cap \mathcal{Q}^+(3, q^2)| = q^2+1$, $|P^\perp \cap \Sigma_1| = |P^\perp \cap \Sigma_2| = (q+1)/2$, $|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = (q^3-q)/2$, $|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = (q+1)(q^2+1)/2$。在这种情况下，$|P^\perp \cap \mathcal{H}(3, q^2)| = q^3+q^2+1$，因此 $|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = (q-1)(q^2-1)/2 + q^2$。我们断言 $|P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = (q-1)(q^2-1)/2$。事实上，如果 P_1 属于 $\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}$，则 $|P_1^\perp \cap \mathcal{H}(3, q^2)| = q^3+1$，因为根据前一引理，$P_1 \notin \mathcal{H}(3, q^2)$ 且 $P_1^\perp \cap \mathcal{H}_2 = (q+1)(q^2+1)/2$。因此 $|P_1^\perp \cap \mathcal{H}_1| = (q-1)(q^2-1)/2$，这又意味着经过点 $P_1 \in (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})$ 的有 $(q-1)(q^2-1)/2$ 个平面 $P_2^\perp$，其中 $P_2 \in \mathcal{H}_1$。对满足 $P_1 \in \mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}$, $P_2 \in \mathcal{H}_1$, $P_1 \in P_2^\perp$ 的对 $(P_1, P_2^\perp)$ 进行双重计数，得到 $|\mathcal{H}_1| \times |P_2^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = |\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}| \times (q-1)(q^2-1)/2$，证毕。 □

引理 2.28。如果 $P \in \mathcal{E}_0 \setminus \Sigma$，那么

$$|P^\perp \cap \mathcal{O}| = 1,$$

$$|P^\perp \cap \Sigma_1| = q,\ |P^\perp \cap \Sigma_2| = 0,\ \textit{if } q \equiv -1 \pmod 4,$$

$$|P^\perp \cap \Sigma_1| = 0,\ |P^\perp \cap \Sigma_2| = q,\ \textit{if } q \equiv 1 \pmod 4,$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{Q}^+(3,q^2) \setminus \mathcal{O})| = q^2+1,$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = |P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{q^3-q^2}{2},\ j \in \{1,\dots,q\} \setminus \left\{\tfrac{q+1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{q^3+q^2}{2},\ k \in \{1,\dots,q-2\} \setminus \left\{\tfrac{q-1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3+q^2}{2} - q,\ |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3+q^2}{2},\ \textit{if } q \equiv -1 \pmod 4,$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3+q^2}{2},\ |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3+q^2}{2} - q,\ \textit{if } q \equiv 1 \pmod 4.$$

若 $P \in \mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma$，则

$$|P^\perp \cap \mathcal{O}| = 1,$$

$$|P^\perp \cap \Sigma_1| = 0,\ |P^\perp \cap \Sigma_2| = q,\ \textit{if } q \equiv -1 \pmod 4,$$

$$|P^\perp \cap \Sigma_1| = q,\ |P^\perp \cap \Sigma_2| = 0,\ \textit{if } q \equiv 1 \pmod 4,$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{Q}^+(3,q^2) \setminus \mathcal{O})| = q^2+1,$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = |P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{q^3-q^2}{2},\ j \in \{1,\dots,q\} \setminus \left\{\tfrac{q+1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = \tfrac{q^3+q^2}{2},\ k \in \{1,\dots,q-2\} \setminus \left\{\tfrac{q-1}{2}\right\},$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3+q^2}{2},\ |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3+q^2}{2} - q,\ \textit{if } q \equiv -1 \pmod 4,$$

$$|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3+q^2}{2} - q,\ |P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = \tfrac{q^3+q^2}{2},\ \textit{if } q \equiv 1 \pmod 4.$$

证明。若 $P \in \mathcal{E}_0 \setminus \Sigma$，则 $P^\perp \cap \Sigma = r$ 是一个 Baer 子直线 $|r \cap \mathcal{O}| = 1$，且 $|P^\perp \cap \mathcal{Q}^+(3,q^2)| = q^2+1$。令 $\tilde{r}$ 为 PG(3,q^2) 中包含 r 的唯一直线，并假设 $q \equiv -1$（模 4）。由引理 2.7 $\tilde{r} \in \mathcal{T}_1$，$|P^\perp \cap \Sigma_1| = q$，且恰有 $(q^3-q^2)/2$ 条或 $(q^3+q^2)/2$ 条 $\mathcal{T}_1$ 或 $\mathcal{T}_2$ 与 $P^\perp$ 相交于一个不属于 $\tilde{r}$ 的点。因此 $|P^\perp \cap (\mathcal{E}_0 \setminus \Sigma)| = (q^3+q^2)/2 - q$，且 $|P^\perp \cap (\mathcal{E}_{q-1} \setminus \Sigma)| = (q^3+q^2)/2$。同理，由引理 2.10 和引理 2.11，$\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}_k$ 中有 $(q^3+q^2)/2$ 条直线与 $P^\perp \setminus \tilde{r}$ 相交于一点。由此可得 $|P^\perp \cap \mathcal{H}_2| = |P^\perp \cap (\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O})| = (q^3+q^2)/2$，且 $|P^\perp \cap \mathcal{H}_1| = (q^3-q^2)/2$。令 $V = r \cap \mathcal{O}$。经过 V 且异于 $\tilde{r}$ 的 q^2 条 $P^\perp$ 直线是 $\mathcal{Q}^+(3,q^2)$ 的割线，并且恰好在 V 与 $\mathcal{O}$ 相交。因此，由引理 2.9 可得 $|P^\perp \cap (\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O})| = (q^3-q^2)/2$。其余情形的证明类似。

□

本小节引理中证明的结果汇总于表 1。对于点轨道 $\mathcal{A}$，我们用 $\mathcal{A}^\perp$ 表示由 $\mathcal{A}^\perp = \{P^\perp \mid P \in \mathcal{P}\}$ 给出的平面轨道。

定理 2.29. 若 $j \in \{1,\dots,q\} \setminus \{(q+1)/2\}$ 且 $k \in \{1,\dots,q-2\} \setminus \{(q-1)/2\}$，则集合 $\mathcal{S}_j \cup \mathcal{E}_k$、$\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{E}_k$ 和 $\mathcal{S}_j \cup \mathcal{H}_2$ 是拟厄米曲面。

证明。该结果可通过合并表 1 的三列得到。 □

表 1： K 作用下平面的点轨道分布。

	$\mathcal{O}$	Σ_1	Σ_2	$\mathcal{Q}^+(3,q^2)\setminus\mathcal{O}$	$\mathcal{H}_1$	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{S}_{j'}\setminus\mathcal{O}$	$\mathcal{E}_{k'}\setminus\mathcal{O}$	$\mathcal{E}_0\setminus\Sigma$	$\mathcal{E}_{q-1}\setminus\Sigma$
$\mathcal{O}^\perp$	1	$\frac{q^2+q}{2}$	$\frac{q^2+q}{2}$	$2q^2$	0	q^3+q^2	0	q^3+q^2	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$
$\Sigma_1^\perp$	$q+1$	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^2-q}{2}$ $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^2+q}{2}$	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^2+q}{2}$ $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^2-q}{2}$	q^2-q	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: 0 $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: q^3-q	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: q^3-q $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: 0
$\Sigma_2^\perp$	$q+1$	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^2+q}{2}$ $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^2-q}{2}$	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^2-q}{2}$ $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^2+q}{2}$	q^2-q	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: q^3-q $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: 0	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: 0 $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: q^3-q
$(\mathcal{Q}^+(3,q^2)\setminus\mathcal{O})^\perp$	2	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	$2q^2-1$	$\frac{(q-1)(q^2+1)}{2}$	$\frac{(q+1)(q^2-1)}{2}$	$\frac{(q-1)(q^2+1)}{2}$	$\frac{(q+1)(q^2-1)}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$
$\mathcal{H}_1^\perp$	0	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q+1}{2}$	q^2+1	$\frac{(q-1)(q^2-1)}{2}+q^2$	$\frac{(q+1)(q^2+1)}{2}$	$\frac{(q-1)(q^2-1)}{2}$	$\frac{(q+1)(q^2+1)}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$
$\mathcal{H}_2^\perp$	2	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	q^2-1	$\frac{(q-1)(q^2+1)}{2}$	$\frac{(q+1)(q^2-1)}{2}+q^2$	$\frac{(q-1)(q^2+1)}{2}$	$\frac{(q+1)(q^2-1)}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$
$(\mathcal{S}_j\setminus\mathcal{O})^\perp$	0	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q+1}{2}$	q^2+1	$\frac{(q-1)(q^2-1)}{2}$	$\frac{(q+1)(q^2+1)}{2}$	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: $\frac{(q-1)(q^2-1)}{2}+q^2,\ j'\neq q+1-j$ $\frac{(q-1)(q^2-1)}{2},\ j'\neq q+1-j$ $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: $\frac{(q-1)(q^2-1)}{2}+q^2,\ j'=j$ $\frac{(q-1)(q^2-1)}{2},\ j'\neq j$	$\frac{(q+1)(q^2+1)}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$
$(\mathcal{E}_k\setminus\mathcal{O})^\perp$	2	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	q^2-1	$\frac{(q-1)(q^2+1)}{2}$	$\frac{(q+1)(q^2-1)}{2}$	$\frac{(q-1)(q^2+1)}{2}$	$\frac{(q+1)(q^2-1)}{2}+q^2,\ k'=q-1-k$ $\frac{(q+1)(q^2-1)}{2},\quad k'\neq q-1-k$	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$
$(\mathcal{E}_0\setminus\Sigma)^\perp$	1	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: 0 $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: q	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: q $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: 0	q^2	$\frac{q^3-q^2}{2}$	$\frac{q^3+q^2}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3+q}{2}$	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^3+q^2}{2}$ $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^3+q^2}{2}-q$	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^3+q^2}{2}-q$ $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^3+q^2}{2}$
$(\mathcal{E}_{q-1}\setminus\Sigma)^\perp$	1	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: q $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: 0	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: 0 $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: q	q^2	$\frac{q^3-q^2}{2}$	$\frac{q^3+q^2}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3+q}{2}$	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^3+q^2}{2}-q$ $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^3+q^2}{2}$	$q\equiv 1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^3+q^2}{2}$ $q\equiv -1\ (\text{模 }4)$: $\frac{q^3+q^2}{2}-q$

3 已知例子与同构问题

据我们所知，在 PG(3, q^2) 中已知有三种准 Hermitian 曲面的构造方法，下面将对此进行描述。

第一种构造

设 π 是在点 P 处与 $\mathcal{H}(3,q^2)$ 相切的平面。设 $g_i, 1\le i\le q+1$ 为经过 P 的 $\mathcal{H}(3,q^2)$ 的 $q+1$ 母线，并考虑经过 P 的 π 的直线 $\ell_1,\dots,\ell_{q+1}$。集合

$$\mathcal{V}_1=\bigcup_i \ell_i\cup\left(\mathcal{H}(3,q^2)\setminus\bigcup_i g_i\right)$$

是 PG(3, q^2) 中的一个准 Hermitian 曲面，见 [20, 定理 3]。设 z 为 $\{g_1,\dots,g_{q+1}\}$ 与 $\{\ell_1,\dots,\ell_{q+1}\}$ 的公共元素个数。当然，当且仅当 $z=q+1$ 时，$\mathcal{V}_1=\mathcal{H}(3,q^2)$。以下结果可以很容易地推得。

引理 3.1. PG(3, q^2) 中恰有 zq^3+q+1 条直线包含于 $\mathcal{V}_1$ 中。$\mathcal{V}_1$ 上有 q^5 个点恰好关联 z 条 $\mathcal{V}_1$；$\mathcal{V}_1$ 中有 zq^2+1 个点包含在 $\mathcal{V}_1$ 的直线中；并且有 $(q+1-z)q^2$ 个点位于 $\mathcal{V}_1$ 的同一条直线上。

第二种构造

固定 $\alpha\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\{0\}$、$\beta\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q$，其中 $4\alpha^{q+1}+(\beta^q-\beta)^2\neq 0$。该集合

$$\begin{aligned}&\mathcal{V}_2=\{(1,x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{F}_{q^2},G(x,y,z)=0\}\cup\{(0,x,y,x)\mid x,y,z\in\mathbb{F}_{q^2},x^{q+1}+y^{q+1}=0\},\\&\text{where } G(x,y,z)=z^q-z+\alpha^q(x^{2q}+y^{2q})-\alpha(x^2+y^2)-(\beta^q-\beta)(x^{q+1}+y^{q+1}),\end{aligned}$$

是一个准 Hermitian 曲面 [2]。类似地，[1, 2] 在偶特征情形下展示了更多构造。

引理 3.2（[3]）。以下结论成立。

- 若 $q \equiv 1$ 模 4，则 PG(3, q^2) 中恰有 $2q^2+q+1$ 条直线包含于 $\mathcal{V}_2$ 中。$\mathcal{V}_2$ 上有 q^5 个点恰与 $\mathcal{V}_2$ 中的 2 条直线关联，$\mathcal{V}_2$ 上有 $2q^2+1$ 个点包含于 $q+1$ 条 $\mathcal{V}_2$ 中的直线，并且 $\mathcal{V}_2$ 上有 q^3-q^2 个点位于 $\mathcal{V}_2$ 中的一条直线上。
- 若 $q \equiv -1$ 模 4，则 PG(3, q^2) 中恰有 $q+1$ 条直线包含于 $\mathcal{V}_2$ 中。$\mathcal{V}_2$ 上有 q^5 个点不在 $\mathcal{V}_2$ 中的任何直线上，$\mathcal{V}_2$ 上有 q^3+q^2 个点恰包含于 $\mathcal{V}_2$ 中的一条直线，并且有一个 $\mathcal{V}_2$ 上的点与 $\mathcal{V}_2$ 中的 $q+1$ 条直线关联。

第三种构造

设 Σ 是 PG(3, q^2) 的一个 Baer 子几何，且 $\mathcal{Q}$ 是 Σ 的一个非退化二次曲面。设 $\mathcal{L}$ 是 PG(3, q^2) 中与 Σ 有 $q+1$ 个公共点，且与 $\mathcal{Q}$ 相交于一个或 $q+1$ 个点的直线集合。则

$$\mathcal{V}_3 = \bigcup_{\ell \in \mathcal{L}} \ell \tag{3.1}$$

是一个准 Hermitian 曲面 [31]。更一般地，若 $\mathcal{L}$ 是 PG(3, q^2) 中的一组直线，与 Σ 共有 $q+1$ 个点，且每个 Σ 点都恰有 $\mathcal{L}$条直线 $q+1$ 经过，则按 (3.1) 定义的 $\mathcal{V}_3$ 是一个准 Hermitian 曲面，见 [13]。

引理 3.3。PG(3, q^2) 中至少有 $(q+1)(q^2+1)$ 条直线包含在 $\mathcal{V}_3$中。经过 $\mathcal{V}_3 \setminus \Sigma$ 的 q^5-q 个点之一，至少有一条 $\mathcal{V}_3$直线；而 $\mathcal{V}_3 \cap \Sigma$ 中的每个 $(q+1)(q^2+1)$ 个点都至少位于 $\mathcal{V}_3$的 $q+1$ 条直线上。

记 $\mathcal{V}_4$ 为形如 $\mathcal{S}_j \cup \mathcal{E}_k$、$\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{E}_k$ 或 $\mathcal{S}_j \cup \mathcal{H}_2$的一组集合。若 $q>3$，则以下结果由引理 2.10、引理 2.11 和引理 2.13 得出；若$q=3$，则由直接计算得出。

命题 3.4。PG(3, q^2) 中恰有 $(q+1)(q^2+1)$ 条直线包含于 $\mathcal{V}_4$。$\mathcal{V}_4$ 中没有直线经过 $\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{O}$ 或 $\mathcal{H}_2$ 上的点；$\mathcal{V}_4$ 中恰有两条直线经过 $\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{O}$ 或 $\mathcal{H}_2$ 上的点，且 $\mathcal{V}_4$ 中恰有 $q+1$ 条直线经过 $\mathcal{O}$ 上的点。

推论 3.5。$\mathcal{V}_4$ 与 $\mathcal{V}_i$、$i=1$、2、3 均不射影等价。

4 更多组合不变量

在本节中，我们将 $\mathcal{O}$ 视为该有理曲线的 $\mathbb{F}_{q^2}$-有理点集合

$$\mathcal{C} = \{(1, t, t^q, t^{q+1}) \mid t \in \bar{\mathbb{F}}_{q^2}\} \cup \{(0,0,0,1)\}$$

并进一步深入研究曲线 $\mathcal{C}$ over$\mathbb{F}_{q^2}$ 的集合稳定子的轨道结构。$\mathcal{C}$ 的显式方程为

$$\begin{cases} X_2^{q+1} = X_1^q X_4, \\ X_3^{q+1} = X_1 X_4^q, \\ X_1 X_4 = X_2 X_3. \end{cases}$$

另一条曲线 $\mathcal{C}'$，其方程为

$$\begin{cases} X_3^{q+1} = X_1^q X_4, \\ X_2^{q+1} = X_1 X_4^q, \\ X_1 X_4 = X_2 X_3, \end{cases}$$

与 $\mathcal{C}$ 共享 $\mathbb{F}_{q^2}$-有理点集，即 $\mathcal{C}'(\mathbb{F}_{q^2}) = \mathcal{C}(\mathbb{F}_{q^2}) = \mathcal{O}$。在点 $P \in \mathcal{O}$ 处的切平面（简称 $\mathcal{O}$-切平面）指曲线 $\mathcal{C}$ 在 P处的切平面；在点 $P \in \mathcal{O}$ 处的 $\mathcal{C}$-切线（$\mathcal{C}'$-切线）指曲线 $\mathcal{C}$（$\mathcal{C}'$）在 P 处的切线。对合 $\iota : (X_1, X_2, X_3, X_4) \longmapsto (X_1, X_3, X_2, X_4)$ 固定 $\mathcal{O}$并将 $\mathcal{C}$映射到 $\mathcal{C}'$。$\mathbb{F}_{q^2}$-有理自同构群 $\mathcal{C}$ 为 $G \simeq \mathrm{PGL}(2, q^2) \leq \mathrm{PGL}(4, q^2)$，而所有固定 $\mathcal{O}$的 $\mathbb{F}_{q^2}$-有理射影变换构成群 $G' \simeq \mathrm{PGL}(2, q^2) \rtimes \langle \iota \rangle \leq \mathrm{PGL}(4, q^2)$。本节考虑 G 或 G'的作用，而非 K。特别地，在引理 4.1 中，我们将证明 G 确实会合并 $\mathrm{PG}(3, q^2)$ 中点上的不同 K-轨道，而 G 和G' 具有相同的点轨道。本节第一部分将计算平面在 G作用下的点轨道分布。随后，我们讨论直线上的 G-轨道；事实证明，这是一个棘手得多的问题。

为便于记号，我们定义

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_j &= (\mathcal{S}_j \cup \mathcal{S}_{q+1-j}) \setminus \mathcal{O}, \quad j \in \{1, \ldots, (q-1)/2\}, \\ \tilde{\mathcal{E}}_k &= (\mathcal{E}_k \cup \mathcal{E}_{q-1-k}) \setminus \mathcal{O}, \quad k \in \{1, \ldots, (q-3)/2\}, \\ \tilde{\mathcal{E}}_0 &= (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_{q-1}) \setminus \Sigma. \end{aligned}$$

命题 4.1。群 G 和 G' 在 $\mathrm{PG}(3, q^2)$ 的点上具有 $q+4$ 个轨道：

i) $\mathcal{O}$；ii) $\Sigma \setminus \mathcal{O}$；iii) $\mathcal{Q}^+(3, q^2) \setminus \mathcal{O}$；

iv) 在 $\mathcal{H}(3, q^2) \setminus \mathcal{O}$ 的点上有两个轨道 $\mathcal{H}_1$、$\mathcal{H}_2$；

v) $\tilde{\mathcal{S}}_j$, $j \in \{1, \ldots, (q-1)/2\}$;

vi) $\tilde{\mathcal{E}}_k$, $k \in \{1, \ldots, (q-3)/2\}$;

vii) $\tilde{\mathcal{E}}_0$;

证明。容易看出，G 中存在将 S_1 发送到 S_2、将 R_j 发送到 R_{q+1-j}、将 Q_k 发送到 Q_{q-1-k} 以及将 T_1 发送到 T_2 的映射。沿用引理 2.4 的证明，用群 G 代替 K，即可得到结论。关于群 G' 的断言则由以下事实得出：映射 ι 保持 $\mathcal{O}$、Σ、$\mathcal{Q}^+(3, q^2)$、$\mathcal{H}_1$和 $\mathcal{H}_2$ 不变，并固定下列各点：T_1、R_1、……、$R_{(q-1)/2}$、Q_0、……、$Q_{(q-3)/2}$。 □

考虑命题 4.1 和表 1，即可得出 G 的作用下平面的点轨道分布。相关结果汇总于表 2。

表 2：在 G 的作用下，平面的点轨道分布。

	$\mathcal{O}$	Σ	$\mathcal{Q}^+(3,q^2)\setminus\mathcal{O}$	$\mathcal{H}_1$	$\mathcal{H}_2$	$\tilde{\mathcal{S}}_{j'}$	$\tilde{\mathcal{E}}_{k'}$	$\tilde{\mathcal{E}}_0$
$\mathcal{O}^\perp$	1	q^2+q	$2q^2$	0	q^3+q^2	0	$2(q^3+q^2)$	q^3-q
$(\Sigma\setminus\mathcal{O})^\perp$	$q+1$	q^2	q^2-q	$\frac{q^3-q}{2}$	$\frac{q^3-q}{2}$	q^3-q	q^3-q	q^3-q
$(\mathcal{Q}^+(3,q^2)\setminus\mathcal{O})^\perp$	2	$q-1$	$2q^2-1$	$\frac{(q-1)(q^2+1)}{2}$	$\frac{(q+1)(q^2-1)}{2}$	$(q-1)(q^2+1)$	$(q+1)(q^2-1)$	q^3-q
$\mathcal{H}_1^\perp$	0	$q+1$	q^2+1	$\frac{(q-1)(q^2-1)}{2}+q^2$	$\frac{(q+1)(q^2+1)}{2}$	$(q-1)(q^2-1)$	$(q+1)(q^2+1)$	q^3-q
$\mathcal{H}_2^\perp$	2	$q-1$	q^2-1	$\frac{(q-1)(q^2+1)}{2}$	$\frac{(q+1)(q^2-1)}{2}+q^2$	$(q-1)(q^2+1)$	$(q+1)(q^2-1)$	q^3-q
$\tilde{\mathcal{S}}_j^\perp$	0	$q+1$	q^2+1	$\frac{(q-1)(q^2-1)}{2}$	$\frac{(q+1)(q^2+1)}{2}$	$(q-1)(q^2-1)+q^2,\ j'=j$ $(q-1)(q^2-1),\quad j'\neq j$	$(q+1)(q^2+1)$	q^3-q
$\tilde{\mathcal{E}}_k^\perp$	2	$q-1$	q^2-1	$\frac{(q-1)(q^2+1)}{2}$	$\frac{(q+1)(q^2-1)}{2}$	$(q-1)(q^2+1)$	$(q+1)(q^2-1)+q^2,\ k'=k$ $(q+1)(q^2-1),\quad k'\neq k$	q^3-q
$\tilde{\mathcal{E}}_0^\perp$	1	q	q^2	$\frac{q^3-q^2}{2}$	$\frac{q^3+q^2}{2}$	q^3-q	q^3+q	q^3+q^2-q

4.1 关于直线 G-轨道

本小节研究 G 在 PG$(3,q^2)$ 的直线上的轨道。有些直线轨道很容易识别。事实上，由于 G 在 $\mathcal{C}(\mathbb{F}_{q^2})$ 的点上三重传递，$\mathcal{C}$-切线和 $\mathcal{C}'$-切线分别构成大小为 q^2+1 的两个轨道。注意，这 $2(q^2+1)$ 条直线就是 $\mathcal{Q}^+(3,q^2)$ 中的直线。根据引理 2.7，Σ 中与 $\mathcal{O}$ 相割或相离的扩展子直线构成两个大小为 $q^2(q^2+1)/2$ 的轨道，而 Σ 中与 $\mathcal{O}$ 相切的扩展子直线则构成另一个大小为 $(q+1)(q^2+1)$ 的轨道。根据引理 2.11 或引理 2.10，还有 $q-1$ 个大小为 $(q+1)(q^2+1)$ 的轨道，分别由包含于 $\mathcal{E}_k$、$k\in\{1,\dots,q-1\}\setminus\{(q-1)/2\}$ 以及 $\mathcal{H}_2$ 中的直线组成。根据 [14]，群 G 在 $\mathcal{H}(3,q^2)$ 的直线上除 $\mathcal{L}$ 外，还有两个大小为 $q^2(q^2-1)/2$ 的轨道。此外，根据 [25]，这两个直线轨道可以如下得到：取 $\mathcal{C}(\mathbb{F}_{q^4})\setminus\mathcal{C}(\mathbb{F}_{q^2})$ 或 $\mathcal{C}'(\mathbb{F}_{q^4})\setminus\mathcal{C}(\mathbb{F}_{q^2})$ 中任意一点，将其与该点在 $\mathbb{F}_{q^4}$ 中固定 $\mathbb{F}_{q^2}$ 的 Frobenius 自同构下的像相连，所得直线是 $\mathbb{F}_{q^2}$-有理直线。由于两种情形下这样的点数均为 $q^2(q^2-1)$，因此得到同样多的 $q^2(q^2-1)/2$ 条直线。由 G 在点集 $\mathcal{C}(\mathbb{F}_{q^4})\setminus\mathcal{C}(\mathbb{F}_{q^2})$ 和 $\mathcal{C}'(\mathbb{F}_{q^4})\setminus\mathcal{C}(\mathbb{F}_{q^2})$ 上的传递性可知，这些直线确实属于同一个轨道。

通过使用 Klein 对应，我们可以识别出 q^2 更多轨道，如下所述。令ϕ 为将 PG$(3,q)$ 中直线的集合映射到位于 Klein 二次曲面 $\mathcal{K}\subset$PG$(5,q^2)$ 上的点集的 Klein 对应映射。映射 ϕ 在 PG$(5,q^2)$ 的点上诱导出 G的作用，并保持 $\mathcal{K}$。特别地，由 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in$ GL$(2,q^2)$ 诱导的映射在 PG$(5,q^2)$ 的点上作用，其形式为矩阵诱导的射影变换

$$\begin{pmatrix}
a^{2q} & 0 & a^qb^q & -a^qb^q & 0 & b^{2q}\\
0 & a^2\Delta^{q-1} & ab\Delta^{q-1} & ab\Delta^{q-1} & -b^2\Delta^{q-1} & 0\\
a^qc^q & ac\Delta^{q-1} & \frac{a^{q+1}d^{q+1}-b^{q+1}c^{q+1}}{\Delta} & \frac{a^qbcd^q-ab^qc^qd}{\Delta} & -bd\Delta^{q-1} & b^qd^q\\
-a^qc^q & ac\Delta^{q-1} & \frac{a^qbcd^q-ab^qc^qd}{\Delta} & \frac{a^{q+1}d^{q+1}-b^{q+1}c^{q+1}}{\Delta} & -bd\Delta^{q-1} & -b^qd^q\\
0 & -c^2\Delta^{q-1} & -cd\Delta^{q-1} & -cd\Delta^{q-1} & d^2\Delta^{q-1} & 0\\
c^{2q} & 0 & c^qd^q & -c^qd^q & 0 & d^{2q}
\end{pmatrix}$$

从而得到群 $\bar{G}\simeq$PGL$(2,q^2)\leq$PGO$^+(6,q^2)$。这里 $\Delta=ad-bc\neq0$。

¯命题 4.2。令 $R_\omega\in\mathcal{K}$ 为点 $(0,\omega,1,0,0,1)$。群 G 有两个长度为 q^6-q^2 的点轨道，其代表元为 R_ω, $\omega\in\{0,1\}$，以及 q^2-2 个长度为 $(q^6-q^2)/2$的点轨道，其代表元为 R_ω, $\omega\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\{0,1\}$。

证明。我们将计算 G中 R_ω 的稳定子 G_{R_ω} 的大小。若由 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 诱导的射影变换$g \in \bar{G}$ 固定 R_ω，则对于非零的 $\lambda \in \mathbb{F}_{q^2}$，以下条件成立：

$$\begin{cases} a^q b^q + b^{2q} = 0 \\ \omega a^2 \Delta^{q-1} + ab\Delta^{q-1} = \lambda\omega \\ \omega ac\Delta^{q-1} + \frac{a^{q+1}d^{q+1} - b^{q+1}c^{q+1}}{\Delta} + b^q d^q = \lambda \\ \omega ac\Delta^{q-1} + \frac{a^q bcd^q - ab^q c^q d}{\Delta} - b^q d^q = 0 \\ -\omega c^2 \Delta^{q-1} - cd\Delta^{q-1} = 0 \\ c^q d^q + d^{2q} = \lambda \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $\Delta = ad - bc \neq 0$。首先假设 $\omega = 0$。则 $ab = cd = 0$，这意味着 $b = c = 0$，并且$a = d$，其中 $a, d \neq 0$。因此，在这种情况下 $G_{R_0} = \{id\}$。令 $\omega \neq 0$。由第二个方程和第六个方程可得，$a \neq 0$ 和 $d \neq 0$ 成立。若 $b = 0$，则由第四个方程可得 $c = 0$，进而$d = a$，即 $g = id$。若 $c = 0$，则 $b = 0$，并再次得到 $g = id$。假设 $b, c \neq 0$，且 $a = 1$。则$b^q = -1$，即 $b = -1$ 和 $\Delta = c + d$。由第五个和第六个方程可推出 $d = -\omega c$。若 $\omega = 1$，则 $\Delta = 0$，矛盾。因此 $G_{R_1} = \{id\}$。若 $\omega \neq 1$，则第三个方程给出$c = \omega^{-1}$。此时，$\bar{G}_{R_\omega}$ 的唯一非平凡射影变换由 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega^{-1} & -1 \end{pmatrix}$ 诱导。

将 ω 替换为 ω'、$\omega \neq \omega'$，并在第二个方程的右侧进行相同的计算，会导致矛盾，这表明这些 G-轨道是不同的。 □

5 结论性说明

本文通过研究 PΩ⁻(4, q) $\simeq$ PSL(2, q^2) $\leq$ PGL(4, q^2) 对 PG(3, q^2) 中的点的作用，构造了准 Hermitian 曲面，其中 q为奇数。我们坚信，通过研究 PΩ$^{\pm}$(2n + 2, q) $\leq$ PGL(2n + 2, q^2) 对 PG(2n + 1, q^2) 中的点的作用，可以得到类似的结果。

在第 4.1 小节中，我们确定了 PG(3, q^2) 的直线上的多达 $q^2 + q + 5$ 个直线 G-轨道，其中 $G \simeq$ PGL(2, q^2) $\leq$ PGL(4, q^2)。计算数据表明，G 在 PG(3, q^2) 的直线上有 $2q^2 + 2q + 4$ 个轨道。

Acknowledgments. 本研究获得意大利代数与几何结构及其应用国家小组（GNSAGA– INdAM）的支持。第二作者感谢爱尔兰研究委员会通过资助项目 GOIPD/2022/307 提供的支持。

参考文献

[1] A. Aguglia。PG(r, q^2) 中的拟厄米簇，q even。离散数学贡献，8(1):31–37，2013。

[2] A. Aguglia、A. Cossidente 和 G. Korchm´aros。关于拟厄米簇。《组合设计杂志》，20(10):433–447，2012。

[3] A. Aguglia 和 L. Giuzzi。关于某些拟厄米簇的等价性。《组合设计杂志》，页码 1–15，2022。[4] S. Ball 和 M. Lavrauw。有限射影空间中的弧。《EMS 数学科学综述》，6(1-2):133– 172，2019。[5] A. Blokhuis、R. Pellikaan 和 T. Sz˝onyi。扭曲三次曲线码的扩展陪集首重量枚举式。《设计、编码与密码学》，90(9):2223–2247，2022。[6] A. A. Bruen 和 J. W. P. Hirschfeld。有限域上线几何的应用 I：扭曲三次曲线。《专献几何学》，6(4):495–509，1977。[7] R. Calderbank 和 W. M. Kantor。二重量码的几何。《伦敦数学学会通报》，18(2):97–122，1986。[8] P. Cara、S. Rottey 和 G. Van de Voorde。线性表示及其图的同构问题。《几何学进展》，14(2):353–367，2014。[9] M. Ceria 和 F. Pavese。关于 PG(3, q) 中一个 ($q+1$)-弧的几何， q为偶数，2022。预印本，arXiv:2208.00503。[10] B. N. Cooperstein、J. A. Thas 和 H. Van Maldeghem。有限域上的厄米维罗内塞簇。《数学论坛》，16(3):365–381，2004。[11] A. Cossidente 和 F. Pavese。关于酉对合的几何。《有限域及其应用》，36:14–28，2015。[12] A. Cossidente 和 F. Pavese。PG(5, q) 中二次曲面的迷人集。《几何学进展》，17(3):339–345，2017。[13] A. Cossidente 和 F. Pavese。有限射影空间与极空间的直线覆盖。《设计、编码与密码学》，87(9):1985–2002，2019。[14] A. Cossidente 和 T. Penttila。厄米曲面上的半系统。《伦敦数学学会杂志》，72:731–741，2005。[15] A. Cossidente 和 A. Siciliano。关于有限域上三阶厄米矩阵的几何。《欧洲组合学杂志》，22(8):1047–1058，2001。[16] A. A. Davydov、S. Marcugini 和 F. Pambianco。PG(3, q) 中的扭曲三次曲线与点线关联矩阵。《设计、编码与密码学》，89(10):2211–2233，2021。[17] A. A. Davydov、S. Marcugini 和 F. Pambianco。关于 PG(3, q) 中相对于扭曲三次曲线外部的 $\mathcal{O}_6$ 类直线的轨道，2022。预印本，arXiv.2209.04910。[18] A. A. Davydov、S. Marcugini 和 F. Pambianco。PG(3, q) 中的扭曲三次曲线与平面线关联矩阵。《几何学杂志》，113(2):29页，2022。

[19] F. De Clerck、N. Hamilton、C. O'Keefe 和 T. Penttila。拟二次曲面及相关结构。澳大拉西亚组合学杂志，22:151–166，2000.[20] S. De Winter 和 J. Schillewaert。关于拟厄米簇与奇异拟二次曲面的一则注记。比利时数学学会 Simon Stevin 通报，17(5):911–918，2010.[21] N. Durante、G. Longobardi 和 V. Pepe。（$d,\boldsymbol{\sigma}$）-Veronese簇及其若干应用。设计、编码与密码学，2023。https://doi.org/10.1007/s10623-023-01186-9.[22] G. G¨unay 和 M. Lavrauw。特征为 >3 的有限域上射影直线的三次曲线铅笔。有限域及其应用，78:28页，2022.[23] J. W. P. Hirschfeld。三维有限射影空间。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1985.[24] J. W. P. Hirschfeld 和 J. A. Thas。一般伽罗瓦几何。施普林格，伦敦，2016.[25] G. Korchm´aros、G. P. Nagy 和 P. Speziali。厄米曲面的半系统。组合理论杂志 A辑，165:408–439，2019.[26] G. Korchm´aros 和 F. Torres。极大曲线在厄米特簇中的嵌入。数学汇刊，128(1):95–113，2001.[27] M. Lavrauw 和 J. Sheekey。实数域、代数闭域及有限域上 $2\times3\times3$ 张量的典范形。线性代数及其应用，476:133–147，2015.[28] M. Lavrauw 和 J. Sheekey。$\mathbb{F}^2\otimes\mathbb{F}^3$ 中的子空间分类及 $\mathbb{F}^2\otimes\mathbb{F}^3\otimes\mathbb{F}^r$ 中的轨道。几何学杂志，108(1):5–23，2017.[29] G. Lunardon。正规铺展。专献几何学，75(3):245–261，1999.[30] N. Ojiro。光滑厄米曲面上的有理曲线。广岛数学杂志，49(1):161–173，2019.[31]F. Pavese。双特征集的几何构造。离散数学，338(3):202–208，2015.[32] V. Pepe。关于代数簇 $\mathcal{V}_{r,\ t}$。有限域及其应用，17(4):343–349，2011.[33] J. Schillewaert 和 G. Van de Voorde。拟极空间。组合理论，2(3):论文第5号，32，2022。