arXiv:2303.01981v1 [math.CA] 2 Mar 2023

经典傅里叶分析中若干有关插值的不等式

Runzhe Zhang 和 Hua Wang [1]谨以
此文纪念 Li Xue。

摘要
本文在 $\mathbb{R}^n$ 的勒贝格空间和 Morrey 空间中建立了若干插值不等式。利用经典的 Calderon–Zygmund 分解，我们将重新证明，对于所有满足 $p < q < \infty$ 的 q，都有 $L^p(\mathbb{R}^n) \cap$ 有界平均振荡 $(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$，其中 $1 \le p < \infty$。我们还将重新证明，存在一个依赖于 p、q、n 的常数 $C(p,q,n)$，使得以下不等式

$$\|f\|_{L^q} \le C(p,q,n) \cdot \big(\|f\|_{L^p}\big)^{p/q} \cdot \big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{1-p/q}$$

对于所有满足 $1 \le p < \infty$ 且 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\cap$有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$ 的情形均成立。此外，该嵌入常数具有最优增长阶 q（当 $q \to \infty$ 时），这一结果由 Chen–Zhu 和 Kozono–Wadade 给出。我们将证明，对于所有满足 $p < q < \infty$ 的 q，都有 $L^{p,\,\kappa}(\mathbb{R}^n)\cap$有界平均振荡$(\mathbb{R}^n) \subset L^{q,\,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，其中 $1 \le p < \infty$ 且 $0 < \kappa < 1$。此外，存在一个依赖于 p、q、n 的常数 $C(p,q,n)$，使得

$$\|f\|_{L^{q,\kappa}} \le \widetilde{C}(p,q,n) \cdot \big(\|f\|_{L^{p,\kappa}}\big)^{p/q} \cdot \big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{1-p/q}$$

对所有满足 $1 \le p < \infty$ 且 $0 < \kappa < 1$ 的 $f \in L^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n) \cap$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$ 均成立。该嵌入常数被证明具有关于 $q \to \infty$ 的线性增长阶，即当 q 较大时，$C(p,q,n) \le C_n \cdot q$，其中常数 C_n 仅依赖于维数 n。作为上述结果的应用，我们还建立了一些新的双线性估计，可用于研究二阶椭圆型和抛物型偏微分方程弱解的整体存在性与正则性。

关键词：勒贝格空间、有界平均振荡、莫雷空间、插值不等式、Calderón–Zygmund 分解 2020 MSC：42B20,42B25, 42B35

1. 引言

本文中，符号 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示全体实数和自然数。设 $\mathbb{R}^n$ 为 n维欧几里得空间

[1]电子邮箱：3089486628@qq.com, wanghua@pku.edu.cn.

它配备欧几里得范数 $|\cdot|$ 和勒贝格测度 dx。对于任意给定的 $p \in [1,\infty)$，空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$定义为满足以下条件的全体可积函数f： 它们定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < +\infty,$$

弱空间 $WL^p(\mathbb{R}^n)$ 定义为满足以下条件的所有可测函数f 的集合： $\mathbb{R}^n$

$$\|f\|_{WL^p} := \sup_{\lambda>0} \lambda \cdot \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda \right\} \right|^{1/p} < +\infty.$$

下文中，对于可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$，记 E的 n 维勒贝格测度为 $|E|$。对于正数 λ，函数 $d_f(\lambda) := \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\right\}\right|$称为 f的分布函数。对于情形 $p = \infty$，$WL^\infty(\mathbb{R}^n)$ 表示 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$，它定义为满足以下条件的所有可测函数f 的集合： $\mathbb{R}^n$

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < +\infty.$$

如果局部可积函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上满足

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} := \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| \, dx < +\infty,$$

其中，上确界取遍 $\mathbb{R}^n$ 中所有边平行于坐标轴的立方体 Q； f_Q 表示 f 在立方体 Q上的积分平均值，即

$$f_Q := \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) \, dy.$$

模去常数后， $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ 定义了一个范数，而由此类函数构成的巴拿赫空间记为 BMO($\mathbb{R}^n$)。

注 1.1. 众所周知，对于任意 $1 \le p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n) \subset WL^p(\mathbb{R}^n)$，且这一包含关系是严格的。令 $F(x) := |x|^{-n/p}$ 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，并赋予通常的勒贝格测度。显然， F 不属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$，但 F 属于 $WL^p(\mathbb{R}^n)$，且 $\|F\|_{WL^p} = (\nu_n)^{1/p}$，其中 ν_n是 $\mathbb{R}^n$中单位球的测度。

注记 1.2. 众所周知， $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset$有界平均振荡($\mathbb{R}^n$)，且这一包含关系是严格的。属于有界平均振荡($\mathbb{R}^n$)但不属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$的函数的典型例子是 $F(x) := \log |x|$ on $\mathbb{R}^n$。此外，不难看出，若 $\delta \ge 0$，则$(\log |x|)^\delta \in$ 有界平均振荡($\mathbb{R}^n$)当且仅当 $\delta \le 1$。在某些临界情形下，有界平均振荡($\mathbb{R}^n$)空间自然地作为 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$空间的替代空间出现。例如，众所周知，具有标准核的 Calderón–Zygmund 算子在$L^p(\mathbb{R}^n)$上有界（对于 $1 < p < \infty$），但在 $L^p(\mathbb{R}^n)$上对于 $p = \infty$并不有界。实际上，它将 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$有界地映射到有界平均振荡($\mathbb{R}^n$)。阶数为 α的黎斯势算子已知在 $1 < p < q < \infty$ 且$1/q = 1/p - \alpha/n$时，将 $L^p(\mathbb{R}^n)$有界地映射到 $L^q(\mathbb{R}^n)$，但在 $p = n/\alpha$时，不会将 $L^p(\mathbb{R}^n)$有界地映射到 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$。在这种情况下，实际上它将 $L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)$有界地映射到有界平均振荡($\mathbb{R}^n$)（见 *[4, 13]*）。

现在回顾 Morrey 空间和弱Morrey空间的定义（见 [1]）。设 $1 \le p < \infty$ 且 $0 \le \kappa \le 1$。如果局部可积函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上属于 Morrey 空间 $L^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，则称

$$\|f\|_{L^{p,\kappa}} := \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|^\kappa} \int_Q |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p} < +\infty,$$

其中，上确界取遍 $\mathbb{R}^n$ 中的所有立方体 Q。我们称定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f 属于弱Morrey空间 $WL^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，如果

$$\|f\|_{WL^{p,\kappa}} := \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \sup_{\lambda>0} \frac{1}{|Q|^{\kappa/p}} \lambda \cdot \left| \{ y \in Q : |f(y)| > \lambda \} \right|^{1/p} < +\infty,$$

其中，上确界取遍所有立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 以及所有 $\lambda > 0$。

注 1.3. 当 $\kappa = 0$ 时，根据定义有 $L^{p,0}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$，且 $WL^{p,0}(\mathbb{R}^n) = WL^p(\mathbb{R}^n)$；当 $\kappa = 1$ 时，由 Lebesgue微分定理可得 $L^{p,1}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$。

注 1.4. 设 $0 \le \kappa < 1$。众所周知，Hardy–Littlewood极大算子 M 由 $L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ 到 $WL^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ 有界，这是由 *[2]*, 得出的；但根据 *[12]*，它在 $L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ 上并非有界。这表明存在函数$_{\mathcal{F}} \in WL^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\mathcal{F} \notin L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$。这一事实的构造性证明见 *[7]*。此外，可以证明存在函数 $\mathcal{F} \in WL^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n) \setminus L^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，当 $1 \le p < \infty$ 和 $0 < \kappa < 1$ 时成立（例如，参见 *[7,* 定理 1.*2],*）。

本文将研究勒贝格空间和 Morrey 空间中的各种插值不等式。本文的主要结果如下所述。

设 $1 \le p < \infty$ 和 $n \in \mathbb{N}$。

- $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ 对所有满足 $p < q < \infty$ 的 q 均成立。
- $WL^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ 对所有满足 $p < q < \infty$ 的 q 均成立。
- $L^p(\mathbb{R}^n) \cap$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ 对所有满足 $p < q < \infty$ 的 q 均成立。

第三个结果由 Chen 和 Zhu 在 [3, 定理 2], 中利用非增重排技术获得，随后又由许多作者加以推广；例如，参见 [11, 定理 2.1 和 2.2] 以及 [14, 定理 1.1]。下面给出这一结果的一个新的、更为初等的证明，该证明避免使用非增重排。

令 $1 \le p < \infty$、$0 < \kappa < 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$。

- $L^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^{q,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，对所有满足 $p < q < \infty$ 的 q 均成立。
- $WL^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^{q,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，对所有满足 $p < q < \infty$ 的 q 均成立。
- $L^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n) \cap$有界平均振荡$(\mathbb{R}^n) \subset L^{q,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ 对所有满足 $p < q < \infty$ 的 q 均成立。

此外，上述包含关系中的嵌入常数已被显式计算。本文还研究了这些插值不等式的锐性（当 $q \to \infty$ 时的最优增长率）。作为主要结果的推论，本文还探讨了一些新的双线性估计，这些估计与非线性椭圆型方程和抛物型方程弱解的光滑性性质（H¨older 连续性）有关。

2. 主要结果

2.1. 勒贝格空间中的插值不等式

本节讨论勒贝格空间中的一些插值不等式。前两个结果在文献中已有记载，可见 [5]（另见 [8]）。为方便读者，我们在此给出证明。

定理 2.1. 设 $1 \le p < \infty$ 且 $n \in \mathbb{N}$。若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$，则对于任意满足 $p < q < \infty$ 的 q，有 $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$，并且下列不等式成立。

$$\|f\|_{L^q} \le 1 \cdot \big(\|f\|_{L^p}\big)^{p/q} \cdot \big(\|f\|_{L^\infty}\big)^{1-p/q}.$$

证明. 证明非常简单。注意到 $q - p > 0$。容易看出

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \cdot |f(x)|^{q-p}\, dx\right)^{1/q} \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/q} \cdot \big(\|f\|_{L^\infty}\big)^{1-p/q} \\ &= \big(\|f\|_{L^p}\big)^{p/q} \cdot \big(\|f\|_{L^\infty}\big)^{1-p/q},\end{aligned}$$

即得所需结论。 □

定理 2.2. 设 $1 \le p < \infty$ 和 $n \in \mathbb{N}$。若 $f \in WL^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$，则对每个满足 $p < q < \infty$ 的 q，都有 $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$，并且以下不等式成立。

$$\|f\|_{L^q} \le \left(\frac{q}{q-p}\right)^{1/q} \cdot \big(\|f\|_{WL^p}\big)^{p/q} \cdot \big(\|f\|_{L^\infty}\big)^{1-p/q}.$$

证明。 首先，我们利用分布函数估计 f 的 L^q-范数。

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^q}^q &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q\, dx = \int_0^\infty \big|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}\big| q\lambda^{q-1}\, d\lambda \\ &= \left(\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} + \int_{\|f\|_{L^\infty}}^\infty\right) \big|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}\big| q\lambda^{q-1}\, d\lambda.\end{aligned} \tag{2.1}$$

注意

$$\big|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}\big| = 0, \quad \text{when } \lambda \ge \|f\|_{L^\infty}.$$

因此，(2.1) 中的第二个积分等于 0。现在我们来估计 (2.1) 中的第一个积分。由于 $f \in WL^p(\mathbb{R}^n)$ 且 $1 \le p < \infty$，我们可以推得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \big|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}\big| q\lambda^{q-1}\, d\lambda \\
&\le \int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \left(\frac{\|f\|_{WL^p}}{\lambda}\right)^p q\lambda^{q-1}\, d\lambda \\
&= \frac{q}{q-p} \cdot \big(\|f\|_{WL^p}\big)^p \cdot \big(\|f\|_{L^\infty}\big)^{q-p}.
\end{aligned}$$

注意到，上述积分收敛，这是因为 $q-p>0$。由此可立即得到所需结果。 □

注 2.3. 应当指出，定理 2.1 中的嵌入常数 1 和定理 2.2 中的嵌入常数 $[q/(q-p)]^{1/q}$ 均为最优。

以下结果在调和分析中广为人知（参见 [9]）。

定理 2.4（约翰–尼伦伯格定理）。设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$。存在两个正常数 C_1 和 C_2，它们仅依赖于维数 n，使得对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意立方体 Q 以及任意 $\lambda > 0$,

$$\big|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}\big| \le C_1 |Q| \exp\left\{-\frac{C_2\lambda}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\right\}.$$

更具体地说，我们可以取 $C_1 = e$ 和 $C_2 = (2^n e)^{-1}$。例如，参见 [6, 定理 7.1.6]。

以下结果由 Chen 和 Zhu 于 [3], 中建立，随后由 Kozono 和 Wadade [11], 以及 Wadade [14] 推广。不过，我们的方法与他们的不同。

定理 2.5. 设 $1 \le p < \infty$ 和 $n \in \mathbb{N}$。若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ∩有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$，则对于任意满足 $p < q < \infty$的 q，有 $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$，并且以下不等式成立。

$$\|f\|_{L^q} \le C(p,q,n) \cdot \big(\|f\|_{L^p}\big)^{p/q} \cdot \big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{1-p/q},$$

其中

$$C(p,q,n) := \left[\frac{q}{q-p} + 2^{\frac{nq}{p}} + 2^{nq}\Gamma(q+1)e^{a+q+1}\right]^{1/q} \quad \text{with} \quad a = \frac{1}{2^{\frac{n}{p'}} \cdot e}.$$

证明。我们给出这一结果的另一种证明，该证明基于经典的 Calderón–Zygmund 分解和定理 2.4。根据假设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ∩有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$，我们知道

$$0 < \|f\|_{\mathrm{BMO}} < +\infty.$$

对于 $1 \le p < \infty$，我们对 $|f|^p$ 在高度 σ 处应用 Calderón–Zygmund 分解：
$= \|f\|^p$ 有界平均振荡，从而得到一族互不相交的立方体 $\{Q_k\}_{k\ge 1}$，它们满足以下性质。

$$
\begin{cases}
\mathbb{R}^n = F \cup \Omega,\ F \cap \Omega = \emptyset; \\
|f(x)|^p \le \sigma, \quad a.e.\ x \in F; \\
\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,\ \sigma < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x)|^p\,dx \le 2^n\sigma,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.
\end{cases}
$$

现在，我们利用带有$p<q<\infty$的分布函数来估计 f 的 L^q范数。

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^q}^q &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q\,dx = \int_0^{\infty} \big|\big\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\big\}\big| q\lambda^{q-1}\,d\lambda \\
&= \int_0^{\infty} \big|\big\{x \in F : |f(x)| > \lambda\big\}\big| q\lambda^{q-1}\,d\lambda \\
&+ \int_0^{\infty} \big|\big\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\big\}\big| q\lambda^{q-1}\,d\lambda \\
&:= \mathrm{I} + \mathrm{II}.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

首先估计项 I。根据上述构造，我们有 $|f(x)| \le \|f\|_{\mathrm{BMO}}$, $a.e.\ x \in F$，由此可得

$$
\big|\big\{x \in F : |f(x)| > \lambda\big\}\big| = 0
$$

当 $\lambda \ge \|f\|_{\mathrm{BMO}}$时。因此，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \left(\int_0^{\|f\|_{\mathrm{BMO}}} + \int_{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}^{\infty}\right) \big|\big\{x \in F : |f(x)| > \lambda\big\}\big| q\lambda^{q-1}\,d\lambda \\
&= \int_0^{\|f\|_{\mathrm{BMO}}} \big|\big\{x \in F : |f(x)| > \lambda\big\}\big| q\lambda^{q-1}\,d\lambda.
\end{aligned}
$$

由于 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$且 $p<q$，最后一个表达式可由以下式子控制

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\|f\|_{\mathrm{BMO}}} \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^p q\lambda^{q-1}\,d\lambda \\
&= \frac{q}{q-p}\big(\|f\|_{L^p}\big)^p \cdot \big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{q-p}.
\end{aligned}
$$

现在我们转而关注另一项 II。利用 Hölder 不等式，我们可以看到，当 $x \in Q_k$、$k \in \mathbb{N}$ 时，

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\le |f(x) - f_{Q_k}| + \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x)|\,dx \\
&\le |f(x) - f_{Q_k}| + \left(\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&\le |f(x) - f_{Q_k}| + 2^{n/p}\|f\|_{\mathrm{BMO}}.
\end{aligned}
$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &\le \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \big|\big\{x\in Q_k : |f(x)|>\lambda\big\}\big| q\lambda^{q-1}\,d\lambda \\
&\le \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \big|\big\{x\in Q_k : |f(x)-f_{Q_k}|>\lambda-2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big\}\big| q\lambda^{q-1}\,d\lambda \\
&= \Big(\int_0^{2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}} + \int_{2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}}^\infty\Big)\sum_{k=1}^\infty \big|\big\{x\in Q_k : |f(x)-f_{Q_k}|>\lambda-2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big\}\big| q\lambda^{q-1}\,d\lambda.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

注意，若 $\lambda < 2^{n/p}\|f\|_{\mathrm{BMO}}$，则对每个立方体 $Q_k(k\in\mathbb{N})$,

$$\big\{x\in Q_k : |f(x)-f_{Q_k}|>\lambda-2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big\} = Q_k.$$

在这种情况下，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^\infty \big|\big\{x\in Q_k : |f(x)-f_{Q_k}|>\lambda-2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big\}\big| \\
&= \sum_{k=1}^\infty |Q_k| < \frac{1}{\sigma}\sum_{k=1}^\infty \int_{Q_k} |f(x)|^p\,dx \\
&= \frac{1}{\sigma}\int_{\bigcup_{k=1}^\infty Q_k} |f(x)|^p\,dx \le \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\right)^p.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

由 (2.4) 可知，(2.3) 中的第一项加项有界于

$$\int_0^{2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}} \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\right)^p q\lambda^{q-1}\,d\lambda = 2^{\frac{nq}{p}}\big(\|f\|_{L^p}\big)^p\cdot\big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{q-p}.$$

另一方面，利用定理 2.4，可以得到 (2.3) 中第二个加项的如下估计。

$$\begin{aligned}
&\int_{2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}}^\infty \sum_{k=1}^\infty \big|\big\{x\in Q_k : |f(x)-f_{Q_k}|>\lambda-2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big\}\big| q\lambda^{q-1}\,d\lambda \\
&= \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \big|\big\{x\in Q_k : |f(x)-f_{Q_k}|>\nu\big\}\big| q\Big(\nu+2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\Big)^{q-1}\,d\nu \\
&\le eq\sum_{k=1}^\infty |Q_k|\times\int_0^\infty \exp\Big\{-\frac{\nu}{2^n e\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\Big\}\cdot\Big(\nu+2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\Big)^{q-1}\,d\nu \\
&\le eq\left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\right)^p\int_0^\infty e^{-\mu}\cdot\Big(2^n e\|f\|_{\mathrm{BMO}}\cdot\mu+2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\Big)^{q-1}\Big(2^n e\|f\|_{\mathrm{BMO}}\Big)\,d\mu \\
&= eq\big(2^n e\big)^q\big(\|f\|_{L^p}\big)^p\cdot\big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{q-p}\int_0^\infty e^{-\mu}\left(\mu+\frac{1}{2^{\frac{n}{p'}}\cdot e}\right)^{q-1}\,d\mu,
\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了估计式 (2.4)。此外，直接计算可得

$$\int_0^\infty e^{-\mu}\left(\mu+\frac{1}{2^{\frac{n}{p'}}\cdot e}\right)^{q-1}d\mu=\int_a^\infty e^{-(u-a)}u^{q-1}du\ \left(a=\frac{1}{2^{\frac{n}{p'}}\cdot e}\right)$$
$$\le e^a\Gamma(q),$$

其中，$\Gamma(\cdot)$ 表示通常的伽马函数。对上述估计求和，我们得出

$$\|f\|_{L^q}^q\le\mathcal{A}(p,q,n)\big(\|f\|_{L^p}\big)^p\cdot\big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{q-p}.$$

Here

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(p,q,n)&=\frac{q}{q-p}+2^{\frac{nq}{p}}+2^{nq}q\Gamma(q)e^{a+q+1}\\&=\frac{q}{q-p}+2^{\frac{nq}{p}}+2^{nq}\Gamma(q+1)e^{a+q+1}\quad\text{with}\ \ a=\frac{1}{2^{\frac{n}{p'}}\cdot e}.\end{aligned}$$

这就给出了我们所需的估计。 □

下面给出几点说明。

注 2.6。（1）定理 2.5 中的常数 $C(p,q,n)$ 具有如下形式

$$C(p,q,n)=\mathcal{O}(q),\quad as\ q\to\infty,$$

也就是说，当 q 很大时，$C(p,q,n)\le C_n\cdot q$。这里，C_n 是一个与 q 无关的绝对常数。事实上，容易看出

$$\left(\frac{q}{q-p}\right)^{1/q}=\mathcal{O}(1),\quad\frac{a+q+1}{q}=\mathcal{O}(1)\ (q\to\infty),\quad\&\quad\big(2^{\frac{nq}{p}}\big)^{1/q}=2^{\frac{n}{p}}\le 2^n.$$

此外，利用斯特林公式，我们还可得到

$$\Gamma(q+1)^{1/q}=\mathcal{O}(q),\quad as\ q\to\infty,$$

由此即可立即得到所需结果。此外，可以证明，定理 2.5 中的增长阶 q 是尖锐的，因为 $q\to\infty$（见 *[11,* 定理 2.2 和备注*]*）。

（2）我们尚不清楚定理 2.5 是否可以改进，也不知道定理 2.5 的结论对于 $f\in WL^p(\mathbb{R}^n)\cap$ 有界平均振荡 $(\mathbb{R}^n)$（其中 $1\le p<\infty$）是否仍然成立。

(3) 设 $1\le r<\infty$。定理 2.5 的一个重要推论如下：

$$\|F\cdot G\|_{L^r}\le C(r,n)\Big(\|F\|_{L^r}\|G\|_{\mathrm{BMO}}\cdot\|G\|_{L^r}\|F\|_{\mathrm{BMO}}\Big)^{1/2}$$

对所有 $F, G \in L^r(\mathbb{R}^n) \cap$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$ 均成立。事实上，利用 H ¨older 不等式和定理 2.5，我们得到

$$\begin{aligned}\|F \cdot G\|_{L^r} &\le \|F\|_{L^{2r}} \|G\|_{L^{2r}} \\ &\le C(r,n)\Big(\|F\|_{L^r}^{1/2}\|F\|_{\mathrm{BMO}}^{1/2} \cdot \|G\|_{L^r}^{1/2}\|G\|_{\mathrm{BMO}}^{1/2}\Big) \\ &= C(r,n)\Big(\|F\|_{L^r}\|G\|_{\mathrm{BMO}} \cdot \|G\|_{L^r}\|F\|_{\mathrm{BMO}}\Big)^{1/2},\end{aligned}$$

如所需。由初等不等式 $2(ab)^{1/2} \le a+b,\ a,b>0$，可得以下关于 $L^r(\mathbb{R}^n) \cap$有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$ 的双线性估计。

$$\|F \cdot G\|_{L^r} \le C(r,n)\Big(\|F\|_{L^r}\|G\|_{\mathrm{BMO}} + \|G\|_{L^r}\|F\|_{\mathrm{BMO}}\Big).$$

这些双线性估计由 Kozono 和 Taniuchi 在 *[10]* 中证明。这类不等式可用于推广 Navier–Stokes 方程弱解唯一性和正则性的一些结果。

2.2. 莫雷空间中的插值不等式

本节讨论莫雷空间中的若干插值不等式。

定理 2.7. 设 $1 \le p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$。若 $f \in L^{p,\,\kappa}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, 则对任意满足 $p < q < \infty$ 的 q，有 $f \in L^{q,\,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，并且下列不等式成立。

$$\|f\|_{L^{q,\kappa}} \le 1 \cdot \big(\|f\|_{L^{p,\kappa}}\big)^{p/q} \cdot \big(\|f\|_{L^{\infty}}\big)^{1-p/q}.$$

证明。采用与定理 2.1 相同的策略，对任意属于 $\mathbb{R}^n$ 的立方体 Q，可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q|^{\kappa}}\int_Q |f(y)|^q\,dy\right)^{1/q} &= \left(\frac{1}{|Q|^{\kappa}}\int_Q |f(y)|^p \cdot |f(y)|^{q-p}\,dy\right)^{1/q} \\ &\le \left(\frac{1}{|Q|^{\kappa}}\int_Q |f(y)|^p\,dy\right)^{1/q} \cdot \big(\|f\|_{L^{\infty}}\big)^{1-p/q} \\ &\le \big(\|f\|_{L^{p,\kappa}}\big)^{p/q} \cdot \big(\|f\|_{L^{\infty}}\big)^{1-p/q},\end{aligned}$$

其中我们利用了这一事实：$q-p>0$。对 $\mathbb{R}^n$ 中所有立方体 Q 取上确界，即完成定理 2.7 的证明。 □

定理 2.8. 设 $1 \le p < \infty$、$0 < \kappa < 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$。若 $f \in WL^{p,\,\kappa}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, 则对于任意满足 $p < q < \infty$ 的 q，有 $f \in L^{q,\,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，且下列不等式成立。

$$\|f\|_{L^{q,\kappa}} \le \left(\frac{q}{q-p}\right)^{1/q} \cdot \big(\|f\|_{WL^{p,\kappa}}\big)^{p/q} \cdot \big(\|f\|_{L^{\infty}}\big)^{1-p/q}.$$

证明。采用与定理 2.2 相同的策略，对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意给定的立方体 Q，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^\kappa}\int_Q |f(y)|^q\,dy \\
&= \frac{1}{|Q|^\kappa}\int_0^\infty \big|\{y\in Q:|f(y)|>\lambda\}\big| q\lambda^{q-1}\,d\lambda \\
&= \frac{1}{|Q|^\kappa}\bigg(\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} + \int_{\|f\|_{L^\infty}}^\infty\bigg)\big|\{y\in Q:|f(y)|>\lambda\}\big| q\lambda^{q-1}\,d\lambda.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

注意，对于任意立方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$,

$$\big|\{y\in Q:|f(y)|>\lambda\}\big| = 0, \quad \text{when } \lambda\ge\|f\|_{L^\infty}.$$

因此，(2.5) 中的第二个积分等于 0。现在我们来估计 (2.5) 中的第一个积分。由于 $f\in WL^{p,\,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，其中 $1\le p<\infty$ 且 $0<\kappa<1$，由此可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^\kappa}\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \big|\{y\in Q:|f(y)|>\lambda\}\big| q\lambda^{q-1}\,d\lambda \\
&\le \frac{1}{|Q|^\kappa}\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \left(\frac{|Q|^{\kappa/p}\|f\|_{WL^{p,\kappa}}}{\lambda}\right)^p q\lambda^{q-1}\,d\lambda \\
&= \frac{q}{q-p}\cdot\big(\|f\|_{WL^{p,\kappa}}\big)^p\cdot\big(\|f\|_{L^\infty}\big)^{q-p}.
\end{aligned}$$

还要注意，上述积分是收敛的，因为 $q-p>0$。对 (2.5) 两边取 q 次方根，并对 $\mathbb{R}^n$ 中所有立方体 Q 取上确界，即完成定理 2.8 的证明。

□

注 2.9。这里我们给出这些常数的显式取值。还可以再次证明，定理 2.7 中的嵌入常数 1，以及定理 2.8 中的嵌入常数$[q/(q-p)]^{1/q}$，都是最佳的。

基于适当的 Calderón–Zygmund 分解，我们可以证明以下结果，它是定理 2.5 的推广。

定理 2.10. 设 $1\le p<\infty$、$0<\kappa<1$ 和 $n\in\mathbb{N}$。如果 $f\in L^{p,\,\kappa}(\mathbb{R}^n)\cap$有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$，那么对于每个满足 $p<q<\infty$ 的 q，我们有 $f\in L^{q,\,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，并且以下不等式成立。

$$\|f\|_{L^{q,\kappa}}\le\widetilde{C}(p,q,n)\cdot\big(\|f\|_{L^{p,\kappa}}\big)^{p/q}\cdot\big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{1-p/q},$$

其中

$$\widetilde{C}(p,q,n):=\left[\frac{q}{q-p}+2^{\frac{nq}{p}}+2^{(n+1)q}\Gamma(q+1)e^{b+q+1}\right]^{1/q}\quad\text{with}\quad b=\frac{1}{2^{\frac{n}{p'}+1}\cdot e}.$$

证明。由假设 $f \in L^{p,\,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ ∩有界平均振荡($\mathbb{R}^n$)，可知

$$0 < \|f\|_{\mathrm{BMO}} < +\infty.$$

对于任意固定的立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$，只需证明

$$\frac{1}{|Q|^{\kappa}} \int_Q |f(y)|^q \, dy \le C\big(\|f\|_{L^{p,\kappa}}\big)^p \cdot \big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{q-p} \tag{2.6}$$

对某个正常数 C 成立。注意，对于这样的 Q 和 $1 \le p < \infty$， $f \cdot \chi_Q \in L^p($ $\mathbb{R}^n)$。这里我们用 χ_Q 表示 Q 的示性函数。现在我们对 $\mathcal{F}$ 在高度 σ 处应用 Calderón–Zygmund 分解：$= |f \cdot \chi_Q|^p : = \|f\|^p$ 有界平均振荡，得到一族互不相交的立方体 $\{\mathcal{Q}_k\}_{k\ge 1}$，它们满足以下性质。

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n = F \cup \Omega,\ F \cap \Omega = \emptyset; \\ \big|f(y) \cdot \chi_Q(y)\big|^p \le \sigma, \quad a.e.\ y \in F; \\ \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Q}_k,\ \sigma < \frac{1}{|\mathcal{Q}_k|} \int_{\mathcal{Q}_k} \big|f(y) \cdot \chi_Q(y)\big|^p \, dy \le 2^n \sigma,\ \forall\, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

根据上述 Calderón–Zygmund 分解，(2.6) 中的左端可以估计如下。

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|^{\kappa}} \int_Q |f(y)|^q \, dy &= \frac{1}{|Q|^{\kappa}} \int_0^{\infty} \big|\{y \in Q : |f(y)| > \lambda\}\big| q\lambda^{q-1} \, d\lambda \\ &= \frac{1}{|Q|^{\kappa}} \int_0^{\infty} \big|\{y \in Q \cap F : |f(y)| > \lambda\}\big| q\lambda^{q-1} \, d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{|Q|^{\kappa}} \int_0^{\infty} \big|\{y \in Q \cap \Omega : |f(y)| > \lambda\}\big| q\lambda^{q-1} \, d\lambda \\ &:= \mathrm{III} + \mathrm{IV}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

为了估计项 III，我们考虑以下两种情形： $\lambda \ge \|f\|_{\mathrm{BMO}}$ 和 $0 < \lambda < \|f\|_{\mathrm{BMO}}$。注意，$|f(y) \cdot \chi_Q(y)| \le \|f\|_{\mathrm{BMO}}$， $a.e.\ y \in F$。由此可得

$$\big|\{y \in F : |f(y) \cdot \chi_Q(y)| > \lambda\}\big| = 0$$

当 $\lambda \ge \|f\|_{\mathrm{BMO}}$ 时，或者等价地，

$$\big|\{y \in Q \cap F : |f(y)| > \lambda\}\big| = 0.$$

因此，

$$\begin{aligned} \mathrm{III} &= \frac{1}{|Q|^{\kappa}} \bigg(\int_0^{\|f\|_{\mathrm{BMO}}} + \int_{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}^{\infty} \bigg) \big|\{y \in Q \cap F : |f(y)| > \lambda\}\big| q\lambda^{q-1} \, d\lambda \\ &= \frac{1}{|Q|^{\kappa}} \int_0^{\|f\|_{\mathrm{BMO}}} \big|\{y \in Q \cap F : |f(y)| > \lambda\}\big| q\lambda^{q-1} \, d\lambda \\ &\le \frac{1}{|Q|^{\kappa}} \int_0^{\|f\|_{\mathrm{BMO}}} \big|\{y \in Q : |f(y)| > \lambda\}\big| q\lambda^{q-1} \, d\lambda. \end{aligned}$$

由于 $f \in L^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，其中 $1 \le p < q$ and $0 < \kappa < 1$，我们看到最后一个表达式被以下式子控制

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|Q|^\kappa}\int_0^{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\left(\frac{|Q|^{\kappa/p}\|f\|_{L^{p,\kappa}}}{\lambda}\right)^p q\lambda^{q-1}\,d\lambda\\&=\frac{q}{q-p}\big(\|f\|_{L^{p,\kappa}}\big)^p\cdot\big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{q-p}.\end{aligned}$$

现在我们来处理项 IV。对于任意点 $y \in Q \cap \mathcal{Q}_k, k = 1, 2, \dots,$ 有

$$\begin{aligned}\big|f(y)\big| &= \big|f(y)\cdot\chi_Q(y)\big|\\&\le \big|(f\chi_Q)(y)-(f\chi_Q)_{\mathcal{Q}_k}\big|+\frac{1}{|\mathcal{Q}_k|}\int_{\mathcal{Q}_k}\big|f(y)\cdot\chi_Q(y)\big|\,dy\\&\le \big|(f\chi_Q)(y)-(f\chi_Q)_{\mathcal{Q}_k}\big|+\left(\frac{1}{|\mathcal{Q}_k|}\int_{\mathcal{Q}_k}\big|f(y)\cdot\chi_Q(y)\big|^p\,dy\right)^{1/p}\\&\le \big|(f\chi_Q)(y)-(f\chi_Q)_{\mathcal{Q}_k}\big|+2^{n/p}\|f\|_{\mathrm{BMO}}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{IV} &\le \frac{1}{|Q|^\kappa}\int_0^\infty\sum_{k=1}^\infty\big|\big\{y\in Q\cap\mathcal{Q}_k:|f(y)|>\lambda\big\}\big|q\lambda^{q-1}\,d\lambda\\&\le \frac{1}{|Q|^\kappa}\int_0^\infty\sum_{k=1}^\infty\big|\big\{y\in Q\cap\mathcal{Q}_k:\big|(f\chi_Q)(y)-(f\chi_Q)_{\mathcal{Q}_k}\big|>\lambda-2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big\}\big|q\lambda^{q-1}\,d\lambda\\&= \frac{1}{|Q|^\kappa}\bigg(\int_0^{2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}}+\int_{2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}}^\infty\bigg)\sum_{k=1}^\infty\\&\quad\big|\big\{y\in Q\cap\mathcal{Q}_k:\big|(f\chi_Q)(y)-(f\chi_Q)_{\mathcal{Q}_k}\big|>\lambda-2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big\}\big|q\lambda^{q-1}\,d\lambda.\end{aligned}$$

注意，若 $\lambda < 2^{n/p}\|f\|_{\mathrm{BMO}}$，则对每个立方体 $\mathcal{Q}_k$，都有

$$\big\{y\in Q\cap\mathcal{Q}_k:\big|(f\chi_Q)(y)-(f\chi_Q)_{\mathcal{Q}_k}\big|>\lambda-2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big\}=Q\cap\mathcal{Q}_k,$$

这进一步意味着

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^\infty\big|\big\{y\in Q\cap\mathcal{Q}_k:\big|(f\chi_Q)(y)-(f\chi_Q)_{\mathcal{Q}_k}\big|>\lambda-2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big\}\big|\\&=\sum_{k=1}^\infty|Q\cap\mathcal{Q}_k|\le\sum_{k=1}^\infty|\mathcal{Q}_k|\\&<\frac{1}{\sigma}\sum_{k=1}^\infty\int_{\mathcal{Q}_k}\big|f(y)\cdot\chi_Q(y)\big|^p\,dy=\frac{1}{\sigma}\int_{\bigcup_{k=1}^\infty\mathcal{Q}_k}\big|f(y)\cdot\chi_Q(y)\big|^p\,dy\\&\le\frac{1}{\sigma}\int_Q\big|f(y)\big|^p\,dy\le\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\kappa}}}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\right)^p|Q|^\kappa.\end{aligned}\tag{2.8}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^\kappa}\int_0^{2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\sum_{k=1}^{\infty}\big|\big\{y\in Q\cap\mathcal{Q}_k:\big|(f\chi_Q)(y)-(f\chi_Q)_{\mathcal{Q}_k}\big|>\lambda-2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big\}\big|q\lambda^{q-1}\,d\lambda\\
&\le\int_0^{2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\kappa}}}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\right)^p q\lambda^{q-1}\,d\lambda\\
&=2^{\frac{nq}{p}}\big(\|f\|_{L^{p,\kappa}}\big)^p\cdot\big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{q-p}.
\end{aligned}$$

另一方面，对于固定的立方体 Q 和 $f\in$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$，我们首先断言 $f\chi_Q\in$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$，并且成立以下不等式:

$$\|f\chi_Q\|_{\mathrm{BMO}}\le 2\|f\|_{\mathrm{BMO}}. \tag{2.9}$$

事实上，对于任意立方体 $\mathcal{R}\subset\mathbb{R}^n$，通过简单计算可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\mathcal{R}|}\int_{\mathcal{R}}\big|(f\chi_Q)(y)-(f\chi_Q)_{\mathcal{R}}\big|\,dy\\
&\le\frac{1}{|\mathcal{R}|}\int_{\mathcal{R}}\big|(f\chi_Q)(y)-f_{\mathcal{R}}\big|\,dy+\frac{1}{|\mathcal{R}|}\int_{\mathcal{R}}\big|f_{\mathcal{R}}-(f\chi_Q)_{\mathcal{R}}\big|\,dy\\
&\le\frac{2}{|\mathcal{R}|}\int_{\mathcal{R}}\big|(f\chi_Q)(y)-f_{\mathcal{R}}\big|\,dy=\frac{2}{|\mathcal{R}|}\int_{\mathcal{R}\cap Q}\big|f(y)-f_{\mathcal{R}}\big|\,dy\\
&\le\frac{2}{|\mathcal{R}|}\int_{\mathcal{R}}\big|f(y)-f_{\mathcal{R}}\big|\,dy\le 2\|f\|_{\mathrm{BMO}}.
\end{aligned}$$

对所有立方体 $\mathcal{R}\subset\mathbb{R}^n$取上确界，即可得到 (2.9)。现在，由定理 2.4 和不等式 (2.9) 可知

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^\kappa}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}}^{\infty}\big|\big\{y\in Q\cap\mathcal{Q}_k:\big|(f\chi_Q)(y)-(f\chi_Q)_{\mathcal{Q}_k}\big|>\lambda-2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big\}\big|q\lambda^{q-1}\,d\lambda\\
&\le\frac{1}{|Q|^\kappa}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\big|\big\{y\in\mathcal{Q}_k:\big|(f\chi_Q)(y)-(f\chi_Q)_{\mathcal{Q}_k}\big|>\nu\big\}\big|q\Big(\nu+2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\Big)^{q-1}\,d\nu\\
&\le\frac{eq}{|Q|^\kappa}\sum_{k=1}^{\infty}|\mathcal{Q}_k|\times\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{\nu}{2^ne\|f\chi_Q\|_{\mathrm{BMO}}}\right\}\cdot\Big(\nu+2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\Big)^{q-1}\,d\nu\\
&\le\frac{eq}{|Q|^\kappa}\sum_{k=1}^{\infty}|\mathcal{Q}_k|\times\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{\nu}{2^{n+1}e\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\right\}\cdot\Big(\nu+2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\Big)^{q-1}\,d\nu\\
&\le eq\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\kappa}}}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\right)^p\int_0^{\infty}e^{-\mu}\cdot\Big(2^{n+1}e\|f\|_{\mathrm{BMO}}\cdot\mu+2^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\Big)^{q-1}\big(2^{n+1}e\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)\,d\mu\\
&=eq\big(2^{n+1}e\big)^q\big(\|f\|_{L^{p,\kappa}}\big)^p\cdot\big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{q-p}\int_0^{\infty}e^{-\mu}\left(\mu+\frac{1}{2^{\frac{n}{p'}+1}\cdot e}\right)^{q-1}d\mu,
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式用到了估计式 (2.8)。与前面的

证明一样，也可以得到

$$\int_0^\infty e^{-\mu}\left(\mu+\frac{1}{2^{\frac{n}{p'}+1}\cdot e}\right)^{q-1}d\mu=\int_b^\infty e^{-(u-b)}u^{q-1}du\ \left(b=\frac{1}{2^{\frac{n}{p'}+1}\cdot e}\right)$$
$$\le e^b\Gamma(q).$$

总结上述推导出的估计，我们得出

$$\frac{1}{|Q|^\kappa}\int_Q|f(y)|^q\,dy\le\mathcal{B}(p,q,n)\big(\|f\|_{L^{p,\kappa}}\big)^p\cdot\big(\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big)^{q-p}.$$

Here

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(p,q,n)&=\frac{q}{q-p}+2^{\frac{nq}{p}}+2^{(n+1)q}q\Gamma(q)e^{b+q+1}\\&=\frac{q}{q-p}+2^{\frac{nq}{p}}+2^{(n+1)q}\Gamma(q+1)e^{b+q+1}\quad\text{with}\ \ b=\frac{1}{2^{\frac{n}{p'}+1}\cdot e}.\end{aligned}$$

因此，(2.6) 成立。取 q次方根，并对 $\mathbb{R}^n$中的所有立方体 Q 取上确界，即得所需结论。

□

~注记 2.11. (1) 与定理 2.5 中一样，定理 2.10 中的常数 $C(p,q,n)$ 也具有如下形式

$$\widetilde{C}(p,q,n)=\mathcal{O}(q),\quad as\ q\to\infty,$$

也就是说，当 q较大时， $C(p,q,n)\le C_n\cdot q$，其中 C_n 是一个与 q 无关的绝对常数。事实上，容易看出

$$\left(\frac{q}{q-p}\right)^{1/q}=\mathcal{O}(1),\quad\frac{b+q+1}{q}=\mathcal{O}(1)\ (q\to\infty),\quad\&\quad\left(2^{\frac{nq}{p}}\right)^{1/q}=2^{\frac{n}{p}}\le 2^n.$$

因此，所需结果可由以下众所周知的事实得出：当 $q\to\infty$时， $\Gamma(q+1)^{1/q}=\mathcal{O}(q)$。受 *[11,* 定理 2.*2],* 的启发，自然会问定理 2.10 中的增长阶 q 在 $q\to\infty$时是否为最优（我们相信确实如此）。

(2) 尚不清楚定理 2.10 中关于 f 的条件能否弱化。我们不知道在某些 p 和 κ 下，若 $f\in WL^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)\cap$ 有界平均振荡 $(\mathbb{R}^n)$，定理 2.10 的结论是否仍然成立。

接下来讨论一些应用。设 $1\le p<\infty$ 和 $0<\kappa<1$。对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意给定的立方体 Q，利用赫尔德不等式可得

$$\begin{aligned}\left(\int_Q|F(y)\cdot G(y)|^p\,dy\right)^{1/p}&\le\left(\int_Q|F(y)|^{2p}\,dy\right)^{1/(2p)}\left(\int_Q|G(y)|^{2p}\,dy\right)^{1/(2p)}\\&\le\Big(\|F\|_{L^{2p,\kappa}}|Q|^{\kappa/(2p)}\Big)\cdot\Big(\|G\|_{L^{2p,\kappa}}|Q|^{\kappa/(2p)}\Big)\\&=\Big(\|F\|_{L^{2p,\kappa}}\cdot\|G\|_{L^{2p,\kappa}}\Big)|Q|^{\kappa/p}.\end{aligned}$$

于是有 $F \cdot G$ 属于 $L^{p,\,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\|F \cdot G\|_{L^{p,\kappa}} \leq \|F\|_{L^{2p,\kappa}} \cdot \|G\|_{L^{2p,\kappa}}.$$

此外，根据定理 2.10，我们得到

$$\begin{aligned}\|F \cdot G\|_{L^{p,\kappa}} &\leq \|F\|_{L^{2p,\kappa}} \|G\|_{L^{2p,\kappa}} \\ &\leq C(p,n)\Big(\|F\|_{L^{p,\kappa}}^{1/2} \|F\|_{\mathrm{BMO}}^{1/2} \cdot \|G\|_{L^{p,\kappa}}^{1/2} \|G\|_{\mathrm{BMO}}^{1/2}\Big) \\ &= C(p,n)\Big(\|F\|_{L^{p,\kappa}} \|G\|_{\mathrm{BMO}} \cdot \|G\|_{L^{p,\kappa}} \|F\|_{\mathrm{BMO}}\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

对所有 F、$G \in L^{p,\,\kappa}(\mathbb{R}^n) \cap$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$均成立。最后，由基本不等式 2$(ab)^{1/2} \leq a+b$, $a, b > 0$，我们得到以下关于$L^{p,\,\kappa}(\mathbb{R}^n) \cap$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$的双线性估计。

$$\|F \cdot G\|_{L^{p,\kappa}} \leq C(p,n)\Big(\|F\|_{L^{p,\kappa}} \|G\|_{\mathrm{BMO}} + \|G\|_{L^{p,\kappa}} \|F\|_{\mathrm{BMO}}\Big).$$

Morrey 空间 $L^{p,\,\kappa}(\mathbb{R}^n)$最初作为一种有用工具被引入，用于研究二阶椭圆偏微分方程解的局部行为。后来，人们发现这一函数空间在一些二阶非线性椭圆型和抛物型偏微分方程的研究中有许多重要应用。我们认为，这些双线性估计可用于研究某些问题（例如非线性椭圆型和抛物型方程中弱解的整体存在性、唯一性和正则性）。

参考文献

参考文献

[1] D. R. Adams, 《莫雷空间》, 《应用与数值调和分析讲义》, Birkh¨ auser/Springer, Cham, 2015。[2] F. Chiarenza 和 M. Frasca, 《莫雷空间与 Hardy–Littlewood 极大函数》, Rend. Mat., 7(1987), 273–279。[3] J. C. Chen 和 X. R. Zhu, 《关于有界平均振荡及其应用的注记》, J. Math. Anal. Appl, 303(2005), 696–698。[4]J. Duoandikoetxea, 《傅里叶分析》, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2000。[5] L. Grafakos, 《经典傅里叶分析》, 第二版, 施普林格出版社, 2009。[6] L. Grafakos, 《现代傅里叶分析》, 第二版, 施普林格出版社, 2009。

[7] H. Gunawan、D. I. Hakim、E. Nakai 和 Y. Sawano, 《关于弱 Morrey 空间与莫雷空间之间包含关系》, Nonlinear Anal., 168(2018), 27–31。[8] E. H. Lieb 和 M. Loss, 《分析》, 第二版, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2001。[9]F. John 和 L. Nirenberg, 《关于有界平均振荡函数》, Comm. Pure Appl. Math., 14(1961), 415–426。[10] H. Kozono 和 Y. Taniuchi, 《有界平均振荡中的双线性估计与 Navier–Stokes 方程》, Math. Z., 235(2000), 173–194。[11] H. Kozono 和 H. Wadade, 《关于临界 Sobolev 空间与有界平均振荡中的 Gagliardo–Nirenberg 型不等式的注记》, Math. Z., 259(2008), 935–950。[12] E. Nakai, 《Orlicz–Morrey 空间与 Hardy–Littlewood 极大函数》, Studia Math., 188(2008), 193–221。[13] E.M. Stein, 《奇异积分与函数的可微性质》, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1970。[14]H. Wadade, 《关于 Besov 空间和 Triebel–Lizorkin 空间极限情形下 Gagliardo–Nirenberg 型不等式的注记》, J. Fourier Anal. Appl., 15(2009), 857–870。