arXiv:2303.01969v1 [math.MG] 3 Mar 2023

受控增长覆盖的渐近维数

DAVID HUME、JOHN M. MACKAY 和 ROMAIN TESSERA

Abstract. 我们证明了若干结果，指出在常见研究的空间之间不存在正则映射（或粗嵌入）
例如，当 Y 是一个次指数增长的有界度图，且 T_3 是3-正则树时，不存在从 $n \geq 3$到T_3的正则映射（或粗嵌入） $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^{n-1} \times Y$，也不存在从$T_3$到$T_3$的正则映射（或粗嵌入）$(T_3)^n \to (T_3)^{n-1} \times Y$。我们还解决了 [BST12，第5题，2], 证明当 Y 是一个至多多项式增长的有界度图时，不存在从 Y 到 $\mathbb{H}^2 \to T_3 \times Y$ 的正则映射；当Y具有次指数增长时，也不存在拟等距嵌入。最后，我们证明不存在从 $F^n \to \mathbb{Z} \wr F^{n-1}$到$F$ 的正则映射，其中F 是由两个生成元生成的自由群。

为了证明这些结果，我们引入并研究渐近维数的推广形式，它允许使用具有受控增长的无界覆盖。对于有界度图，这些不变量在正则映射（因而也包括粗嵌入）下具有单调性。

1. Introduction

粗嵌入的概念自然产生于几何群论中，最直接的例子是将紧生成局部紧群的闭紧生成子群包含其中（群赋予词度量）。更一般地，若 G是一个紧生成局部紧群，并在度量空间 X上以等距变换的方式正规且连续地作用，那么对于任意 $x \in X$，轨道映射 $g \mapsto g \cdot x$ 都是粗嵌入。拟等距嵌入是粗嵌入的一种特殊情形，可以将其视为“未发生扭曲”的嵌入。总体而言，拟等距嵌入的性质更容易理解，因为它们携带的不变量远多于一般的粗嵌入：例如，双曲群之间的拟等距嵌入会在其格罗莫夫边界之间诱导出拟对称映射，而粗嵌入则未必如此 [BR13]。

另一类自然的映射是正则映射（参见 [BST12]）：回忆一下，度量空间之间的映射 $f\colon X \to Y$ 若存在某个κ，使得

- $d_Y(f(x), f(x')) \leq \kappa(1 + d_X(x, x'))$ for all $x, x' \in X$; and

日期：2023年3月6日。第一作者获得了英国工程与自然科学研究委员会拨款EP/V027360/1“群与空间的粗几何”的支撑。

- Y 中每个半径为 1 的开球的原像，都包含在至多 κ 个半径为 1 的球的并集中。

有界几何[1] 度量空间之间的每个粗嵌入都是正则映射，但反之则不成立，例如 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，$n \mapsto |n|$。尽管对正则映射的研究远少于对粗嵌入的研究，它们仍会自然出现：事实上，任何有界度图中任一子图的包含都是一个正则映射（尽管它未必是粗嵌入）。

1.1. 不可嵌入结果。我们尤其关注以下问题。

问题 1.1。考虑具有指数增长的空间 X 和 Y（通常是对称空间和正则树的乘积），使得不存在从 X 到 Y的粗嵌入/正则映射。证明不存在从 X 到 $Y \times Z$ 的粗嵌入/正则映射，其中 Z 是一个具有次指数增长的空间（例如 $\mathbb{R}^k$）。

文献中该问题的具体实例包括 [BST12，问题 5。2]，，其询问是否存在一个正则映射 $\mathbb{H}^2 \to T_3 \times \mathbb{R}$；以及 [Ben22，问题 6。2]：设 X 和 Y是非欧几里得对称空间的直积，且对于某个 k，存在从 X 到 $Y \times \mathbb{R}^k$ 的粗嵌入，这是否意味着 rank(X) $\leq$ rank(Y)?

我们的第一个结果对 Benjamini–Schramm–Tim´ar 提出的问题给出了强有力的否定回答。

定理 A. 当 Z 具有多项式增长时，不存在从 $\mathbb{H}^2$ 到 $T_3 \times Z$ 的正则映射。

很容易看出，$\mathbb{H}^2$ 不允许存在到T_3 的正则映射（例如利用渐近维数即可证明）。在 [BS07b]，中，Buyalo–Schroeder 排除了从$\mathbb{H}^2$ 到 $T_3 \times \mathbb{R}^k$的拟等距嵌入的存在性；但迄今为止，即使在 $k = 1$ 的情况下，也没有任何不变量能够阻碍粗嵌入（见 [BST12，问题 5.2]）。有趣的是，即便是 [HMT22] 中那些在秩一对称空间（维数为 > 2）与欧几里得空间的直积上极为有效的解析技巧，在这里也失效了；见 [HMT22，注 6.9]。

关于拟等距嵌入，我们将 Buyalo–Schroeder 的结果改进如下：

定理 B. 当 Z 具有次指数增长时，不存在从 $\mathbb{H}^2$ 到 $T_3 \times Z$的拟等距嵌入。

现在我们转而讨论其他对称空间。回顾一下，一般的对称空间可分解为对称空间的直积 $X = X_c \times X_e \times X_{nc}$，其中 X_c是紧致的，X_e是欧几里得的，而 X_{nc}没有

[1]如果一个度量空间对每个 R 都存在某个 C_R，使得半径为 R 的每个球都包含在至多 C_R 个半径为 1 的球的并集中，那么它具有有界几何。

非平凡的紧致因子或欧几里得因子。对称空间X 的秩是等距嵌入的欧几里得空间的最大维数，记作 rank(X)。定义对称空间X 的余秩为 corank(X) $=$维数 $X-$减去秩 X [2]。

在 [BS02], Buyalo–Schroeder 中，他们证明了：对于一对 X无紧因子Y的对称空间，如果存在一个拟等距嵌入 $X \to Y$，则 corank(X) $\leq \leqslant$ corank(Y)。

我们相信，[3] 来自 [BS07b] 的技术同样可以用于证明这一不等式对正则映射也成立。在此，我们采用一种不同的方法来证明以下更强的结论。

定理 C. 设 X 为无紧因子的对称空间，设 Y 为实双曲空间的直积，设 $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$，并设 Z 为一个具有次指数增长的有界度图。如果存在一个正则映射

$$X \times T_3^{\ell} \to Y \times T_3^{\ell'} \times Z,$$

then

$$\operatorname{corank}(X) + \ell \leq \operatorname{corank}(Y) + \ell'.$$

我们来讨论几个例子。对于任意 $n \geq 2, k \geq 0$，不存在从 $\mathbb{H}^{n+1}$ 到 $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^k$ 的正则映射，这一点由作者此前的工作 [HMT22], 得出，也很可能可以作为上述 [BS02]结果中所用方法的推论得到。现在，我们能够将 $\mathbb{R}^k$ 替换为任意一个具有次指数增长的图：

推论 1.2. 对于 $n \geq 2$，只要 Z 是一个具有次指数增长的有界度图，就不存在从 $\mathbb{H}^{n+1}$ 到 $\mathbb{H}^n \times Z$的正则映射。

沿着 Gromov 在 [Gro93, §7.E_2第 141–144], 页提出的一种基于填充函数的精妙策略，Bensaid 证明了非欧对称空间与欧几里得建筑的直积的秩在粗嵌入下具有单调性 [Ben22]。秩在正则映射下的单调性仍是一个未解问题。具体而言，Bensaid 关于秩的单调性排除了对任意 $k \geq 2$ 从 $T_3 \times T_3 \times T_3$ 到 $\mathbb{H}^k \times \mathbb{H}^k$ 存在粗嵌入的可能，但并未排除正则映射的存在。另一方面，对于某些 k，此前的任何结果都不能排除从 $T_3 \times T_3 \times T_3$ 到 $T_3 \times T_3 \times \mathbb{R}^k$ 存在粗嵌入的可能。现在，这成为以下结果的一个特例：

推论 1.3. 对于 $n \geq 2$，不存在从 $(T_3)^n$ 到 $(\mathbb{H}^2)^{n-1} \times Z$（特别是到 $(T_3)^{n-1} \times Z$）的正则映射，只要 Z 是一个具有次指数增长的有界度图。

[2]余秩不应与 Buyalo 和 Schroeder 引入的“次指数余秩”混淆，他们也将其记作 corank，而我们将其记作 $\operatorname{corank}_{se}$。我们将在 §1.3 中讨论这一概念及其与余秩的关系。[3]特别是引理 14.2.2 和 14.2.4

注意，定理 C 并未排除从 $T_3 \times T_3 \times T_3$ 到 $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$存在正则映射的可能性；这一问题仍未解决。

1.2. 不变量。我们先简要回顾在粗嵌入／正则映射下保持单调的已知几何不变量。第一个是体积增长，例如，它排除了从 3-正则树 T_3 到一个次指数增长图的正则映射存在的可能性。Gromov 引入的一个更精细的不变量是渐近维数，可将其视为覆盖维数的大尺度版本。这一概念在数学的多个领域中发挥了基础性作用，涉及范围从拓扑学到非交换几何。它在正则映射下的单调性已在 [BST12]中得到证明。对于非紧型对称空间的直积，已知渐近维数与拓扑维数一致（见 [CG04，推论 3.6]）：例如，这排除了从 $\mathbb{H}^n$ 到 $\mathbb{H}^{n-1}$存在正则映射的可能性。在满足附加假设的空间之间的粗嵌入下保持单调的其他不变量包括（上）同调维数 [Sha04, Sau06, Li18]、同调填充函数 [KP22]以及等周剖面 [DKLMT22]。无论对含有无限连通分支的 Z 作何选择，这些不变量都无法用于证明定理 A、B 或推论 1.2、1.3。

我们用于证明定理 C 的不变量，是渐近维数的一种推广：它将覆盖中元素直径一致有界这一通常条件，替换为要求这些元素具有一致受控增长——在本例中，即其增长一致地被某个次指数增长函数从上方所界。对于定理 A，我们需要这一概念稍微更复杂的变体。

给定一族单调不减函数 $\mathcal{F}$ $[0,\infty) \to [0,\infty)$，以及一个度量空间 X，我们称 X 模 $\mathcal{F}$ 的渐近维数至多为 n，如果对于任意 $r > 0$，都能找到 X的一个覆盖 $\{X_i\}$，使得 X 中半径为 r 的每个球至多与该覆盖中的 $n+1$ 个元素相交，并且覆盖中各集合的增长一致地受某个 $f \in \mathcal{F}$控制。我们区分两种一致控制的版本。第一种（弱）版本只考虑覆盖中各个元素的增长。第二种（强）版本还要求控制彼此距离有界的元素的迭代并集。我们分别用 $\operatorname{asdim}_{\mathcal{F}}(X)$ 和 $\operatorname{asdim}_{\mathcal{F}}(X)$ 表示这两种版本。显然，$\operatorname{asdim}_{\mathcal{F}}(X) \leq \operatorname{asdim}_{\mathcal{F}}(X)$，下面我们将看到一个例子，其中这一不等式是严格的。我们在 §2 中给出的定义实际上更一般，因为它们允许我们考虑相对于任意度量空间族类的渐近维数（见定义 2.4）。

引入这些概念的主要动机是它们在正则映射下的单调性。

命题 1.4. 设 X 和 Y 为与有界度图准等距的度量空间。若存在正则映射 $X \to Y$，则对于任意函数族 $\mathcal{F}$，有

$$\operatorname{asdim}_{\mathcal{F}}(X) \leq \operatorname{asdim}_{\mathcal{F}}(Y) \quad and \quad \overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{F}}(X) \leq \overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{F}}(Y).$$

当 $\mathcal{F}$ 为常函数集合时，$\operatorname{asdim}_{\mathcal{F}}(X)$ 和 $\overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{F}}(X)$ 均等于通常的渐近维数。上文给出的是渐近维数的“覆盖”定义。我们证明，还存在等价的“着色”定义，以及一个等价的“多面体”定义[4]，它是通过到单纯复形的 ε-Lipschitz 映射来表述的（见命题 2.13 和 3.20）。我们还证明了一个自然的乘积公式。

命题 1.5. 设 X 和 Y 为有界度图，$\mathcal{F}$、$\mathcal{F}'$ 为函数族。则有

$$\operatorname{asdim}_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}(X \times Y) \leq \operatorname{asdim}_{\mathcal{F}}(X) \times \operatorname{asdim}_{\mathcal{F}'}(Y); \quad and$$
$$\overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}(X \times Y) \leq \overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{F}}(X) \times \overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{F}'}(Y)$$

其中 $\mathcal{F}\mathcal{F}'$ 是所有满足 $f \in \mathcal{F}$ 且 $f' \in \mathcal{F}'$ 的函数 $g(n) = f(n)f'(n)$ 的集合。

为方便起见，我们定义以下由（非递减）函数 f 组成的集合：$[0,\infty) \to [0,\infty)$：

- $\operatorname{poly}(d)$ 是所有存在某个 $C > 0$、且上界为 $Cn^d + C$ 的函数所组成的集合，
- poly 是所有存在某个 $C > 0$ 和某个 $d > 0$、且上界为 $Cn^d + C$ 的函数所组成的集合，
- se 是所有次指数函数的集合，即 $f \in$ 当且仅当

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log(f(r)) = 0.$$

定理 C 是以下结论的推论：

定理 D. 设 X 是一个不含紧因子的对称空间，并设 $\ell \in \mathbb{N}$，

$$\operatorname{asdim}_{\mathrm{se}}(X \times T_3^{\ell}) \geq \operatorname{corank}(X) + \ell. \tag{1.6}$$

此外，如果 X 是欧几里得空间与实双曲空间的直积，则有

$$\operatorname{asdim}_{\mathrm{se}}(X \times T_3^{\ell}) = \operatorname{asdim}_{\mathrm{poly}}(X \times T_3^{\ell}) = \operatorname{corank}(X) + \ell. \tag{1.7}$$

[4]此处的术语取自 [BS07b]

注意，根据命题 1.5，若将 $X \times T_3^\ell$ 与一个具有次指数增长的有界度图取直积，则 (1.6) 和 (1.7) 仍然成立。

下界 (1.6) 的关键步骤在于，任何由一致次指数增长集合构成的覆盖，与一个指数扭曲子集相交后，所得集合的直径都一致有界。这一启发式思路可导出以下结果：

命题 1.8. 设 X、Y 为一致离散度量空间。若存在正则映射 $f : Y \to X$，以及常数 C，使得对所有 $y,\ y' \in Y$

$$d_X(f(y), f(y')) \leq C \log(1 + d_Y(y, y')) + C \tag{1.9}$$

则渐近维数$_{\mathrm{se}}(X) \geq$ 渐近维数(Y)。

为得到下界，我们需要这一结果的一个变体：只要求 (1.9) 对固定的 y（以及所有 y'）成立，但代价是对 Y 作出更强的假设（即它与一个 Carnot 群拟等距）。

证明定理 D 中上界的关键，是构造双曲平面的一个特定覆盖（见命题 4.1），再通过考察 $\mathbb{H}^d \to (\mathbb{H}^2)^{d-1}$ 的一个自然拟等距嵌入，将其推广到双曲空间 $\mathbb{H}^d$。对这一嵌入进行细致分析，可得以下下界。

定理 E. 对所有 $d \geq 2$,

$$\mathrm{asdim}_{\mathrm{poly}(d)}(\mathbb{H}^d) \leq d - 1.$$

渐近维数的定义在某种程度上是专门设计来排除类似于证明定理 E 时所构造的覆盖。事实上，我们有：

定理 F. 对每个 $d \in \mathbb{N}$，我们有

$$\overline{\mathrm{asdim}}_{\mathrm{poly}(d)}\mathbb{H}^2 = 2.$$

注意，定理 A 可由定理 F 推出（定理 B 将是其证明的推论）。

我们证明，渐近维数$_{\mathcal{F}}$ 和渐近维数$_{\mathcal{F}}$ 满足纤维化稳定性性质，这尤其意味着以下结果。

命题 1.10. 假设 G 是一个有限生成群，并且我们有一个短正合列

$$1 \to P \to G \to Q \to 1,$$

其中，P 的每个有限生成子群在赋予诱导度量后都具有次指数增长。因此，asdim$_{\mathrm{se}}(G) \leq$asdim(Q)。

这一结果适用于缠绕积。

推论 1.11. 若 L 是一个具有次指数增长的有限生成群，且 Q 是一个具有有限渐近维数的有限生成群，则绕圈积 $L \wr Q = \bigoplus L \rtimes Q$ 满足

$$\operatorname{asdim}_{\mathrm{se}}(L \wr Q) \leq \operatorname{asdim}(Q).$$

证明。 $\bigoplus L$ 的任意有限生成子群都包含在 $\bigoplus L = \{f$ 的一个子群 $H \cong L^n$ 中： $Q \to L\}$ 其中所有函数的支撑都位于某个共同的有限集合中，该集合的大小为 n。由于$H \cong L^n$ 具有次指数增长，并且 $H \cong L^n$（赋予 ℓ^1度量）到 $L \wr Q$ 的包含映射不缩短距离，因此 $L \wr Q$的诱导度量下， H 具有次指数增长。应用命题 1.10 即得所述结果。□

例如，将这一推论与 (1.6) 结合起来，我们可推得 F^n不能正则嵌入 $\mathbb{Z} \wr F^{n-1}$，其中 F表示由两个生成元生成的自由群（注意， $\mathbb{Z} \wr F^{n-1}$的渐近维数是无穷大）。

1.3. 与 Buyalo–Schroeder 的不变量比较。正如我们已经提到的，定理 C 中考察的空间在 Buyalo–Schroeder 的研究中也占有重要地位；他们构造了若干不变量，用以阻碍非紧型对称空间、正则树和欧几里得空间的乘积之间的拟等距嵌入。他们工作中的三个重要不变量是双曲维数（hypdim）、双曲秩（rank_h）和次指数余秩（$\mathrm{corank}_{\mathrm{se}}$）。他们关于双曲维数的概念，是我们引入自身渐近维数相对概念的主要灵感来源。事实上，它可以看作是模去满足倍增条件一致变体的块后的渐近维数：也就是说，存在常数 N ，使得对于所有 $R \geq 1$，半径为 $2R$ 的球都能被至多 N 个半径为 R 的球覆盖。这种条件在拟等距下具有单调性，但在粗嵌入下则不然。因此，双曲维数先验上没有理由在粗嵌入下具有单调性。注意，

$$\operatorname{hypdim}(X) \geq \operatorname{asdim}_{\mathrm{poly}}(X) \geq \operatorname{asdim}_{\mathrm{se}}(X).$$

第一个不等式由以下观察得出：一致倍增空间具有一致多项式增长。第二个不等式成立，因为多项式函数是次指数的。下面的不等式则更加微妙。

定理 G. 设 X 是一个与有界度图拟等距的度量空间。我们有

$$\operatorname{asdim}_{\mathrm{se}}(X) \geq \max\{\operatorname{corank}_{\mathrm{se}}(X), \operatorname{rank}_h(X)\}$$

对于次指数余秩，定理 G 是渐近维数的“多面体”定义的自然推论[se] ；而对于双曲秩，我们

将命题 1.8/命题 3.1 应用于双曲空间中的一族“水平集” Y，这些水平集经过指数扭曲，其渐近维数（作为一个族）至少等于 Y 边界的拓扑维数。我们可能有渐近维数$_{\mathrm{se}}(X) > $ 秩$_h(X)$，例如渐近维数$_{\mathrm{se}}(T_3) = 1 > 0 =$ 秩$_h(T_3)$。我们没有渐近维数$_{\mathrm{se}}(X) >$ 余秩$_{\mathrm{se}}(X)$ 的例子，尽管这样的例子或许存在，因为可以证明渐近维数$_{\mathrm{poly}(1)}(\mathbb{H}^2) = 2$，而类似于 Buyalo–Schroeder 所定义的“线性余秩”取值为 1（因为 horocyclic 投影 $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ 的原像呈线性增长）。

1.4. 问题/猜想。

猜想 1.12. 设 X 是一个紧因子平凡的对称空间，并设 $\ell \in \mathbb{N}$。我们有

$$\mathrm{asdim}_{\mathrm{poly}}(X \times T_3^\ell) = \mathrm{asdim}_{\mathrm{se}}(X \times T_3^\ell) = \mathrm{corank}(X) + \ell. \tag{1.13}$$

我们还猜想，定理 E 在以下意义下是最优的。

猜想 1.14. 我们有渐近维数$_{o(\mathrm{poly}(d))}(\mathbb{H}^d) = d$，其中 $o(\mathrm{poly}(d))$ 是由满足 $\lim_{t\to\infty} f(t)/t^d = 0$ 的非递减函数 f 构成的族。

较弱的等式渐近维数$_{\mathrm{poly}(d-1)}(\mathbb{H}^d) = d$，结合命题 1.5，足以排除正则映射 $\mathbb{H}^d \to \mathbb{H}^{d-k} \times (T_3)^k$ 存在的可能性，只要 $1 \le k \le d$。这将是最优的，因为对于所有 $0 \le k \le d-2$ [，都存在一个拟等距嵌入 $\mathbb{H}^d \to \mathbb{H}^{d-k} \times \mathbb{H}^{k+1} \to \mathbb{H}^{d-k} \times (T_3)^{k+1}$ BF98、BDS07]。

我们相信，对于每个 d，都有渐近维数$_{\mathrm{poly}(n)}\mathbb{H}^d = d$，$n$；更一般地：

猜想 1.15. 对于每个非紧型秩一对称空间 X 以及每个 d，我们有渐近维数$_{\mathrm{poly}(d)}(X) =$ 渐近维数(X)。

最后，定理 A 和定理 B 都应是以下猜想的特例。

猜想 1.16. 对于任何次指数增长的空间Y，都不存在正则映射 $\mathbb{H}^2 \to T_3 \times Y$。

1.5. 论文结构。第 2 节中，我们定义不变量，并展示其基本性质，例如它们在正则映射、乘积和扩张下的行为（命题 1.4、1.5 和 1.10）。第 3 节中，我们利用指数扭曲子集建立定理 D 的下界；还证明了定理 G，该定理揭示了渐近维数$_{\mathrm{se}}$ 与余秩$_{\mathrm{se}}$ 和秩$_h$之间的关系。第 4 节中，我们构造实双曲平面（以及由此推广到更高维实双曲空间）的分解，从而建立定理 D 和 E 的上界。（定理 C 可由定理 D 立即推出。）最后，第 5 节中，我们证明一致渐近维数 asdim$_{\mathrm{poly}(d)}(\mathbb{H}^2) = 2$（定理 F），并给出定理 A 和 B 的不可嵌入结果。

2. Asymptotic dimension relative to classes of metricfamilies

本节将引入渐近维数的相对版本。由于我们需要处理一些度量空间，而它们恰好是赋有诱导度量的图的顶点子集，因此采用以下一类度量空间会更方便：若度量空间 X 满足当$x \neq y$时， $d(x, y) \geq 1$ ，则称其为（1-）一致离散的。

接下来，使用度量空间族会更方便，我们将其简称为“度量族”，以区别于单个度量空间。若度量族 $\mathcal{X}$ 满足：对所有 $R > 0$，都存在 $N > 0$ ，使得来自 $\mathcal{X}$ 中任一度量空间的半径为 R 的球的基数至多为 N，则称该度量族具有有界几何。接下来，我们的所有度量族都将是一致离散的（常数为 1），且具有有界几何。

2.1. 定义与基本性质。我们回顾以下改编自 [GTY12]的术语。设 X 是一个度量空间。若将 X 的子集作不交并 $A = \coprod_i A_i \subset X$ ，且对某个$r \geq 0$ ，这些子集 A_i 两两之间的距离至少为 r，则称该不交并为 r-不交；记作 $A = \coprod_i^{r-\text{disjoint}} A_i$。

定义2.1。设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为度量族，设 $r \geq 0$，并设 $d \in \mathbb{N}$。若对所有 $X \in \mathcal{X}$，我们都可以写成 $X = X_0 \cup \cdots \cup X_d$，使得对于每个 $0 \leq i \leq d$，有 $X_i = \coprod_j^{r-\text{disjoint}} X_{ij}$，其中 $\{X_{ij}\} \subset \mathcal{Y}$，则记作 $\mathcal{X} \xrightarrow{(r,d)} \mathcal{Y}$。现设 $\mathcal{M}$ 为一个度量族类。若对于每个 $r \geq 0$，存在 $\mathcal{Y} \in \mathcal{M}$ 使得 $\mathcal{X} \xrightarrow{(r,d)} \mathcal{Y}$，则称度量族 $\mathcal{X}$ d-分解于 $\mathcal{M}$ 。

我们将需要对分解概念作如下强化。首先需要引入以下记号。

记号2.2。给定一个度量空间 X 以及 $\mathcal{Y}$ ，其中 $\mathcal{Y}$ 是 X的一个子空间族。对于所有 $s > 0$和 $m \geq 0$， $N_s^m(\mathcal{Y}) = \{N_s^m(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\}$递归定义如下：对于所有 $Y \in \mathcal{Y}$， $N_s^0(Y) = Y$；并且对于每个 $k \geq 0$, $N_s^{k+1}(Y)$是所有与 $N_s^k(Y)$的闭s-邻域相交的 $Y' \in \mathcal{Y}$的并集。

定义 2.3. 设 $\mathcal{M}$ 是一个度量族类。若对于每个$r \geq 0$，都存在 $\mathcal{X} \xrightarrow{(r,d)} \mathcal{Y}$，其中 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{X}$的一个度量子空间族，并且对所有 m、$s \geq 1$， $N_s^m(\mathcal{Y}) \in \mathcal{M}$，则称度量族 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{M}$上 d一致分解。

现在我们引入一些度量空间族的类。

(1) 若存在 $R \geq 0$ ，使得 $\mathcal{X}$ 中的所有度量空间的直径都不超过 R，则度量族 $\mathcal{X}$ 称为有界的。我们用$\mathcal{B}$ 表示有界族类。

(2) 给定递增函数 $V\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，若存在 $C\geq 1$，使得对于所有 $r\geq 0$，$\mathcal{X}$ 中的所有度量空间内半径为 r 的球，其基数都不超过 $CV(Cr)+C$，则称度量族 $\mathcal{X}$具有增长函数 $\lesssim V$。我们用 $\mathcal{M}_V$ 表示增长为 $\lesssim V$的度量族类。(3) $\mathcal{M}_{\mathrm{se}}$ 表示次指数增长度量族类，即$\mathcal{M}_{\mathrm{se}}=\bigcup_V \mathcal{M}_V$，其中 V 遍历所有次指数非递减函数。(4) 对于每个 $d\geq 1$，我们令 $\mathcal{M}_{\mathrm{poly}(d)}=\mathcal{M}_{r\mapsto r^d}$。(5) 最后，我们令 $\mathcal{M}_{\mathrm{poly}}=\bigcup_{d\geq 1}\mathcal{M}_{\mathrm{poly}(d)}$。

我们注意到，度量空间 X 满足渐近维数 $X\leq d$，当且仅当 $\{X\}$（一致地）d-分解于 $\mathcal{B}$。推广而言，若度量族 $\mathcal{X}$ 分解于 $\mathcal{B}$，则称其渐近维数至多为 d。更一般地，我们定义：

定义 2.4。设 $\mathcal{M}$ 是度量族的一个集合，且 $\mathcal{X}$ 是一个度量族。

- 度量族 $\mathcal{X}$ 模 $\mathcal{M}$ 的渐近维数，记作渐近维数 $_{\mathcal{M}}\mathcal{X}$，是满足 $\mathcal{X}$ d 分解于 $\mathcal{M}$ 的最小 $d\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。
- 度量族 $\mathcal{X}$ 模 $\mathcal{M}$ 的一致渐近维数，记作渐近维数 $_{\mathcal{M}}\mathcal{X}$，是满足 $\mathcal{X}$ 一致地 d-分解于 $\mathcal{M}$ 的最小 $d\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。

注 2.5。在本文中，我们将关注以下情形：
（1）根据定义，我们有 $\mathrm{asdim}=\mathrm{asdim}_{\mathcal{B}}=\overline{\mathrm{asdim}_{\mathcal{B}}}$（2）为与引言中给出的记号保持一致，我们将记 $\mathrm{asdim}_{\mathrm{se}}=\mathrm{asdim}^{\mathcal{M}_{\mathrm{se}}}$、$\mathrm{asdim}_{\mathrm{poly}(d)}=\mathrm{asdim}^{\mathcal{M}_{\mathrm{poly}(d)}}$ 和 $\mathrm{asdim}_{\mathrm{poly}}=\mathrm{asdim}^{\mathcal{M}_{\mathrm{poly}}}$（asdim 的情形也类似）。

现在我们研究这些概念在正则映射下的单调性。从 $\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 到 $f=\{f_X\mid X\in\mathcal{X}\}$ 的映射是指一族映射 $f=\{f_X\mid X\in\mathcal{X}\}$，其中 f_X 的目标空间是 $\mathcal{Y}$ 中的一个空间。若存在 C、m，使得映射 f_X 均为 C-Lipschitz，且其原像的基数至多为 m，则称此映射为正则映射。对于 1-一致离散度量空间，容易看出这等价于引言中给出的正则映射定义。

为方便起见，我们将简单地写作 f 而非 f_X。若一个类 $\mathcal{M}$ 满足：对于所有度量族 $\mathcal{X}$，只要它们存在到包含于 $\mathcal{M}$ 的某个度量族的正则映射，就有 $\mathcal{X}\in\mathcal{M}$，则称该类在正则映射下稳定。注意，类 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{M}_V$ 在正则映射下稳定。

我们将在多处加以利用的一点是：如果X 是一个度量空间（满足我们关于一致离散性和有界几何的既定假设），且有 $A\subset X$ 和 $r\geq 0$，那么从 A 的闭 r-邻域（记作 $[A]_r$）出发的映射

到 A，将每个 x 指派给 A 中的某个最近点 x'，是一个正则映射：它是 $(2r+1)$-Lipschitz 的，并且其原像的基数至多为 X中半径为 r 的球的最大大小。

命题 2.6（正则映射下的稳定性，命题 1.4）。设$\mathcal{M}$ 是一个在正则映射下稳定的度量空间类。设$\mathcal{X}$ 是一个可正则映射到度量族 $\mathcal{Y}$ 的度量族。那么

$$\operatorname{asdim}_{\mathcal{M}} \mathcal{X} \leq \operatorname{asdim}_{\mathcal{M}} \mathcal{Y},$$

and

$$\overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{M}} \mathcal{X} \leq \overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{M}} \mathcal{Y}.$$

证明。记 $d = \text{渐近维数}_{\mathcal{M}} \mathcal{Y}$。那么，对所有 r，存在一个分解 $\mathcal{Y} \xrightarrow{(r,d)} \mathcal{Z}$，其中 $\mathcal{Z} \in \mathcal{M}$。现在固定一个正则映射 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$。注意到，由于 f是 C-Lipschitz，若两个集合 $A, B \subset Y$ 对某个$Y \in \mathcal{Y}$ 而言距离至少为 r，则它们在 f 下的原像距离至少为 r/C。因此 $\mathcal{X} \xrightarrow{(r/C,d)} \{f^{-1}(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$。注意，$f$诱导了一个从 $\{f^{-1}(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$ 到 $\mathcal{Z}$ 的正则映射。由于 $\mathcal{M}$ 在正则映射下稳定，我们可推出 $\{f^{-1}(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}\} \in \mathcal{M}$。由此证明了渐近维数$_{\mathcal{M}} \mathcal{X} \leq d$，这就是命题的第一条结论。一致渐近维数的情形类似，唯一需要补充的论证是：对所有 s, m 和 $Z \in \mathcal{Z}$，

$$f(N_s^m(f^{-1}(Z))) \subset N_{Cs}^m(Z),$$

这再次是由 f 是 C-Lipschitz 这一事实得出的。事实上，这个包含意味着 f 从 $\{N_s^m(f^{-1}(Z)) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$ 到 $\{N_{Cs}^m(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$ 诱导出一个正则映射；由 $\mathcal{M}$ 在正规映射下稳定这一事实即可得出结论。□

2.2. 纤维化性质。现在我们着手为这些维数建立纤维化性质。如果对任意 $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y} \in \mathcal{M}$，都有 $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$，则称度量族类 $\mathcal{M}$ 在包含下稳定。由于恒等映射是正则映射，我们可以推知，在正则映射下稳定的度量族类也在包含下稳定。

定义 2.7. 设 $\mathcal{M}$ 是一致离散度量族的一个度量族类。定义类 $\mathcal{D}_0(\mathcal{M})$ 为那些可在 $\mathcal{M}$ 上作 0- 分解的度量族所组成的类。

换言之，$\mathcal{D}_0(\mathcal{M})$ 由满足以下条件的度量族 $\mathcal{X}$ 组成：对所有 r，存在 $\mathcal{Y} \in \mathcal{M}$，使得 $\mathcal{X} \xrightarrow{(r,0)} \mathcal{Y}$。

例如，对于 $X = \{(s, t^2) : s, t \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}^2$，我们有 $\{X\} \notin \mathcal{M}_{\mathrm{poly}(1)}$，但 $\{X\} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M}_{\mathrm{poly}(1)})$。我们注意到，如果 $\mathcal{M}$ 在包含（分别是正则映射）下稳定，那么 $\mathcal{D}_0(\mathcal{M})$ 也如此。

引理 2.8. 设 $\mathcal{M}$ 是一个在包含下稳定的一致离散度量空间类。那么

$$\operatorname{asdim}_{\mathcal{M}} = \operatorname{asdim}_{\mathcal{D}_0(\mathcal{M})} \quad \textit{and} \quad \overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{M}} = \overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{D}_0(\mathcal{M})}.$$

证明. 我们从渐近维数 $_{\mathcal{M}}$ 开始。显然，由于 $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$，我们有渐近维数 $_{\mathcal{D}_0(\mathcal{M})} \leq$ 渐近维数 $_{\mathcal{M}}$。为证明反向不等式，设 $\mathcal{X}$ 是一个度量族，使得渐近维数 $_{\mathcal{D}_0(\mathcal{M})}\ \mathcal{X} \leq d$，这意味着对于每个 $X \in \mathcal{X}$，$X = X_0 \cup \cdots \cup X_d$ 满足每个 $X_i = \coprod_j^{r\text{–disjoint}} X_{ij}$ 且 $\{X_{ij} \mid i, j, X\} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$。这意味着对所有 i、j、X，都有 $X_{ij} = \coprod_k^{r\text{–disjoint}} X_{ijk}$，并且 $\{X_{ijk} \mid i, j, k, X\} \in \mathcal{M}$。换言之，渐近维数 $_{\mathcal{M}}\ \mathcal{X} \leq d$，证毕。

现在转而讨论渐近维数$_{\mathcal{M}}$，这稍微更为微妙一些。再次令 $\mathcal{X}$ 满足渐近维数$_{\mathcal{D}_0(\mathcal{M})}\ \mathcal{X} \leq d$，这意味着对于每个 $X \in \mathcal{X}$、$X = X_0 \cup \cdots \cup X_d$，满足每个 $X_i = \coprod_j^{r\text{–disjoint}} X_{ij}$，并且满足$\{N_s^m(X_{ij}) \mid i、\ j、\ X\} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$ 对所有 s、m 成立。由于 $\mathcal{M}$，因此$\mathcal{D}_0(\mathcal{M})$ 在包含下保持稳定，我们可以不失一般性地假设每个 X_{ij} 都是 r-连通的。对 m进行直接归纳可知，$N_s^m(X_{ij})$ 因而是 $(s+r)$-连通的。现在取 $R > r+s$。由于 $\{N_s^m(X_{ij}) \mid i、\ j、\ X\} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$，我们可以写成

$$N_s^m(X_{ij}) = \coprod_k^{R\text{–disjoint}} Z_{ijk}$$

以及 $\{Z_{ijk} \mid i, j, k, X\} \in \mathcal{M}$。但由于 $N_s^m(X_{ij})$ 是 $(s+r)$-连通的，我们对 R 的选择迫使 Z_{ijk} 为空，除非只包含一个 k。换言之，$N_s^m(X_{ij}) \in \mathcal{M}$，因此我们完成了证明。□

命题 2.9（纤维化性质）。设 $\mathcal{M}$ 是一个在包含下稳定的一致离散度量空间类。设 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是一个 Lipschitz映射，使得对所有 R，族

$$\{f^{-1}(A) \mid A \subset Y \in \mathcal{Y}, \operatorname{diam}(A) \leq R\} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M}).$$

那么渐近维数$_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) \leq$渐近维数$(\mathcal{Y})$。

证明。设 C 是 f 的利普希茨常数。设 $d =$ 渐近维数$(\mathcal{Y})$，并假设其有限。那么，对所有 r, $\mathcal{Y}_{(r,\ d)}\!\!\longrightarrow \mathcal{Z}$，其中 $\mathcal{Z}$ 是子空间的有界族。与命题 2.6 的证明一样，我们有$\mathcal{X}_{(r/C,\ d)}\!\!\longrightarrow \{f^{-1}(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$。同样，仿照该命题的证明，我们有

$$N_s^m(f^{-1}(Z)) \subset f^{-1}(N_{Cs}^m(Z)),$$

对所有 $Z \in \mathcal{Z}$。由于 $\mathcal{Z}$ 是有界族，$\{N_{Cs}^m(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$也是有界族：设 R 为其子集直径的上界。我们有

$$\{N_s^m(f^{-1}(Z)) \mid Z \in \mathcal{Z}\} \subset \{f^{-1}(A) \mid A \subset Y \in \mathcal{Y}, \operatorname{diam}(A) \leq R\}.$$

我们得出 $\{N_s^m(f^{-1}(Z)) \mid Z \in \mathcal{Z}\} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$，因为 $\mathcal{D}_0(\mathcal{M})$ 在包含下是稳定的（因为 $\mathcal{M}$ 也是如此）：这表明渐近维数$_{\mathcal{D}_0(\mathcal{M})}(X) \leq d$，由引理 2.8 即得结论。□

2.3. 群扩张的上界。这里我们证明命题 1.10，这是下述稳定性结果在 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathrm{se}}$ 情形下的特例。滥用记号地说，若族 $\{X\} \in \mathcal{M}$，则称度量空间 $X \in \mathcal{M}$。

命题 2.10. 假设 $\mathcal{M}$ 在正规映射下稳定。设

$$1 \to P \to G \to Q \to 1$$

为可数群的一个短正合列。假设 G 配备了一致离散的适当左不变度量，且 P的每个有限生成子群配备诱导度量后都属于 $\mathcal{M}$，并且 Q 配备商度量。那么，$_{\mathcal{M}}$关于G的渐近维数不大于Q的渐近维数。

证明. 注意， P 中由 P 内半径为r 的球生成的子群 P_r 是有限生成的（因为度量是正规的，所以该球是有限集），并且 P 是 P_r的左陪集的一个 r-不交并。因此，对 P 的假设保证了按引理 2.8 中的记号，$P \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$。根据 G 和 Q上的度量的选取，投影 $f : G \to Q$ 是 1-Lipschitz。给定 $R \geq 0$，$B_Q(1, R)$的原像是 P的 R-邻域：

$$f^{-1}(B_Q(1, R)) = [P]_R.$$

根据前面的讨论， $P \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$。因此，由于 $[P]_R$ 正则映射到 P，且 $\mathcal{D}_0(\mathcal{M})$ 在正则映射下稳定（ $\mathcal{M}$ 也是如此），我们有 $\{f^{-1}(B_Q(q, R)) \mid q \in Q\} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$。因此，命题 2.9 的假设得到满足，从而我们得出渐近维数$_{\mathcal{M}}(G)$ ≤渐近维数(Q)。□

2.4. 直积下的性质。我们首先给出相对渐近维数概念的一个有用刻画；对于渐近维数而言，这一刻画是经典的。该论证并非全新，其一个版本可见于 [BDLM08]，；为完整起见，我们在此给出完整证明。

引理 2.11（Kolmogorov 技巧）。设 $\mathcal{M}$ 是一个在正规映射下稳定的度量族类，并设 $\mathcal{X}$ 是一个度量族。以下各项等价：

（i）渐近维数$_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) \leq n$；（ii）对于每个 $k \geq n$ 和每个 $r > 0$， $\mathcal{X} \ _{(r,\ k)} \longrightarrow \mathcal{Z}$，其中 $\mathcal{Z} \in \mathcal{M}$，并且对于所有 $X \in \mathcal{X}$ 以及所有 $x \in X$， x 至少属于 $\mathcal{Z}$ 的（ $k+1$） $-n$ 个元素。

此外，以下各项等价：

(iii) 渐近维数$_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) \leq n$；(iv) 对于每个 $k \geq n$ 和每个 $r > 0$， $\mathcal{X} \ _{(r,\ k)} \longrightarrow \mathcal{Z}$ 其中对于所有m， $s \geq 0$， $N_s^m(\mathcal{Z}) \in \mathcal{M}$，以及对于所有 $X \in \mathcal{X}$，所有 $x \in X$， x至少属于 $k+1$ 个 $-n$ $\mathcal{Z}$的元素。

证明。该引理的证明与渐近维数情形的证明完全相同。为方便读者起见，我们仅概述第一种情形，因为第二种情形类似。显然，(i) 和 (iii) 分别正是 (ii) 和 (iv) 的 $k = n$ 情形，因此 $(ii) \Rightarrow (i)$ 且 $(iv) \Rightarrow (iii)$。现在我们证明 $(i) \Rightarrow (ii)$。我们对 k 使用归纳法。令 $n =$渐近维数$_{\mathcal{M}} \mathcal{X}$。对于所有 r 和所有 $X \in \mathcal{X}$，我们可以写成 $X = \bigcup_{i=0}^{k} X_i$，使得 $X_i = \coprod_j^{3r-\text{disjoint}} X_{ij}$，其中 $\{X_{ij}\} \in \mathcal{M}$，并且对于所有 $x \in X \in \mathcal{X}$，x 至少属于 $k+1-n$ 个不同的 X_i。现在令 $X'_{ij} = [X_{ij}]_r$。注意到 $X'_i = \coprod_j^{r-\text{disjoint}} X'_{ij}$。现在再添加一个子集 X'_{k+1}，它是并集 $\bigcup_S Y_S$，其中 S 遍历 $\{1, \dots, k\}$ 的子集，且恰好包含 $(k+1)$ 个 $-n$ 元素，并且其中

$$Y_S = \bigcap_{s \in S} \left(X_s \setminus \bigcup_{i \notin S} [X_i]_r \right).$$

我们首先证明 Y_S 是 r-分离的。考虑$S \neq S'$的情形。令 $x \in Y_S$ 和 $y \in Y_{S'}$。存在 $s \notin S'$ 使得$x \in X_s \setminus \bigcup_{i \notin S} [X_i]_r$。现在 y不属于 $[X_s]_r$，因此 $d(x, y) > r$。另一方面，对于每个 $s \in S$，每个 Y_S 都包含在 X_s 中，因此它是由 X_{sj}的子集构成的$3r$-不交并：我们令 $\mathcal{Y}$ 为由这些块组成的度量族。

这给出 $\mathcal{X} \prec_{r,\ k} \mathcal{Z}$，其中 $\mathcal{Z} = \mathcal{Y} \cup \{X'_{ij} \mid i, j\}$。注意，$\mathcal{Z}$ 的每个元素都包含在某个 $i \leq k$对应的单个 X'_{ij} 中。由于 $\mathcal{M}$ 在正规映射下稳定，因此我们有 $\mathcal{Z} \in \mathcal{M}$。

因此，我们只需证明每个元素 x 至少包含在 $(k+2)-n$ 个不同的 X'_i 中。假设它至多包含在 $(k+1)-n$ 个不同的 X'_i 中。由于对所有 $i \leq k$ 都有 $X_i \subset X'_i$，这意味着 x 恰好属于 $(k+1)$ 个不同的 $-n$：令 S 为 $\{1, \dots, k\}$ 的子集，其基数为 $(k+1)-n$，并包含这些指标。我们声称 x 必须属于 Y_S，因此也属于 X'_{k+1}。事实上，它属于 $\cap_{s \in S} X_s$，而不属于 $\bigcup_{i \notin S} X'_i$，后者无非就是 $\bigcup_{i \notin S} [X_i]_r$。因此，它确实属于 Y_S，证毕。□

给定两个度量族类 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$，我们用 $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ 表示这样的度量族类：其中的度量族 $\mathcal{Y}$ 存在一个到 $\{X_1 \times X_2 \,|X_i \in \mathcal{X}_i\}$ 的正则映射，对某个 $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 而言。（全文均使用 ℓ^1-积度量。）根据构造，类 $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ 在正规映射下稳定。注意，给定两个非递减函数 V_1 和 V_2，我们有 $\mathcal{M}_{V_1} \otimes \mathcal{M}_{V_2} \subset \mathcal{M}_{V_1 V_2}$，其中 $V_1 V_2$ 表示函数 $t \mapsto V_1(t)$ $V_2(t)$。

命题 2.12（乘积公式，命题 1.5）。设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是在正规映射下稳定的两个度量族类，设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是度量族。则

$$\operatorname{asdim}_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}} \{X \times Y \mid (X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\} \leq \operatorname{asdim}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) + \operatorname{asdim}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Y})$$

and

$$\overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}}\{X\times Y \mid (X,Y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\} \le \overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) + \overline{\operatorname{asdim}}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Y}).$$

证明。基于引理 2.11 的证明与通常的渐近维数乘积公式基本相同。我们再次聚焦于第一种情形，第二种情形的处理类似。设 $m =$ 渐近维数$_{\mathcal{M}}\mathcal{X}$ 且 $n =$ 渐近维数$_{\mathcal{N}}\mathcal{Y}$，并设 $k = m + n$。由引理 2.11，对于所有 r 和所有 $X \in \mathcal{X}$，我们可以写成 $X = \bigcup_{i=0}^{k} X_i$，其中 $X_i = \coprod_j^{r-\text{disjoint}} X_{ij}$，且对于所有 $x \in X \in \mathcal{X}$，x 至少属于 $k+1-m$ 个不同的 X_i（$\mathcal{Y}$ 同理）。现在，对于每个 $i = 0\ldots$，我们定义 k、$Z_i = X_i \times Y_i$。显然，Z_i 是 r 不交并，其中各部分为 $X_{ij} \times Y_{ik}$。因此，如果我们能够证明 $X \times Y = \bigcup_{i=0}^{k} Z_i$，就完成了证明。令 $(x, y) \in X \times Y$，不包含 x 的 X_i 的数量至多为 m，而不包含 y 的 Y_i 的数量至多为 n。由于 $n+m = k$，且存在 $k+1$ X_i 个 Y_i 和 x 个 y，这意味着 ($X_i \times Y_i$,□) 必须属于至少一个，因此得证。

2.5. 关于覆盖的等价表述。渐近维数有多种等价表述。这里给出一种易于推广、且将在 §3.1 中使用的表述。我们回顾一下：度量族 $\mathcal{X}$ 的覆盖 $\mathcal{U}$ 具有至多 k 重的 R- 重数，是指每个 $X \in \mathcal{X}$ 中半径为 R 的闭球至多与 $\mathcal{U}$ 中的 k 个集合相交。我们通常将 0-重数简称为重数。若对于任意 x、$y \in U$，都存在 $x = x_0$、x_1、.....、$x_n = y$ 属于 U，使得对于每个 $i = 0$、.....、$n-1$，$d(x_i, x_{i+1}) \le R$，则子集 $U \subset X$ 称为 R-连通的。注意，如果 $\mathcal{U}$ 具有至多 k 重的 R-重数，那么 $\mathcal{U}$ 中各元素的所有 $2R$-连通分支的集合也是一个具有至多 k 重的 R-重数的覆盖。

命题 2.13. 设 $\mathcal{M}$ 是一个在包含下封闭的度量族类，并设 $\mathcal{X}$ 是一个度量族。以下条件等价。

> (i) 渐近维数$_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) \le n$；(ii) 对每个 R，存在一个覆盖 $\mathcal{U}$ of $\mathcal{X}$，其 R-重数至多为$n+1$，其中 $\mathcal{U}$的每个元素都是 $2R$-连通的，并且 $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$.

类似地，以下条件等价：

(iii) 渐近维数$_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) \le n$；(iv) 对每个 R，存在一个覆盖 $\mathcal{U}$ of $\mathcal{X}$，其 R-重数至多为$n+1$，其中 $\mathcal{U}$的每个元素都是 $2R$-连通的，并且对于每个$s > 0$和 $m \ge 0$，$\{N_s^m(U) \mid U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{M}$.

证明。再一次，证明与渐近维数情形的证明并无不同。此外，(*i*) 与 (*ii*) 等价的证明与 (*iii*) 和 (*iv*) 等价的证明完全相同，因此我们只证明前者。

(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*)：对于每个 $r > 0$，我们都有 $\mathcal{X} \xrightarrow{(r,\ n)} \mathcal{Z} = \{X_{ij}\}$，且满足 $\mathcal{Z} \in \mathcal{M}$。令 $r = 2R$。假设 X_{ij} 和 $X_{i'j'}$ 与某个半径为

R 相交于 X中。由此可得 $d_X(X_{ij}, X_{i'j'}) \leq 2R = r$，因此若 $i = i'$，则$j = j'$。于是，$\{X_{ij}\}$ 的 R-重数至多为 $n+1$。与上文一样，我们可以将每个 X_{ij} 分解为其 $2R$-连通分支。

$(ii) \Rightarrow (i)$：设 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{X}$的一个覆盖，其 $2R$-重数为 $\leq n+1$，其中 $\mathcal{V} \in \mathcal{M}$。设 $\mathcal{X}_0$ 是 $\mathcal{V}$中元素的一个极大 R-分离集，那么对每个 $i = 1, \ldots, n$，设 $\mathcal{U}_i$ 是 $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{U}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i-1})$ 中 R- 分离元素的一个极大集合。

假设 $x \in X \in \mathcal{X}$未被 $\mathcal{U}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n$覆盖，并选取 $V \in \mathcal{V}$使得 $x \in V$。由于 $B(x, 2R)$ 至多与 $\mathcal{V}$中的 $n+1$ 个集合相交，且 V不属于 $\mathcal{U}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n$，因此 $B(x, 2R)$ 至多与$\mathcal{U}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n$中的 n 个集合相交。所以，存在某个 i，使得 $B(x, 2R)$ 与每个 $U \in \mathcal{U}_i$的交集均为空。将 $V \cap B(x, R)$ 加入 $\mathcal{U}_i$。重复这一过程可得一个分解 $\mathcal{X} \xrightarrow{(R,n)} \mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n$。根据构造，其各块都是 $\mathcal{V}$中各块的子空间；又由于 $\mathcal{M}$在包含下稳定，因此有 $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$。于是渐近维数$_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) \leq n$，证明完毕。□

3. Lower bounds on 渐近维数$_{\mathrm{se}}$

本节聚焦于这样一种特殊情形：$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathrm{se}}$ 由次指数增长的度量族组成。注意，该类在正则映射以及直积下是稳定的，即 $\mathcal{M}_{\mathrm{se}} \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{se}} = \mathcal{M}_{\mathrm{se}}$。回顾一下，我们记渐近维数$_{\mathrm{se}}$ = 渐近维数$_{\mathcal{M}_{\mathrm{se}}}$。本节的主要目标是寻找渐近维数$_{\mathrm{se}}$ 关于指数扭曲子集（§3.1）的下界，并证明它至少同时大于秩$_h$、双曲秩（§3.2）以及余秩（即次指数余秩）（§3.3）。

3.1. 指数扭曲子集。

定理 D 下界的证明分为三个部分。我们的第一个结果是关于具有指数扭曲的正则映射下渐近维数$_{\mathrm{se}}$ 的一种纤维化性质。

命题 3.1. 设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$是一致离散且具有有界几何的度量族，并假设渐近维数$_{\mathrm{se}}(\mathcal{X}) \leq d$。设存在一个正则映射 $f = \{f_Y\}_{Y \in \mathcal{Y}}$：$\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$、一个常数 C，并且对每个$Y \in \mathcal{Y}$，存在一点 $a \in Y$，使得对于所有 $b \in Y$，

$$d_X(f_Y(a), f_Y(b)) \leq C\big(\log(1 + d_Y(a,b)\big) + C. \tag{3.2}$$

那么，对于每个 $r > 0$，都存在一个分解 $\mathcal{Y} \xrightarrow{(r,\ d)} \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} \mathcal{U}_Y$，其中每个 $\mathcal{U}_Y$ 都是 Y 的子集的一个度量族，并满足以下性质：

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \max\{\mathrm{diam}(U) : Y \in \mathcal{Y},\ U \in \mathcal{U}_Y,\ d_Y(a, U) \leq m\} = 0. \tag{3.3}$$

如果一个覆盖在某些 $a \in Y$ 的取值下满足 (3.3)，我们就称它是径向次线性的。

第二部分需要一个定义：

定义 3.4. 度量空间 (X,d) 若存在某个$\lambda \neq 1$及双射 $\psi_\lambda\colon X \to X$，使得对所有 $x, x' \in X$，都有

$$d_X(\psi_\lambda(x), \psi_\lambda(x')) = \lambda d_X(x, x').$$

欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$，以及更一般地说，Carnot 群（配备 Carnot–Carath´eodory 度量）都是允许膨胀的空间的例子。我们用 $\dim^{\mathrm{top}}$ 表示度量空间的拓扑（覆盖）维数，并回顾一下：该维数是满足以下条件的最小 d：每个开覆盖都存在一个重数至多为 $d+1$ 的细化。回顾一下，若一个度量空间的闭球都是紧致的，则称该空间是正规的。

命题 3.5. 设 N 是一个允许膨胀的正规度量空间，N' 是一个与 N 准等距的一致离散度量空间。若对所有 $R > 0$，都存在一个 N' 的径向次线性覆盖，其 R-重数至多为 k，则 $k \geq \dim^{\mathrm{top}}(N) + 1$。

第三，我们证明，对称空间与树的乘积允许 Carnot 群的适当嵌入。

命题 3.6. 设 $X = \prod_{i=1}^{k} X_i \times (T_3)^\ell$，其中 X_i 是非紧型对称空间，T_3 是无限 3 正则树，并设 X' 是 X 的一个极大 1-分离子集。存在一个正则映射 $N' \to X'$，满足 (3.2)，其中 N' 是一个与 Carnot 群 N 拟等距的一致离散度量空间，且

$$\mathrm{asdim}(N) = \dim_{\mathrm{top}}(N) = \mathrm{corank}(X) + \ell.$$

等式 $\mathrm{asdim}(N) = \dim^{\mathrm{top}}(N)$ 由 Carlsson–Goldfarb 对所有单连通幂零李群 N 证明（[CG04，定理 3.5]）。Carnot 群是单连通幂零李群的实例。

在证明上述三个命题之前，我们先说明它们如何结合起来完成下界的证明。

定理 D 的下界 (1.6) 的证明。设 X 是一个没有紧因子的对称空间，并设 X' 是 $X \times T_3^\ell$ 中的一个极大 1-网。取某个 $R \geq 0$。根据命题 3.6，存在一个 Carnot 群 N，使得

$$\mathrm{asdim}(N) = \dim_{\mathrm{top}}(N) = \mathrm{corank}(X) + \ell,$$

以及满足 (3.2) 的正则映射 $N' \to X'$，其中 N' 是与 N 拟等距的一致离散度量空间。由命题 3.1 可得，存在一个分解 $N' \xrightarrow{(r,\ \text{渐近维数})} \mathcal{N}' \xrightarrow{\mathrm{se}} \mathcal{N}'_{(X)}$，其中 $\mathcal{N}'$ 是径向次线性的。由命题 2.13 的证明（i）$\Rightarrow$（ii）可知，细化该覆盖（这不会影响 (3.3)）后，可以假设其 $R/2$-重数至多为渐近维数$\dim^{\mathrm{se}}(X) + 1$。因此，命题 3.5 蕴含渐近维数$\dim^{\mathrm{se}}(X) + 1 \geq$ 余秩$(X) + \ell + 1$，证明完毕。□

3.1.1. 命题 3.1 的证明。命题 3.1 是以下结果的第一种情形。第二种情形（命题 1.8）表明，在对畸变稍强一些的假设下，无需对 Y 作出假设，我们可以推出渐近维数$_{se}(X) \geq$ 渐近维数(Y)。

命题 3.7. 设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$ 是一致离散度量族，其中渐近维数 $_{se}(\mathcal{X}) = k$，并设 $f = \{f_Y\}_{Y\in\mathcal{Y}}\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 是一个正则映射。

1) 若存在常数 C，使得对所有满足 $f_Y\colon Y \to X$ 的 $Y \in \mathcal{Y}$，都存在 $a \in Y$，使得对所有 $b \in Y$，有

$$d_X(f_Y(a), f_Y(b)) \leq C\log(1 + d_Y(a, b)) + C, \tag{3.8}$$

则对每个 $r > 0$，都存在一个分解 $\mathcal{Y} \xrightarrow{(r,k)} \mathcal{V}$，其中$\mathcal{V}$ 是径向次线性的。2) 若存在常数 C，使得对所有满足 $f_Y\colon Y \to X$ 的 $Y \in \mathcal{Y}$，且对所有 a、$b \in Y$，(3.8) 均成立，则渐近维数$(\mathcal{Y}) \leq k$。

证明。令 λ 等于 ϕ 的 Lipschitz 常数与其原像的最大基数中的较大者。设 $k =$ 为渐近维数$_{se}(\mathcal{X})$，固定$R > 0$，并设 $\mathcal{X} \xrightarrow{(\lambda R,k)} \mathcal{U}$ 是一个满足 $\mathcal{U} \in \mathcal{M}_{se}$ 的分解。于是$\mathcal{Y} \xrightarrow{(R,k)} \mathcal{V}$，其中 $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$。注意，$\mathcal{V} \in \mathcal{M}_{se}$.。细化 $\mathcal{V}$后，我们还可以假设其各块是 R-连通的。现在我们来界定 $\mathcal{V}$中各块的直径。注意，所有块都是有限的。事实上，假设 V 是无限的：由于它是 R-连通的，1) 和 2) 都将意味着 $|V \cap B(y_0, n)|$ 随着 n 呈指数增长。现在关键是将这一结论定量化。

设 $V \subset Y$ 是一个满足 $f(V) \subset U$ 的片，并假设 $a \in Y$。由于 V 是 R-连通的，V 至少包含 $\mathrm{diam}(V)/R$ 个点，因此 $f(V) \subset U$ 至少包含 $\mathrm{diam}(V)/\lambda R$ 个点。另一方面，$f(V)$ 包含于以 $f(a)$ 为中心、半径为

$$\leq C\log(1 + d(a, V) + \mathrm{diam}(V)) + C,$$

因此，U 的次指数增长意味着

$$\frac{\mathrm{diam}(V)}{\lambda R} = o\left(\log(1 + d(a, V) + \mathrm{diam}(V))\right). \tag{3.9}$$

在情形 2) 中，我们可以假设 $a \in V$，于是 (3.9) 推出 $\mathrm{diam}(V) = o(\log(1 + \mathrm{diam}(V)))$，因此 $\mathrm{diam}(V)$ 一致有界。

在情形 1) 中，若 a 固定，且径向次线性不成立，则存在$\epsilon > 0$，以及一列具有这种形式的子集 V_i，满足 $\mathrm{diam}(V_i) \to \infty$ 且 $\mathrm{diam}(V_i) \geq \epsilon d(a, V_i)$。但此时 (3.9) 给出 $\mathrm{diam}(V_i) = o(\log(1 + (1 + \epsilon^{-1})\,\mathrm{diam}(V_i)))$，这与 $\mathrm{diam}(V_i) \to \infty$ 矛盾。□

注意，根据命题 2.13$(i) \Rightarrow (ii)$)，在 2) 的假设下，我们可以推 deduce 出：对于每个 $R > 0$，存在一个径向次线性覆盖$\mathcal{V}$，其对 Y 的 R-重数至多为渐近维数$_{se}(X) + 1$。

3.1.2. 命题 3.5 的证明。该命题是以下两个引理的直接推论。

引理 3.10. 设 M 为一个度量空间，且 Z 是 M 的极大 1-分离子集。若对于每个 $R > 0$， Z 都有一个径向次线性覆盖，其 R-重数至多为 K，则 M 有一个径向次线性开覆盖 $\mathcal{U}$，其 (0-)重数至多为 K。

证明. 取 Z 的一个径向次线性覆盖 $\mathcal{U}$，其 1-重数至多为 K，因此存在某个 $z_0 \in Z$ 使得

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \max\{\operatorname{diam}(U) : U \in \mathcal{U},\ d(U, z_0) \le m\} = 0.$$

定义覆盖 $\mathcal{V} = \{N_1^\circ(U) : U \in \mathcal{U}\}$，其中 $N_1^\circ(\cdot)$ 表示 M 中的开 1-邻域。

由于 M 的极大 1-分离子集是 Z，因此 $\mathcal{V}$ 是 M 的开覆盖。我们断言它也是径向次线性的，且重数至多为 K。

设 $U \in \mathcal{U}$。我们有 $\operatorname{diam}(N_1^\circ(U)) \le \operatorname{diam}(U) + 2$。因此

$$\begin{aligned}&\max\{\operatorname{diam}(V) : V \in \mathcal{V},\ V \cap B_M(z_0, m) \neq \emptyset\}\\ &\qquad \le \max\{\operatorname{diam}(U) + 2 : U \in \mathcal{U},\ U \cap B_Z(z_0, m) \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

因此 $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \max\{\operatorname{diam}(V) : V \in \mathcal{V},\ d_M(V, m_0) \le m\} = 0$，如所需。

其次，我们证明 $\mathcal{V}$ 的重数至多为 K。设 $m \in M$，并假设 $m \in V_1 \cap \ldots \cap V_l$，其中 $V_i \in \mathcal{V}$ 互不相同，且对 $U_i \in \mathcal{U}$ 有 $V_i = N_1^\circ(U_i)$。我们有

$$d_M(m, U_i) \le 1.$$

由于 $\mathcal{U}$ 的 1-重数至多为 K，我们可推得 $l \le K$。 □

引理 3.11。设 (N, d) 是一个度量空间，具有以下三个性质：

- N 是正规的（闭球是紧致的）；
- N 具有膨胀性质；
- N 具有一个重数至多为 $K + 1$ 的径向次线性开覆盖 $\mathcal{U}$。

N 的拓扑维数至多为 K。

证明。由于 N 具有膨胀性质，存在某个 $\lambda \neq 1$ 和一个双射 ψ： $N \to N$，使得对于所有 n、$n' \in N$，都有 $d_N(\psi(n)\ \psi(n')) = \lambda d_N(n, n')$。必要时用 ψ^{-1} 替换 ψ，我们可以假设 $\lambda \in (0,1)$。

定义 B_k 为 N 中半径为 k 的闭球。令 $\mathcal{B}_k$ 为 B_k 的一个开覆盖。由于 B_k 是紧致的，存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $x \in B_k$，都存在某个 $B_x \in \mathcal{B}_k$，满足 $B_k \cap B(x, \lambda^n)$ 包含于 B_x中。

现在，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，我们按如下方式定义 B_k 的覆盖 $\mathcal{V}_m$：

$$\mathcal{V}_m = \{\psi^m(U) \cap B_k : U \in \mathcal{U}\}.$$

由于 $\mathcal{U}$ 是径向次线性的，$\lim_{m\to\infty} \max_{V\in\mathcal{V}_m} \operatorname{diam} V = 0$，因此我们选取 $m = m(n)$，使得 $\max_{V\in\mathcal{V}_m} \operatorname{diam} V \leq 1/n$。由此可知，$\mathcal{V}_m$ 是 $\mathcal{B}_k$ 的细化，其重数至多为 $K+1$。因此，B_k 的拓扑维数至多为 K。通过可数并定理，我们推得 N 的拓扑维数至多为 K。□

3.1.3. 命题 3.6 的证明。我们将分别为对称空间和树的乘积构造嵌入，并利用以下引理将它们结合起来。

引理 3.12. 对于 $i = 1、\ldots、k$，设 $N_i、X_i$ 是一致离散度量空间，并设 $f_i : N_i \to X_i$ 是粗 Lipschitz 映射，它们相对于固定点 $a_i \in N_i$ 和常数 C_i 满足 (3.8)。

在 $N = \prod N_i$ 和 $X = \prod X_i$ 上赋予 ℓ^1 乘积度量，并令 $a = (a_i)$。那么，粗 Lipschitz 映射 $f = \bigoplus f_i : N \to X$ 相对于 a 和某个常数 C 满足 (3.8)。

证明。作为粗 Lipschitz 映射的乘积，f 是粗 Lipschitz 的。令 $b = (b_i) \in N$，其中 $b_i \in N_i$，并设 $C = k\max\{C_i\}$。不失一般性，假设对所有 i，$d_{X_i}(f_1(a_1), f_1(b_1)) \geq d_{X_i}(f_i(a_i), f_i(b_i))$。我们有

$$\begin{aligned} d_X(f(a), f(b)) &= \sum_{i=1}^{k} d_{X_i}(f_i(a_i), f_i(b_i)) \leq k d_{X_1}(f_1(a_1), f_1(b_1)) \\ &\leq C \log(1 + d_{N_1}(a_1, b_1)) + C \\ &\leq C \log(1 + d_N(a, b)) + C. \end{aligned}$$ □

引理 3.13. 设 N, X 是度量空间，且 $q_N : N' \to N$ 和 $q_X : X \to X'$ 是 (L, D)-拟等距嵌入。假设 $f : N \to X$ 是一个粗 Lipschitz 映射，它相对于 C 和 $a \in N$ 满足 (3.8)。那么对于任意 $a' \in N'$，映射 $f' = q_X \circ f \circ q_N : N' \to X'$ 是一个粗 Lipschitz 映射，并且相对于 a' 满足 (3.8)，其中常数为某个 C'。

证明. 粗 Lipschitz 映射的复合仍是粗 Lipschitz 映射。对于任意 $b' \in N'$，我们有

$$\begin{aligned} d_{X'}(f'(a'), f'(b')) &\leq L d_X\big(f(q_N(a')), f(q_N(b'))\big) + D \\ &\leq LC \log\big(1 + d_N(q_N(a'), q_N(b'))\big) + LC + D \\ &\leq LC \log\big(1 + L d_{N'}(a', b') + D\big) + LC + D \\ &\leq LC \log\big(1 + d_{N'}(a', b')\big) + C', \end{aligned}$$

对于某个合适的 C'，其中最后一步由 $\log(1 + cx + d) \leq \log((1 + x)(1 + c + d)) \leq \log(1 + x) + c + d$ 得出。□

命题 3.14. 设 G 是一个具有伊wasawa分解 $G = KAN$ 及相应对称空间 $X = G/K$ 的连通半单实李群。则有：

(1) N 是一个 Carnot 群；(2) 存在常数 C，使得自然映射 $\iota\colon N \to X$ 满足 $d_X(\iota(a)\ \iota(b)) \le C\log(1+d_N(a,b)) + C$，对所有 a、$b \in N$ 均成立；(3) 若 X 的紧因子是平凡的，则 $\operatorname{corank}(X) = \dim^{\mathrm{top}}(N)$。

证明。第一个断言是经典结果（参见 [Fol75, p 172(e)] 或 [Hel01, 定理 VI.3.4 和定理 VI.5.1]）。对于第二个断言，根据 Helgason [Hel01, 定理 VI.3.4]，伊wasawa分解 KAN满足以下性质：在可解群 AN中，按 Guivarc'h [Gui80, 定义 A.8] 的意义，它是"非稳定的"；因此，根据 [Gui 80] 中的命题 A.5 及其推论，N 到 AN 的嵌入满足所需的畸变界；AN 和 X 都与 G拟等距。最后一个断言显然是余秩定义的直接推论。□

引理 3.15。设 T_3 为无限 3 正则树。存在一个三正则映射 $W\colon \mathbb{Z} \to T_3$，使得对于 W，在 $a = 0$ 及某个 C的条件下，式 (3.8) 成立。

证明。思路是依次组合深度为 1、2、3 等的深度优先搜索。

令 B_k 表示深度为 k 的有根二叉树，并用 $\{0,1\}^k$ 中的元素标记 B_k 的叶子（度为 1 的顶点），再按字典序将这些顶点排列如下：$0^k = l_0 < 0^{k-1}1 = l_1 < \ldots < 1^k = l_{2^k-1}$。我们定义 W_k 为 B_k 上的一个闭游走，从基底顶点出发，由最短路径 $o \to l_0 \to l_1 \to \ldots \to l_{2^k-1} \to o$ 拼接而成。该游走恰好覆盖每条边两次，长度为 $4(2^k-1)$，且每个 B_k 中的顶点最多经过 3 次。

现在取一个顶点集为 $\mathbb{Z}$、且当 $|v-w| = 1$ 时边为 vw 的图。接着，将每个顶点 k 通过一条边连接到一份 $B_{|k|}$ 的副本的根，并将这个根顶点标记为 k'。所得图是 T_3 的一个子图。现在在此图上构造双向无限游走 $W\colon \mathbb{Z} \to T_3$，其由对每个 $k \in \mathbb{Z}$ 执行以下过程拼接而成：从 k' 出发，沿着游走 $W_{|k|}$ 绕行根为 k' 的 $B_{|k|}$ 副本，然后取到 $(k+1)'$ 的最短路径。这个双向无限游走也使每个顶点最多经过 3 次。

如果 $W(b)$ 位于附属于 $k \in \mathbb{Z}$ 的游走部分中，由于附属于 k 的游走深度为 $1+|k|$，我们有 $d_{T_3}(W(a)\ W(b)) \le |k|+1+|k| = 2|k|+1$。对于 (3.8)，$k = 0$ 的情形显然成立，其中 $a = 0, C = 2$。假设 $k \neq 0$，从 $W(a)$ 到 $W(b)$ 的游走经过了一段深度为 $|k|-1$ 的游走，该游走附属于 $\mathbb{Z}$ 中距离 0 比 k 更近的顶点，其长度为 $4(2^{|k|-1}-1) + 2$。因此，对于适当的 C，(3.8) 成立：

$$\begin{aligned} d_{T_3}(W(a), W(b)) &\le 2|k| + 1 \\ &\le C\log\left(1 + 4(2^{|k|-1}-1)\right) \le C\log(1+|b|). \end{aligned}$$ □

命题 3.6 的证明。设 $X = \prod_{i=1}^{k} X_i \times (T_3)^l$，其中每个 X_i 都是非紧型对称空间。设 G_i 是与对称空间 X_i 相关联的连通半单李群，设 $K_iA_iN_i$ 是 G_i 的伊wasawa分解，并设 $\iota_i\colon N_i \to X_i$ 是

命题 3.14 中描述的包含。取 X 的一个极大 1-分离子集 X'，以及一个拟等距 $q : X \to X'$。

设 N 为 Carnot 群 $\prod_{i=1}^{d} N_i \times \mathbb{R}^l$。固定拟等距映射 $q_i : N_i' \to N_i$，其中 N_i'是 N_i中的极大 1-网。令 N'为 ℓ^1乘积 $\prod_{i=1}^{d} N_i' \times \mathbb{Z}^l$；这是一个与 N拟等距的一致离散度量空间。

定义 $f = \bigoplus_{i=1}^{k} q_i \oplus \mathrm{id}$ 和 $g = \bigoplus_{i=1}^{k} \iota_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} W$，其中 $W\colon \mathbb{Z} \to T_3$ 是引理 3.15 中构造的映射。

由引理 3.12 和 3.13，映射 r 定义为复合映射

$$N' = \prod_{i=1}^{k} N_i' \times \mathbb{Z}^l \to_f \prod_{i=1}^{k} N_i \times \mathbb{Z}^l \to_g X \to_q X'$$

是一个满足 (3.8) 的粗 Lipschitz 映射。现在证明它是正则的。设 $x' \in X'$。我们有 $\mathrm{diam}(q^{-1}(x')) \le D$。由于 W 是 3-正则的，

$$\left| \bigoplus_{j=1}^{l} (W^{-1}(q^{-1}(x') \cap V\mathbb{Z})) \right| \le 3^l(3^D + 1)$$

此外，每个 ι_i 都是粗嵌入，因此存在某个 D'（与 x'无关），使得

$$\mathrm{diam} \left(\bigoplus_{i=1}^{k} \iota_i^{-1}(q^{-1}(x') \cap \prod_{i=1}^{k} N_i \right) \le D'.$$

因此，$\mathrm{diam}(g^{-1}(q^{-1}(x')))$ 包含在数量一致有界且直径一致有界的球中。由于 N' 具有有界几何（因此，N' 中任意固定半径的球所含点数一致有界），且 f 是拟等距（因为它是有限个拟等距的直和），我们可得 $|r^{-1}(x')|$ 有一致上界，符合要求。□

3.2. 双曲秩。以下是衡量空间双曲“大小”的几种方式。

定义 3.16. 度量空间 X 的（正则／粗／拟等距）双曲秩（$\mathrm{rank}_h^r(X)$/ $\mathrm{rank}_h^c(X)$/$\mathrm{rank}_h^q(X) = \mathrm{rank}_h(X)$），是满足以下条件的最大 k：存在一个正则／粗／拟等距嵌入 $Y \to X$，其中 Y 是一个有界度数视觉双曲图，其边界的拓扑维数为 k。

对于拟等距嵌入，这一概念由Gromov（以“余秩”之名引入 [Gro93, §6.B$_2'$]）提出，并由Buyalo–Schroeder加以发展（其变体要求 Y 为CAT(-1) Hadamard空间 [BS02]）。

我们回顾一下，如果存在一点 $x_0 \in X$，使得每条 $y \in X$ 都与 X 中一条从 x_0 出发的测地射线保持一致的距离，则双曲度量空间 X 称为视觉的。在定义双曲秩时，要求它具备这一性质是很自然的，因为我们关注的是

Y的边界；这两个概念（有视觉性质和无视觉性质）是相同的，因为可以将任意非视觉的有界度双曲图替换为从某个基点出发的所有测地射线的（凸包），而不改变其边界。

以下定义有助于研究双曲群边界的拓扑维数。

定义 3.17（Buyalo [Buy05，命题 3.2]）。度量空间 Z 的容量维数，是满足以下性质的所有整数的下确界 $\mathrm{cdim}(Z)m$：存在常数 $c > 0$，使得对于所有充分小的 $s > 0$，Z 都有一个 cs 有界覆盖，其重数不超过 $s\ m + 1$。

（这一概念也称为“线性控制度量维数”，参见[BS07b，第 11] 章。）总有 $\mathrm{cdim}(Z) \geq \dim^{\mathrm{top}}(Z)$。

若 G 是双曲群，则 $\mathrm{asdim}(G) = \mathrm{cdim}(\partial G) + 1$ [Buy05，BL 07]。现在我们证明 $\mathrm{asdim}_{\mathrm{se}}$ 的下界是边界的容量维数。

命题 3.18. 设 X 是一个视觉双曲有界度图。存在一个一致离散度量空间 N，其渐近维数至少为 $\mathrm{cdim}(\partial_\infty X)$，以及一个映射 $r\colon N \to X$，对所有a、$b \in N$均满足 (3.8)。特别地，$\mathrm{asdim}_{\mathrm{se}}(X) \geq \mathrm{cdim}(\partial_\infty X)$。

由此立即得到以下推论。

推论3.19. 设 X 是一个有界度图。我们有

$$\mathrm{asdim}_{\mathrm{se}}(X) \geq \mathrm{rank}_h^r(X) \geq \mathrm{rank}_h^c(X) \geq \mathrm{rank}_h^q(X).$$

证明. 最后两个不等式显然成立，因为准等距是粗嵌入，而有界度图之间的粗嵌入是正则映射。设存在一个正则映射 $Y \to X$，其中 Y 是一个有界度双曲图。由命题 3.18，$\mathrm{asdim}_{\mathrm{se}}(G) \geq \mathrm{cdim}(\partial_\infty G)$。由于对于任意度量空间 Z，$\dim^{\mathrm{top}}(Z) \leq \mathrm{cdim}(Z)$，故结论成立。□

命题 3.18 的证明。步骤 1：构造 N。令 Y' 为 Buyalo–Schroeder [BS07b, 定理 6.4 意义下的 $\partial_\infty X$ 的双曲锥。1] （参见 [BP03]）。由于 X 是视觉的，Y' 与 X 拟等距（两者都与 Bonk–Schramm [BS00, 定理 8 意义下的双曲锥拟等距2]）。

我们简要回顾一下 Y 的构造。对 $\partial_\infty X$ 进行缩放，使其直径为 $1/2$，并将此度量记为 ρ。对每个 $k \in \mathbb{N}$，令 X_k 为 $\partial_\infty X$中的一个极大 6^{-k}-分离集。Y 的顶点集为 $\bigsqcup_{k\geq 0} X_k$，其中 $X_0 = \{o\}$。我们将球 $B_v := B(v, 2 \cdot 6^{-k})$ 与每个 $v \in X_k \subset Y$ 关联起来。若 $B_x \cap B_{x'} \neq \emptyset$，或若 $x \in X_k$且 $x' \in X_{k+1}$且 $B_{x'} \subset B_x$，Buyalo–Schroeder 就连接顶点对 $x, x' \in X_k$，以

构造图 Y'。我们在 $x, x' \in X_k$之间添加可能的额外边，条件是 $\rho(x, x') \leq 4 \cdot 6^{-k}$，从而构造图 Y；由于这类 x, x'在 Y'中的距离有界，Y与 Y' 拟等距，因此 X 也如此，所以只需找到映射 $r\colon N \to Y$。

定义 $\mathcal{N} = \{(N_k, d_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为由全子图 X_k 的顶点集构成的度量族，并赋予其最短路径度量；令 $r : \mathcal{N} \to Y$为标准包含映射。

步骤 2：映射 r 对所有点对都满足 (3.8)。给定$x, x' \in N_k$，令 $\gamma\colon [0, k] \to Y, \gamma'\colon [0, k] \to Y$为分别从 o到x, x' 的测地线。根据测地线的指数发散性质 [BH99, III.H.1.26]，存在一个指数增长函数 $e\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，使得若对于某个 $t, d_Y(\gamma(k-t)\ \gamma'(k-t)) \geq e(0)$，则连接 x与 x' 的任意路径在 N_k 中的长度都必须为 $\geq e(t)$。根据测地三角形的薄性，存在 C，使得若 $d_Y(x, x') \geq C$，我们便能找到满足此条件的 $t \geq \frac{1}{2}d_Y(x, x') - C$，因此对于适当的 C'，

$$d_Y(x, x') \leq C' \log(1 + e(t)) + C' \leq C' \log(1 + d_k(x, x')) + C'.$$

步骤 3：asdim($\mathcal{N}$) $\geq$ cdim(∂G)。对每个 k，选取一个划分$\{U_x^k\colon x \in X_k\}$属于 $\partial_\infty X$，使得 $B(x, \frac{1}{2}6^{-k}) \subseteq U_x^k \subseteq B(x, 6^{-k})$。

固定一个覆盖 $\mathcal{V}$，覆盖 $\mathcal{N}$，其 1-重数至多为 asdim($\mathcal{N}$) $+1$，且其中每个 $V \in \mathcal{V}$的直径至多为 M。现在构造覆盖 $\mathcal{U}^k$，覆盖$\partial_\infty X$，它由以下集合组成

$$\left\{ \bigcup_{x\in N_k\cap V} U_x^k \colon V \in \mathcal{V} \right\}.$$

对于任意 $U \in \mathcal{U}^k$，我们有

$$\operatorname{diam}_\rho(U) \leq (\operatorname{diam}_{d_k}(N_k \cap V) + 1) \cdot 4 \cdot 6^{-k} \leq 4 \cdot 6^{-k}(M + 1).$$

现在令 $y \in \partial_\infty X$满足 $y \in U_x^k$，并假设 $B(y, 6^{-k})$ 分别在 $y_0, \ldots, y_l$ 处与 $U_{x_0}^k, \ldots, U_{x_l}^k$ 相交。由此可知，对每个 i

$$\rho(x, x_i) \leq \rho(x, y) + \rho(y, y_i) + \rho(y_i, x_i) \leq 3 \cdot 6^{-k}.$$

因此 $d_k(x, x_i) \leq 1$。由于 $\mathcal{V}$的 1-重数至多为 asdim($\mathcal{N}$) +1，$\{x_i\}$与 $\mathcal{V}$至多有 asdim($\mathcal{N}$) $+ 1$ 相交。因此，$\mathcal{U}^k$ 的 6^{-k}- 重数至多为 asdim($\mathcal{N}$)+1。于是，cdim($\partial_\infty X$) $\leq$ asdim($\mathcal{N}$)。□

3.3. 次指数余秩。粗略地说，Buyalo–Schroeder 对度量空间 X 定义的次指数余秩，是满足以下条件的最小 n ：所有与 X 拟等距的度量空间，都存在一个到拓扑维数为 n 、纤维具有次指数增长的空间的连续映射。因此，本节中我们需要将讨论范围从有界度图和一致离散度量空间扩展出去。首先，我们构造合适的 Lipschitz映射。

命题 3.20. 设 X 是一个具有有界几何且渐近维数 asdim$_{\text{se}}(X) \leq n$的度量空间。那么存在一个 Lipschitz映射 $p\colon X \to T$，其中

T 是一个维数至多为 n 的单纯复形，具有以下性质：

对于每个 $x_0 \in X$、每个具有充分大的分离常数 δ 的极大分离网 $X_\delta \subseteq X$、每个 $\sigma \geq \delta$ 以及每个 $\epsilon > 0$，存在 $S_0 = S_0(X_\delta, \sigma, \epsilon) \geq 1$，使得对于每个 $S \geq S_0$ 以及每个 $t \in T$，我们有

$$\frac{1}{S} \log \left| X_\delta \cap [p^{-1}(t)]_\sigma \cap B(x_0, S) \right| \leq \epsilon. \tag{3.21}$$

在证明该命题之前，我们先推导余秩的界。结合推论3.19，下面的推论证明了定理 G。

推论3.22。设 X 是一个与有界度单纯图拟等距的度量空间。那么 $\operatorname{asdim}_{\mathrm{se}}(X) \geq \operatorname{corank}_{\mathrm{se}}(X)$。

证明。我们回顾一下，$\operatorname{corank}_{\mathrm{se}}(X) \leq n$ 意味着：对于任意与 X 拟等距的度量空间 Y，存在一个连续映射 $g\colon Y \to T$，满足以下性质

- 每个 T 的紧子集的拓扑维数至多为n,
- 对于 Y的任意极大 δ-分离网 Y_δ（当 δ充分大时），对所有 $\sigma \geq \delta$和所有 $\varepsilon > 0$，存在常数 $S_0 = S_0(Y_\delta, \sigma, \varepsilon)$，使得对所有 $S \geq S_0$ 和所有 $t \in T$,

$$\frac{1}{S} \log \left| Y_\delta \cap [p^{-1}(t)]_\sigma \cap B(y_0, S) \right| \leq \epsilon. \tag{3.23}$$

对于某个固定点 $y_0 \in Y$。

现在假设渐近维数$_{\mathrm{se}}(X) \leq n$，令Y为任意一个与 X 拟等距的度量空间，并将命题 3.20 应用于 Y。我们得到一个 Lipschitz映射$g\colon Y \to T$，其中 T 是一个维数至多为 n 的单纯复形，并且 (3.24) 成立。由于 g 是 Lipschitz 的，它是连续的。此外，T 的每个紧子集的拓扑维数至多为 n，且 (3.23) 恰好就是 (3.24)，因此我们推出余秩$_{\mathrm{se}}(X) \leq n$。 □

现在我们回来说明该命题。

命题 3.20 的证明。固定一个极大 1-分离子集 $Z \subseteq X$。

根据命题 2.13，对于每个 $R > 0$，都存在一个 Z 的覆盖 $\mathcal{V} \in \mathcal{M}_{\mathrm{se}}$，其 $(R+1)$-重数至多为 $n+1$。特别地，这意味着对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在某个 S_0，使得对于所有 $V \in \mathcal{V}$、任意 $v_0 \in V$ 以及任意 $S \geq S_0$，我们有

$$\frac{1}{S} \log |V \cap B_Z(v_0, S)| < \varepsilon. \tag{3.24}$$

现在定义 $\mathcal{U} = \{N^\circ_{R+1}(V)\colon \ V \in \mathcal{V}\}$，其中我们回顾一下，$N^\circ_{R+1}(V)$ 是 V 的开 $(R+1)$- 邻域。

断言。可知，$\mathcal{U}$ 是 X 的一个覆盖，其勒贝格数至少为R，且重数至多为 $n+1$。

断言的证明。回顾一下，覆盖 $\mathcal{U}$ 的勒贝格数为

$$L(\mathcal{U}) = \inf \{\max \{d(x, X \setminus U) : U \in \mathcal{U}\} : x \in X\}.$$

由于任意 $x \in X$ 都属于某个 $N_1^\circ(V)$，其中 $V \in \mathcal{V}$，

$$d(x, X \setminus N_{R+1}^\circ(V)) \geq R.$$

因此， $L(\mathcal{U}) \geq R$。

假设 x_0 属于 $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$，其中对某些互不相同的 $V_i \in \mathcal{V}$，有 $U_i = N_{R+1}^\circ(V_i)$。由此可得 $d_X(x_0, V_i) \leq R+1$。由于 $\mathcal{V}$ 的（$R+1$）重数至多为 $n+1$，我们推出 $k \leq n+1$。因此， $\mathcal{U}$ 的重数至多为 $n+1$。□

对每个 $U \in \mathcal{U}$，定义

$$\phi_U(x) = \frac{d(x, X \setminus U)}{\sum_{V \in \mathcal{U}} d(x, X \setminus V)}$$

注意， ϕ_U 支撑于 U, $\sum_{V \in \mathcal{U}} \phi_V(x) = 1$，且 ϕ_U 的像属于 $[0,1]$。现在定义

$$p : X \to \ell^2(\mathcal{U}), \quad \text{given by} \quad p(x)(U) = \phi_U(x).$$

p 的像包含在一个自然实现的单纯复形中，该复形的顶点集为 $\mathcal{U}$，且当 $\bigcap_{i=1}^k U_i \neq \emptyset$ 时， U_1， …， U_k 张成一个单形。该单纯复形的维数比 $\mathcal{U}$ 的重数小一。

标准计算表明， p 是 Lipschitz 的 [BS07b，引理 9.2。2]。

最后，一点 $p^{-1}(t)$ 的原像包含在 $\mathcal{U}$ 中若干元素的并集内，这些元素含有一个公共点。因此，我们必须验证这些并集满足 (3.21)。只需证明这对每个$U \in \mathcal{U}$ 都成立，因为 $\mathcal{U}$ 具有有界重数。

令 $X_\delta \subset X$ 为一个极大的 δ-分离网，并固定 $\sigma \geq \delta$。假设$\delta > 2$，使得任意映射 $q : X_\delta \to Z$，若将 X_δ 中的每个点映射到 Z 中某个最近点，则该映射是单射。令 $U = N_{R+1}^\circ(V)$，其中 $V \in \mathcal{V}$。令 $x \in X_\delta$。若 $x \in [U]_\sigma$，则 $q(x)$ 包含于 $[U]_{\sigma+1} \subseteq [V]_{\sigma+R+2}$。此外，若 $x \in B(x_0, S+\sigma)$，则 $q(x) \in B(q(x_0)\ S+\sigma+2)$。由于 q 是单射

$$\begin{aligned}
\text{size}_{X_\delta,\sigma}(U \cap B(x_0, S)) &:= |\{x \in X_\delta : x \in [U \cap B(x_0, S)]_\sigma\}| \\
&\leq |Z \cap [V]_{sigma+R+2} \cap B(q(x_0), S+\sigma+2)| \\
&\leq M |B_Z(q(x_0), S+\sigma+2) \cap V|
\end{aligned}$$

其中 M 是Z中半径为 $(\sigma + R + 2)$ 的球的最大基数。固定 $\varepsilon > 0$。将 S_0 取得足够大，则对所有 $S \geq S_0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{S} \log \operatorname{size}_{X_\delta,\sigma}(U \cap B(x_0, S)) \\
&\leq \frac{1}{S} \log M |B_Z(q(x_0), S + \sigma + 2) \cap V| \\
&\leq \frac{1}{S} \left(\log |B_Z(q(x_0), S + \sigma + 2) \cap V| + \log M\right) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

4. Upper bounds on asymptotic dimension with subexponential fibres

本节的目标是证明实双曲空间和树的乘积的渐近维数$_{\mathrm{se}}$ 上界（从而完成定理 D 的证明），以及群扩张的上界。如引言中所述，这是通过构造 $\mathbb{H}^2$的一个显式覆盖族，然后扩张到 $\mathbb{H}^d$来实现的；对于 $d \geq 2$，利用某个拟等距嵌入 $\mathbb{H}^d \to (\mathbb{H}^2)^{d-1}$，最终导出定理 E。

4.1. 定理 D 的上界。

我们的第一个目标是构造 $\mathbb{H}^2$的一个特殊覆盖，从而得到定理 E 的以下特殊情形。

命题 4.1。双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 满足渐近维数$_{\mathrm{poly}(2)}(\mathbb{H}^2) = 1$。

证明。下界是显然的；剩下的是证明上界。我们在上半平面模型中进行讨论。简言之，上界可以通过考虑 $\mathbb{H}^2$ 的铺砌来观察，这部分铺砌显示于图1中：它由两种颜色的铺砌块组成；红色 A 铺砌块呈线性增长（包含 B_1的蓝色铺砌块也是如此），而其余的蓝色 B 铺砌块与 $\mathbb{R}$拟等距，且在每个整数点附有一条射线，因此呈二次增长。

现在我们给出详细说明。令 X 为 $\mathbb{H}^2$ 的极大 1-分离子集。固定 $r > 0$。定义 $\lambda_k = \sinh kr$，其中 $k = 0, \ldots\ldots, 4$。直线 $x = \lambda_k y$ 与 $x = \lambda_l y$ 之间的豪斯多夫距离为 $|k - l|\, r$。令 S_0 为一个半圆，其边界位于 x 轴上，直线 $x = y \sinh(4r)$ 与之相切，且该半圆的边界点为 $(1, 0)$ 和 $(x, 0)$，其中选择 $x > 1$，使得 S_0 不与 $x = \lambda_4 y$ 相交。以 x^n 为因子的伸缩作用于 $n \in \mathbb{Z}$，是一个将 S_0 映射为新半圆 S_n 的双曲等距变换，该半圆的边界点为 $(x^n, 0)$ 和 $(x^{n+1}, 0)$。令 $S = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} S_n$。

令 A 为 $\mathbb{H}^2$ 的子集，其边界为直线 $x = \lambda_1 y$ 和 $x = \lambda_3 y$；令 B_1 为 $\mathbb{H}^2$ 的子集，其边界为直线 $x = 0$ 和 $x = \lambda_1 y$；再令 B_2 为 $\mathbb{H}^2$ 的子集，其边界为 S 和直线 $x = \lambda_3 y$。定义 B 为 B_2 与所有平移所得集合的并集

其中平移由保向等距变换实现，该变换将 y-轴映射到 S 中的一个半圆。注意， A 包含直线 $x = \lambda_2 y$ 的 r-邻域，而 B 包含 S 的 r-邻域。见图1。

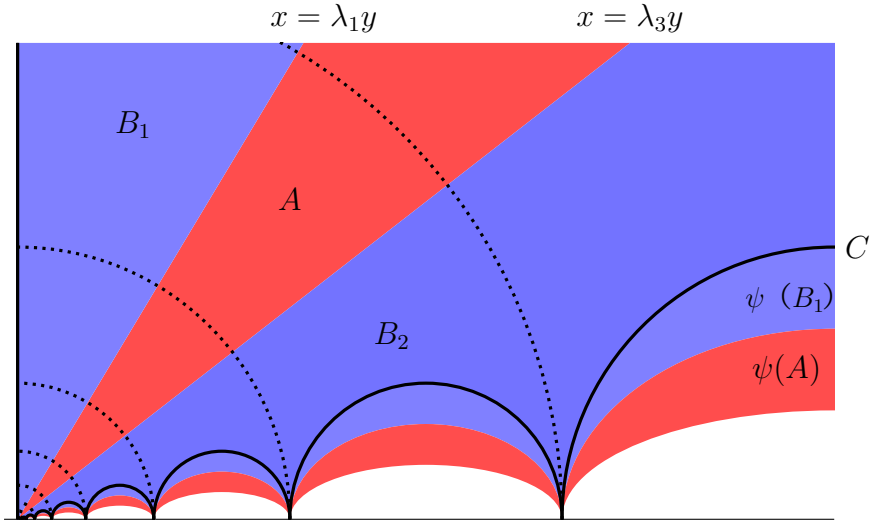

FIGURE 1.

现在，我们按如下方式用 A 和 B 的平移副本对 $\mathbb{H}^2$ 的右半空间进行镶嵌：取一个半圆 S'，使其包含于 B_2 的某个平移副本的边界中，再取 $\mathbb{H}^2$ 的一个等距变换 ψ，将右半空间映射到由 S' 和 y-轴围成的半空间，并将 $\psi(A)$ 和 $\psi(B)$ 加入镶嵌中。我们迭代这一过程，以覆盖右半空间。设 $\mathcal{V}^0$ 为 A 的所有平移副本的并集，设 $\mathcal{V}^1$ 为 B 的所有平移副本的并集。为了覆盖左半空间，我们首先关于 y-轴反射该图形（使用等距变换 ϕ）。现在定义

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^0 &= \left(\mathcal{V}^0\right) \cup \phi(\mathcal{V}^0),\\ \mathcal{W}^1 &= \left(\mathcal{V}^1 \setminus \{B_1\}\right) \cup \phi\left(\mathcal{V}^1 \setminus \{B_1\}\right) \cup \{B_1 \cup \phi(B_1)\}.\end{aligned}$$

最后，我们定义 $\mathcal{U}^i = \{W \cap X : \text{对于 } i = 0,\ W \in \mathcal{W}^i\}$，1。

还需证明 A、B 和 $B_1 \cup \phi(B_1)$ 至多具有二次增长。由于 A 和 $B_1 \cup \phi(B_1)$ 包含于测地线 $x = 0$ 的 $3r$-邻域内，因此它们与 $\mathbb{Z}$ 拟等距，并具有线性增长。现在， B 包含于测地线 $x = 0$ 与以下测地线之并的 $r + 4\delta$-邻域内：对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，这些测地线对应于以 (0, 0) 为圆心、半径为 $c_k = x^k$ 的圆的右上象限。交点 $(0, x^k)$ 在双曲度量下相距 $\log(x)$，因此 B 与梳形 $C = \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$ 拟等距，其度量为 d_C (a_1, b_1)、$(a_2, b_2) = |a_1 - a_2| + b_1 + b_2$。因此， B 具有（恰好）二次增长。由此可知，当 $U \in \mathcal{U}^0$ 时， U 与 C 拟等距；当 $U \in \mathcal{U}^1$ 时， U 与 $\mathbb{Z}$ 拟等距，且拟等距常数与 U 的选择无关。因此 $\mathcal{U} \in \mathcal{M}_{\mathrm{poly}(2)}$. □

推论 4.2（定理 D 中的上界 (1.7)）。设 $X = \prod_{i=1}^{k} X_i \times (T_3)^{\ell}$，其中 X_i 是实双曲空间，T_3 是无限 3 正则树。则

$$\operatorname{asdim}_{\mathrm{poly}}(X) \leq \operatorname{corank}(X) + \ell.$$

证明。对于任意 d，存在一个拟等距嵌入 $\mathbb{H}^d \to (\mathbb{H}^2)^{d-1}$（参见 [BF98] 以及下文定理 E 的证明）。由命题 2.12 和显然的上界渐近维数$_{\mathrm{poly}}$ ≤渐近维数，我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{asdim}_{\mathrm{poly}}(X) &\leq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{asdim}_{\mathrm{poly}}(X_i) + \sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{asdim}_{\mathrm{poly}}(T_3) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} (\dim X_i - 1) \operatorname{asdim}_{\mathrm{poly}}(\mathbb{H}^2) + \sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{asdim}(T_3) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (\dim X_i - 1) + \sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{asdim}(T_3) \\
&= \operatorname{corank}(X) + \ell. \qquad \square
\end{aligned}$$

4.2. $\mathbb{H}^k$ 的覆盖增长的更紧上界。由于渐近维数$(\mathbb{H}^k) = k$，但渐近维数$_{\mathrm{se}}(\mathbb{H}^k) = k-1$，因此考察不同 d 下的渐近维数$_{\mathrm{poly}(d)}(\mathbb{H}^k)$，看其取值何时下降，是很有意思的。证明渐近维数$_{\mathrm{poly}(1)}(\mathbb{H}^2) = 2$ 相当直接。对于一般的k，利用一个从 $\mathbb{H}^k \to (\mathbb{H}^2)^{k-1}$ 出发的拟等距嵌入，并朴素地将乘积公式（命题 2.12）应用于命题 4.1，我们可以推出渐近维数$_{\mathrm{poly}(2(k-1))}(\mathbb{H}^k) \leq k-1$；但更加仔细地处理后，实际上可以从定理 E 得到上界渐近维数 $_{\mathrm{poly}(k)}(\mathbb{H}^k) \leq k-1$。

我们从一个定义开始。

定义 4.3。给定 $D > 0$，$\mathbb{H}^2$ 中的一个 D-梳形是并集 $\gamma \cup \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \gamma_i$，其中 $\gamma\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ 是一条测地线，且每个 γ_i 都是与 γ 在点 $\gamma(iD)$ 处正交相交的测地线与半空间 h 的闭包的交集；该半空间 $\mathbb{H}^2 \setminus \gamma$ 的选取独立于 i。

由于我们希望将结果专门应用于命题 4.1 中构造的覆盖，因此本节还假设（在上半空间模型中）所有 γ_i 都收敛到 x-轴上的边界点。

引理 4.4。每当 C 是一个 D-梳形，且 C_0 是 $C \cap \mathbb{R} \times (0, \exp(a)]$, 的一个连通分支时，对于所有 $c \in \mathbb{R}$，我们有

$$|C_0 \cap (\mathbb{R} \times \{\exp(c)\})| \leq 3 + \frac{2\log 2}{D} + \frac{2(a_0 - c)}{D}$$

其中 $a_0 = \sup\{b \leq a\colon\ C_0 \cap \mathbb{R} \times \{\exp(b)\} \neq \emptyset\}$。

证明。如果 γ 是 y 轴的平移，那么这显然成立，因为能够与 $\gamma_i \subset C_0$ 相交的 $\mathbb{R} \times \{\exp(c)\}$ 的数量随 $(a_0 - c)$ 线性增长，增长率为 $1/D$，因此不妨设 γ 的边界位于x轴上。

如有必要，将 C 平移，使 C 上坐标 y 最大的点位于 y 轴上。

注意，对每个 b，γ 与 $\mathbb{R} \times \{\exp(b)\}$ 至多相交两次，而每个 γ_i 与 $\mathbb{R} \times \{\exp(b)\}$ 至多相交一次。此外，若 γ_i 和 γ_j 都与 $\mathbb{R} \times \{\exp(b)\}$ 相交一次，则对所有 $i \le k \le j$，γ_k 也如此。

我们有 $|C_0 \cap (\mathbb{R} \times \exp(a_0))| = 1$。将此点记为 $\gamma(r)$。除以 y 轴为镜面反射外，我们不妨设 $\gamma(r) = (R\cos(\theta)\ R\sin(\theta))$，其中 $\theta \in [0, \pi/2)$。此外，$\gamma(r+s) = (R\cos(\theta+\theta_s)\ R\sin(\theta+\theta_s))$，其中 $\cos(\theta_s)^{-1} = \cosh(s)$。若 $\gamma_i \cap \mathbb{R} \times \{\exp(c)\} \neq \emptyset$，则 $\gamma(iD)$ 的 y 坐标至少为 $\exp(c)$。令 $s = |iD - r|$，我们得到

$$\frac{R\cos(\theta+\theta_s)}{R\cos(\theta)} \ge \frac{\exp(c)}{\exp(a_0)} = \exp(c - a_0) \tag{4.5}$$

重新整理可得

$$\frac{1}{\cosh(s)} = \cos(\theta_s) \ge \cos(\theta_s) - \tan(\theta)\sin(\theta_s) \ge \frac{\exp(c)}{\exp(a_0)} = \exp(c - a_0)$$

因此 $|iD - r| \le a_0 - c + \log(2)$。所以，$C_0 \cap (\mathbb{R} \times \{\exp(c)\})$ 至多包含来自 γ 的 2 个点，并且对于每个满足 $|iD - r| \le a_0 - c + \log 2$ 的 γ_i，至多包含一个点。因此

$$\begin{aligned} |C_0 \cap (\mathbb{R} \times \{\exp(c)\})| &\le 2 + 2\frac{(a_0 - c + \log 2)}{D} + 1 \\ &\le 3 + \frac{2\log 2}{D} + \frac{2(a_0 - c)}{D}. \end{aligned}$$

□

定理 E 的证明。我们将继续使用上半空间模型。对于每个 $k \ge 2$，映射 $\alpha_k \colon \mathbb{H}^k \to (\mathbb{H}^2)^{k-1}$，定义为

$$\alpha_k(x_1, \dots, x_{k-1}; y) = ((x_1; y), \dots, (x_{k-1}; y))$$

是一个拟等距嵌入 [BF98，命题 4.1]。

根据命题 2.12 和 4.1 的证明，对于每个 $r > 0$，存在一个分解 $(\mathbb{H}^2)^{k-1} \xrightarrow{(r,k-1)} \{U_j\}$，其中每个 U_j 都包含在形如 $C = \prod_{i=1}^{k-1} C_i$ 的集合中，并且每个 $C_i \subseteq \mathbb{H}^2$ 要么是 $B_1 \cup \phi(B_1)$，要么是 A 或 B 在 $\mathbb{H}^2$ 的某个等距变换下的像。我们声称，$\alpha_k^{-1}(C)$ 一致地具有次数至多为 k 的多项式增长。

注意，由于 $B_1 \cup \phi(B_1)$，且每个 A 的等距副本都包含在某个 B 的等距副本的有界邻域内，因此只需假设每个 $C_i = \psi_i(B)$。

设 $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{k-1}; y) \in \mathbb{H}^k$。以 $\underline{x}$ 为中心、半径为 r 的球包含于 $\mathbb{R}^{k-1} \times [y\exp(-r)\ y\exp(r)]$ 中。每个 C_i 都是某个固定 D 的 D-梳形的一个均匀邻域 C_i'。令 C_i' 为 $C_i \cap \mathbb{R} \times [y\exp(-r)\ y\exp(r)]$ 的一个连通分支，并定义 $C' = \prod_{i=1}^{k-1} C_i'$。我们

可以根据 $\alpha_k^{-1}(C') \cap B(\underline{x}, r)\alpha_k^{-1}(C)$ 中的点数，对有界邻域的体积（允许存在统一的乘法误差）进行界定

$$S_r = \alpha_k^{-1}(C') \cap \bigcup_{j=-r}^{r} \mathbb{R}^{k-1} \times \{y \exp(jr)\}.$$

应用引理 4.4，我们得到

$$|S_r| \leq \sum_{j=-r}^{r} \left(3 + \frac{2\log 2}{D} + \frac{2(r-j)}{D}\right)^{k-1} \leq \left(\frac{2}{D}\right)^{k-1} \sum_{l=0}^{2r} (l + K')^{k-1}$$

对于某个常数 $K' = K'(D)$。因此 $|S_r| \leq P_k(r)$，其中 P_k 是次数为 k的多项式。我们采用与命题 4.1 的证明相同的方法，将同样的结果推广到 $\mathbb{H}^k$的一个极大 1-分离子集。□

5. Uniform asymptotic dimension with subexponentialfibres

本节的目标是证明以下结论：

定理 F 对于每个 $d \in \mathbb{N}$，渐近维数$^{\mathrm{poly}(d)}(\mathbb{H}^2) = 2$。

这意味着定理 A，因为对于任意 Y，当d 足够大时，多项式增长的$^{\mathrm{poly}(d)}(T_3 \times Y) \leq 1$，因此不存在正则映射 $\mathbb{H}^2 \to T_3 \times Y$。

在开始证明之前，我们指出，定理 E 的证明中构造的覆盖表明 $\mathrm{asdim}^{\mathrm{poly}}(\mathbb{H}^2) = 1$。因此，定理 F 是尖锐的。这是因为，在覆盖中取一个D-梳形，并有限次地归纳添加其邻域后，仍然得到一个多项式增长的集合（次数更高）。

定理 F 的证明分为三个主要步骤，且它们的证明彼此独立。主要思想是，任何$\mathbb{H}^2$ 的双色覆盖，在某种意义上都必须类似于第 4 节中构造的覆盖。首先，我们注意到，$\mathbb{H}^2$中粗连通且次指数增长的子集是拟凸拟树。其次，我们证明，$\mathbb{H}^2$ 的任何双色划分都可以细化为另一个双色划分，使得该划分中的所有集合都是具有至少 2 个边界点的拟凸拟树。第三，我们求出该覆盖中子集的邻域增长的下界。

步骤 1：具有次指数增长的双曲空间中的粗连通子集是拟凸拟树。

这基本上可由 [BS07a，命题 2 得出8]；为求完整，我们给出证明。

引理 5.1. 假设 $U \subseteq \mathbb{H}^d$ 是 r-连通的，并且具有次指数增长。那么 U 是一个拟凸拟树。具体而言，存在某个 $s = s(r)$，使得对于 U 中的每个序列 $x = x_0$、x_1、……、$x_m = y$，满足

$d(x_i, x_{i+1}) \leq r$ 对所有 $0 \leq i < m$ 均成立，并且对于位于测地线 $[x, y]$ 上的每个点 p，存在某个 x_i 到 p 的距离不超过 s。

证明。我们将在 $\mathbb{H}^d$ 的庞加莱球模型中进行讨论。

设 $x = x_0, \ldots, x_m = y$ 是 U 中的一个序列，且对每个 i 都有 $d(x_i, x_{i+1}) \leq r$。（由于 U 是 r-连通的，任意给定 $x, y \in U$ 都存在这样的序列。）假设存在一点 $p \in [x, y]$，使得对每个i，都有 $d(x_i, p) > s$，其中 s 将在稍后选定。

通过连接测地线$[x_i, x_{i+1}]$，构造一条从 x 到 y 的连续路径 γ。显然有 $d(\gamma, p) \geq s - r/2$。对每个 $l \geq 1$，定义 $\gamma_l = \gamma \cap (B(p, (l+1)s/4) \setminus B(p, ls/4)$。

定义函数 $F\colon \mathbb{H}^d \setminus \{p\} \to [0, \pi]$，其中 $F(z)$ 是测地线 $[x, p]$ 和 $[z, p]$ 之间的夹角。

令 m_l 为闭区间（可能为空）的并集 $F(\gamma_l)$ 的勒贝格测度。

断言。对每个 $k > 1$，都有 $\operatorname{length}(\gamma \cap B(p, ks/4)) \geq \sum_{l=1}^{k-1} \frac{m_l}{4} e^{ls/4}$，假设 $s \geq 4$。

断言的证明。固定一点 $o \in \mathbb{H}^2$ 以及 $\mathbb{H}^2$ 中一条从 o 出发的测地射线 ℓ。定义映射 $\pi\colon \mathbb{H}^d \to \mathbb{H}^2$，将每个点 $z \in \mathbb{H}^d$ 映到唯一一点 $y \in \mathbb{H}^2$，使得 $d(p, z) = d(o, y)$，并且顺时针测得的 ℓ 与 $[o, y]$ 之间的角为 $F(z)$。

接下来，对固定的 l，考虑直线收缩映射 $\pi_l\colon \mathbb{H}^2 \to B(o, ls/4)$。映射 π 和 π_l 都是 1-Lipschitz，因此不会增加弧长。

令 γ' 为 γ_l 的一个连通分支，且 $F(\gamma') = [a, b]$。现在，$\pi_l \circ \pi(\gamma')$ 是一段以 o 为圆心、半径为 $ls/4$、圆心角为 $b - a$ 的圆弧。因此 $\operatorname{length}(\gamma') \geq \operatorname{length}(\pi_l \circ \pi(\gamma')) = (b - a) \sinh(ls/4) \geq \frac{b-a}{4} e^{ls/4}$，因为 $l, s/4 \geq 1$。□

对于某些 $l \geq 1$、$m_l \geq 2^{-l}$，由于 $\bigcup_{l \geq 1} F(\gamma_l) = F(\gamma) = [0, \pi]$。因此，根据该断言，对于这个 l，

$$\operatorname{length}(\gamma \cap B(p, (l+1)s/4)) \geq 2^{-l-2} e^{ls/4}.$$

由此可知，$U \cap B(p, (l+1)s/4 + r/2)$ 至少包含 $\{x_i\}$ 中的 $\frac{1}{r} 2^{-l-2} e^{ls/4}$ 个元素。因此，假设 s 足够大，我们有

$$|U \cap B(p, (l+3)s/4)| \geq \frac{1}{s} 2^{-l-2} e^{ls/4} \geq \exp(1/8)^{(l+3)s/4}. \tag{5.2}$$

由于 U 的增长为次指数增长，且 $l \geq 1$，对于所有足够大的 s，(5.2) 均不成立，由此完成证明。□

注记5.3. 利用 Bonk–Schramm 嵌入定理，上述结果可以推广到在某个尺度上具有有界增长的任意双曲空间（参见 [BS00，定理1.1]）。

步骤2：细化覆盖。我们首先提出一个关键观察，它使我们能够灵活地更改覆盖，同时仍能控制集合 $N_s^m(V)$（回顾记号2.2）。

引理5.4. 设 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 是度量空间 X 的覆盖。若存在某个常数 D，使得对每个 $V\in\mathcal{V}$，都存在某个 $U_V\in\mathcal{U}$，满足$V\subseteq N_D^D(U_V)$，那么对每个 m,s，都存在 m'，s'，使得

$$N_s^m(V)\subseteq N_{s'}^{m'}(U_V).$$

证明。回顾 $V\in\mathcal{V}$ 上 $N_s^m(V)$ 的定义：有 $N_s^0(V)=V$，并且对于 $m\geq 1$，$N_s^m(V)$ 是 $\mathcal{V}$ 中所有与 N_s^{m-1} 的闭 s-邻域相交的集合之并。由定义可知，对于任意 $U,U'\in\mathcal{U}$ 以及任意 a,b,c,d，若 $N_b^a(U)$ 与 $N_d^c(U')$ 相交，则 $N_d^c(U')\subset N^{a+2c+1}{}_{\text{最大}\{b,d\}}(U)$。

令 $s'=\max\{s,D\}$。我们通过对 m 进行归纳法证明：对于任意 m，$N_s^m(V)\subseteq N_{s'}^{D+(2D+1)m}(U_V)$。$m=0$ 的情形已知。假设该断言对 $m-1$ 成立。如果 $V'\in\mathcal{V}$ 与 $N_s^{m-1}(V)$ 的闭 s-邻域相交，则由归纳假设，$N_{s'}^{D+(2D+1)(m-1)}(U_V)$ 与 $N_D^D(U_{V'})$ 相交。因此

$$V'\subset N_D^D(U_{V'})\subset N_{s'}^{D+(2D+1)m}(U_V)$$

结论得证。 □

固定 X^2 的正则镶嵌 $\mathbb{H}^2$，我们将其视为一个配备度量 $d_{\mathbb{H}}$ 的 2-复形，其中 $d_{\mathbb{H}}$ 是 $\mathbb{H}^2$ 上度量的某个倍数，并选取该倍数使得，对于 X 中任意一对不相交的闭胞腔（0、1 或 2 维），均有 $d_{\mathbb{H}}(C,C')\geq 1$。

记 X^2 的 1-骨架为 X，记 X 上的最短路径度量为 d_X。选取 M，使得对于 X^2 中的每个闭 2-胞腔 C，均有 $\operatorname{diam}_{\mathbb{H}^2}(C)\leq M$ 且 $\operatorname{diam}_X\partial C\leq M$，其中 $\partial C\subset X$ 表示 C 的边界。固定某个 $r>10M$。

第二步的主要目标是证明，任何由拟凸拟树构成、重数为2的 $\mathbb{H}^2$ 覆盖，都可以通过例如完全舍弃被其他集合包围的覆盖集来“规整”。更准确地说：

命题5.5. 设 $X\xrightarrow{(r,1)}\mathcal{U}$ 是由 K-拟凸 K-拟树对 X 作出的分解。存在常数 K',D 以及另一个由 K'-拟凸 K'-拟树对 X 作出的分解 $X\xrightarrow{(r,1)}\mathcal{V}$，其中这些拟树至少有两个边界点，并且对每个 $V\in\mathcal{V}$，都存在 $U_V\in\mathcal{U}$使得 $V\subseteq N_D^D(U_V)$。

令 $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}_0\sqcup\mathfrak{P}_1$ 为 VX 的一个划分，使得（相对于 X上的最短路径度量）每个 $\mathfrak{P}_i$ 的元素都是 r-连通、K-拟凸的 K-拟树，并且 $\mathfrak{P}_i$ 中任意两个不同的子集之间的距离至少为 $r+1$。我们将 $\mathfrak{P}_i$ 的元素称为颜色为 i的“块”。

细化 1：

令 $P \in \mathfrak{P}_0$，并用 P_r 表示通过添加连接 P 中每一对在 X-距离至多为r的顶点的测地线而得到的 X 的一个子集。然后，将 $\overline{P}_r$ 定义为 X^2 的子复形，它由 P_r 通过添加顶点集属于 P的每个闭 2-胞腔而得到。

定义 $\mathfrak{Q}_0 = \{\overline{P}_r : P \in \mathfrak{P}_0\}$ 并令 $\mathfrak{Q}_1$ 为 $X^2 \setminus \bigcup_{Q\in\mathfrak{Q}_0} Q$ 的连通分支集合。注意，$\mathfrak{Q}_0$ 中各块的 1-骨架是 X 的 1-骨架的连通子图；而对于 $\mathfrak{Q}_1$ 中的每个块 Q，Q 在 $\mathbb{H}^2$ 中的拓扑闭包 $\overline{Q}$ 是 X^2 中若干闭 2-胞腔的并集，并且每个闭 2-胞腔的边界上至少有一个顶点属于 $\mathfrak{P}_1$。由于对于任意不同的 P、$P' \in \mathfrak{P}_0$，都有 $d_X(P, P') \geq r+1$，因此 $d_X(P_r, P'_r) \geq 1$。于是，根据假设，$d_{\mathbb{H}}(P_r, P'_r) \geq 1$。

引理 5.6. 对于 $\mathfrak{Q}_1$ 的每个片 Q，都存在唯一一个 $\mathfrak{P}_1$ 的片 P，使得

$$\overline{Q} \cap P \neq \emptyset.$$

此外，$\overline{Q}$ 包含于 $\mathbb{H}^2$ 上度量下的 P 的 $2M$-邻域中，其中 M 是 X 中一个 2-胞腔的直径。

证明。由于 $\mathfrak{P}_0 \sqcup \mathfrak{P}_1$ 是 VX 的一个划分，P 的存在显然。反设 $\overline{Q}$ 包含两个顶点 x 和 y，它们分别来自 $\mathfrak{P}_1$ 的两个不同的片 P、P'。由于 $\overline{Q}$ 连通，存在 $\overline{Q}$ 的一个 2-胞腔序列 $C_1, \ldots, C_m$，使得相邻的两个胞腔有非平凡交集，$x \in C_1$，并且 $y \in C_m$。根据假设，$d_X(P, P') \geq r + 1$，其至少是一个 2-胞腔 d_X 直径的 10 倍。令 C_j 为第一个不包含 P 中顶点的胞腔。由于 $\operatorname{diam}(C_i) \leq r/10$ 且 $d_X(C_i, P) \leq r/10$，C_i 中没有顶点属于 $\mathfrak{P}_1$ 中的任何片。因此，根据构造，C_i 包含于 $\mathfrak{Q}_0$ 中的某个片，这就产生了矛盾。

同样的论证表明，$\overline{Q}$ 中的任意闭 2-胞腔都包含一个 P中的顶点。因此，$\overline{Q}$包含于 P的 M-邻域中。□

由引理 5.6 可知，$\mathfrak{Q}$ 的每个片都包含于 $\mathfrak{P}$的某个（统一）有界邻域中。因此，如有必要，可增大K，使得 $\mathfrak{Q}$ 的片成为连通的 K-拟凸 K-拟树。

引理 5.7. 设 P 是 X^2 的一个闭连通子复形，且令R为 $\mathbb{H}^2 \setminus P$的一个连通分支。若 $\partial_\infty R \subseteq \partial_\infty \mathbb{H}^2$ 的内部为空，则 $|\partial_\infty R| \leq 1$ 和 R 包含于 $\mathbb{H}^2$ 中所有两端点均位于 P的测地线之并。

证明。注意到 $\partial R \subset \mathbb{H}^2$ 包含于 P中。取 $x \in R$。从 x 出发且完全包含于 R中的测地射线至多有一条；因为若有两条不同的此类射线 α、β，那么根据若尔当曲线定理，P 将完全位于 $\alpha \cup \beta$的一侧，因此 $\partial_\infty R$ 会包含一条连接 $\alpha(\infty)$与 $\beta(\infty)$的线段，矛盾。

因此，若取两条不同的、经过 x的双无限测地线 γ_1、 γ_2，那么至少其中一条（设为 γ_1）的 $\gamma_1((-\infty, 0))$和 $\gamma_1((0, \infty))$都与 ∂R相交，进而都与 P相交。□

由于我们的块是 K拟凸的，且 $\mathbb{H}^2$ 是双曲的，因此端点位于 P中的所有测地线的并集都包含在 P 的某个一致有界邻域内，这由莫尔斯引理可知。

我们如下定义 $\mathfrak{Q}$ 中各块之间的序关系：若 $Q_1 < Q_2$ 满足以下条件，则称 $Q_1 < Q_2$：如果 Q_1 包含在 Q_2的补集的某个连通分支 R 中，且 $\partial_\infty R$ 的内部为空。若存在一个块 Q_2 使得 $Q_1 < Q_2$，则称块 Q_1 被支配。

引理 5.8. 一个块被支配，当且仅当它至多有一个边界点。

证明. 若 Q_1 被 Q_2支配，且 $Q_1 \subset R$ 和 $\partial_\infty Q_1 \subseteq \partial_\infty R$，则由引理 5.7 $|\partial_\infty Q_1| \leq 1$可知。反之，若一个块至多有一个边界点，则根据若尔当曲线定理，其补集中存在唯一一个区域，其边界具有非空内部；并且存在唯一一个块 Q_2 包含该区域的边界。因此 $Q_1 < Q_2$。□

引理 5.9。任意有序序列 $Q_1 < Q_2 \ldots < Q_n$ 的长度为 $\leq L = O_K(1)$。

证明。由于 Q_i 和 Q_{i+2} 不相交，它们之间的距离至少为 1。因此，Q_i 的闭 1-邻域必然包含于 Q_{i+2} 的补集的、包含 Q_{i+1} 的那个连通分支中。通过直接归纳法，可得存在一个半径为 $n/2$ 的球，它包含于 Q_n 的补集的、包含 Q_1 的某个连通分支中。根据引理 5.7，该球包含于所有两个端点均在 P_1 中的测地线的并集中。将此并集记为 $\overline{P}_1$。由于 $\overline{P}_1$ 本身是一个 $O(K)$-拟凸 $O(K)$-拟树，其中包含的每个度量球的半径至多为 $O(K)$。因此 $n = O(K)$，如所要求。□

细化 2：移除被支配的块。

给定 $Q \in \mathfrak{Q}$，其补集中所有边界的内部为空的连通分支的并集，或者等价地说，是它所支配的所有块的并集。根据引理 5.7，Q包含于所有端点位于 Q 中的测地线的并集，因此它包含于 Q 的一个有界邻域内（该界仅取决于 K）。对于每个 $i = 0$，1，我们令 $\mathfrak{Q}'_i$ 为 $\mathfrak{Q}_i$ 中至少有 2 个边界点的块的集合。我们令 $\mathfrak{R}_i$ 为 Q的集合，其中 $Q \in \mathfrak{Q}'_i$。这就得到 $\mathbb{H}^2$的一个新的双色分割。

引理 5.10. 划分 $\mathfrak{R}$ 由一些集合构成，这些集合是连通的$O_K(1)$-拟凸 $O_K(1)$-拟树，且至少有 2 个边界点。此外，同一颜色的两个不同片之间的距离至少为 1。

ˆ 证明。根据引理 5.7，每个 Q 都是一个 $O_K(1)$-拟凸 $O_K(1)$-拟树。注意，同一颜色的两个片具有如下形式： Q_1 和ˆQ_2，其中 Q_1 和 Q_2 是同一个 $\mathfrak{Q}_i'$中的两个片。观察可知，Q_1 将其被支配的片与 Q_2 及其被支配的片分隔开。ˆ ˆ 因此， Q_1 到 Q_2 的距离至少等于 Q_1 到 Q_2的距离，故至少为 1。□

步骤 3：增长下界。我们需要以下定义。

定义 5.11。第 d 阶梳形 C_d 是按如下方式定义的单纯树。对于 $d = 1$，它由实数直线的一份副本组成（视为 $\mathbb{Z}$ 的凯莱图）； C_2 通过向 C_1 的每个顶点附加一条半直线，从 C_1 得到：这些半直线是 C_2 的毛发，其根是它们的附着点。 C_1 的嵌入副本称为 C_2 的基底。对于 $d \geq 3$，我们通过向 C_{d-1} 的毛发中除根以外的所有顶点附加半直线，归纳地定义 C_d ： 这些半直线是 C_d 的毛发（其根是它们的附着点）。

根据构造，梳形带有自然的包含映射 $C_{d-1} \subset C_d$。容易看出，梳形 C_d 的增长为 poly(d)。我们需要双曲几何中的一个经典一般性结果。

命题 5.12. 设 $Y \subset \mathbb{H}^2$ 是一个 K-拟凸子集。存在 $n_1 = n_1(K)$，使得对所有 $L > 0$，都存在 $n_2 = n_2(K, L)$，满足如下条件：对于任意两点 x、$y \in Y$ ，若 $d(x, y) \geq n_2$，且 Z_x 和 Z_y 是两个 K-拟凸子集，并且 $d(Y, Z_x \cup Z_y) \geq n_1$，$\max\{d(Z_x, x)\ d(Z_y, y)\} \leq L$，则 Z_x 和 Z_y 包含在相距 1 的两个半空间中，且这两个半空间在 $\overline{\mathbb{H}^2}$ 中的闭包不相交。

引理 5.13. 设 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ 是 $\mathbb{H}^2$ 的一个双色分割，其中每个片都是一个连通的 K-拟凸 K-拟树，且至少有 2 个边界点。存在 $M = M(K)$ $C = C(K)$，使得对每个$d \geq 1$、每个片 $T_0 \in \mathfrak{R}$，都存在一个 C-双 Lipschitz 嵌入$C_d \to N_M^d(T_0)$。特别地，$\mathrm{Gr}(N_M^d(T_0)) \gtrsim n^d$。

证明。我们对 d 进行归纳。 $d = 1$ 的情形由 T_0 有两个端点这一事实可知。显然，为了证明该引理，只需将（$d - 1$）-梳形的一个双 Lipschitz 嵌入延拓为 d-梳形。这相当于证明：给定一个包含于 N_M^{d-1} (T_0) 中的 $\mathbb{R}$ 的双 Lipschitz 嵌入副本，以及由它界定的一个半空间 A ，我们可以构造一个包含于 $N^d_{O_K(1)}(T_0)$ 中的双 Lipschitz 2-梳，其基底为 γ，毛发位于 A 中。现在，对于每个 $n_1 > 0$，由于在 A 中与 γ 的 n_1-邻域相交的块之并是一个 $O_{n_1,\ K}(1)$-拟树，因此可以找到一点，使其到 γ 中每个位于这些块之外的点x 的距离为 $O_{n_1,\ K}(1)$。因此，存在一个片 T_x

它经过距 x 为 $\leq L = L(n_1, K)$ 的位置，但与它的距离至少为 n_1 。

现在取 γ 的一个离散化，其中的点彼此相距充分远——例如距离至少为 n_2。现在可将命题 5.12 应用于 $Y = \gamma$：若 n_1 足够大，且 n_2 充分大（其大小取决于 L），那么对于任意两个这样的点 x 和 y，它们对应的块 T_x 和 T_y 必包含于相距 1 的半空间 A_x 和 A_y 中；这些半空间包含在 A 内，并由拟测地线 γ_x 和 γ_y 界定，且后两者在 $\overline{\mathbb{H}^2}$ 中的闭包不相交。

为了将 γ 的嵌入延拓到 2-梳，只需对离散化中的每个点 x，选取一条包含于 A_x 中、从距 x 至多 L 的一点出发的无限 (K, K)-拟测地线 λ_x。γ 与各条 λ_x 的并构成 C_2 的一个 Lipschitz 嵌入副本；并且由于对于所有 $x \neq y$、λ_x 和 λ_y，它们都属于在 $\overline{\mathbb{H}^2}$ 中闭包不相交且彼此相距 1 的半空间，故该嵌入是拟等距的。□

证明结尾。

定理 F 的证明。假设渐近维数$_{\mathrm{poly}(d)}(\mathbb{H}^2) \leq 1$。那么，对于任意充分大的 R，存在一个分解 $X \xrightarrow{(R,1)} \mathcal{U}$ of X with$\mathcal{U} = \{U_{ij}\}$，使得对于任意 $s > 0, m \geq 0$, $\{N_s^m(U_{ij})) \mid U_{ij} \in \mathcal{U}\} \in$poly$(d)$。按照上面的步骤 2，可以将 $\mathcal{U}$ 修改为 $\mathbb{H}^2$ 的双色划分 $\mathfrak{R}$，从而对于任意 $\hat{} Q \in \mathfrak{R}$，都存在 $P \in \mathcal{U}$，使得 $\hat{} Q \subset N_{O(1)}(N_D^D(P))$。根据步骤 3，这与我们对$m, s$ 充分大的假设矛盾。□

5.1. 阻碍拟等距嵌入。对上述证明稍作修改，即可排除具有次指数增长的 Y 的拟等距嵌入$\mathbb{H}^2 \to T_3 \times Y$。

定理 B 的证明。设我们有一个拟等距嵌入 $\mathbb{H}^2 \to T_3 \times Y$，其中 Y具有次指数增长，因而有一个拟等距嵌入 $f\colon X \to T_3 \times Y$，其中 X 是如上所述 $\mathbb{H}^2$ 的近似空间。令 $\pi\colon T_3 \times Y \to T_3$ 为到渐近维数 1 的树的投影。对于任意 R，通过在 $f^{-1} \circ \pi^{-1}$下拉回 T_3 的一个覆盖，可以找到一个由 R-连通子集组成的、覆盖 X 的 R-分离覆盖，这些子集具有一致的次指数增长。

定理 F 的证明如上进行，从而在 $\mathbb{H}^2$中构造嵌入梳状结构C_n。这些结构满足：

- $\cup_n C_n$ 是由步长为 n（因而增长为 r^{n+1}）的、C-双 Lipschitz 嵌入梳状结构递增并而成的；
- 存在一个常数 D，使得 f将 C_n映到 $B(o, Dn) \times Y$。

设 x 是 $T_0 \subset \mathbb{H}^2$ 中的一个基点顶点。注意，从 C_n 中的球 $B(x, Cn)$ 出发的分支至少有 2^n 个（也就是说：在尺度 n 下，C_n 看起来像 T_3）。此外，这些分支呈线性发散：对所有

$k \geq 2$，在 $B(x, kCn)$ 的补集中，这些分支中任意两个之间的距离至少为 $(k-1)n/C$。

我们从每个这样的分支中各选取一个点 $y_1, \ldots, y_{2^n}$，使它们位于以 x 为中心、半径为B的球内，并且这些点两两之间的距离为 $(k-1)n/C$。因此，只要 k 足够大（其取值仅取决于 f 的拟等距常数），点 $f(y_i)$ 两两之间的距离至少为 $3Dn$。回想一下，$f(y_i)$ 包含于 $B(o, Dn) \times Y$。由此可知，它们在 Y 上的投影两两不同。这就在 Y 中半径为 $O(n)$ 的球内给出了 2^n 个不同的点，矛盾。□

References

[BDLM08] N. Brodskiy、J. Dydak、M. Levin 和 A. Mitra。阿苏阿德–长田维数的 Hurewicz 定理。Journal of the London Mathematical Society, 77(3):741–756，03 2008。[BDS07] S. Buyalo、A. Dranishnikov 和 V. Schroeder。将双曲群嵌入二叉树的乘积。Invent. Math.，169(1):153–192, 2007。[Ben22] O. Bensaid。对称空间和欧几里得建筑的粗嵌入。预印本, arXiv:2201.06442，2022。[BF98] N. Brady 和 B. Farb。非正曲率流形在无穷远处的填充不变量。Trans. Amer. Math. Soc.，350(8):3393–3405，1998。[BH99] M. R. Bridson 和 A. Haefliger。非正曲率度量空间，Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 第319卷/Fundamental Principles of Mathematical Sciences/。Springer-Verlag，柏林，1999。[BL07] S. V. Buyalo 和 N. D. Lebedeva。局部及渐近自相似空间的维数。Algebra i Analiz, 19(1):60–92，2007。[BP03] M. Bourdon 和 H. Pajot。上同调 l_p 与 Besov 空间。J. Reine Angew. Math.，558:85–108，2003。[BR13] O. Baker 和 T. R. Riley。Cannon-Thurston映射并非总是存在。Forum Math. Sigma，1:e3，11，2013。[BS00] M. Bonk 和 O. Schramm。Gromov双曲空间的嵌入。Geom. Funct. Anal.，10(2):266–306，2000。[BS02] S. Buyalo 和 V. Schroeder。度量空间的双曲秩与次指数余秩。Geom. Funct. Anal.，12:293–306，2002。[BS07a] S. Buyalo 和 V. Schroeder。度量空间的双曲维数。Algebra i Analiz，19(1):93–108，2007。[BS07b] S. Buyalo 和 V. Schroeder。渐近几何基础。EMS Monographs in Mathematics。欧洲数学学会 (EMS)，苏黎世，2007。[BST12] I. Benjamini、O. Schramm 和 ´A. Tim´ar。无限图的分离剖面。Groups Geom. Dyn.，6(4):639–658，2012。[Buy05] S. V. Buyalo。双曲空间的渐近维数及其无穷远边界的容量维数。Algebra i Analiz，17(2):70–95，2005。[CG04] G. Carlsson 和 B. Goldfarb。离散群的同调相干性。Journal of Algebra, 276(2):502–514，2004。

[DKLMT22]T. Delabie、J. Koivisto、F. Le Maˆıtre 和 R. Tessera。可平均群之间的定量测度等价。Annales Henri Lebesgue，5:1417–1487，2022。[Fol75] G. B. Folland。幂零李群上的次椭圆估计与函数空间。Ark. Mat.，(2):161–207，1975。[Gro93] M. Gromov。无限群的渐近不变量。载于《几何群论》第2卷（萨塞克斯，1991），London Math. Soc. Lecture Note Ser. 第182卷，第1–295页。剑桥大学出版社，剑桥，1993。[GTY12] E. Guentner、R. Tessera 和 G. Yu。几何复杂度的一个概念及其在拓扑刚性中的应用。Invent. Math.，189(2):315–357，2012。[Gui80] Y. Guivarc'h。关于大数定律与随机游走的谱半径。Astérisque，74:47–98，1980。[Hel01] S. Helgason。微分几何、李群与对称空间，Graduate Studies in Mathematics 第34卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001。1978年原版的修订重印本。[HMT22] D. Hume、J. M. Mackay 和 R. Tessera。李群的 Poincaré 剖面与粗几何二分性。Geom. Funct. Anal.，32:1063–1133，2022。[KP22] R. Kropholler 和 M. Pengitore。关于同调填充函数的粗嵌入定理。Bull. Lond. Math. Soc.，54(3):876–890，2022。[Li18] X. Li。拟等距的动力学刻画及其在上同调中的应用。Algebr. Geom. Topol.，18(6):3477–3535，2018。[Sau06] R. Sauer。同调不变量与拟等距。Geom. Funct. Anal.，16(2):476–515，2006。[Sha04] Y. Shalom。可平均群的调和分析、上同调与大尺度几何。Acta Math.，192(2):119–185，2004。

School of Mathematics, University of Bristol, Bristol, BS8 1TX.电子邮箱：david.hume@bristol.ac.uk

School of Mathematics, University of Bristol, Bristol, BS8 1TX.电子邮箱：john.mackay@bristol.ac.uk

Université de Paris, Sorbonne Université, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, F-75013 Paris, France.电子邮箱：romatessera@gmail.com