arXiv:2303.01971v1 [math.AP] 3 Mar 2023

无旋三维轴对称流的消失黏性极限

PATRICK BRKIC 和 EMIL WIEDEMANN

摘要。我们在无旋轴对称速度场的框架下，研究以相对涡量表述的三维不可压缩纳维–斯托克斯方程的消失黏性极限。我们证明，Nobili 和 Seis 所建立的相对涡量向 Euler 方程的一个重整化解的弱收敛，可以提升为强收敛。

1. 引言

不可压缩黏性流的演化可由 $3D$Navier-Stokes 方程描述

$$\begin{cases} \partial_t u^\nu + u^\nu \cdot \nabla_x u^\nu + \nabla_x p^\nu = \nu \Delta u^\nu + f^\nu \quad \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^3, \\ \nabla_x \cdot u^\nu = 0, \\ u^\nu(0,\cdot) = u_0^\nu, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，对于给定的黏性 $\nu > 0$，在时空 $u^\nu = u^\nu$ 中的点 (t,x)，$\in \mathbb{R}^3(t,x)$ 表示速度场，$\in \mathbb{R}\,(t,x)$ $p^\nu = p^\nu$为压力，$\in \mathbb{R}^3(t,x)$ $f^\nu = f^\nu$为外力，而 $u_0^\nu(x)$ 为初始速度。自 Leray 于 1934年 的开创性工作以来 [23] ，他在该工作中证明了 (1.1) 的一类弱解的整体存在性，对于一般外力而言，该 Leray–Hopf 类中的唯一性问题始终悬而未决，尽管最近已针对某一特定外力证明了非唯一性 [3] （另见 [20, 4, 15, 18, 17] ，其中给出了 Leray–Hopf 解非唯一性的迹象）。

在具有某些对称性的情况下，情形会好得多。一个尤其重要的情形是无旋轴对称性，下文第 2 节将对此作详细说明。其思路是，这种对称性将区域中的自由度减少到两个（径向和竖直方向，而非角坐标），因此轴对称 $3D$ 方程的表现应与 $2D$ 方程类似。

因此，对于无旋轴对称初始数据，当初始速度属于 L^2、初始涡量属于 $L^2 \cap L^\infty$、初始相对涡量属于 $L^2 \cap L^\infty$且外力属于 $L_t^1 H_x^1$时，已证明方程 (1.1) 的弱解具有整体存在性和唯一性 [34] 。大约在同一时期，Ladyzhenskaya 在 [20]中独立给出了证明。几十年后，Leonardi 等人针对初始速度属于 H^2 且外力属于 $L_t^2 H_x^1$的情形，给出了更精细的证明 [22] 。随后，这一结果得到推广 [1]： 初始数据属于 $H^{\frac{1}{2}}$，外力属于$L^2_{loc,\ t}H^{\lambda}_x$ 且满足 $\lambda > \frac{1}{4}$。

在二维情形下，纳维–斯托克斯方程的理论已相当完善。例如，已知弱解全局存在、唯一，甚至正则。关于二维情形下经典结果的综述，参见 [7, 21, 24, 32, 12, 33] 。如前所述，轴对称的 $3D$ 方程可视为

与 $2D$ 情形相关；事实上，可以将 (1.1) 写成柱坐标形式，从而得到一种类似于 $2D$ 纳维–斯托克斯系统的表述。更确切地说，这意味着 (1.1) 是在半平面 $\mathbb{H}$ 而非整个$\mathbb{R}^3$上研究的，参见下文 (2.3)。因此，发展成熟的二维纳维–斯托克斯方程理论有助于研究 $3D$ 轴对称情形，但这并不意味着二维理论在各方面都能直接移用。特别是，涡旋拉伸等真正的三维效应也会出现。例如，在 (1.1) 的涡量形式中就是如此：速度场可借助毕奥-萨伐尔定律由涡量 $\omega^\nu :=$ 旋度 u^ν 重建。

$$u^\nu(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x-y) \times \omega^\nu(t,y) dy$$

其中 $K(t,x) = \frac{1}{4\pi} \frac{x}{|x|^3}$。无旋轴对称 Navier-Stokes 方程的柯西问题的涡量形式，用柱坐标表示后，变为

$$\begin{cases} \partial_t \omega^\nu + \nabla \cdot (u^\nu \omega^\nu) = \nu \left(\Delta \omega^\nu + \frac{1}{r} \partial_r \omega^\nu - \frac{1}{r^2} \omega^\nu \right) \text{ in } (0,T) \times \mathbb{H}, \\ u^\nu = G * \omega^\nu, \\ \omega^\nu(0,\cdot) = \omega_0^\nu, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中，空间微分算子均取为关于柱坐标变量 (r,z) 的算子，$\in \mathbb{H}$ 而 G 是毕奥-萨伐尔定律在轴对称无旋流情形下的核。另者，为方便起见，我们用 ω^ν 表示涡量的角向分量（径向分量和竖直分量均为零）。该系统最近在 [14] 中、带齐次狄利克雷边界条件的情形下得到了研究。在那里，作者证明了初始涡量属于 L^1 时温和解的整体适定性。此外，他们还研究了无旋轴对称性下的 $3D$ 毕奥-萨伐尔定律；该定律尤其表现出与二维情形中的毕奥-萨伐尔定律的相似性，见 [14, 第 2] 节。

在本文中，我们研究消失黏性极限这一重要问题。问题在于，随着黏性 $\nu \searrow 0$ 趋于零，(1.2) 的解是否收敛，以及以何种意义收敛。当然，从形式上看，人们预期其极限是不可压欧拉方程的一个解（稍后将对此进行讨论）。在无旋的轴对称情形下，若相对涡量 $\xi^\nu = \frac{\omega^\nu}{r}$初始属于 $L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^3)$，其中 $1 < p < \infty$ 为某个值，则这一点成立；我们的主要结果表明，ξ^ν 将在 L^p 中随时间一致地强收敛。我们在下文给出了结果的严格表述，即定理 3.1。

在无黏性框架下，不可压流体的演化由 $3D$ 欧拉方程描述

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p = f \quad \text{ in } (0,T) \times \mathbb{R}^3, \\ \nabla_x \cdot u = 0, \\ u(0,\cdot) = u_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中变量的含义与前文相同。光滑解的整体适定性仍未解决，但另一方面，局部适定性的结果早已为人所知 [26, 第 2 节。5]在轴对称无旋流情形下，在假设 ω_0、$\frac{\omega_0}{r} \in L^2 \cap L^\infty$ 和 $f \in L^1_t H^1_x$ 的条件下，整体适定性已于 [34] 得到确立。此结果随后被改进 [10]，将 L^∞ 初始涡量的条件放宽至属于

洛伦兹空间 $L^{3,\,1}$ 且相对涡量属于 $L^{3,\,1}$。此外，对于光滑初始数据，在对初始涡量作出一些额外假设的条件下， [30, 25] 也得到了这一结果。关于某些贝索夫空间中的相应结果，请参见 [2]。

如前所述，小黏性行为在此背景下是一个非常重要的问题。在轴对称情形且右端项为零时，非零旋流情形的结果可见例如 [16, 31]。对于零旋流情形， [19, 28] 在相对涡量表述下研究了轴对称纳维–斯托克斯方程的小黏性行为（ $\xi^\nu = \frac{\omega^\nu}{r}$ ）

$$\begin{cases} \partial_t \xi^\nu + u^\nu \cdot \nabla \xi^\nu = \nu \left(\Delta \xi^\nu + \frac{3}{r} \partial_r \xi^\nu \right) & \text{in } (0,T) \times \mathbb{H}, \\ u^\nu = G * \omega^\nu, \\ \xi^\nu|_{t=0} = \xi_0^\nu \end{cases} \tag{1.4}$$

在 $\partial\mathbb{H}$ 上满足齐次诺伊曼边界条件 $\partial_r \xi^\nu = 0$ 。输运估计

$$\|\xi^\nu\|_{L^\infty((0,T),L^p(\mathbb{R}^3))} \le \|\xi_0^\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

已得到证明，并被用于说明在无黏极限下，相对涡量在 $L_t^\infty L_x^p$ 中弱收敛* ；对于 $1 < p < \infty$，它收敛到相应的无旋流轴对称欧拉方程的一个重整化解

$$\begin{cases} \partial_t \xi + u \cdot \nabla \xi = 0 & \text{in } (0,T) \times \mathbb{H}, \\ u = G * \omega, \\ \xi|_{t=0} = \xi_0, \\ \partial_r \xi = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

[28, 定理 1.2], 其中，重整化是按照 DiPerna-Lions [11] 的意义理解的。

在二维框架下，近期的两项研究 [6, 29] 指出，涡量的弱* 收敛可以提升为 $C_t L_x^p$ 中的强收敛，对于 $1 < p < \infty$。在 [6] 中，作者证明了在环面和全空间上的收敛，并给出了环面情形下的一些收敛速率；而在 [29] 中，作者证明了在可能存在外力项时，解在环面上的收敛。本文的主要目标是在无旋的轴对称情形下，对于$1 < p < \infty$，在 $C_t L_x^p$ 中证明 ξ^ν 的强收敛，并纳入外力项。

现在，我们来重点说明与 [6] 和 [29] 相比所面临的主要困难。由于轴对称性和无旋性质，(1.4) 和 (1.5) 是在二维中表述的，而我们要证明的是三维中的收敛。要将 [6] 中针对二维情形的证明加以改造，会遇到技术上的困难，因为无法为 u^ν 在 $L^1 + L^\infty$ （$\mathbb{R}^3$）中推导出速度场的界，而这一点在 Ciampa 等人的证明中至关重要。为克服这一困难，我们必须采用合适的截断函数，以便妥善控制柱坐标所产生的缩放。此外，从轴对称情形来看，我们的结果也可视为将 [6] 推广到包含外力的情形。最后需要指出，我们不能直接使用 [29] 中的论证来证明强收敛，因为该处利用了环面的紧性。

我们以对非零旋流情形的一些评论作为本引言的结尾。与零旋流情形相反，欧拉方程的整体适定性问题仍未解决。然而，对于纳维–斯托克斯方程，例如，已有研究对小角向初速度给出了肯定的答案，见 L^3 [5] 以及

对 L^4 [35] 中 $\frac{u_0^\nu}{\sqrt{r}}$ 足够小的情形也给出了肯定答案。此外， [27], 推导出了速度径向分量和角向分量满足的条件，在这些条件下弱解可成为强解。另请参见 [13] ，其中给出了一个弱强唯一性结果。

2. 轴对称无旋流情形

定义 2.1。 设 $u = u(r,\ \theta,\ z)$ 是柱坐标 $(r,\ \theta,\ z)$下的一个向量场，并且

$$e_r = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0), \quad e_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0), \quad e_z = (0, 0, 1)$$

是柱坐标下的单位向量。

(i) u 称为轴对称，如果 u 在空间中具有柱对称性，即 $u = u(r,\ z)$。

(ii) u称为无旋，如果其角向分量为零，即 $u_\theta = u \cdot e_\theta = 0$。

第一步，我们要在无旋轴对称性的框架下重新表述 **(1.1)**。假设速度的旋流分量为零，我们可以转到柱坐标，并注意到平流项可以改写为

$$u^\nu \cdot \nabla_x u^\nu = u^\nu \cdot \nabla u^\nu, \tag{2.1}$$

其中， $\nabla_x = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ 是关于笛卡尔变量 x, y, z 的梯度，而 $\nabla = (\partial_r, \partial_z)$ 是关于柱坐标变量 r, z 的梯度。此外，若考虑空间中的柱对称性，笛卡尔拉普拉斯算子变为

$$\Delta_x = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_z^2 =: \Delta + \frac{1}{r}\partial_r \tag{2.2}$$

在柱坐标中。现在，对于 u^ν, f^ν 轴对称且无旋流的情形，我们考虑与 **(1.1)** 对应的初边值问题

$$\begin{cases} \partial_t u^\nu + u^\nu \cdot \nabla u^\nu + \nabla p^\nu = \nu(\Delta + \frac{\partial_r}{r})u^\nu + f^\nu & \text{in } (0,T) \times \mathbb{H}, \\ u_r^\nu = 0 & \text{on } \partial\mathbb{H}, \\ u^\nu(0,\cdot) = u_0^\nu & \text{in } \mathbb{H}, \\ \partial_r(r u_r^\nu) + \partial_z(r u_z^\nu) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $\mathbb{H} = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0, z \in \mathbb{R}\}$ 且 u^ν被解释为 $u^\nu = (u_r^\nu, u_z^\nu)$。由于柱面对称性，涡量 ω^ν 仅沿环向，且变为 $(\partial_z u_r^\nu - \partial_r u_z^\nu)e_\theta$。在此背景下，经过简短计算可知，相对涡量 $\xi^\nu = \frac{\omega^\nu}{r}$ 满足以下对流扩散方程:

$$\begin{cases} \partial_t \xi^\nu + u^\nu \cdot \nabla \xi^\nu = \nu\left(\Delta \xi^\nu + \frac{3}{r}\partial_r \xi^\nu\right) + g^\nu & \text{in } (0,T) \times \mathbb{H}, \\ \partial_r \xi^\nu = 0 & \text{on } \partial\mathbb{H}, \\ \xi^\nu|_{t=0} = \xi_0^\nu & \text{in } \mathbb{H}, \\ u^\nu = G * \omega^\nu, f^\nu = G * \tilde{g}^\nu, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $\tilde{g}^\nu(r,z) = rg^\nu(r,z) = r$旋度 $f^\nu \cdot e_\theta$。类似地，我们考虑以下欧拉方程 (1.3) 的初边值问题：

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f & \text{in } (0,T) \times \mathbb{H}, \\ u_r = 0 & \text{on } \partial\mathbb{H}, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{in } \mathbb{H}, \\ \partial_r(ru_r) + \partial_z(ru_z) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

在 (2.4) 的无黏极限下，相应的相对涡量输运方程变为

$$\begin{cases} \partial_t \xi + u \cdot \nabla \xi = g & \text{in } (0,T) \times \mathbb{H}, \\ \partial_r \xi = 0 & \text{on } \partial\mathbb{H}, \\ \xi^\nu|_{t=0} = \xi_0^\nu & \text{in } \mathbb{H}, \\ u = G * \omega, f = G * \tilde{g}, \end{cases} \tag{2.6}$$

并且 $\tilde{g}(r,z) = rg(r,z) = r$旋度 $f \cdot e_\theta$。

注 2.2。在我们的论证中，有时采用二维情形（即 $\mathbb{H}$），有时采用三维情形会更加方便。为方便起见，无论函数的自变量采用笛卡尔坐标还是柱坐标，我们都用相同的记号表示该函数；例如，写作$F(x) = F(r,z)$。

我们将使用 (2.1) 和 (2.2) 在二维和三维情形之间切换。此外，对于轴对称函数 $F = F(r,z)$，我们将经常使用积分变换

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(x)dx = 2\pi \int_{\mathbb{H}} F(r,z) r dr dz.$$

定义 *2.3.* 设给定 $T > 0$和 $p, q \in (1,\infty)$，其中$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。设$\xi_0 \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$、$g \in L^1((0,T)\ L^p(\mathbb{R}^3))$和 $u = G * \omega \in L^1((0,T)\ L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)^3)$为轴对称函数，且满足 $\nabla_x \cdot u = 0$。若 $\xi \in L^\infty((0,T)\ L^p_{loc}(\mathbb{R}^3))$是欧拉方程 *(1.5)* 的一个分布解，其初始数据为 ξ_0、右端项为 g，且 ξ 为轴对称函数，并且

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \xi(\partial_t \varphi + u \cdot \nabla \varphi) dx dt + \int_{\mathbb{R}^3} \xi_0 \varphi(t=0) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} g\varphi dx dt$$

对所有 $\varphi \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{H})$。

**注 2.4. </style}对于所有 (1，∞)，平流项并非都有定义。注意，只要 $\mathbb{H}$ 中的 $u\omega$ 局部可积，$\mathbb{R}^3$ 中的 $u\xi$ 就局部可积。根据二维索伯列夫嵌入 *[14,*命题 *2.3]*

$$\|u\|_{L^{\frac{2p}{2-p}}(\mathbb{H})} \lesssim \|\omega\|_{L^p(\mathbb{H})},$$

若 $p \geq \frac{4}{3}$，则情况如此。对于较小的指数，我们引入 *DiPerna-Lions* 意义下的重整化解概念 *[11]*。

定义 2.5。设 $T > 0$和 $\xi_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$。进一步设 $g \in L^1((0,T)\ L^p(\mathbb{R}))$和 $u \in L^1((0,T)\ L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)^3)$均为轴对称，且满足 $\nabla_x \cdot u = 0$。那么 $\xi \in$

$L^\infty((0,T)\ L^1(\mathbb{R}^3))$ 称为欧拉方程(1.5)的重整化解，其初始数据为 ξ_0，右端项为 g，若 ξ 为轴对称，$\xi=\xi(t,r,z)$，并且

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\beta(\xi)(\partial_t\varphi+u\cdot\nabla_x\varphi)dxdt+\int_{\mathbb{R}^3}\beta(\xi_0)\varphi(t=0)dx=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\beta'(\xi)g\varphi dxdt$$

对所有 $\varphi\in C_c^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^3)$，以及每个在零点附近为零且一阶导数有界的有界 $\beta\in C^1(\mathbb{R}^3)$。

引理 2.6. 设 $\nu>0$ 为给定的黏性，且 $1\le p<\infty$。再设 $\xi_0^\nu\in L^p(\mathbb{R}^3)$以及 $g^\nu\in L^1((0,T)\ L^p(\mathbb{R}^3))$。若 ξ^ν是方程(2.4)的解，则它满足如下能量估计

(2.7)
$$\|\xi^\nu(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^p+\nu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\xi^\nu|^{p-2}|\nabla_x\xi^\nu|^2dxds\le C(p)\left(\|\xi_0^\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^p+\|g^\nu\|_{L^1((0,T),L^p(\mathbb{R}^3))}^p\right)$$

对所有 $t\in[0,T]$，其中常数 $C(p)$ 仅依赖于 p（而不依赖于 ν）。

证明。例如，可参阅 [28, 引理 6],，其中该结论是在 $f=0$的情况下证明的。其思路是将 (2.4) 乘以 $p|\xi^\nu|^{p-2}\xi^\nu r$，并对 $\mathbb{H}$积分。我们可以利用杨氏不等式吸收包含力项的项。特别地，我们有

$$\begin{aligned}p\int_0^t\int_{\mathbb{H}}|\xi^\nu|^{p-2}\xi rg^\nu drdzds&\le\frac{p}{2\pi}\int_0^T\|\xi^\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^{p-1}\|g^\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}dxds\\&\le\varepsilon(p-1)\|\xi^\nu\|_{L^\infty((0,T),L^p(\mathbb{R}^3))}^p+C(\varepsilon)\|g^\nu\|_{L^1((0,T),L^p(\mathbb{R}^3))}^p,\end{aligned}$$

其中，ϵ取足够小，使得 $\epsilon(p-1)<1$，从而 $\varepsilon(p-1)\|\xi^\nu\|_{L^\infty L^p}^p$可以被吸收到左端。□

定理 2.7。设 $\nu>0$ 且 $1<p<\infty$。令 u^ν 为方程(2.3)的唯一解，其初始速度为 $u_0^\nu\in L^2_{loc}$（$\mathbb{R}^3$），外力为（f^ν），并选取为满足 $\xi_0^\nu\in L^1\cap L^p$（$\mathbb{R}^3$）以及 $g^\nu\in L^1$（（0, T） $L^1\cap L^p$（$\mathbb{R}^3$）。此外，假设

$$\xi_0^\nu\to\xi_0\quad in\ L^1\cap L^p(\mathbb{R}^3),\qquad g^\nu\to g\quad in\ L^1((0,T),L^1\cap L^p(\mathbb{R}^3)).$$

则存在 $\xi\in L^\infty$（0, T; $L^1\cap L^p$（$\mathbb{R}^3$）以及 $u\in C$（$[0,T]$, L^2_{loc}（$\mathbb{R}^3$）^{3}），此外还存在一个子列（ν_k）$_k\to0$，使得

$$\xi^{\nu_k}\overset{*}{\rightharpoonup}\xi\ in\ L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^3))$$

and

$$u^{\nu_k}\to u\ in\ C([0,T],L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)^3).$$

此外，u是方程（2.5）的分布解，而 ξ 是方程（2.4）的重整化解。

证明。证明主要是对无外力情形 [28, 定理 1] 和 [28,定理 2]的回顾。收敛可以按照 [28, 定理 1] 中的方法证明，几乎无需任何改动。对于 $f=0$ 重整化论证 [28, 定理 2], 证明依循 [9]，并依赖 DiPerna-Lions 的对偶论证 [11]。因此，只要在对偶公式中加入外力项 [11,定理 II.6], 便可沿用该证明。□

3. 涡量形式下 Navier-Stokes 方程的强收敛

我们用 $L^p_c(\mathbb{R}^3)$ 表示具有紧（本质）支撑的 L^p-函数集合。现在陈述我们的主要定理:

定理 3.1。 设 $p > 1$ 和 $\xi_0 \in L^p_c(\mathbb{R}^3)$ 为轴对称。设 $R > 0$ 和 $(\xi_0^\nu)_\nu \subset L^p_c(\mathbb{R}^n)$ 为轴对称，并满足 $\operatorname{supp}(\xi_0^\nu) \subset B_R(0)$ 对所有 $\nu > 0$成立，且 $\xi_0^\nu \to \xi_0$属于 $L^p(\mathbb{R}^3)$。

令 $(g^\nu)_\nu$ 为一列轴对称函数，在 $L^1((0,T)\ L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^3))$ 中有界；并设 $g \in L^1((0,T)\ L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^3))$ 为轴对称函数，且 $g^\nu \to g$ 属于$L^1((0,T)\ L^p(\mathbb{R}^3))$。令 u^ν 和 ξ^ν 为方程 *(1.4)* 的解，其初始数据为 ξ_0^ν，右端项为 g^ν。此外，设 ξ 为方程 *(1.5)* 的重整化解，满足$\xi^{\nu_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi$ 属于 $L^\infty((0,T)\ L^p(\mathbb{R}^3))$，其中对应于子列 $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$。

那么相对涡量强收敛，

$$\xi^{\nu_k} \to \xi \ in\ C([0,T], L^p(\mathbb{R}^3)).$$

为了证明这一点，我们将先讨论一个关于轴对称无旋流框架下无黏极限的辅助结果。回顾一下，正如我们在引言中指出的， $3D$ 轴对称无旋输运方程和对流扩散方程可以在半平面 $\mathbb{H}$ 中重新表述。为此，考虑输运方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t \rho + b \cdot \nabla \rho = g & \text{in } (0,T)\times\mathbb{H}, \\ \partial_r \rho = 0 & \text{on } \partial\mathbb{H}, \\ \rho|_{t=0} = \rho_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

对于给定的 $\nu > 0$ ，考虑相应对流扩散方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\nu + b^\nu \cdot \nabla \rho^\nu = \nu\left(\Delta \rho^\nu + \frac{3}{r}\partial_r \rho^\nu\right) + g^\nu & \text{in } (0,T)\times\mathbb{H}, \\ \partial_r \rho^\nu = 0 & \text{on } \partial\mathbb{H}, \\ \rho^\nu|_{t=0} = \rho_0^\nu. \end{cases} \tag{3.2}$$

在下面的引理中，我们希望将 [6, 引理 3.3], 中的结果推广到轴对称框架下存在外力的情形；该引理的作者在其中证明了无外力时的收敛结果。注意， [6] 中的结果与维数无关，而我们将聚焦于三维轴对称无旋流情形。

引理 3.2. 设 $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 和$(\rho_0^\nu)_\nu$ 均为轴对称函数，使得

$$\rho_0^\nu \to \rho_0 \ in\ L^1(\mathbb{R}^3), \tag{3.3}$$

$$(\rho_0^\nu)_\nu \ is\ bounded\ in\ L^\infty. \tag{3.4}$$

设 $b = (b_r,\ 0,\ b_z)$ 和 g均为轴对称的。进一步设 b和 g满足以下条件:

$$b \in L^1((0,T), W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^3)^3), \tag{3.5}$$

$$b \in L^\infty((0,T), L^1 + L^\infty(\mathbb{H})), \tag{3.6}$$

$$\operatorname{div}(b) = 0 \ in\ \mathbb{R}^3, \tag{3.7}$$

$$g \in L^1((0,T), L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)). \tag{3.8}$$

设 $b^\nu = (b_r^\nu,\ 0,\ b_z^\nu)$ 和 g^ν 均为轴对称的。设 b^ν 和 g^ν 满足

$$\operatorname{div}(b^\nu) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3, \tag{3.9}$$

$$b^\nu \to b \text{ in } L^1_{loc}((0,T)\times\mathbb{R}^3), \tag{3.10}$$

$$(b^\nu)_\nu = (b_1^\nu + b_2^\nu)_\nu \text{ bounded in } L^\infty((0,T),(L^1\cap L^s)+L^\infty(\mathbb{H})) \tag{3.11}$$

对于某个 $s\in(1,\ 2)$

$$(g^\nu)_\nu \text{ bounded in } L^1((0,T),L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^3)), \tag{3.12}$$

$$g^\nu \to g \text{ in } L^1((0,T),L^p(\mathbb{R}^3)) \text{ for some } 1<p<\infty. \tag{3.13}$$

令 $\rho^\nu \in L^\infty((0,\ T)\ L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^3))$ 为 ***(3.2)*** 的唯一解，并令 $\rho \in L^\infty((0,\ T)\ L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^3))$ 为 ***(3.1)*** 的唯一解。则对于所有 $1\le q<\infty$，我们都有

$$\rho^\nu \to \rho \text{ in } C([0,T],L^q(\mathbb{R}^3)).$$

注 3.3。在条件 (3.3)-(3.13) 下，相应弱形式的确存在唯一解ρ，$\rho^\nu \in L^\infty((0,\ T)\ L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^3))$，其定义见 $(0,\ T)\times\mathbb{R}^3$ 的 (3.1) 和 (3.2)，事实上它们是重整化的。情形 $f=0$的证明可见于 *[11,* 定理 ***II.3****]*。在一般情形下，只需对相关论证进行几乎不作改动的调整即可。

引理 *3.2* 的证明。首先，回顾一下，对于任意 $p\in[1,\infty]$，根据引理 2.6，我们有如下估计：

$$\|\rho^\nu(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} \le C\left(\|\rho_0^\nu\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \|g^\nu\|^p_{L^1((0,T),L^p(\mathbb{R}^3))}\right). \tag{3.14}$$

由 (3.3)、(3.4) 和 (3.12)，方程 (3.14) 蕴含 $(\rho^\nu)_\nu$ 在 $L^\infty((0,T)\ L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^3))$ 中一致有界，并且 $\rho_0^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \rho_0$ 在 $L^\infty((0,T)\ L^p(\mathbb{R}^3))$ 中一致有界。此外，存在 $\tilde\rho\in L^\infty((0,T)\ L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^3))$，使得沿某个子列，对于任意 $p\in(1,\infty)$，

$$\rho^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde\rho \text{ in } L^\infty((0,T),L^p(\mathbb{R}^3)).$$

利用线性性可以立即推出，$\tilde\rho$ 是方程 (3.1) 的分布解，其初始数据为 ρ_0，因此根据唯一性，有 $\tilde\rho=\rho$。于是，整个序列都收敛。

步骤 1： $L^2((0,T)\times\mathbb{R}^3)$**中的强收敛**

由于重整化，我们观察到

$$\|\rho^\nu(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\rho^\nu(s,x)|^2dxds \le \|\rho_0^\nu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} g^\nu\rho^\nu dxds, \tag{3.15}$$

$$\|\rho(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\rho_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} g\rho dxds, \tag{3.16}$$

对于几乎所有的 $t\in(0,T)$。忽略非负的黏性项，可得

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\rho^\nu(t)|^2-|\rho(t)|^2dx \le \int_{\mathbb{R}^3}|\rho_0^\nu|^2-|\rho_0|^2dx + \|g^\nu-g\|_{L^1((0,T),L^p(\mathbb{R}^3))}\|\rho^\nu\|_{L^\infty((0,T)L^{p'}(\mathbb{R}^3))}$$
$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} g(\rho^\nu-\rho)dxds.$$

再次对时间积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\rho^\nu(t)|^2-|\rho(t)|^2dxdt &\le T\int_{\mathbb{R}^3}|\rho_0^\nu|^2-|\rho_0|^2dx\\ &\quad+T\|g^\nu-g\|_{L^1((0,T),L^p(\mathbb{R}^3))}\|\rho^\nu\|_{L^\infty(0,T;L^{p'}(\mathbb{R}^3))}\\ &\quad+\int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}g(\rho^\nu-\rho)dxdsdt.\end{aligned}$$

由富比尼定理，最后一个积分可简化为

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}g(\rho^\nu-\rho)dxdsdt&=\int_0^T\int_s^T\int_{\mathbb{R}^3}g(s,x)(\rho^\nu(s,x)-\rho(s,x))dxdtds\\&=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(T-s)g(\rho^\nu-\rho)dxds.\end{aligned}$$

由于函数 $(s,x)\mapsto(T-s)g(s,x)$ 仍属于 $L^1(0,T;\,L^p(\mathbb{R}^3))$，且 $\rho^\nu\overset{*}{\rightharpoonup}\rho\,\text{in}L^\infty(0,T;\,L^{p'}(\mathbb{R}^3))$，我们可以得出

$$\limsup_{\nu\to0}\left(\|\rho^\nu\|^2_{L^2((0,T),L^2(\mathbb{R}^3))}-\|\rho\|^2_{L^2((0,T),L^2(\mathbb{R}^3))}\right)\le0. \tag{3.17}$$

此外，由弱下半连续性可得

$$\liminf_{\nu\to0}\left(\|\rho^\nu\|^2_{L^2((0,T),L^2(\mathbb{R}^3))}-\|\rho\|^2_{L^2((0,T),L^2(\mathbb{R}^3))}\right)\ge0.$$

这就证明了

$$\|\rho^\nu\|_{L^2((0,T),L^2(\mathbb{R}^3))}\to\|\rho\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))}.$$

结合 $\rho^\nu\rightharpoonup\rho\,\text{in}\;\;L^2(0,T;\,L^2(\mathbb{R}^3))$ 这一事实，我们得到 $\rho^\nu\to\rho\,\text{in}L^2(0,T;\,L^2(\mathbb{R}^3))$。

由此收敛可知，L^2 范数不存在“反常耗散”，也就是说，

$$\lim_{\nu\searrow0}\nu\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\rho^\nu(s,x)|^2dxds=0. \tag{3.18}$$

事实上，利用刚刚建立的收敛性以及力项和初始项的收敛性，对 t 上的 (3.15) 和 (3.16) 积分后，便可立即得到这一结论。

步骤 2：在 $L^q((0,T)\times\mathbb{R}^3)$ 中对 $1<q<\infty$ 的强收敛。对于 $q\in(1,2)$，我们使用赫尔德不等式，其中 $\frac{2}{q-1}$ 和 $\frac{2}{3-q}$，

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\rho^\nu(t)-\rho(t)|^qdxds&=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\rho^\nu(t)-\rho(t)|^{q-1}|\rho^\nu(t)-\rho(t)|dxds\\&\le\|\rho^\nu-\rho\|^{q-1}_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))}\|\rho^\nu-\rho\|_{L^{\frac{2}{3-q}}(0,T;L^{\frac{2}{3-q}}(\mathbb{R}^3))}.\end{aligned}$$

如果 $q\ge2$，我们观察到

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\rho^\nu(t)-\rho(t)|^qdxds&=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\rho^\nu(t)-\rho(t)|^{q-1}|\rho^\nu(t)-\rho(t)|dxds\\&\le\|\rho^\nu-\rho\|^{q-1}_{L^{2(q-1)}(0,T;L^{2(q-1)}(\mathbb{R}^3))}\|\rho^\nu-\rho\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))}.\end{aligned}$$

由于在 $L^2((0,T)\times\mathbb{R}^3)$ 中收敛，我们推得 $\rho^\nu\to\rho$ 在 $L^q((0,T)\times\mathbb{R}^3)$ 中对所有 $q\in(1,\infty)$ 均成立。

步骤3：在 $C([0,T];\ L^q_w(\mathbb{R}^3))$ 对于 $1<q<\infty$对于 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{H})$我们定义

$$f_\varphi : t\in[0,T]\mapsto 2\pi\int_{\mathbb{H}}\rho(t,r,z)\varphi(r,z)rdrdz$$

以及 $\nu>0$

$$f^\nu_\varphi : t\in[0,T]\mapsto 2\pi\int_{\mathbb{H}}\rho^\nu(t,r,z)\varphi(r,z)rdrdz.$$

注意，由于具有 L^q 中初始数据的（3.1）解已知属于 $C([0,T],L^q_w(\mathbb{R}^3))$（例如参见 [29] 中命题 1 的证明的步骤 1），所以 f_φ 是连续的。此外，$(f^\nu_\varphi)_\nu$ 和 $(\partial_t f^\nu_\varphi)_\nu$ 在 $[0,T]$ 中一致有界。事实上，

$$\begin{aligned}\partial_t f^\nu_\varphi(t)=&\int_{\mathbb{R}^3}\rho^\nu(t,x)\left(b^\nu(t,x)\cdot\nabla_x\varphi+\nu\Delta_x\varphi(x)\right)+g^\nu(t,x)\varphi(x)dx\\&+4\pi\int_{\mathbb{H}}\nu\partial_r\varphi(r,z)\rho^\nu(t,r,z)drdz,\end{aligned}$$

根据（3.14）、（3.11）和（3.12），可以看出该量是有界的。注意，我们利用了 b^ν 的轴对称性和无旋性质，类似于（ 2.1 ），从而将 $b^\nu\cdot\nabla\varphi$ 与 $b^\nu\cdot\nabla_x\varphi$ 互换。因此，结合 $(\rho^\nu)_\nu$ 的弱*收敛性和（3.10），我们可以得出 $\partial_t f^\nu_\varphi\to\partial_t f_\varphi$ 在 $L^1(0,T)$ 中成立。通过阿尔泽拉-阿斯科利型论证，我们得到 $f^\nu_\varphi\to f_\varphi$ 在 $[0,T]$ 中一致成立。由于 $C_c^\infty(\mathbb{H})$ 在 $L^{q'}(\mathbb{H})$ 中稠密，可得

$$\rho^\nu\to\rho\quad\text{ in }C([0,T],L^q_w(\mathbb{R}^3)).$$

步骤4：在有界集合上收敛的 L^q**-范数** 对于 $1<q<\infty$令 $1<q<\infty$ 且 $\nu>0$。考虑

$$h_\varphi : t\in[0,T]\mapsto 2\pi\int_{\mathbb{H}}|\rho(t,r,z)|^q\varphi(r,z)rdrdz$$

and

$$h^\nu_\varphi : t\in[0,T]\mapsto 2\pi\int_{\mathbb{H}}|\rho^\nu(t,r,z)|^q\varphi(r,z)rdrdz$$

对于 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{H})$。现在，对 h_φ 和 h^ν_φ 关于时间求导后，我们可以应用（3.1）和（3.2）。注意， b 和 b^ν 是零旋流分量，因此我们可以再次用 $b\cdot\nabla_x\varphi$ 替换 $b\cdot\nabla\varphi$，$b^\nu\cdot\nabla\rho^\nu$也同理。我们还利用了 ρ 是重整化的这一点：

$$\begin{aligned}\partial_t h_\varphi=&\int_{\mathbb{R}^3}|\rho|^q b\cdot\nabla_x\varphi+qg|\rho|^{q-2}\rho\varphi\ dx,\\\partial_t h^\nu_\varphi=&\int_{\mathbb{R}^3}|\rho^\nu|^q b^\nu\cdot\nabla_x\varphi+\nu\left(-q(q-1)|\rho^\nu|^{q-2}|\nabla_x\rho^\nu|^2\varphi+|\rho^\nu|^q\Delta_x\varphi\right)+qg^\nu|\rho^\nu|^{q-2}\rho^\nu\varphi dx\\&-4\pi\nu\int_{\mathbb{H}}|\rho^\nu|^q\partial_r\varphi drdz.\end{aligned}$$

由步骤 2 以及 (3.10)、(3.13)，立即可得

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\rho^\nu|^q b^\nu\cdot\nabla_x\varphi+g^\nu|\rho^\nu|^{q-2}\rho^\nu\varphi\ dxdt\to\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\rho|^q b\cdot\nabla_x\varphi+g|\rho|^{q-2}\rho\varphi\ dxdt$$

如 $\nu \to 0$。当黏性趋于零时，其余各项均消失。事实上，由 (3.14) 和 (3.18) 可知，对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{H})$，当 $\nu \to 0$ 时，

$$\nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} q(q-1)|\rho^\nu|^{q-2}|\nabla_x \rho^\nu|^2|\varphi| + |\rho^\nu|^q|\Delta_x \varphi| \, dxdt$$
$$+ 4\pi\nu \int_0^T \int_{\mathbb{H}} |\rho^\nu|^q |\partial_r \varphi| drdz \to 0.$$

因此， $\partial_t h_\varphi^\nu \to \partial_t h_\varphi$ 属于 $L^1(0,T)$。再由阿尔泽拉-阿斯科利定理，我们得出

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\rho^\nu|^q \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^3} |\rho|^q \varphi dx$$

在 $[0,T]$中一致收敛。由 $\partial_t h_\phi \in L^1(0,T)$还可得 $\rho \in C([0,T];\, L^q(B_R(0)))$；这可通过一个标准论证得到，该论证使用 C_c^∞中的函数来逼近 $B_R(0)$的示性函数。

步骤5：在 $C([0,T], L^q_{loc}(\mathbb{R}^3))$中的局部强收敛， $1 < q < \infty$我们只需结合步骤3和步骤4的结果。事实上，对于任意$(t_\nu)_\nu \subset [0,T],\, t_\nu \to t$以及任意检验函数$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{H})$，步骤3表明

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho^\nu(t_\nu, x)\varphi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \rho(t,x)\varphi(x)dx$$

作为 $\rho^\nu \to \rho$ 在 $C([0,T];\, L^q_w(\mathbb{R}^3))$ 中。同样，

$$\int_{B_R(0)} |\rho^\nu(t_\nu, x)|^q dx \to \int_{B_R(0)} |\rho(t,x)|^q dx$$

对所有 $R > 0$，由步骤4可知。由于弱收敛与范数收敛共同蕴含强收敛，我们知道 $\rho^\nu(t_\nu) \to \rho(t)$ 在 $L^q(B_R(0))$ 中成立。这便推出 $\rho^\nu \to \rho$ 在 $L^q(B_R(0))$ 中关于 $[0,T]$一致收敛：事实上，若非如此，则存在 $\delta > 0$ 以及一个时间序列 $t_\nu \to t$，使得

$$\|\rho^\nu(t_\nu) - \rho(t_\nu)\|_q > \delta.$$

由于 $\rho^\nu(t_\nu) \to \rho(t)$，且 $\rho(t_\nu) \to \rho(t)$ 在 $L^q(B_R(0))$ 中成立，我们得到 $0 \geq \delta$，矛盾。

步骤4：在 $C([0,T], L^q(\mathbb{R}^3))$， $1 \leq q < \infty$首先注意到

$$\|\rho^\nu(t) - \rho(t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq \int_{B_r(0)} |\rho^\nu(t) - \rho(t)|^q dx$$
$$+ 2^{q-1} \int_{B_r^c(0)} |\rho^\nu(t)|^q dx + 2^{q-1} \int_{B_r^c(0)} |\rho(t)|^q dx$$

对所有 $r > 0$。固定 $r > 0$ 时，由于步骤5，第一项在 $\nu \to 0$ 时消失，且关于 t 一致。对于其余两项，我们按照 [6] 中的方法处理，并证明：对任意 $\varepsilon > 0$，可找到某个半径 $r > 0$，使得

$$\sup_\nu \sup_t \left(\int_{B_r^c(0)} |\rho^\nu(t)|^q dx + \int_{B_r^c(0)} |\rho(t)|^q dx \right) < \varepsilon.$$

对于 $1 < R_1 < \frac{1}{2}R_2$，考虑一个具有以下性质的光滑截断函数

$$\psi_{R_1}^{R_2}(x) = \begin{cases} 0, & 0 < |x| < R_1 \\ 1, & 2R_1 < |x| < R_2 \\ 0, & |x| > 2R_2, \end{cases}$$

$0 \leq \psi_{R_1}^{R_2} \leq 1$，以及

$$|\nabla_x \psi_{R_1}^{R_2}| \leq \begin{cases} \frac{C}{R_1}, \text{ if } |x| \leq 2R_1 \\ \frac{D}{R_2} \text{ if } |x| > 2R_1 \end{cases} \quad , \quad |\nabla_x^2 \psi_{R_1}^{R_2}| \leq \begin{cases} \frac{C}{R_1^2}, \text{ if } |x| \leq 2R_1 \\ \frac{D}{R_2^2} \text{ if } |x| > 2R_1 \end{cases} . \tag{3.19}$$

于是可得

$$\left| \frac{\partial_r \psi_{R_1}^{R_2}}{r} \right| \leq \left| \frac{|\nabla_x \psi_{R_1}^{R_2}|}{r} \right| \leq \begin{cases} \frac{C}{R_1^2}, \text{ if } |x| < 2R_1 \\ \frac{D}{R_2^2} \text{ if } |x| \geq 2R_1. \end{cases} \tag{3.20}$$

如果将截断函数纳入公式中，即将 (3.2) 乘以 $q|\rho^\nu|^{q-2}\rho^\nu \psi_{R_1}^{R_2} r$，我们可以进行与引理 2.6 中类似的计算。因此，平流项不再为零，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\rho^\nu(t)|^q \psi_{R_1}^{R_2} dx \lesssim & \int_{\mathbb{R}^3} |\rho_0^\nu|^q \psi_{R_1}^{R_2} dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |b^\nu| |\nabla_x \psi_{R_1}^{R_2}| |\rho^\nu|^q + \nu |\rho^\nu|^q |\Delta_x \psi_{R_1}^{R_2}| dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{H}} 2\nu |\rho^\nu|^q r \left| \frac{\partial_r \psi_{R_1}^{R_2}}{r} \right| dr dz + \int_{\mathbb{R}^3} |g^\nu| |\rho^\nu|^{q-1} \psi_{R_1}^{R_2} dx dt. \end{aligned} \tag{3.21}$$

得益于先验估计 (3.14) 以及 ρ^ν 的轴对称性，我们有

$$\begin{aligned} C \left(\|g^\nu\|_{L^1((0,T),L^q(\mathbb{R}^3))}^q + \|\rho_0^\nu\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}^q \right) &\geq \|\rho^\nu(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}^q \\ &\geq 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^{\infty} |\rho^\nu(t)|^q dr dz = 2\pi \|\rho^\nu(t)\|_{L^q(\mathbb{H} \cap \{r>1\})}^q \end{aligned} \tag{3.22}$$

对任意 $q \in [1, \infty)$，以及 $\|\rho^\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = \|\rho^\nu\|_{L^\infty(\mathbb{H})}$. 随后，可利用 b^ν 的轴对称性以及截断函数 (3.19)、(3.20) 的衰减性质来处理

涉及输运场的项：

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|b^\nu||\nabla_x\psi_{R_1}^{R_2}||\rho^\nu|^q dxdt &\lesssim \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3\cap(B_{2R_1}(0)\setminus B_{R_1}(0))}\frac{|b^\nu|}{R_1}|\rho^\nu|^q dxdt\\ &\quad+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3\cap(B_{2R_2}(0)\setminus B_{R_2}(0))}\frac{|b^\nu|}{R_2}|\rho^\nu|^q dxdt\\ &\lesssim \int_0^T\int_{\mathbb{H}\cap\{R_1<r<2R_1\})}\frac{|b^\nu|}{R_1}|\rho^\nu|^q r drdzdt\\ &\quad+\int_0^T\int_{\mathbb{H}\cap\{R_2<r<2R_2\}}\frac{|b^\nu|}{R_2}|\rho^\nu|^q r drdzdt\\ &\lesssim \int_0^T\int_{\mathbb{H}\cap\{R_1<r<2R_1\}}|b^\nu||\rho^\nu|^q drdzdt\\ &\quad+\int_0^T\int_{\mathbb{H}\cap\{R_2<r<2R_2\}}|b^\nu||\rho^\nu|^q drdzdt\\ &\lesssim \|b_1^\nu\|_{L^\infty((0,T),L^s(\mathbb{H}))}\|\rho^\nu\|^q_{L^{qs'}((0,T),L^{qs'}(\mathbb{H}\cap\{r>R_1\}))}\\ &\quad+\|b_2^\nu\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{H}))}\|\rho^\nu\|^q_{L^q((0,T),L^q(\mathbb{H}\cap\{r>R_1\}))}\end{aligned}$$

对任意满足 b_1^ν 在 $L^\infty((0,T)\ L^s(\mathbb{H}))$中有界的 $s\in(1,2)$，其中$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$。那么，鉴于 (3.11) 和 (3.12)，我们可以在 (3.21) 中令 $R_2\to\infty$，从而得到

$$\begin{aligned}\int_{B^c_{2R_1}(0)}|\rho^\nu(t)|^q dx &\lesssim \int_{B^c_{R_1}}|\rho_0^\nu|^q dx+\frac{\nu}{R_1^2}\|\rho^\nu\|^q_{L^\infty((0,T),L^q(\mathbb{R}^3))}\\ &\quad+\|b_1^\nu\|_{L^\infty((0,T),L^s(\mathbb{H}))}\|\rho^\nu\|^q_{L^{qs'}((0,T),L^{qs'}(\mathbb{H}\cap\{r>R_1\}))}\\ &\quad+\|b_2^\nu\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{H}))}\|\rho^\nu\|^q_{L^q((0,T),L^q(\mathbb{H}\cap\{r>R_1\}))}\\ &\quad+\|g^\nu\|_{L^1((0,T),L^q(B^c_{R_1}(0)))}\|\rho^\nu\|^{q-1}_{L^\infty((0,T),L^q(B^c_{R_1}(0)))}\\ &\lesssim \|\rho_0^\nu\|^q_{L^q(B^c_{R_1}(0)}+\|\rho^\nu\|^q_{L^{qs'}((0,T),L^{qs'}(\mathbb{H}\cap\{r>R_1\}))}\\ &\quad+\|\rho^\nu\|^q_{L^q((0,T),L^q(\mathbb{H}\cap\{r>R_1\}))}+\frac{\nu}{R_1^2}\\ &\quad+\|g^\nu\|_{L^1((0,T),L^q(B^c_{R_1}(0)))}\left(\|\rho_0^\nu\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}+\|g^\nu\|_{L^1((0,T),L^q(\mathbb{R}^3))}\right)^{q-1}\\ &\lesssim \|\rho_0^\nu\|^q_{L^q(B^c_{R_1}(0))}+\|\rho^\nu\|^q_{L^{qs'}((0,T),L^{qs'}(\mathbb{H}\cap\{r>R_1\}))}\\ &\quad+\|\rho^\nu\|^q_{L^q((0,T),L^q(\mathbb{H}\cap\{r>R_1\}))}+\frac{\nu}{R_1^2}+\|g^\nu\|_{L^1((0,T),L^q(B^c_{R_1}(0)))}.\end{aligned}$$

现在我们可以选择 $R_1>0$，使得

$$\begin{aligned}&\|\rho_0^\nu\|^q_{L^q(B^c_{R_1}(0))}\le\frac{\varepsilon}{5},\\ &\|\rho^\nu\|^q_{L^{qs'}((0,T),L^{qs'}(\mathbb{H}\cap\{r>R_1\}))}\le\frac{\varepsilon}{5},\\ &\|\rho^\nu\|^q_{L^q((0,T),L^q(\mathbb{H}\cap\{r>R_1\}))}\le\frac{\varepsilon}{5},\\ &\|g^\nu\|_{L^1((0,T),L^q(B^c_{R_1}(0))}\le\frac{\varepsilon}{5},\\ &\frac{\nu}{R_1^2}\le\frac{\varepsilon}{5},\end{aligned}$$

这得益于由 (3.3)、(3.4)、(3.13) 得出的 ρ_0^ν 和 g^ν 的一致有界性，以及根据步骤 2，ρ^ν 在 $L^q((0,T)\ L^q(\mathbb{R}^3))$ 中收敛到 ρ（对 $1<q<\infty$ 而言）。由于 $\rho\in L^\infty((0,T)\ L^q(\mathbb{R}^3))$，我们还可以假设

$$\int_{B^c_{2R_1}(0)}|\rho(t)|^q dx\le\varepsilon.$$

□

定理 *3.1* 的证明。 $\xi^\nu \overset{*}{\rightharpoonup}\xi$ 在 $L^\infty((0,T)\ L^{\tilde p}(\mathbb{R}^3))$ 中对所有 $\tilde p\in(1,p]$ 成立。现在，遵循 [8], 的思路，我们考虑两个线性化问题

$$\begin{cases}\partial_t\xi_n^\nu+u^\nu\cdot\nabla\xi_n^\nu=\nu\Delta\xi_n^\nu+\frac{3\nu}{r}\partial_r\xi_n^\nu+g^\nu*\psi_n,\\ \xi_n^\nu(0,\cdot)=\xi_0^\nu*\psi_n,\end{cases}\tag{3.23}$$

and

$$\begin{cases}\partial_t\xi_n+u\cdot\nabla\xi_n=g*\psi_n,\\ \xi_n(0,\cdot)=\xi_0*\psi_n,\end{cases}\tag{3.24}$$

其中 ψ_n 是一个标准磨光子。回顾一下，u^ν 和 u 是通过毕奥-萨伐尔定律由 ξ^ν 和 ξ得到的。注意，我们再次利用柱对称性，在半平面 $\mathbb{H}$中给出一个表述。由三角不等式可得

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\|\xi^\nu(t)-\xi(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\le&\sup_{t\in[0,T]}\|\xi^\nu(t)-\xi_n^\nu(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}+\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_n^\nu(t)-\xi_n(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\\&+\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_n(t)-\xi(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

˜由线性性，$\xi_n^\nu=\xi_n^\nu-\xi^\nu$ 满足

$$\begin{cases}\partial_t\tilde\xi_n^\nu+u^\nu\cdot\nabla\tilde\xi_n^\nu=\nu\Delta\tilde\xi_n^\nu+\frac{3\nu}{r}\tilde\xi_n^\nu+\tilde g_n^\nu,\\ \tilde\xi_n^\nu(0,\cdot)=\xi_n^\nu(0,\cdot)-\xi_0^\nu,\end{cases}\tag{3.26}$$

其中 $\tilde g_n^\nu=g^\nu*\psi_n-g^\nu$。再次使用 L^p 估计 (2.7)，可推出对于固定的 n，(3.25) 右端项中的第一项关于 $\nu<\nu_0$一致趋于零，其中 $\nu_0=\nu_0(n)>0$ 充分小：

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\xi^\nu(t)-\xi_n^\nu(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\le C(p)\left(\|\xi_0^\nu-\xi_n^\nu(0,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}+\|g^\nu*\psi_n-g^\nu\|_{L^1((0,T),L^p(\mathbb{R}^3))}\right).$$

˜在 [29, 引理 1] 中注意到，作为重整化解之差的 $\xi_n=\xi_n-\xi$ 满足

$$\begin{cases}\partial_t\tilde\xi_n+u\cdot\nabla\tilde\xi_n=\tilde g_n\\ \tilde\xi_n(0,\cdot)=\xi_n(0,\cdot)-\xi_0\end{cases}\tag{3.27}$$

˜在重整化意义下，其中 $\tilde g_n=g*\psi_n-g$ 和 $\xi_{n,\ 0}=\xi_{n,\ 0}-\xi_{0\circ}$ 因此，对于固定的 n，(3.25) 的第三项由于以下估计而收敛于零

$$\|\xi_n-\xi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\le C(p)\left(\|\xi_n(0,\cdot)-\xi_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}+\|g*\psi_n-g\|_{L^1((0,T),L^p(\mathbb{R}^3))}\right).$$

对于剩余项，我们应用引理 3.2。由于初始数据的正则化，我们得到 $\xi_n^\nu(0,\cdot) \to \xi_n(0,\cdot)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^3)$ 中，并且 $\xi_n^{\nu_k}(0,\cdot) \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_n(0,\cdot)$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 中，当 $\nu \to 0$ 时成立。事实上，对于任意固定的 n，后一个弱* 收敛性成立，因为

$$\|\xi_n^\nu(0,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = \|\xi_0^\nu * \psi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \le \|\xi_0^\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\|\psi_n\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} = C(n,p)\|\xi_0^\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

对 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。此外，我们将轴对称毕奥-萨伐尔定律分解为

$$u_1 = (\mathbb{1}_{B_1(0)}G)*\omega, \quad u_2 = (\mathbb{1}_{B_1(0)^c}G)*\omega,$$

这里需要特别注意，$B_1(0)$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的单位球。

我们得到 $u = u_1+u_2 \in L^\infty((0,T)\ L^1+L^\infty(\mathbb{H}))$，并且 $(u^\nu)_\nu$ 在 $L^\infty((0,T)\ L^1+L^\infty(\mathbb{H}))$ 中有界。事实上，由 [14, (2.11)] 可知，毕奥-萨伐尔核（用柱坐标表示）满足 $|G| \lesssim \frac{1}{|\cdot|}$。于是，根据杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}\|u_1\|_{L^1(\mathbb{H})} + \|u_2\|_{L^\infty(\mathbb{H})} &\lesssim \left\|\mathbb{1}_{B_1(0)}\frac{1}{|\cdot|}*|\omega|\right\|_{L^1(\mathbb{H})} + \left\|\mathbb{1}_{B_1(0)^c}\frac{1}{|\cdot|}*|\omega|\right\|_{L^\infty(\mathbb{H})}\\ &\lesssim \|\omega\|_{L^1(\mathbb{H})}\\ &= \|\xi\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|\xi_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^1((0,T),L^1(\mathbb{R}^3))}.\end{aligned}$$

出于同样的原因，我们有

$$\|u_1^\nu\|_{L^1(\mathbb{H})} + \|u_2^\nu\|_{L^\infty(\mathbb{H})} \le \|\xi_0^\nu\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \|g^\nu\|_{L^1((0,T),L^1(\mathbb{R}^3))}.$$

此外，由定理 2.7 可得

$$u^\nu \to u \text{ in } L^2((0,T),L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)).$$

最终，通过施加（[28, 引理 4]），可得 $u \in L^1((0,T)\ W^{1,\ 1}_{loc}(\mathbb{R}^3))$。现在，对于任意固定的 n，引理 3.2 的所有条件均已满足。因此，只要选择足够大的 n，再令 $\nu = \nu(n)$ 足够小，(3.25) 的第二项就可以任意小。□

参考文献

[1] H. Abidi. “Navier–Stokes 系统轴对称解的正则性结果”. In: *Bulletin des Sciences Mathématiques* 132.7 (2008年10月), pp. 592–624.[2] Hammadi Abidi、Taoufik Hmidi 和 Sahbi Keraani. “关于轴对称欧拉方程的整体适定性”. In: *Mathematische Annalen* 347.1 (2009 年 9 月), pp. 15–41.[3] D. Albritton 、E. Brué 和 M. Colombo. “受迫纳维–斯托克斯方程的 Leray 解的非唯一性”. In: 《数学年刊》196.1 (2022年7月).[4] T. Buckmaster 和 V. Vicol. “纳维–斯托克斯方程弱解的非唯一性”. In: 《数学年刊》189.1 (2019年1月).[5] H. Chen、D. Fang 和 T. Zhang. “三维轴对称纳维–斯托克斯方程的正则性”. In: 《离散与连续动力系统 *A*辑》37.4 (2017年), pp. 1923–1939.[6] G. Ciampa、G. Crippa 和 S. Spirito. “无黏极限下二维欧拉方程涡量的强收敛”. In: 《理性力学与分析档案》240.1 (2021年3月), pp. 295–326.

[7] P. Constantin. “纳维–斯托克斯方程与界面面积”. In: 数学物理通讯 129.2 (1990年4月), pp. 241–266.[8] P. Constantin、T.D. Drivas 和 T.M. Elgindi. “尤多维奇类中涡量分布的无黏极限”. In: 纯粹与应用数学通讯 75.1 (2020年9月), pp. 60–82.[9] G. Crippa 和 S. Spirito. “二维欧拉方程的重整化解”. In: 数学物理通讯 339.1 (2015年6月), pp. 191–198.[10] R. Danchin. “有界涡量的轴对称不可压缩流”. In: 俄罗斯数学评论 62.3 (2007 年 6 月), pp. 475–496.[11] R.J. DiPerna 和 P.-L. Lions. “常微分方程、输运理论与索об列夫空间”. In: 数学新进展 98.3 (1989年10月), pp. 511–547.[12] C. Foias 和 R. Temam. “演化纳维–斯托克斯方程解的一些解析与几何性质”. In: 纯粹与应用数学杂志 58 (1979年), 339–368.[13] I. Gallagher. “纳维–斯托克斯方程轴对称解的稳定性与弱强唯一性”. In: 微分与积分方程16.5 (2003年), pp. 557–572.[14] T. Gallay 和 V. Šverák. “关于轴对称纳维–斯托克斯方程柯西问题的评述”. In: 数学汇流 7.2 (2016年2月), pp. 67–95.[15] J. Guillod 和 V. Šverák.临界空间中纳维–斯托克斯初值问题非唯一性的数值研究. 2017年.[16] T. Hmidi 和 M. Zerguine. “轴对称纳维–斯托克斯系统的无黏极限”. In: 微分与积分方程 22.11/12 (2009年), pp. 1223–1246.[17] H. Jia 和 V. Šverák. “自然能量空间中的三维不可压缩纳维–斯托克斯方程是否局部不适定？”. In: 泛函分析杂志268.12 (2015年6月), pp. 3734–3766.[18] H. Jia 和 V. Šverák. “纳维–斯托克斯方程弱解在初始时刻附近的局部空间估计及向前自相似解”. In: 数学新进展 196.1 (2013年4月), pp. 233–265.[19] Q. Jiu、J. Wu 和 W. Yang. “三维轴对称欧拉方程的黏性逼近与弱解”. In: 应用科学中的数学方法 38.3 (2014年3月), pp. 548–558.[20] O.A. Ladyzhenskaya. “纳维–斯托克斯方程霍普夫类弱解非唯一性的例子”. In: 苏联数学—伊兹维斯蒂亚3.1 (1969年), pp. 229–236.[21] O.A. Ladyzhenskaya、R.A. Silverman、R.T. Schwartz 和 J.E. Romain. “黏性不可压缩流的数学理论”. In: 今日物理17.2 (1964年2月), pp. 57–58.[22] S. Leonardi、J. Málek、J. Nečas 和 M. Pokorný. “关于 R^3 中的轴对称流”. In: 分析及其应用杂志 18.3 (1999年), pp. 639–649.[23] J. Leray. “充满空间的黏性液体的运动”. In:数学学报 63.0 (1934年), pp. 193–248.[24] J.-L. Lions. “求解非线性边值问题的若干方法”. In: *Dunod* (1969年).

[25] A. Majda。《涡量与不可压缩流体流动的数学理论》。载于：纯粹与应用数学通讯 39.S1（1986），S187–S220。[26] C. Marchioro 和 M. Pulvirenti。《不可压黏性流体的数学理论》。第 96 卷。应用数学科学。施普林格出版社，纽约，1994 年，第 xii+283 页。ISBN：0-387-94044-8。[27] J. Neustupa 和 M. Pokorný。“全空间中具有非零角速度分量的纳维–斯托克斯流体的轴对称流动”。载于：波希米亚数学 126.2（2001），第 469–481 页。[28] C. Nobili 和 C. Seis。“轴对称流体流动的重整化与能量守恒”。载于：*Mathematische Annalen* 382.1-2（2020 年 7 月），第 1–36 页。[29] H.J. Nussenzveig Lopes、C. Seis 和 E. Wiedemann。“关于具有无界涡量的二维不可压缩流动的无黏极限”。载于：非线性 34.5（2021 年 5 月），第 3112–3121 页。[30] X.S. Raymond。“关于不可压缩欧拉系统轴对称解的评论”。载于：偏微分方程通讯 19.1-2（1994 年 1 月），第 321–334 页。[31] S. Sulaiman。“轴对称分层纳维–斯托克斯系统的无黏极限”。载于：伊比利亚美洲数学杂志 30.2（2014），第 431–462 页。[32] R. Temam。纳维–斯托克斯方程与非线性泛函分析。工业与应用数学学会，1995 年。[33] R. Temam 和 A. Chorin。“纳维–斯托克斯方程：理论与数值分析”。载于：应用力学杂志 45.2（1978 年 6 月），第 456–456 页。[34] M.R. Ukhovskii 和 V.I. Yudovich。“充满全空间的理想流体和黏性流体的轴对称流动”。载于：应用数学与力学杂志 32.1（1968 年 1 月），第 52–62 页。[35] P. Zhang 和 T. Zhang。“三维纳维–斯托克斯系统的整体轴对称解”。载于：国际数学研究通知 2014.3（2012 年 10 月），第 610–642 页。

应用分析研究所，乌尔姆大学电子邮件地址：
patrick.brkic@uni-ulm.de

弗里德里希-亚历山大大学埃尔朗根-纽伦堡分校数学系电子邮件地址：emil.wiedemann@fau.de