arXiv:2303.01972v1 [math.CV] 1 Mar 2023

关于黎曼曲面上满足逆波列斯基不等式的映射

E. A. Sevost'yanov

2023年3月6日

摘要

我们研究了与黎曼曲面区域映射的边界行为相关的一些问题。特别是，对于满足逆波列斯基型模不等式的映射，我们从素端的角度确立了其连续延拓至边界的可能性。我们还研究了这类映射在边界点处的局部行为。

2010 M 数学主题分类：主要分类 30C65，31A15，30C6 **2**

1 引言

本文致力于研究有界畸变和有限畸变映射，这类映射近年来受到广泛研究，参见例如 [1] 和 [2]。在最近一系列论文中，我们详细研究了满足所谓逆波列斯基不等式的映射。值得注意的是，我们已对这类映射在欧几里得空间和度量空间中的情形给出了较为完整的描述，参见例如 [3], [4] 和 [5]。本文致力于研究这类映射的另一个重要方面，即研究定义在边界不良的黎曼曲面上的域中的映射。我们关注带有分支点的映射，因为相应的同胚情形此前已有研究（见 [6], [7]）。值得注意的是，黎曼曲面上的素端研究方法与黎曼流形及欧几里得情形中较为常见的方法有所不同，参见例如 [8], [9]。我们还研究这些映射在域边界点处的局部行为问题。

文中大多数定义都可以在 [10] 中找到。下文中，除非另有说明，黎曼曲面 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{S}_*$ 均为双曲型。此外 $ds_{\widetilde{h}}$

而 $d\widetilde{v}$、 $ds_{\widetilde{h_*}}$ 和 $d\widetilde{v_*}$ 分别表示黎曼曲面 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{S}_*$上的长度元素和面积元素。我们还用记号 h 表示曲面 $\mathbb{S}$ 上的度量，特别是,

$$\widetilde{B}(p_0,r) := \{p \in \mathbb{S} : \widetilde{h}(p,p_0) < r\}, \quad \widetilde{S}(p_0,r) := \{p \in \mathbb{S} : \widetilde{h}(p,p_0) = r\} \tag{1.1}$$

分别是以 p_0 为中心、半径为 $r > 0$ 的圆盘和圆，其中 $\mathbb{S}$

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}(p_0,r_1,r_2) = \{p \in \mathbb{S} : r_1 < \widetilde{h}(p,p_0) < r_2\}. \tag{1.2}$$

以下定义参见 Carath´eodory [11], , 见 [8]。回顾一下，连续映射σ： $\mathbb{I} \to \mathbb{S}, \mathbb{I} = (0,1)$，称为 $\mathbb{S}$ 中的 约当弧，如果对于 $t_1 \neq t_2$， $\sigma(t_1) \neq \sigma(t_2)$。此外，我们有时用 σ 表示 $\sigma(\mathbb{I})$，用 $\overline{\sigma}$ 表示 $\sigma(\mathbb{I})$，用 $\partial\sigma$ 表示 $\sigma(\mathbb{I}) \setminus \sigma(\mathbb{I})$。域 D 中的 割线，要么是约当弧 σ： $\mathbb{I} \to D$，其端点位于 ∂D 上；要么是 $D.$ 中的一条闭约当曲线。 D 中的割线序列 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$ 称为一条链，如果:

(i) 对任意 $i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots$， $\overline{\sigma_i} \cap \overline{\sigma_j} = \varnothing$；

(ii) σ_m 分离 D，即 $D \setminus \sigma_m$ 恰好由两个连通分支组成，其中一个包含 σ_{m-1}，另一个包含 σ_{m+1},

(iii) $\widetilde{h}(\sigma_m) \to \infty$ as $m \to \infty, \widetilde{h}(\sigma_m) = \sup\limits_{p_1,p_2 \in \sigma_m} \widetilde{h}(p_1,p_2).$

根据定义，割线链 $\{\sigma_m\}$定义了一列域 $d_m \subset D$ ，使得$\partial\, d_m \cap D \subset \sigma_m$ 且 $d_1 \supset d_2 \supset \ldots \supset d_m \supset \ldots$。若对每个 $m = 1$、2、.....，域 d_m 都包含除有限个以外的所有域 d'_k，并且对每个 $k = 1$、2、.....，域 d'_k 也包含除有限个以外的所有域 d_m，则称两条割线链 $\{\sigma_m\}$ 和 $\{\sigma'_k\}$ 为等价的，。 D中 D 的端是等价割线链的等价类。

设 K是 $D \subset \mathbb{S}$中的一个素端， $\{\sigma_m\}$ 和 $\{\sigma'_m\}$ 是 K中的两条链， d_m 和 d'_m 是分别对应于 σ_m 和 σ'_m的域。那么

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d'_m} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m},$$

因此

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d'_m},$$

换句话说，该集合

$$I(K) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m}$$

仅取决于 K ，而不取决于割线链 $\{\sigma_m\}$ 的选择。集合$I(K)$称为素端的印象集 K。此外， E_D 表示 D中所有素端的集合， $\overline{D}_P := D \cup E_D$ 表示用其素端对 D 进行完备化。下面将 $\overline{D}_P$ 赋予如下拓扑空间结构。首先， D 中的开集也视为$\overline{D}_P$中的开集。其次，素端 $P \subset E_D$ 的基邻域定义为其并集

其中包含任意一个域 d，该域属于 P的某个割线链，且包含$d.$ 中的所有其他素端。特别地，在上述拓扑中，点序列 $x_n \in D$ 收敛到元素 $P \in E_D$，当且仅当对于任意属于 P中区域链$d_1, d_2, d_3, \ldots$ 的域 d_m，都存在 $n_0 = n_0(m)$，使得 $x_n \in d_m$ 对于 $n \geqslant n_0$.成立

通常，黎曼曲面 $\mathbb{S}$ 上的路径 γ 是连续映射 $\gamma\colon I \to \mathbb{S}$，其中 I 是实轴上的有限线段、区间或半区间。设 Γ 是 $\mathbb{S}.$ 中的一个路径族。若博雷尔函数 $\rho\colon \mathbb{S} \to [0, \infty]$ 满足对任意路径 $\gamma \in \Gamma.$ 均有 $\int \rho(p)\, ds_{\widetilde{v}}(p) \geqslant 1$，则称其为该路径族 Γ γ 的可容许函数。后一条件简写为: $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma_{\gamma}$。路径族 Γ 的模是一个实值函数

$$M(\Gamma) := \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{S}} \rho^2(p)\, d\widetilde{v}(p)\,. \tag{1.3}$$

设 $E,\ F \subset \mathbb{S}$ 为任意集合。今后，处处用 $\Gamma(E, F, D)$ 表示所有路径 $\gamma\colon [a, b] \to D$ 的族，这些路径在 D 中连接 E 与 F，即 $\gamma(a) \in E,\ \gamma(b) \in F$ 且 $\gamma(t) \in D$，其中 $t \in (a, b)$。设 $f\colon D \to \mathbb{S}_*$，设 $p_0 \in f(D)$，并设 $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup h_*(p, p_0)$。现在，我们用 $\Gamma_f(p_0, r_1, r_2)$ 表示所有满足 $p \in f(D)$ 的路径 γ 在 D 中所成的族

$f(\gamma)$ $A(p_0, r_1, r_2)$ $\Gamma(S(p_0), r_1, r_2)$ 我们称 $f\colon D \to \mathbb{S}_*$ 在点 $p_0 \in f(D)$，满足逆波列斯基不等式，当且仅当关系

$$M(\Gamma_f(p_0, r_1, r_2)) \leqslant \int\limits_{f(D) \cap \widetilde{A}(p_0, r_1, r_2)} Q(p) \cdot \eta^2(\widetilde{h}_*(p, p_0))\, d\widetilde{v}_*(p) \tag{1.4}$$

对于任意满足以下条件的勒贝格可测函数 $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$，该关系均成立:

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \tag{1.5}$$

给定一个关于测度 $\widetilde{v}$ 可测的函数 Q，定义

$$q_{p_0}(r) = \frac{1}{r} \int\limits_{\widetilde{S}(p_0, r)} Q(p)\, ds_{\widetilde{h_*}}(p)\,. \tag{1.6}$$

以下定理成立。

定理 1.1. 设 D、D_* 分别是 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{S}_*$ 中的域，且其紧闭包分别为 $\overline{D} \subset \mathbb{S}$ 和 $\overline{D_*} \subset \mathbb{S}_*$; 此外，$\partial D$ 和 ∂D_* 有有限个连通分支。设 $Q\colon \mathbb{S}_* \to (0, \infty)$ 是给定函数，它关于 $\mathbb{S}_*$ 上的测度 $\widetilde{v_*}$ 可测，且 $Q(p) \equiv 0$ 属于 $\mathbb{S}_* \setminus f(D)$。设 $f\colon D \to D_*$ 是将 D 映到 D_* 上的开、离散且闭映射，并满足关系式 (1.4)。若对每个点 $p_0 \in \partial D_*$，存在 $r_0 = r_0(p_0) > 0$，使得对几乎所有 $r \in \in (0, r_0)$，$q_{p_0}(r) < \infty$，则 f 有连续延拓 $f\colon \overline{D}_P \to \overline{D_*}_P, f(\overline{D}_P) = \overline{D_*}_P$.

若对任意 $P>0$ 以及点 x_0 的任意邻域 U，都存在同一点的一个邻域 $V\subset U$，使得对于任意与 ∂U 和 $\partial V.$ 相交的连续体 E、$F\subset D$，$M(\Gamma(E,F,D))>P$，则称域 D 的边界在点 $x_0\in\partial D$ 处是弱平坦的。若域 D 的边界在其每一点 $D.$ 处都满足相应性质，则称该边界是弱平坦的。对于具有良好边界的域 D，有如下定理 1.1 的一个版本。

定理 1.2. 设 D、D_* 分别是 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{S}_*$ 中的域，且其闭包 $\overline{D}\subset\mathbb{S}$ 和 $\overline{D_*}\subset\mathbb{S}_*$ 均为紧集；此外，∂D 具有弱平坦边界，∂D_* 有有限个连通分支。设 $Q:\mathbb{S}_*\to(0,\infty)$ 是关于 $\mathbb{S}_*$ 上的测度 $\widetilde{v_*}$ 可测的给定函数，$Q(p)\equiv 0$ 属于 $\mathbb{S}_*\setminus f(D)$。设 $f:D\to D_*$ 是将 D 映到 D_* 上的开、离散且闭映射，并满足关系式 (1.4)。若对每个点 $p_0\in\partial D_*$，存在 $r_0=r_0(p_0)>0$，使得对几乎所有 $r\in\in(0,r_0)$，$q_{p_0}(r)<\infty$，则 f 存在连续延拓 $f:\overline{D}\to\overline{D_*}_P$, $f(\overline{D})=\overline{D_*}_P$.

此前，针对同胚已得到与定理 1.1 的断言类似的结果，见 [6, 定理 2]。此外，在更一般的假设下，我们也在黎曼流形上得到了这一断言，见 [5, 定理 1.4]。

2 预备知识

给定映射 $f:D\to\mathbb{S}_*$ 和集合 $E\subset\overline{D}\subset\mathbb{S}$，我们定义

$$C(f,E)=\{y\in\mathbb{S}_*:\exists\, x\in E, x_k\in D: x_k\to x, f(x_k)\to y, k\to\infty\}.$$

以下结论成立。

命题 2.1. 假设域 $D\subset\mathbb{S}$ 有有限个边界分支 $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_n\subset\partial D.$ 那么：

1) 对任意 Γ_i, $i=1,2,\ldots,n$，存在一个邻域 $U_i\subset\mathbb{S}$ 以及一个共形映射 H，将 $U_i^*:=U_i\cap D$ 映到 $R=\{z\in\mathbb{C}:0\leqslant r_i<|z|<1\}$，使得 $\gamma_i:=\partial U_i^*\cap D$ 是闭若尔当路径

$$C(H,\gamma_i)=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\};\quad C(H,\Gamma_i)=\{z\in\mathbb{C}:|z|=r_i\},$$

而且，当且仅当 $r_i=0$ 退化为一个点时 Γ。此外，H 可延拓为一个从 $\overline{U_i^*}_P$ 到 $\overline{R}$的同胚，见 *[6, 引理 2]*;

2) 空间 $\overline{D}_P$ 可赋予某个度量 $\rho:\overline{D}_P\times\overline{D}_P\to\mathbb{R}$ 使得，任意序列 $x_n\in D$、$n=1$、2、.....收敛到某个素端 $P\in E_D$，等价于 x_n 在以下某个空间中的收敛，见 $\overline{U_i^*}_P$备注 *[6,]*;

3) 任意素端 $P\in E_D$ 都包含一条割线链 σ_m, $m=1,2,\ldots$，这些割线属于$\widetilde{}$球面 $S(z_0,r_m)$ $r_m\to 0$，且满足 $m\to\infty$，见 *[6, 备注 1]*;

4) 对任意 $P \subset E_D$，其印象集 $I(P)$ 都是 ∂D 中的一个连续统，而存在唯一的 $1 \leqslant i \leqslant n$ 使得 $I(P) \subset \Gamma_i$，见 *[6,* 命题1、备注 *1]*。

设 X 和 X' 是分别配备度量 d 和 d' 的度量空间，且 D 是 $X.$ 中的一个域。设 $f\colon D \to X'$ 是一个离散开映射，$\beta\colon [a, b) \to X'$ 是一条路径，并且设 $x \in f^{-1}(\beta(a))$。若路径 $\alpha\colon [a, c) \to D$ 满足以下条件，则称其为从 x 出发的 β 的一个极大 f-提升：(1) $\alpha(a) = x$；(2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,c)}$；(3) 对于 $c < c' \leqslant b$，不存在路径 $\alpha'\colon [a, c') \to D$ 使得 $\alpha = \alpha'|_{[a,c)}$ 且 $f \circ \alpha' = \beta|_{[a,c')}$.。若 X 和 X' 是局部紧的，X 是局部连通的，且 $f\colon D \to X'$ 是离散开映射，则存在一个从 x 出发的 β 的极大 f-提升，见 [12, 引理 2.1]。以下结论在 [5, 引理 2.1] 中得到证明（关于空间 $\mathbb{R}^n$，例如参见 [13,定理 3.7]）。

引理 2.1. 设 X 和 X' 为度量空间，X 为局部连通，X' 为局部紧，D 为 X中的一个域，且 $f\colon D \to X'$ 是从 D 到 $D' \subset X'.$ 的离散开闭映射。假设 $\overline{D}$ 是紧的。若 $\beta\colon [a, b) \to X'$ 是一条满足 $x \in f^{-1}(\beta(a))$ 的路径，则存在 β 的一个整体 f-提升，以 x为起点；换言之，存在一条路径 $\alpha\colon [a, b) \to X$，使得对任意 $t \in [a, b)$，都有 $f(\alpha(t)) = \beta(t)$。此外，若 $\beta(t)$ 有极限 $\lim\limits_{t\to b-0} \beta(t) := B_0 \in D'$，则 α 可以连续延拓到 b，且 $f(\alpha(b)) = B_0.$

黎曼曲面上的富比尼定理的如下类比成立（参见 [14]）。

引理 2.2. 设 U 是点 $p_0 \in \mathbb{S}$的一个正规邻域，并设 $Q : U \to [0, \infty]$ 是关于测度 h可测的函数，且 $d_0 := \operatorname{dist}(p_0, \partial U) := \inf\limits_{p\in\partial U} h(p_0, p)$。那么，对于任意 $0 < r_0 \leqslant d_0$

$$\int\limits_{\widetilde{B}(p_0,r_0)} Q(p)\, d\widetilde{v}(p) = \int\limits_0^{r_0} \int\limits_{\widetilde{S}(p_0,r)} Q(p)\, ds_{\widetilde{h}}(p)\, dr\,, \tag{2.1}$$

其中，$d\widetilde{v}(p)$ 和 $ds_{\widetilde{h}}$ 分别是 $\mathbb{S}$上的面积元和长度元，参见 (3.5)；圆盘 $\widetilde{B}(p_0, r_0)$ 和圆 $\widetilde{S}(p_0, r)$ 定义见 (1.1)。

3 定理 1.1 的证明

定理 *1.1* 的证明。设 $P \in E_D$，并令 Γ 为 ∂D 的一个连通分支，使得 $I(P) \subset \Gamma$（由命题 2.1 的第 4 项可知其存在）。设 $U \subset \mathbb{S}$ 是与命题 2.1 对应的邻域，并设 H 是域 $U^* := U \cap D$到环域 $R = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r < |z| < 1\}$ 的相应共形映射，使得 $\gamma := \partial U^* \cap D$ 是一个闭若尔当路径，

$$C(H, \gamma) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}; \quad C(H, \Gamma) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}\,.$$

设 d_n, $n = 1, 2, \ldots,$ 是与 $P.$ 相对应的区域序列。根据 U^* 的定义可知，当 $n \in \mathbb{N}.$ 充分大时，所有 d_n 都属于 U^*。我们可以假设

$d_1 \subset U^*$. 现在，我们设

$$g := f \circ H^{-1}.$$

由于 H 是共形映射，它保持路径族模数（例如，参见 [15, 推论 1.2]）。因此， g 也满足关系式 (1.4)。所以，为证明定理 1.1，只需证明连续延拓 $\overline{g}$： $\overline{R} \to \overline{D_{*P}}$.

设 $x_0 \in \partial R$. 假设关于映射 g在点 x_0 处连续延拓的结论不成立。由于$\overline{D^*}$ 是紧的，根据命题 2.1 的第 2) 条，空间$\overline{D_{*P}}$也是紧的。于是存在序列 x_k、 $y_k \in R$、 $k = 1$、2、.....以及 P_1、 $P_2 \in \overline{D_{*P}}$、$P_1 \neq P_2$，使得当 $k \to \infty$时， x_k、 $y_k \to x_0$，且当$k \to \infty$时， $\rho(g(x_k)$ $P_1) \to 0$、 $\rho(g(y_k)$ $P_2) \to 0$，其中 ρ 是 $\overline{D_{*P}}$ 上的某个度量（参见命题 2.1 的第 2) 条）。由于 f 是闭映射，f 是边界保持的（例如，参见 [16, 命题 2.1]）。因此， P_1、 $P_2 \in E_{D_*}$.

设 E_k, G_k $k = 1, 2, \ldots$ 为与素端 P_1, P_2分别对应的区域序列。我们来证明存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$E_k \cap G_k = \varnothing \quad \forall\, k \geqslant k_0\,. \tag{3.1}$$

反设结论不成立，即假设对每个 $l = 1, 2, \ldots$，都存在一个递增数列 $k_l, l = 1, 2, \ldots$，使得 $p_{k_l} \in E_{k_l} \cap G_{k_l}, l = 1, 2, \ldots$。现在 $p_{k_l} \to P_1$和 $p_{k_l} \to P_2$,$l \to \infty$. 令 ρ 为命题 2.1 中定义在 $\overline{D_{*P}}$ 上的度量。由三角不等式,

$$\rho(P_1, P_2) \leqslant \rho(P_1, x_{k_l}) + \rho(x_{k_l}, P_2) \to 0, \qquad l \to \infty\,,$$

这与条件 $P_1 \neq P_2$.矛盾

根据命题 2.1，我们可以考虑一条割线链 σ_n，它对应于~区域 E_k，且素端 P_1 属于圆 $S(p_0, r_n)$ $p_0 \in \partial D_*$，因为 $n \to \infty$.。由于 $\rho(g(x_k)$ $P_1) \to 0$，存在一个数 $k_1 \in \mathbb{N}$，使得对任意 $k \geqslant k_1$.，都有 $g(x_k) \in E_1$。类似地，存在一个数 $k_2 \in \mathbb{N}$，使得对任意 $k \geqslant k_2$.，都有 $g(x_k) \in E_2$。在 E_2 内用一条路径 C_k： $[0, 1] \to E_2$ 连接点 $g(x_k)$ 和 $g($ $x_{k_2})$，使得 $C_k(0) = g(x_k)$ $C_k(1) = g(x_{k_2})$。

同理，存在一个数 $k_3 \in \mathbb{N}$，使得 $g(y_k) \in G_1$ 对任意 $k \geqslant k_3$. 均成立。用一条路径 C_k 将 $g(y_k)$~ ~ 和 $g(y_{k_3})$ 连接起来，其中 G_1 内有： $[0, 1] \to G_1$，使得 $C_k(0) = g(y_k)$ $C_k(1) = g(y_{k_3})$；此处见图1。

给定一条路径 γ： $[a, b] \to \mathbb{S}$，令

$$|\gamma| := \{p \in \mathbb{S} : \exists\, t \in [a, b] : \gamma(t) = p\}\,.$$

下面证明

$$\Gamma(|C_k|, \widetilde{|C_k|}, D_*) > \Gamma(\widetilde{S}(p_0, r_1), \widetilde{S}(p_0, r_2), \widetilde{A}(p_0, r_1, r_2))\,, \tag{3.2}$$

~ ~其中， $A(\widetilde{p_0}, r_1, r_2)$ 定义见 (1.2)。假设 $\gamma \in \Gamma(C_k, C_k, D_*)$ γ： $[0, 1] \to D_*$. 根据构造， $|\gamma| \cap E_2 \neq \varnothing \neq |\gamma| \cap (D_* \setminus E_2)$。因此,

$$|\gamma| \cap \partial E_2 \neq \varnothing \tag{3.3}$$

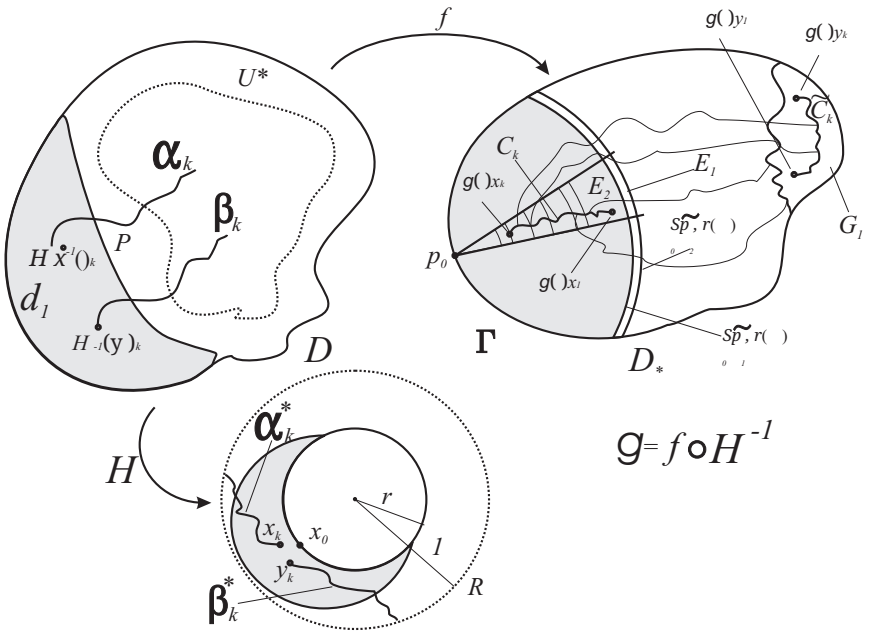

图1：定理 1.1 的证明

（见 [17, 定理 1， §46，第 I 项]）。因此，存在 $t_1 \in [0,1]$ 使得 $\gamma(t_1) \in \partial E_2$. 由于 $E_2 \subset E_1$，我们有 $\overline{E_2} \subset \overline{E_1}$. 因此，要么 $\gamma(t_1) \in E_1$，要么 $\gamma(t_1) \in \partial E_1 \cap D_* \subset S(\widetilde{p_0}, r_1)$。第二种情况不可能，因为 请注意， $t_2 < 1$ 因为 $\gamma(t_1) \in \partial E_2 \cap D_* \subset S(\widetilde{p_0}, r_2)$。现在， $\gamma(t_1) \in E_1$. 根据条件 (3.1)， $\gamma(t_1) \notin G_1$. 现在， $t_1 \neq 1$. 令 $\gamma_1 := \gamma|_{[t_1,1]}$. 不失一般性，我们可以假设 $\gamma(t) \notin \partial E_2$ 对于 $t \in (t_1, 1]$.

类似地推理可得 $|\gamma_1| \cap E_1 \neq \varnothing \neq |\gamma| \cap (D_* \setminus 12)$。因此，

$$|\gamma_1| \cap \partial E_1 \neq \varnothing \tag{3.4}$$

（参见 [17, 定理 1， §46第 I 项]）。现在，存在 $t_2 \in (t_1, 1)$，使得 $\gamma(t_2)$。$\in \partial E_1$. 不失一般性，我们可以假设 $\gamma(t)$。$\in E_1$ 对于任意 $t \in [t_1, t_2]$.，令 $\gamma_2 := \gamma_1|_{[t_1,t_2]}$. 现在 γ_2 是 γ 的一个子路径，使得 $\gamma(t_1)$， $\in \partial E_1 \cap D_* \subset S(\widetilde{p_0}, r_1)$，且 $\gamma(t_2) \in \partial E_2 \cap D_* \subset S(p_0, r_2)$，而 $\gamma(t) \in A(p_0, r_1, r_2)$，这就证明了（3.2）。

根据引理 2.1，路径 C_k 和 C_k 在 D 中分别具有从点 $H^{-1}(x_k)$ 和 $H^{-1}(y_k)$ 出发的完整 f-提升 α_k 和 β_k。注意，点 $f(H^{-1}(x_1))$ 和 $f(H^{-1}(y_1))$ 在域 D 中通过映射 f. 的原像不可能多于有限个。事实上，由 [16]中的命题 2.1， f 是适当的，因此 $f^{-1}(f(H^{-1}(x_1)))$ 是 D. 中的紧集。若存在 $z_m \in f^{-1}(f(H^{-1}(x_1)))$ $m = 1$，2，...， $z_n \neq z_k$ 满足 $n \neq k$，则可找到一个子列 z_{m_p}、 $p = 1$、2，...，使得当 $p \to \infty$ 时， $z_{m_p} \to z_0$ 趋于某个 $z_0 \in D$.。后者与 f. 的离散性相矛盾。因此， $f^{-1}(f(H^{-1}(x_1)))$ 是有限的。同样， $f^{-1}(f(H^{-1}(y_1)))$ 也是有限的。因此，存在 $K_0 \in \mathbb{N}$、 $K_0 >$ 、$\max\{k_0, k_1, k_2\}$ 以及 $\delta_0 > 0$，使得

$$\operatorname{dist}(\alpha_k(1), \partial D) = \operatorname{dist}(f^{-1}(f(H^{-1}(x_1))), \partial D) \geqslant \delta_0$$

and

$$\operatorname{dist}(\beta_k(1), \partial D) = \operatorname{dist}(f^{-1}(f(H^{-1}(y_1))), \partial D) \geqslant \delta_0$$

对于 $k \geqslant K_0.$ ，现在令

$$t_k := \sup\{t \in [0,1] : \alpha_k(t) \in U^*\}\,, \quad p_k := \sup\{t \in [0,1] : \beta_k(t) \in U^*\}\,.$$

根据上述证明以及映射 H 的定义，我们得到

$$\operatorname{dist}\left(H(\alpha_k(t_k)), x_0\right) \geqslant r_0\,, \quad \operatorname{dist}\left(H(\beta_k(t_k)), x_0\right) \geqslant r_0\,, \quad k \geqslant K_0 \tag{3.5}$$

对于某个 $r_0 > 0.$ 集

$$\alpha_k^* := H\left(\alpha_k|_{[0,t_k]}\right)\,, \qquad \beta_k^* := H\left(\beta_k|_{[0,p_k]}\right)\,.$$

由于 R 是两个圆的并集，而这两个圆是 C^1-流形， R 具有弱平坦边界（参见例如 [18, 定理 17.10 、 17.12]）。因此，对于任意 $P > 0$ ，存在 $k = k_P \geqslant K_0$ 使得

$$M(\Gamma(|\alpha_k^*|, |\beta_k^*|, R)) > P \qquad \forall\, k \geqslant k_P\,. \tag{3.6}$$

我们证明条件（3.6）与（1.4）相矛盾。根据构造 ，

$$g(\alpha_k^*) \subset C_k, \qquad g(\beta_k^*) \subset \widetilde{C_k}\,. \tag{3.7}$$

由（3.2）和（3.7），

$$g(\Gamma(|\alpha_k^*|, |\beta_k^*|, R)) \subset \Gamma(|C_k|, |\widetilde{C_k}|, D_*) > \Gamma(\widetilde{S}(\widetilde{p_0}, r_1), \widetilde{S}(p_0, r_2), \widetilde{A}(p_0, r_1, r_2))\,.$$

因此，

$$\Gamma(|\alpha_k^*|, |\beta_k^*|, R) > \Gamma_g(p_0, r_1, r_2)\,.$$

根据（1.4）中映射 f 的定义，并结合证明开头的说明，我们得到

$$M(\Gamma(|\alpha_k^*|, |\beta_k^*|, R)) \leqslant M(\Gamma_g(p_0, r_1, r_2)) \leqslant \int\limits_{D_* \cap \widetilde{A}(p_0, r_1, r_2)} Q(p) \cdot \eta^2(\widetilde{h}_*(p, p_0))\, d\widetilde{v}_*(p)\,. \tag{3.8}$$

~令 $Q(p) = \max\{Q(p)\ 1\}$ ，且

$$\widetilde{q}_{p_0}(r) = \int\limits_{S(p_0, r)} \widetilde{Q}(p)\, ds_{\widetilde{h_*}}(p)\,.$$

现在，我们还得到 $\widetilde{q}_{p_0}(r) \neq \infty$ 对任意 $r \in [r_1, r_2].$ 均成立。

$$I = I(p_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r\widetilde{q}_{p_0}(r)}\,.$$

注意到 $I \neq 0$，因为对于任意 $r \in [r_1, r_2].$ ， $\widetilde{q}_{p_0}(r) \neq \infty$ 此外，注意到 $I \neq \infty$，因为对于某个常数 $C > 0$,

$$I \leqslant C \cdot \log \frac{r_2}{r_1} < \infty\,, \quad i = 1, 2, \ldots, p\,.$$

现在，我们令

$$\eta(r)=\begin{cases}\frac{1}{Ir\widetilde{q}_{p_0}(r)}\,, & r\in[r_1,r_2]\,,\\ 0, & r\notin[r_1,r_2]\,.\end{cases}$$

r_2注意，函数 η 满足条件 $\int\eta(r)\,dr=1$，因此可将其代入不等式 (3.8) 右侧，并取相应的值 f、 r_1 和 r_2.r_1

另一方面，由引理 2.2，

$$\int\limits_{D_*\cap\widetilde{A}(p_0,r_1,r_2)}Q(p)\cdot\eta^2(\widetilde{h}_*(p,p_0))\,d\widetilde{v}_*(p)=$$

$$=\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{S(p_0,r)}Q(y)\eta^2(\widetilde{h}_*(p,p_0))\,ds_{\widetilde{h}_*}(p)\,dr\;\leqslant \tag{3.9}$$

$$\leqslant\frac{C}{I^2}\int\limits_{r_1}^{r_2}r\widetilde{q}_{p_0}(r)\cdot\frac{dr}{r^2\widetilde{q}_{p_0}(r)}=\frac{C}{I}<\infty\,,$$

其中 C 是某个常数。由 (3.8) 和 (3.9)，可得

$$M(\Gamma(|\alpha_k^*|,|\beta_k^*|,R))\leqslant\frac{C}{I}<\infty \tag{3.10}$$

当 $k\in\mathbb{N}$. 充分大时，关系 (3.10) 与条件 (3.6) 矛盾。上述矛盾否定了映射 f 在点 x_0. 处不存在极限这一假设。

还需证明 $\overline{f}(\overline{D}_P)=\overline{D_{*P}}$.。显然，$\overline{f}(\overline{D}_P)\subset\overline{D_{*P}}$.。下面证明 $\overline{D_{*P}}\subset\overline{f}(\overline{D}_P)$。事实上，设 $y_0\in\overline{D_{*P}}$.。那么，要么 $y_0\in D_*$，要么 $y_0\in E_{D_*}$.。若 $y_0\in D_*$，则 $y_0=f(x_0)$ 且 $y_0\in\overline{f}(\overline{D})$，因为 f 将 D 映到 D_*. 上。最后，设 $y_0\in E_{D_*}$.。由命题 2.1，存在一个序列 $y_k\in D_*$，使得当 $k\to\infty$ 时， $\rho(y_k,y_0)\to0$、 $y_k=f(x_k)$ 且 $x_k\in D$，其中 ρ 在命题 2.1 中定义。由于 $\overline{D}$ 是紧的，我们可以假设 $x_k\to x_0$，其中 $x_0\in\overline{D}_P$.。注意，$x_0\in E_D$，因为 f 是开集。因此 $f(x_0)=y_0\in\overline{f}(E_D)\subset\overline{f}(\overline{D}_P)$。定理证毕。 □

根据引理 2.2，我们立即得到定理 1.1 的以下推论。

推论 3.1。定理 1.1 的结论仍然成立，只要在该定理中将关于 Q 的相应条件替换为条件： $Q\in L^1(D_*)$。

定理 *1.2* 的证明。由于该证明与定理 1.1 的证明非常相似，这里仅给出证明概要。设 $x_0\in\partial D$. 假设关于映射 g 在点 x_0 处连续延拓的结论不成立。由于 $\overline{D^*}$ 是紧的，根据命题 2.1 的第 2) 项，空间 $\overline{D_{*P}}$ 也是紧的。于是存在序列$x_k, y_k\in R$, $k=1, 2, \ldots,$ 和 P_1, $P_2\in\overline{D_{*P}}$, $P_1\neq P_2$，使得 $x_k, y_k\to x_0$ 当 $k\to\infty$时，且

$\rho(g(x_k)\ P_1) \to 0$, $\rho(g(y_k)\ P_2) \to 0$ 当 $k \to \infty$时，其中 ρ 是 $\overline{D_{*P}}$上的某个度量（参见命题 2.1 中的第 2) 项）。由于 f 是闭映射， f 是边界保持的（例如参见 [16, 命题 2.1]）。因此， $P_1, P_2 \in E_{D_*}$.

设 E_k、G_k $k = 1$、2、.....为分别对应于素端 P_1、P_2 的区域序列。类似于关系 (3.1)，我们可以证明

$$E_k \cap G_k = \varnothing \quad \forall\ k \geqslant k_0\,. \tag{3.11}$$

根据命题 2.1，我们可以认为，割线链 σ_n 对应于域 $\widetilde{\ }$，而素端 P_1 属于圆 S（p_0、r_n） $p_0 \in \partial D_*$、$r_n \to 0$，因为 $n \to \infty$. 由于 ρ（g（x_k） P_1） $\to 0$，存在一个数 $k_1 \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $k \geqslant k_1$.，都有 g（x_k） $\in E_1$。类似地，存在一个数 $k_2 \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $k \geqslant k_2$.，都有 g（x_k） $\in E_2$。在 E_2 内用路径 C_k： $[0,1] \to E_2$ 连接点 g（x_k）和 g（x_{k_2}），使得 $C_k(0) = g$（x_k） $C_k(1) = g$（x_{k_2}）。

类似地，存在一个数 $k_3 \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $k \geqslant k_3$.，都有 $g(y_k) \in G_1$。用一条路径 C_k： $[0,1] \to G_1$ 连接 G_1 内的点 $g(y_k)\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 和 $g(y_{k_3})$，使得 $C_k(0) = g(y_k)$ $C_k(1) = g(y_{k_3})$。

与关系 (3.2) 类似，我们证明.....

$$\Gamma(|C_k|, |\widetilde{C_k}|, D_*) > \Gamma(\widetilde{S}(p_0, r_1), \widetilde{S}(p_0, r_2), \widetilde{A}(p_0, r_1, r_2))\,, \tag{3.12}$$

$\widetilde{\ }$其中 $A(\widetilde{p_0}, r_1, r_2)$ 在 (1.2) 中定义。

$\widetilde{\ }$根据引理 2.1，路径 C_k 和 C_k 在 D 中分别有从点 x_k 和 y_k 出发的整体 f-提升 α_k 和 β_k。注意，点 $f(x_1)$ 和 $f(y_1)$ 在域 D 中关于映射 f. 的原像都不可能多于有限个。事实上，由 [16] 中的命题 2.1 可知， f 是适当的，因此 $f^{-1}(f(x_1))$ 是 D. 中的紧集。若存在 $z_m \in f^{-1}(f(x_1))$、$m = 1$、2、.....、$z_n \neq z_k$，其中 $n \neq k$，则可取一个子列 z_{m_p}、$p = 1$、2、.....，使得当 $p \to \infty$ 时， $z_{m_p} \to z_0$ 对某个 $z_0 \in D$. 成立。后者与 f. 的离散性矛盾。因此， $f^{-1}(f(x_1))$ 是有限集。同理， $f^{-1}(f(y_1))$ 也是有限集。因此，存在 $K_0 \in \mathbb{N}$、$K_0 > \max\{k_0, k_1, k_2\}$ 和 $\delta_0 > 0$，使得

$$\operatorname{dist}(\alpha_k(1), \partial D) \geqslant \delta_0 \tag{3.13}$$

and

$$\operatorname{dist}(\beta_k(1), \partial D) \geqslant \delta_0 \tag{3.14}$$

对于 $k \geqslant K_0$. 因此，由于条件 (3.13) 和 (3.14)，对任意 $P > 0$，存在 $k = k_P \geqslant K_0$使得

$$M_\alpha(\Gamma(|\alpha_k|, |\beta_k|, D)) > P \qquad \forall\ k \geqslant k_P\,. \tag{3.15}$$

我们证明条件 (3.15) 与 (1.4) 矛盾。由 (3.12) 可得，

$$f(\Gamma(|\alpha_k|, |\beta_k|, D)) = \Gamma(|C_k|, |\widetilde{C_k}|, D_*) > \Gamma(\widetilde{S}(\widetilde{p_0}, r_1), \widetilde{S}(p_0, r_2), \widetilde{A}(p_0, r_1, r_2))\,.$$

因此,

$$\Gamma(|\alpha_k|,|\beta_k|,D) > \Gamma_f(p_0,r_1,r_2)\,.$$

根据(1.4)中映射的定义 f，我们得到

$$M(\Gamma(|\alpha_k|,|\beta_k|,D)) \leqslant M(\Gamma_f(p_0,r_1,r_2)) \leqslant \int\limits_{D_*\cap\widetilde{A}(p_0,r_1,r_2)} Q(p)\cdot\eta^2(\widetilde{h}_*(p,p_0))\,d\widetilde{v}_*(p)\,. \quad (3.16)$$

令 $Q(p) = \max\{Q(p)\ 1\}$，并且

$$\widetilde{q}_{p_0}(r) = \int\limits_{S(p_0,r)} \widetilde{Q}(p)\,ds_{\widetilde{h}_*}(p)\,.$$

现在，我们还有 $\widetilde{q}_{p_0}(r) \neq \infty$，对任意 $r\in[r_1,r_2]$. 集合

$$I = I(p_0,r_1,r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r\widetilde{q}_{p_0}(r)}\,.$$

注意到 $I\neq 0$，因为对任意 $r\in[r_1,r_2]$.，都有 $\widetilde{q}_{p_0}(r) \neq \infty$。此外，请注意 $I\neq\infty$，因为对于某个常数 $C>0$,

$$I \leqslant C\cdot\log\frac{r_2}{r_1} < \infty\,, \quad i=1,2,\ldots,p\,.$$

现在，令

$$\eta(r) = \begin{cases} \frac{1}{Ir\widetilde{q}_{p_0}(r)}\,, & r\in[r_1,r_2]\,,\\ 0, & r\notin[r_1,r_2]\,. \end{cases}$$

注意到，函数 η 满足条件 $\int\eta(r)\,dr = 1$，因此可以将其代入不等式 (3.16) 的右侧，其中相应的值为 f、r_1 和 r_2.

另一方面，根据引理 2.2,

$$\int\limits_{D_*\cap\widetilde{A}(p_0,r_1,r_2)} Q(p)\cdot\eta^2(\widetilde{h}_*(p,p_0))\,d\widetilde{v}_*(p) =$$

$$= \int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{S(p_0,r)} Q(y)\eta^2(\widetilde{h}_*(p,p_0))\,ds_{\widetilde{h}_*}(p)\,dr \leqslant \quad (3.17)$$

$$\leqslant \frac{C}{I^2}\int\limits_{r_1}^{r_2} r\widetilde{q}_{p_0}(r)\cdot\frac{dr}{r^2\widetilde{q}_{p_0}(r)} = \frac{C}{I} < \infty\,,$$

其中 C 为某个常数。由 (3.16) 和 (3.9)，可得

$$M(\Gamma(|\alpha_k|,|\beta_k|,D)) \leqslant \frac{C}{I} < \infty \quad (3.18)$$

当 $k \in \mathbb{N}$. 充分大时，关系式 (3.18) 与条件 (3.15) 矛盾。上述得到的矛盾否定了如下假设：映射 f 在点 x_0.处不存在极限

还需证明 $\overline{f(D)} = \overline{D_{*P}}$.。这一事实可仿照定理 1.1 证明的最后一部分来建立。 □

由引理 2.2，我们可立即从定理 1.2 得到以下推论。

推论 3.2。如果将定理 1.2 中关于 Q 的相应条件替换为以下条件： $Q \in L^1(D_*)$，则定理 1.2 的结论仍然成立。

注 3.1。 定理 1.1 和定理 1.2 的结论仍然成立，只需在表述中不采用对函数 Q 的指定条件，而要求对于任意 $p_0 \in \partial D'$ ，存在$\delta(p_0) > 0$ 使得

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\delta(p_0)} \frac{dt}{tq_{p_0}(t)} < \infty, \qquad \int\limits_{0}^{\delta(p_0)} \frac{dt}{tq_{p_0}(t)} = \infty \tag{3.19}$$

对于充分小的 $\varepsilon > 0$.。事实上，在定理 1.1 的证明中，我们实际上没有用到关于函数 Q 的任何条件，除了 (3.9) 和 (3.10)。然而，只要条件 (3.19) 成立，这两个条件显然都会满足。

注 3.2。 定理 1.1 和定理 1.2 的陈述仍然成立，只需在表述中将对函数 Q 规定的条件替换为：对于任意 $p_0 \in \partial D'$，存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p_0) > 0$ 以及一个勒贝格可测函数 $\psi : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ ，使得

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,, \quad I(\varepsilon, \varepsilon_0) > 0 \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0\,, \tag{3.20}$$

并且,

$$\int\limits_{\widetilde{A}(p_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(p) \cdot \psi^2(\widetilde{h}_*(p, p_0))\, d\widetilde{v}_*(p) \leqslant C_0 I^2(\varepsilon, \varepsilon_0)\,, \tag{3.21}$$

~当 $\varepsilon \to 0$ 时，其中 C_0 是某个常数，而 $A(p_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ 定义见 (1.2)。

事实上，照搬定理 1.1 中所给陈述的证明，直到比值 (3.8)（含）为止，我们令

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_1, r_2), & t \in (r_1, r_2)\,, \\ 0, & t \notin (r_1, r_2)\,, \end{cases}$$

r_2 r_2其中 $I(r_1, r_2) = \int \psi(t)\, dt$. 注意， $\int \eta(t)\, dt = 1$. 现在，根据 (1.4) 中 f 的定义，结合关系式 (3.8)，我们得到

$$M(\Gamma(|\alpha_k^*|, |\beta_k^*|, D)) \leqslant C_0 < \infty\,. \tag{3.22}$$

关系式 (3.22) 与 (3.6) 矛盾。由此得出的矛盾证明了所需结论。

关于定理 1.2，也可以给出类似的论证。 □

4 边界处映射的离散性

在 [13], 中，考虑了与闭拟正则映射 f 的离散性相关的一些问题： $\mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ 在$\overline{\mathbb{B}^n}$ 中。本节讨论满足黎曼流形上条件（1.4）的映射的离散性。

按照 [19, 第 2 节，4], 我们称域 $D \subset \mathbb{S}$ 为一致的，如果对于任意 $r > 0$ ，都存在 $\delta > 0$ 使得不等式

$$M(\Gamma(F^*, F, D)) \geqslant \delta \tag{4.1}$$

~ ~对任意满足 $h(F) \geqslant r$ 且 $h(F^*) \geqslant r.$ 的连续体 F、 $F^* \subset D$ 均成立。请注意，这一定义与 [19, 第 2 章4], 给出的“经典”定义略有不同；在后者中，集合 F和 $F^* \subset D$ 被假定为任意连通集。我们证明以下命题（参见 [13, 引理 4.4]中关于单位球上拟正则映射的类似结论）。

引理 4.1。 设 D 和 D_* 分别是黎曼曲面 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{S}_*$ 上的域，D 是一致域， $\overline{D_*}$ 是 $\mathbb{S}_*$ 中的紧子集，此外， ∂D_* 具有有限个连通分支。设 $f: D \to D_*$ 是一个映射，对任意 $p_0 \in \partial D_*.$ 满足关系式 (1.4)–(1.5)。假设，对于任意 $p_0 \in \partial D_*$ ，存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p_0) > 0$ 以及一个勒贝格可测函数 $\psi: (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ ，使得

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,, \quad I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty \quad as \quad \varepsilon \to 0\,, \tag{4.2}$$

此外,

$$\int\limits_{\widetilde{A}(p_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(y) \cdot \psi^p(\widetilde{h_*}(p, p_0))\, d\widetilde{v_*}(p) = o(I^p(\varepsilon, \varepsilon_0))\,, \tag{4.3}$$

~ 当 $\varepsilon \to 0$ 时，其中 $A(p_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ 在 (1.2) 中定义。设 C_j、 $j = 1$、2、..... 是一个连续体序列 ~，满足对于某个 $\delta > 0$ 及任意 $j \in \mathbb{N}$，有 $h(C_j) \geqslant \delta > 0$，此外，当 $j \to \infty$ 时， $\rho(f(C_j)) \to 0$，其中 ρ 是 $\overline{D_*}_P.$ 中某个可能的度量。那么存在 $\delta_1 > 0$ 使得

$$\rho(f(C_j), P_0) \geqslant \delta_1 > 0$$

对于任意 $j \in \mathbb{N}$ 和任意 $P_0 \in E_{D_*}$，其中度量 ρ 定义见命题 2.1 的第 2) 项。

这里，与通常情况一样，

$$\rho(A) = \sup_{p,p_* \in A} \rho(p, p_*)\,,$$
$$\rho(A, B) = \inf_{p \in A, p_* \in B} \rho(p, p_*)\,.$$

证明。反设，即令 $\rho(f(C_{j_k})\ P_0) \to 0$ as $k \to \infty$，其中某个 $P_0 \in E_{D_*}$ 以及某个递增数列 $j_k, k = 1, 2, \ldots$. 取 D 中任意一个连续统 $F \subset D$，并令 $\Gamma_k := \Gamma(F, C_{j_k}, D)$。根据域的一致性的定义，可得

$$M(\Gamma_k) \geqslant \delta_2 > 0 \tag{4.4}$$

对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 以及某个 $\delta_2 > 0.$。另一方面，考虑路径族 $f(\Gamma_k)$。令 $d_l, l = 1, 2, \ldots$ 为与素端 P_0 对应的区域序列，并令 σ_l 为与 $d_l.$ 对应的一条割线。根据命题 2.1，我们可以假设 $\sim\sigma_l, l = 1, 2, \ldots$ 属于以某个点 $p_0 \in \partial D_*$ 为圆心的圆 $S(p_0, r_l)$，其中 $r_l \to 0$ as $l \to \infty.$

我们证明，对于任意 $l \in \mathbb{N}$，存在一个数 $k = k_l$，使得

$$f(C_{j_k}) \subset d_l\,, \qquad k \geqslant k_l\,. \tag{4.5}$$

反设不然。则存在 $l_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$f(C_{j_{m_l}}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus d_{l_0}) \neq \varnothing \tag{4.6}$$

对于某个数的递增数列 m_l、$l = 1$、2、.....。在这种情况下，存在一个序列$x_{m_l} \in f($ $C_{j_{m_l}}) \cap(\mathbb{R}^n \setminus d_{l_0})\ l \in \mathbb{N}.$由于根据假设 $\rho(f(C_{j_k})\ P_0) \to 0$对于某个数列 j_k、$k = 1$、2、.....，我们得到

$$\rho(f(C_{j_{m_l}}), P_0) \to 0 \qquad as \qquad l \to \infty\,. \tag{4.7}$$

由于 $\rho(f(C_{j_{m_l}})\ P_0) = \inf_{y \in f(C_{j_{m_l}})} \rho(y, P_0)$，且 $f(C_{j_{m_l}})$ 是 $\overline{D_*}_P$ 中的一个紧集，因为它是紧子集 $C_{j_{m_l}}$ 在映射 f 下的连续像，因此有 $\rho(f(C_{j_{m_l}})\ P_0) = \rho(y_l, P_0)$，其中 $y_l \in f(C_{j_{m_l}})$。由关系式 (4.7) 可得，$y_l \to p_0$，因为 $l \to \infty$ 在度量 $\rho.$ 中。由于根据假设 $\rho(f(C_j)) = \sup \rho(y, z) \to 0$ 当 $j \to \infty$ 时，我们有 $_{y、\ z \in f(C_j)} \rho(y_l, x_{m_l}) \leqslant \rho(f(C_{j_{m_l}})) \to 0$ 当 $l \to \infty.$ 时。现在，根据三角不等式，我们得到

$$\rho(x_{m_l}, P_0) \leqslant \rho(x_{m_l}, y_l) + \rho(y_l, P_0) \to 0 \qquad as \quad l \to \infty\,.$$

后者与（4.6）矛盾。由此得到的矛盾证明了（4.5）。

不失一般性，我们可以认为数 $l_0 \in \mathbb{N}$ 满足：对于任意 $l \geqslant l_0$，都有 $r_l < \varepsilon_0$，并且

$$f(F) \subset \mathbb{R}^n \setminus d_1\,. \tag{4.8}$$

在这种情况下，我们注意到，对于 $l \geqslant 2$

$$f(\Gamma_{k_l}) > \Gamma(\widetilde{S}(p_0, r_l), \widetilde{S}(p_0, r_1), \widetilde{A}(p_0, r_l, r_1))\,. \tag{4.9}$$

事实上，设 $\widetilde{\gamma} \in f(\Gamma_{k_l})$。那么 $\widetilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$，其中 $\gamma \in \Gamma_{k_l}$, $\gamma\colon [0,1] \to D$, $\gamma(0) \in F$, $\gamma(1) \in C_{j_{k_l}}$. 由于关系式 (4.8)，我们得到 $f(\gamma(0)) \in f(F) \subset \mathbb{S} \setminus B(p_0, \varepsilon_0)$。另一方面，由 (4.5)，$\gamma(1) \in C_{j_{k_l}} \subset d_l \subset d_1$. 因此，$|f(\gamma(t))| \cap d_1 \neq \varnothing \neq |f(\gamma(t))| \cap (\mathbb{S} \setminus d_1)$。现在，由 [17, 定理 1.I.5.46] 我们得到，存在 $0 < t_1 < 1$，使得 $f(\gamma(t_1)) \in \partial d_1 \cap D \subset S(p_0, r_1)$。设 $\gamma_1 := \gamma|_{[t_1,1]}$. 我们可以认为，对于任意 $t \geqslant t_1$, $f(\gamma(t)) \in d_1$。同理可得，存在 $t_2 \in [t_1, 1]$，使得 $f(\gamma(t_2)) \in S(p_0, r_l)$。设 $\gamma_2 := \gamma|_{[t_1,t_2]}$. 我们可以认为，对于任意 $t \in [t_1, t_2]$., $f(\gamma(t)) \in d_l$。现在，路径 $f(\gamma_2)$ 是 $f(\gamma) = \widetilde{\gamma}$, $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ 的子路径，它属于 $\Gamma(S(p_0, r_l)\ S(p_0, r_1)\ A(p_0, r_l, r_1))$。关系式 (4.9) 得证。

由（4.9）可得

$$\Gamma_{k_l} > \Gamma_f(\widetilde{S}(p_0, r_l), \widetilde{S}(p_0, r_1), \widetilde{A}(p_0, r_l, r_1))\,. \tag{4.10}$$

Set

$$\eta_l(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_l, r_1), & t \in (r_l, r_1)\,, \\ 0, & t \notin (r_l, r_1)\,, \end{cases}$$

r_1 r_1其中 $I(r_l, r_1) = \int \psi(t)\ dt$. 注意到 $\int \eta_l(t)\ dt = 1$. 现在，由关系式（4.3）和（4.10），r_l r_l并根据（1.4）中 f 的定义，可得

$$M_p(\Gamma_{k_l}) \leqslant M_p(\Gamma_f(\widetilde{S}(p_0, r_l), \widetilde{S}(p_0, r_1), \widetilde{A}(p_0, r_l, r_1))) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{I^p(r_l, r_1)} \int\limits_{\widetilde{A}(p_0, r_l, r_1)} Q(y) \cdot \psi^p(\widetilde{h}_*(p, p_0))\, d\widetilde{v}_*(p) \to 0 \quad \text{as} \quad l \to \infty\,. \tag{4.11}$$

关系式（4.11）与（4.4）矛盾。上述矛盾证明了该引理。 □

以下引理的类似结果已在 [13, 推论 4.5]中证明。

引理 4.2. 设 D 和 D_* 分别是黎曼曲面 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{S}_*$ 上的域，其闭包 $\overline{D} \subset \mathbb{S}$ 和 $\overline{D_*} \subset \mathbb{S}_*$ 为紧集，此外，∂D 和 ∂D_* 有有限个连通分支。设 f 是从 D 到 D_* 的开离散闭映射，对任意 $p_0 \in \partial D_*$. 满足关系式（1.4）–（1.5）。假设对任意 $p_0 \in \partial D_*$，存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p_0) > 0$ 以及勒贝格可测函数 $\psi\colon (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$，使得当 $\varepsilon \to 0$ 时，（4.2）–（4.3）成立，其中 $A(p_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ 定义见（1.2）。

那么，映射 f 存在连续延拓 $\overline{f}\colon \overline{D}_P \to \overline{D_*}_P$，且该延拓是轻映射，即 $P_0 \in E_{D_*}(P_0)$ 的任意连通分支 $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ 都退化为一个点。

证明。根据注 3.2，f 可以连续延拓为映射 $\overline{f}\colon \overline{D}_P \to \overline{D_*}_P$。反之，假设存在连续统 $K \subset E_D$ 和点 $y_0 \in E_{D_*}$，使得 $\overline{f}(K) = y_0$.。根据 [6], 中的注2，任意两个对应于

边界 ∂D 的不同连通分支 Γ_1 和 Γ_2 的素端U_1、 $U_2 \subset \overline{D}_P$. 包含在互不相交的邻域中。因此，连续统 K 只对应一个连通分支 $\Gamma_0 \subset \partial D$.

由命题 2.1，存在 U_0 的一个邻域，使得存在一个共形映射 H_0，将 U_0 映到某个环域 $A(0, r_0, 1)$ $0 < r_0 < 1$ 上，使得 $\gamma_0 := \partial U_0 \cap D$ 是一条闭若尔当路径，并且

$$C(H_0, \gamma_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}; \quad C(H_0, \Gamma_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_0\}.$$

Set

$$F(x) := (\overline{f} \circ H_0^{-1})(x), x \in A(0, r_0, 1).$$

仿照定理 1.1 的证明进行论证，我们可以证明 F 在 $A(0, r_0, 1)$ 中也满足 (1.4)。

注意， $A(0, r_0, 1)$ 是一致域，因为它是一个平面域，其边界只有有限个连通分支，且关于边界有限连通（见 [20,推论 6.8]）。考虑到环域 $A(0, r_0, 1)$ 的简单几何性质，并且 F 在 $A(0, r_0, 1)$ 中连续，我们可以构造连续体序列 $C_m \subset A(0, r_0, 1)$ $m = 1, 2, \ldots$，使其在豪斯多夫距离意义下收敛于 $\overline{H_0^{-1}(K_1)}$，并且满足 $d(C_m) \geqslant d(K)/2$，以及当 $m \to \infty$. 时， $f(C_m) \to y_0$ （这里 $d(A)$ 表示集合 A 的欧几里得直径）。后者与引理 4.1 矛盾。上述矛盾证明了该引理。 □

设 $p_0 \in \mathbb{S}$，并设 $\varphi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ 是在点 p_0 的某个邻域 U 内关于 $\widetilde{v}$. 可积的函数。按照第 6], 章第 6.1 节，我们称函数 $\varphi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ 在点 $p_0 \in D$ 处具有有限平均振荡，记作 $\varphi \in FMO(p_0)$，如果

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\widetilde{v}(\widetilde{B}(p_0, \varepsilon))} \int\limits_{\widetilde{B}(p_0, \varepsilon)} |\varphi(p) - \overline{\varphi}_\varepsilon| \, d\widetilde{v}(p) < \infty,$$

其中 $\overline{\varphi}_\varepsilon = \underline{\widetilde{v}\ \widetilde{B}^{\,1}((p_0,\ \varepsilon))}\ \int_{\widetilde{B}(p_0,\ \varepsilon)} \varphi(p)\ d\widetilde{v}(p)$。下面的陈述成立。

定理 4.1。设 D 和 D_* 分别是黎曼曲面 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{S}_*$ 上的域，具有紧闭包 $\overline{D} \subset \mathbb{S}$ 和 $\overline{D_*} \subset \mathbb{S}_*$；此外， ∂D 和 ∂D_* 具有有限个连通分支。设 f 是将 D 映 onto D_* 的开离散闭映射，并且对任意 $p_0 \in \partial D_*$. 满足关系式 (1.4)–(1.5)。假设以下条件之一成立：

1) $Q \in FMO(\partial D_*)$,

2）关系

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{p_0}(t)} < \infty, \qquad \int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{q_{p_0}(r)} = \infty, \tag{4.12}$$

对任意 $p_0 \in \partial D_*$、某些 $\varepsilon_0 > 0$ 以及任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0$，其中 $q_{p_0}(t)$ 在 (1.6) 中定义。

于是，映射 f 存在连续延拓 $\overline{f}: \overline{D}_P \to \overline{D_*}_P$，该延拓是轻的，即 $P_0 \in E_{D_*}$ 的 $f^{-1}(P_0)$ 的任意 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ 连通分支都退化为一个点。

证明。 证明可直接由引理 4.2 得出，注意到关系$Q \in FMO(\partial D_*)$ 或 (4.12) 是 (4.2)–(4.3) 的特例（参见命题 4.7 以及 [14] 中定理 4.8 的证明细节）。 □

给定映射 $f: D \to \mathbb{S}$、集合 $E \subset D$ 和 $y \in \mathbb{S}$，我们将重数函数$N(y, f, E)$定义为集合 E中点 y的原像个数，即

$$N(y, f, E) = \operatorname{card} \{x \in E : f(x) = y\},$$

$$N(f, E) = \sup_{y \in \mathbb{S}} N(y, f, E). \tag{4.13}$$

请注意，重数函数的概念也可以推广到属于给定域闭包的集合。最后，我们陈述并证明一个关于映射离散性的关键结论（见 [13, 定理 4.7]）。

引理 4.3。 设 D 和 D_* 分别是黎曼曲面 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{S}_*$上的域，其闭包 $\overline{D} \subset \mathbb{S}$ 和 $\overline{D_*} \subset \mathbb{S}_*$为紧集；此外， ∂D_* 有有限个连通分支。假设 D 具有弱平坦边界。设 f 是从 D 到 D_* 的开离散闭映射，对任意 $p_0 \in \partial D_*$. 满足关系 (1.4)–(1.5)。假设对任意 $p_0 \in \partial D_*$，存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p_0) > 0$ 以及勒贝格可测函数$\psi: (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$，使得当 $\varepsilon \to 0$ 时，(4.2)–(4.3)成立，其中 $A(p_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$由 (1.2) 定义。

于是，映射 f有一个连续延拓 $\overline{f}: \overline{D} \to \overline{D_*}_P$，使得 $N(f, D) = N(f, \overline{D}) < \infty$. 特别地， $\overline{f}$在 $\overline{D}$中是离散的，也就是说，对于任意 $P_0 \subset E_{D_*}$.， $\overline{f}^{-1}(P_0)$ 仅由孤立点组成

证明。 首先，根据定理 1.2 和注 3.2， f 可以连续延拓为映射 $\overline{f}: \overline{D} \to \overline{D_*}_P$。还请注意， $N(f, D) < \infty$（见定理 2.8] [21,）。我们来证明 $N(f, D) = N(f, \overline{D})$。接下来，我们将采用 [13] 中定理 4.7 的证明思路。设 $k := N(f, D)$。

$\widetilde{\quad}$反设结论不成立，即 $N(f, D) < N(f, \overline{D})$。那么存在 $P_0 \in E_{D_*}$以及点$\frown x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} \in \overline{D}$，使得 $f(x_m) = P_0, m = 1, 2, \ldots$。由于 f 是闭映射， $x_m \in \partial D$ （见命题 4.1][14, ）。

Set

$$\widetilde{B}_\rho(\widetilde{P_0}, 1/p) := \{y \in \overline{D_*}_P : \rho(y, \widetilde{P_0}) < 1/p\},$$

其中， ρ是 $\overline{D_*}_P$. 中的度量。令 d_0^k、 $k = 1$、2、.....为对应于$\widetilde{\quad}$ P_0. 的区域序列。现在，根据序列 d_0^k的定义，存在一个数$k_{0,\ p} \in \mathbb{N}$ 使得$d^{k_{0,\ p}}_{0\ \ p} \subset \widetilde{B}_\rho(P_0, 1/p)$。令

$$U_p' := d_0^{k_{0,p}}.$$

下面证明：对任意 $i = 1, 2, \ldots, k+1$，集合 $f^{-1}(U_p')$ 中存在一个连通分支 V_p^i，使得 $x_i \in \overline{V_p^i}$.。固定 $i = 1, 2, \ldots, k+1$.。由 f 在 D 中的连续性，可得存在 $r_i = r_i(x_i) > 0$

~，使得 $f(B(x_i,r_i)\cap D)\subset U_p'$，其中

$$\widetilde{B}(x_i,r_i):=\{x\in\mathbb{S}:\widetilde{h}(x,x_i)<r_i\}.$$

~由于 $W_i:=B(x_i,r_i)\cap D$ 是连通的，W_i 属于集合 $f^{-1}(U_p')$ 的且仅有的一个连通分支 V_i^p，而 $x_i\in\overline{W_i}\subset\overline{V_p^i}$，如所要求的。

接下来我们证明，对于任意 $i=1$、2、.....、$k+1$ 以及充分大的~$p\in\mathbb{N}.$，集合 $\overline{V_p^i}$两两不相交。为此，我们进一步证明，对于每个固定的 $i=1$、2、.....、$k+1$，$h(\overline{V_p^i})\to 0$ 当 $p\to\infty$ 时，其中 $h(A)$ 表示集合 A 在度量 $h.$ 下于 $\mathbb{S}$ 中的直径。我们反设结论不成立。于是存在 $1\leqslant i_0\leqslant k+1$、一个数 $r_0>0$、$r_0<\frac{1}{2}\min_{1\leqslant i,j\leqslant k+1,i\neq j}\overset{h}{(}x_i,x_j)$，以及一个数的递增序列 p_m, $m=1$、2、.....，使得 $\widetilde{S}(x_{i_0},r_0)\cap\overline{V_{p_m}^{i_0}}\neq\varnothing$,~ ~，其中 $S(x_0,r)=\{x\in\mathbb{S}:h(x,x_0)=r\}.$。在这种情况下，存在 $a_m,b_m\in V_{p_m}^{i_0}$，使得~$a_m\to x_{i_0}$ 当 $m\to\infty$ 时，且 $h(a_m,b_m)\geqslant r_0/2.$。用路径 C_m,~连接点 a_m 和 b_m，该路径完全包含于 $V_{p_m}^{i_0}.$。于是，对于 $m=1$、2、.....，有 $h(|C_m|)\geqslant r_0/2$。另一方面，~ ~由于 $|C_m|\subset f(V_{p_m}^{i_0})\subset B_\rho(P_0,1/p_m)$，因此同时有 $\rho(f(|C_m|))\to 0$ 当 $m\to\infty$时，以及 $\rho(f(|C_m|)\,p_0)\to 0$ 当 $m\to\infty.$时。由于 D 具有弱平坦边界（例如参见 [18,定理 17.10、17.12]），后者与引理 4.1 矛盾。由此得到的矛盾表明上述假设不成立。

根据 [21, 引理 2.2]，f 是从 $\overline{V_p^i}$到 U_p'的映射，对任意 $i=1$、2、.....、k均成立。$k+1.$因此，$N(f,D)=N(f,D)\geqslant k+1$，这与数 $k.$的定义矛盾。由此得到的矛盾否定了 $N(f,\overline{D})>N(f,D)$这一假设。引理得证。 □

定理 4.2. 设 D 和 D_* 分别是黎曼曲面 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{S}_*$上的域，具有紧闭包 $\overline{D}\subset\mathbb{S}$ 和 $\overline{D_*}\subset\mathbb{S}_*$；此外，$\partial D_*$ 有有限个连通分支。假设 D 具有弱平坦边界。设 f 是从 D 到 D_* 的开离散闭映射，对任意 $p_0\in\partial D_*.$ 均满足关系式 (1.4)–(1.5)。假设下列条件之一成立：

1) $Q\in FMO(\partial D_*)$,

2) 关系

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_{p_0}(t)}<\infty,\qquad\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{q_{p_0}(r)}=\infty,\tag{4.14}$$

对于某个 y $p_0\in\partial D_*$，某些 $\varepsilon_0>0$ 以及任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0$，其中 $q_{p_0}(t)$ 在 (1.6) 中定义).

那么映射 f 有一个连续延拓 $\overline{f}$：$\overline{D}\to\overline{D_{*P}}$，使得 $N(f,D)=N(f,\overline{D})<\infty.$ 特别地，$\overline{f}$ 在 $\overline{D}$中是离散的，即对于任意 $P_0\subset E_{D_*}.$，$\overline{f}^{-1}(P_0)$ 只由孤立点组成

证明。 证明可直接由引理 4.3 得出，同时注意到关系$Q\in FMO(\partial D_*)$或（4.14）是（4.2）–（4.3）的特例（参见命题 4.7 以及 [14] 中定理 4.8 的证明细节）。 □

参考文献

[1] T. Iwaniec, G. Martin, 《几何函数理论与非线性分析》, 克拉伦登出版社, 牛津, 2001。[2] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro 和 E. Yakubov, 《现代映射理论中的模》, 施普林格数学专著丛书, 施普林格, 纽约等地, 2009。[3] E.A. Sevost'yanov, S.A. Skvortsov, 《关于逆映射满足波列茨基不等式的映射》, 《芬兰科学院数学年刊》45（2020）, 259–277。[4] A. Franovskii, E. Sevost'yanov, 《度量空间中具有逆波列茨基不等式的映射》, 《匈牙利数学学报》166（2022）, 第2期, 453–479。[5] E. Sevost'yanov, 《度量空间中的逆波列茨基不等式与素端》, 《数学分析》 （2023）, https://link.springer.com/article/10.1007/s10476-023-0192-8 。[6] V. Ryazanov, S. Volkov, 《黎曼曲面上索伯列夫映射理论中的素端》, 《数学研究》48（2017）, 24—36。[7] E.A. Sevost'yanov, O.P. Dovhopiatyi, N.S. Ilkevych, V.P. Kalenska, 《关于相对于素端的黎曼曲面间映射族的等度连续性》, 《数学研究》57（2022）, 第2期, 157–171。[8] D.A. Kovtonyuk 和 V.I. Ryazanov, 《空间映射的素端理论》, 《乌克兰数学杂志》67（2015）, 第4期, 528—541。[9] D.P. Ilyutko, D.P. Sevost'yanov, 《黎曼流形上的素端》, 《数学科学杂志》241（2019）, 第1期, 47—63。[10] V. Ryazanov, S. Volkov, 《黎曼曲面上 W^1类映射的边界行为》, 《复分析与算子理论》11（2017）, 1503–1520。.[11] C. Carath´eodory, 《关于单连通区域的边界》, 《数学年刊》73（1913）, 323–370。[12] E.A. Sevost'yanov 和 A.A. Markysh, 《度量空间上的索霍茨基–卡索拉蒂–魏尔斯特拉斯定理》, 《复变函数与椭圆方程》64（2019）, 第12期, 1973–1993。[13] M. Vuorinen, 《 $n-$空间中拟正则映射的例外集与边界行为》, 《芬兰科学院学报 A辑 数学专辑》11（1976）, 1–44。[14] E.A. Sevost'yanov, 《黎曼曲面映射的边界与整体行为》, 《Filomat》36（2022）, 第4期, 1295–1327。[15] E.A. Sevost'yanov, 《因子空间映射的局部行为与边界行为》, 《复变函数与椭圆方程》67（2022）, 第2期, 284–314。[16] E. Sevost'yanov, 《以素端刻画度量空间中映射的边界延拓》, 《芬兰科学院数学年刊》44（2019）, 第1期, 65–90。[17] K. Kuratowski, 《拓扑学》, 第2卷, 学术出版社, 纽约–伦敦, 1968。[18]J. V¨ais¨al¨a, 《 n维拟共形映射讲义》, 数学讲义229, 施普林格出版社, 柏林等地, 1971。[19] R. N¨akki 和 B. Palka, 《拟共形映射的一致等度连续性》, 《美国数学会会刊》37（1973）, 第2期, 427–433。[20] R. N¨akki, 《勒夫纳容量定理的推广》, 《美国数学会汇刊》180（1973）, 229–236。[21] O. Martio, U. Srebro, 《 $\mathbb{R}^n$中的自守拟亚纯映射》, 《数学学报》135（1975）, 221–247。

Evgeny Sevost’yanov
1. 日托米尔伊万·弗兰科国立大学，Bol’shaya Berdichevskaya街40号，10 008 日托米尔，乌克兰2. 乌克兰国家科学院应用数学与力学研究所，Dobrovol’skogo街1号，84 100 斯拉维扬斯克，乌克兰
esevostyanov2009@gmail.com