arXiv:2303.01964v1 [math.CO] 3 Mar 2023

关于 AGraph 的连通诱导子图最大数量

AUDACE A. V. DOSSOU-OLORY

Abstract. 我们刻画了七种不同图类中，给定阶数且连通诱导子图数量达到最大值的图的结构；这些图类还分别具有最小度、独立数、点覆盖数、点连通度、边连通度、色数、桥数等其他给定参数，从而填补了相关文献中的一项空白。

1. 引言与预备知识 Introduction and preliminaries

设 G 是一个简单图（无向、无环且无重边），其顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(H)$ 均有限。 G 的阶是其基数 $|V(G)|$。$u \in V(G)$ 的度是图 G 中与 u 相邻的顶点数；我们用 $\delta(G)$ 表示 G 中顶点的最小度。 G 的子图是满足 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$ 的图 H。我们用 $G-e$（分别用 $G-u$）或 $G-S$ 表示从 G 中删除一条边 e（分别删除一个顶点 u），或删除一组边/顶点 S 后得到的子图。G 的诱导子图是删除一组顶点后得到的子图。我们称 $G-(V(G)\setminus S)$ 为由 S 诱导的子图，它由 S 以及所有端点均属于 S 的边组成。 G 中的独立集是由两两不相邻的顶点构成的集合。因此，顶点集 S 是独立集，当且仅当由 S 诱导的子图没有边。 G 中独立集的最大大小称为其独立数，记作 $\alpha(G)$。

如果图 G 中的每一对顶点都属于一条路径，则 G 是连通的；否则， G 是不连通的。 G 的桥（或割边）是指这样一条边：删除它会增加 G 的连通分支（剩余连通部分）数量。已知（例如，参见 [10]）， G 中的一条边是桥，当且仅当它不属于 G 中的任何一个圈。 G 的点连通度，记作 $c(G)$，是满足以下条件的顶点集 S 的最小大小：删除该集合后， $G-S$ 的连通分支数量多于 G。 G 的边连通度，记作 $e(G)$，是满足以下条件的边集 S 的最小大小：删除该边集后， $G-S$ 的连通分支数量多于 G。 G 的点覆盖是一个集合 $S \subset V(G)$，其中至少包含 G 每条边的一个端点；我们称 S 中的顶点覆盖了 $E(G)$。点覆盖数记作 $\beta(G)$，是 G 的点覆盖的最小大小。

如果我们可以为每个顶点分配 l 种颜色中的一种，使相邻顶点的颜色不同，那么图 G 就是 l- 可着色的。如果 G 是 l- 可着色的，但不是 $(l-1)$- 可着色的，我们

2020 数学学科分类。主要分类 05C30、05C35；次要分类 05C40、05C69、05C70。关键词和短语。最小度、独立数、点覆盖数、顶点连通度、边连通度、桥数、色数、连通诱导子图。1

称 G 的色数为 l。换句话说， G 的色数是为 G 的顶点着色、使相邻顶点颜色不同所需的最少颜色数。

如果图 G 的顶点两两相邻，则称其为完全图；阶为 n 的完全图记作 K_n。对于图 G 上定义的所有记号，无论其后是否跟有名称 G ，其用法均由上下文确定。

极值问题旨在求某个函数在一类对象上的最小值或最大值。在图论中，我们用“极值问题”来指在一类图中寻找最优值。本文关注的是：对于给定阶及其他结构参数的简单图 G ，确定其连通诱导子图的最大数量，记作 $\eta(G)$。

关于连通子图或连通诱导子图数量与其他图参数之间的若干上界和[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]下界已有研究，例如 [9] 。这一方向上的极值问题研究似乎始于 Pandey 和 Patra [2] 对图和单圈图中连通（不一定是诱导）子图数量的研究，这是对树的子树数量研究的自然推广。除此之外，我们从 [2] 得知，在所有给定阶的连通图中，路径唯一实现了连通诱导子图数量的最小值，而最大值仅由完全图取得。此外， [4] 中的结果可以推广到具有给定阶和连通分支数的图。另一方面，论文 [6], 研究了所有具有给定阶和割点数的连通图，以及所有具有给定阶和悬挂顶点数的连通图。在另一篇论文 [6], 中，我们研究了将某个图不变量的总和与其补图的同一不变量联系起来的不等式，这类不等式也称为 Nordhaus-Gaddum 型不等式，涉及给定阶图的连通诱导子图数量。

在本文中，我们刻画了若干迄今尚未研究的图类中，在给定阶数下使连通诱导子图数量达到最大值的唯一极值图；这些图类分别由以下参数确定：最小度、独立数、点覆盖数、点连通度、边连通度、色数和桥数。

2. Main results

对于图 G 和 $u \in V(G)$，我们用 $\eta(G)_u$ 表示包含顶点 u的 G 的连通诱导子图数量。

设 n, δ 为满足 $n-2 \geq \delta$的正整数。我们通过取一个 K_{n-1} 的副本，并向其恰好 δ 个顶点各添加一个顶点，构造图 $G_{n,\delta}$。注意，$G_{n,\delta}$的阶为 n ，最小度为 δ。

命题 2.1。 对于一个阶为 n 、最小度为 δ 的图 $G \neq G_{n,\ \delta}$ ，我们有

$$\eta(G) < \eta(G_{n,\delta})\,.$$

证明。设 G 是一个阶为 n 、最小度为 δ 的图。在 G 中固定一个度为 δ 的顶点 u 。那么，要使 G 具有最大值 $\eta(.)$ ，子图 $G-u$ 必须是完全图。特别地，$G_{n,\ \delta}$ 在阶为 n 、最小度为 δ 的那些图中唯一实现了最大值 $\eta(.)$ 。□

图 $H_{n,\ \alpha}$ 由 $K_{n-\alpha}$ 和 K_α （α 个独立顶点）的不交副本构成，然后在 $K_{n-\alpha}$ 的每个顶点与 K_α的每个顶点之间添加一条边。

命题 2.2. 对于阶为 n 、独立数为 α的图 $G \neq H_{n,\ \alpha}$ ，有

$$\eta(G) < \eta(H_{n,\alpha})\,.$$

对于阶为 n 、点覆盖数为 β的图 $G \neq H_{n,\ n-\beta}$ ，有

$$\eta(G) < \eta(H_{n,n-\beta})\,.$$

证明。设 G 是一个阶为 n 、独立数为 α的图。取 G中由 α个独立顶点组成的集合 S 。那么，为使 G 达到最大值 η（。），子图 $G-S$必须是完全图，且 S 中的每个顶点都必须与 $G-S$中的所有顶点相邻。特别地，$H_{n,\ \alpha}$ 是所有阶为 n 且独立数为 α 的图中唯一达到最大值 η（。）的图。

关于命题的第二个结论，已知（例如参见 [10]） $\alpha+\beta=n$，由此完成命题的证明。□

下一个定理讨论点连通度和边连通度。

定理 2.3. 对于图 $G \neq G_{n,c}$ ，若其阶为 n ，点连通度为 c，则有

$$\eta(G) < \eta(G_{n,c})\,.$$

对于图 $G \neq G_{n,e}$ ，若其阶为 n ，边连通度为 $e < n-1$，则有

$$\eta(G) < \eta(G_{n,e})\,.$$

证明。设 G 是一个阶为 n 、点连通度为 c的图。取 S 中的一个顶点集 c ，使得 G不连通。此时，为使 G达到最大值 η（。），子图$G-S$ 必须恰有两个连通分支（连通部分），记作 G_1, G_2，且每个连通分支都是完全图；此外， S中的每个顶点都必须与 $G-S=G_1\cup G_2$ 中的所有顶点相邻。因此，只需确定 $G_1=K_{n_1}$ 和$G_2=K_{n_2}$的阶 n_1, n_2 。不妨设 $n_1 \le n_2$。

假设 $n_1>1$。固定 $u_1 \in V(G_1)$，并通过删除 u_1 、添加一个与 $S\cup V(G_2)$ 中所有顶点相邻的新顶点 u_2 ，从 G 构造一个新图 G' 。于是， $G-u_1$ 和 $G'-u_2$ 是同构图。根据 G 和 G' 的构造， $V(G)$ 中每个包含 u_1 和 S 中一个顶点的子集，以及 $V(G')$ 中每个包含 u_2 和 S 中一个顶点的子集，总是诱导出一个连通图。 G 和 G' 中这类子图的数量分别为 $(2^c-1)2^{n_1-1}\cdot 2^{n_2}$ 和 $(2^c-1)2^{n_2}\cdot 2^{n_1-1}$。因此

$$\eta(G)_{u_1} = \eta(K_{n_1})_{u_1} + (2^c-1)2^{n_1-1}\cdot 2^{n_2} = 2^{n_1-1} + (2^c-1)2^{n_1-1+n_2}$$

and

$$\eta(G')_{u_2} = \eta(K_{n_2+1})_{u_2} + (2^c-1)2^{n_2}\cdot 2^{n_1-1} = 2^{n_2} + (2^c-1)2^{n_2+n_1-1}\,.$$

因此，我们得到

$$\eta(G') - \eta(G) = \eta(G')_{u_2} - \eta(G)_{u_1} = 2^{n_2} - 2^{n_1-1} > 0\,,$$

这表明 $\eta(G') > \eta(G)$。因此，对于 G 而言，要使最大 $\eta(\text{。})$成立， $n_1 = 1$ 是必要的。另一方面， S 必须诱导出一个完全图：这意味着实现最大 $\eta(\text{。})$的图确实是 $G_{n,\ c}$。

为证明定理的第二个结论，首先注意，如果在 $G_{n\text{中},\ x}$的唯一顶点 u 的度为 $x < n-2$，那么 $G_{n,\ x} - u = K_{n-1}$ 而

$$\eta(G_{n,x})_u = 1 + (2^x - 1)2^{n-1-x} = 1 + 2^{n-1} - 2^{n-1-x}$$

恰好统计了 $G_{n\text{中}}$ u所属的连通诱导子图数量。因此，$\eta(G_{n,\ x}) = \eta(K_{n-1}) + \eta(G_{n,\ x})_u$ 是关于 x的严格递增函数。

现在令 G 为一个阶为 n 且边连通度为 e的图。记 c 为 G的点连通度。那么有 $\eta(G) \leq \eta(G_{n,\ c}) \leq \eta(G_{n,\ e})$，其中，第一个不等式源于定理的第一个结论，第二个不等式由惠特尼定理 [11] 给出的 $c \leq e$成立。至此，定理得证。□

Tur`án 图$T_{n,\ l}$ 是一个 l部完全图，其阶为 n，其中任意两个划分集的基数之差至多为一。这个著名的图出现在许多极值图论问题中。

定理 2.4. 对于一个$G \neq T_{n,\ l}$ 其阶为 n 且色数为 l，有

$$\eta(G) < \eta(T_{n,l})\,.$$

证明。设 G 为一个阶为 n 且色数为 l的图。根据颜色对 G 的顶点进行划分。于是，这 l 个划分集（色类）都是独立集，其大小分别为 n_1，n_2，.....，n_l，其中 $n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n$。因此，要使 G具有最大的 η（。），它必须是一个 l部完全图，且其部集就是这些划分集。特别地，当 $l = n$时，只有 $K_n = T_{n,\ n}$ 能取得最大值。下文中，我们假设$l < n$。设 A 和 B 分别为 G的所有 l 个部集中基数最大和最小的两个部集。则有 $|A| > 1$。下面证明$|A| - 1 \leq |B| \leq |A|$。

假设结论不成立，固定 $a \in A$。从 G 构造一个新图 G'：删除顶点 a，再取一个新顶点 b，使其颜色与 B中的顶点相同，并在 b与 V中的每个顶点之间添加一条边（G）\（$B \cup \{a, b\}$）。注意，由于图 $G - a$和 $G' - b$按构造同构，因此 η（G'）$-\eta$（G）$= \eta$（G'）$_b - \eta$（G）$_a$。此外， G 的每个同时包含 a 和 V（G）中的一个元素的顶点子集$\backslash A$，以及 G'的每个同时包含 b 和 V（G'）中的一个元素的顶点子集（\）（$B \cup \{b\}$），总是诱导出一个连通图。另一方面， A 和 $B \cup \{b\}$ 分别是 G 和 G'中的独立集。因此，我们得到 η（G）$_a = 1+$（$2^{|V}$（G）$^{|-|A|}-1$）$2^{|A|-1}$，以及 η（G'）$_b = 1+$（$2^{|V}$（G'）$^{|-|B|-1}-1$）$2^{|B|}$。于是

$$\begin{aligned}\eta(G') - \eta(G) = \eta(G')_b - \eta(G)_a &= 2^{|V(G')|-1} - 2^{|B|} + 2^{|A|-1} - 2^{|V(G)|-1} \\ &= 2^{|A|-1} - 2^{|B|} > 0\end{aligned}$$

由不等式 $|B| < |A|-1$ 可知。这与所选 G 满足 $\eta(G') \leq \eta(G)$ 矛盾。因此，若要使 G 达到最大值 η（。），它必须是一个完全 l 部图，且满足 $|A|-1 \leq |B| \leq |A|$。根据集合 A 和 B 的选取，我们得出，实现最大值 η（。）的图确实是 Tur`an 图 $T_{n,\ l}$。□

对于我们的 n 个定理，我们需要先给出一个引理，该引理也见于 [3, 5] .

引理*1*（引理 *2*.1 [3], 引理 1 [5]）。设 L、M、R 是三个非平凡的连通图，其顶点集两两不相交。设 $l \in V(L)$ $r \in V(R)$ 和 u、$v \in V(M)$ 是满足 $u \neq v$ 的固定顶点。记 G 为由 L、M、R 通过将 l 与 u 识别，并将 r 与 v 识别而得到的图。类似地，设 G'（分别为 G''）是由 L、M、R 通过将 l、r 均与 u 识别（分别将 l、r 均与 v 识别）而得到的图；这些图的示意图见图*1*。则有

$$\eta(G') > \eta(G) \ or \ \eta(G'') > \eta(G) .$$

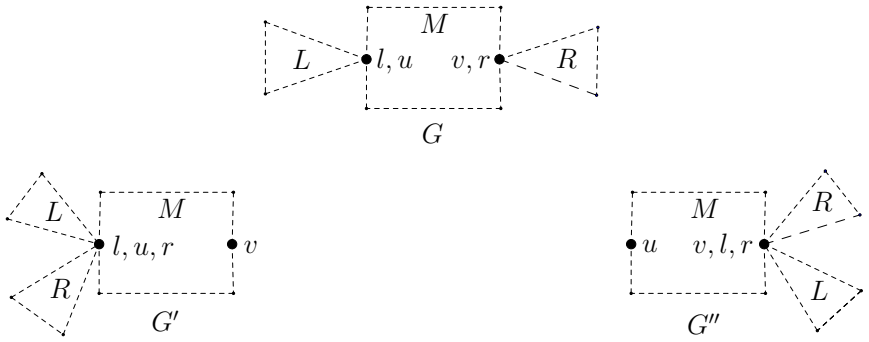

FIGURE 1. 引理 G、G'、G'' 中描述的图1。

图 G 中一个端点度为1的边称为 G的悬挂边。阶为 n 的星图记作 S_n。

对于满足 $b < n-2$的正整数 b、n，定义$J_{n,\ b}$为将 K_{n-b} 的一个顶点与 S_{b+1}的中心顶点合并得到的图。对于 $b = n-2$，图$J_{n,\ b}$ 定义为在 S_{n-1}的一条边上插入一个顶点后得到的图。

定理2.5。对于阶为 n 且有 b 条桥的图$G \neq J_{n,\ b}$，有

$$\eta(G) < \eta(J_{n,b}) .$$

证明。设 G 是一个阶为 $n > 2$ 且有 b 条桥的图。在中固定一条桥，其端点为u、v。引理 $M = uv$ 中的特化1 表明，G 中的所有边在和 G''中均保持其状态（桥/非桥）。此外，桥 uv 在和 G''中都变成悬挂边。因此，只需对以下图类中的 G 证明该定理：阶为 n 且有 b 条悬挂边（或悬挂顶点）的图。

值得庆幸的是，在 [4, 6] 中，我们确定了在给定阶和悬挂顶点数的情况下，使连通诱导子图数量最多的图结构：如果

$b < n-2$，则极值图可通过将 K_{n-b} 的一个顶点与 S_{b+1}的中心顶点识别而得到；如果 $b = n-2$，则可通过在 S_{n-1}的一条边上插入一个顶点而得到。定理得证。□

3. Concluding comments

在所有阶为 n 且最小度为 δ的图中，当 $\delta = 1$ [2] 时，路径达到连通诱导子图数量的最小值；当 $\delta = 2$ [2, 4]时，则由圈达到最小值。这引出了以下问题：在所有阶和最小度给定的图中，连通诱导子图的最小数量是多少 $\delta > 2$? 回顾一下，命题2.1 回答了这一问题的最大化版本。

定理2.3 证明，对于阶和连通度给定的图，无论采用顶点连通度还是边连通度，连通诱导子图数量最多的图都相同。值得指出的是（见 [2, 4]），在所有阶为 n 且连通度为 1 的图中，路径的连通诱导子图数量最少；而在所有连通度为 2 的图中，圈的连通诱导子图数量最少。迄今尚未确立连通诱导子图数量与图的连通度之间的其他关系。因此，此时另一个自然的问题是考察连通度大于 2 的一般情形。在我们看来，即使连通度为 3 的情形也可能非常困难。

References

[1]M. Alokshiya、S. Salem 和 F. Abed。《枚举所有连通诱导子图的线性延迟算法》。BMC Bioinformatics，20（增刊 12），319（2019）。https://doi.org/10.1186/ s12859-019-2837-y[2] A. A. V. Dossou-Olory。《具有极值连通子图数量的图和单圈图》。已被 Indian Journal of Discrete Mathematics 接收，将发表于 8(2)，2023 年。https://ijdm.adma. co.in/[3] A. A. V. Dossou-Olory。《单圈图的连通诱导子图数量最大化》。Turkish Journal of Mathematics，46(8):3359–3372，2022 年。[4] A. A. V. Dossou-Olory。《图的割点、悬挂顶点与连通诱导子图数量》。European Journal of Mathematics 7:766–792，2021 年。[5] A. A. V. Dossou-Olory。《具有最多连通诱导子图的割点和单圈图》。预印本，https://arxiv.org/abs/2002.04411，2020 年。[6] E. O. D. Andriantiana 和 A. A. V. Dossou-Olory。《图中连通诱导子图数量的 Nordhaus-Gaddum 不等式》。Quaestiones Mathematicae 45(8):1191–1213，2022 年。[7] C. Komusiewicz 和 F. Sommer。《枚举连通诱导子图：改进延迟并进行实验比较》。Discrete Applied Mathematics，303:262-282，2021 年。[8] S. Maxwell、M. R. Chance 和 M. Koyut¨urk。《高效枚举大型分子网络中的所有连通诱导子图》。载于：A. H. Dediu、C. Mart´ın-Vide、B. Truthe（编），Algorithms for Computational Biology。AlCoB 2014。Lecture Notes in Computer Science，第 8542 卷。Springer，Cham。https://doi.org/10.1007/978-3-319-07953-0 14[9] D. Pandey 和 K. L. Patra。《图的核指数》。预印本：https://arxiv.org/abs/1811.11411v2，2019 年。[10] D. B. West。《图论导论》。第二版。伊利诺伊大学，厄巴纳，Pearson Education（新加坡），2002 年。[11] H. Whitney。《全等图与图的连通度》。American Journal of Mathematics 54: 150–168，1932 年。

Audace A. V. Dossou-Olory, Département d'Hydrologie et Gestion des Ressources en Eau, Institut National de l'Eau, and Centre d'Excellence d'Afrique pour l'Eau et l'Assainissement, Université d'Abomey-Calavi, Bénin电子邮箱地址：audace@aims.ac.za