arXiv:2303.02005v1 [math.OC] 3 Mar 2023

平均场最优控制问题的转向点性质

Martin Gugat*、Michael Herty†和 Chiara Segala‡

摘要

我们研究具有平均场动力学的最优控制问题中的周转现象。这类问题是由大量 N 常微分方程所描述的系统取极限 $N \to \infty$ 得到的。我们证明，当时间范围较长时，最优控制问题会使最优状态和最优控制呈现周转结构。为证明这一点，我们利用了这样一个事实：常微分方程层面的问题所具有的周转结构，在相应的平均场极限下得以保留。

关键词。
转向点性质、平均场极限、最优控制 美国数学学会
学科分类。93C20、35L04、35Q89、49N10

1 引言

近几年，从多尺度建模的角度研究集体行为现象的热度不断上升。社会经济学、生物学和机器人学中的经典例子包括自推进粒子（如动物和机器人）之间的相互作用，参见例如 [1, 6, 13, 14, 32, 18]。这些粒子按照一种非线性模型相互作用，该模型编码了各种社会规则，例如吸引、排斥和对齐。

*动力学、控制与数值学教席（亚历山大·冯·洪堡教授席）、数据科学系，弗里德里希-亚历山大大学¨埃尔朗根-纽伦堡¨大学（FAU），Cauerstr. 11, 91058 埃尔朗根，德国，(martin.gugat@fau.de)
†数值分析教席，IGPM，亚琛工业大学，Templergraben, 55, D-52062 亚琛，德国 (herty@igpm.rwth-aachen.de)
‡IGPM，亚琛工业大学，Templergraben, 55, D-52062 亚琛，德国 (segala@igpm.rwth-aachen.de)

研究控制输入对这类复杂系统的影响，对于实际应用具有重要意义。这方面的研究成果有助于设计优化措施，例如群体机器人学中的避碰协议 [10], 、人群动力学中的行人疏散 [2], 、交通管理中的干预量化 [37] ，或意见动力学中的相关措施[4, 26]。从数学角度看，多智能体控制问题可表述为：在由常微分方程（ODE）系统描述的复杂动态约束下，最小化一个积分目标泛函。

在微观层面对相互作用粒子系统进行建模，需要研究大规模主体（或粒子）系统；无论从理论还是数值角度来看，这都需要付出相当大的努力。我们可以考虑另一种描述层次，即推导原始动态的介观或平均场近似。在这里，随着粒子数趋于无穷，粒子的密度便可得到 [16, 17, 21, 31, 35, 15, 33, 30, 9, 34]。因此，设计平均场控制方法中的控制尤为重要 [24, 22, 23, 7]。

本文聚焦于平均场最优控制问题中的周转现象。近期已有研究探讨这一主题，例如 [11], ；它涉及跟踪型目标泛函的动态最优控制问题与相应静态最优控制问题的解之间的关系。转向点性质指出，动态最优解与静态最优解之间的距离很小，尤其是在时间区间较长时。因此，只需求解静态最优控制问题，便可减少控制工作量。

关于转向点性质的早期研究见于 [36], ，而 [20] 概述了离散时间和连续时间的转向点性质。由常微分方程支配的系统的转向点现象也已在 [39, 40, 27]中得到详细研究。测度和积分转向点性质已在 [38]中研究。 [28], 提出了对由半线性偏微分方程支配的系统进行的转向点分析，而转向点性质与滚动时域方法之间的关系则在 [8]中得到研究。在 [19] 中，还研究了流形调节器。与这些工作不同，我们关注的问题是：一个系统的转向点性质是否会在无穷多个 ODE 的极限下得以保持，以及在何种条件下这种转向点性质在平均场层面成立。

接下来，我们详细陈述最优控制问题。我们考虑对高维非线性动力学进行控制，该动力学描述了微观层面上 N 个主体的演化；例如，如 [17], 中所述，

其平均场动力学由一个非局部输运方程给出，用于描述位置 $x \in \mathbb{R}^d$ 、时间 $t \in \mathbb{R}^+$ 时粒子的密度。初始粒子密度 $\mu^0(x)$ 已知，控制作用则建模为偏微分方程（PDE）中的一个加性项。更具体地说，我们考虑如下类型的偏微分方程:

$$\partial_t \mu(t,\, x) + \partial_x \Big(\big((P * \mu)(t,x) + u(t,x) \big)\ \mu(t,\, x) \Big) = 0, \qquad \mu(a,x) = \mu^0(x), \tag{1}$$

其中 $*$ 表示卷积算子，函数 P 已给定，正实数 a 为初始时间。这类动力学也可能作为平衡律的非局部正则化出现，参见例如 [12, 5]。

我们考虑一个具有有限且较长时间范围、受系统（1）约束的最优控制问题。我们希望最小化的目标函数同时取决于控制和状态

$$\mathbf{J}_{(a,\,b)}(\mu,\, u) = \int_a^b f(\mu(t,\, x),\, u(t,x))\, dt,$$

对于给定的实值函数 f

$$f(\mu,\, u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(L(x) + \Psi(u(t,x)) \right)\, d\mu(t,\, x), \tag{2}$$

以及时间区间 $[a,b]$ ，其中 $a < b$ 为正实数。一个具体例子为

$$\partial_t \mu(t,\, x) + \partial_x \Big(\big((\mathcal{H} * \mu)(t,x) + u(t,x) \big)\ \mu(t,\, x) \Big) = 0,$$

其中 $(\mathcal{H}*\mu)\ (t,x)\ = \int_{\mathbb{R}^d} H\ (x-y)\ \ (y-x)\ d\mu\ (t,\, y)$ 表示一个非局部积分算子，而 H 是一个给定的连续函数。对于这个例子，我们假设积分目标函数由二次控制成本和跟踪项组成。跟踪项是微观项的平均场极限，该项旨在使所有粒子达到一个常数共识状态 ψ。因此，差异的大小

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left\| x - \overline{\psi} \right\|^2\, d\mu(t,\, x)$$

在假设 $1 = \int_{\mathbb{R}^d} 1\, d\mu(t,\, x)$ 的条件下，该量在某个合适的范数下达到最小值。对于参数 $\gamma \geq 0$，我们考虑 $f = f$

$$\hat{f}(\mu,\, u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\left\| x - \overline{\psi} \right\|^2 + \gamma \left\| u(t,x) \right\|^2 \right)\, d\mu(t,\, x)\,.$$

请注意，这是 [25] 中代价泛函所包含的一种特殊情形。其中考虑了受偏微分方程约束的更一般积分代价的最小化。[25] 中的分析适用于我们的最优控制问题，特别是定理 4.7 中给出的控制的存在性结果，但文中未讨论转向点性质。

本文结构如下。第 2 节在微观层面定义一般的动态最优控制问题。第 3 节致力于微观动力学的平均场近似，并给出介观控制问题解的存在性结果。在第 4 节中，我们证明该问题在微观层面和平均场层面均满足严格耗散不等式。在第 5 节中，我们证明廉价控制条件成立：首先讨论粒子数有限的情形，然后将其推广到平均场情形。最后，第 6 节利用前述假设证明具有内部衰减的转向点性质。

2 个粒子的最优控制问题

给定自然数 d 和 N。定义状态空间

$$X_N = (\mathbb{R}^d)^N.$$

给定初始粒子状态 $\psi^0 \in X_N$。对于 $\psi_k(t) \in \mathbb{R}^d (k \in \{1, ..., N\})$，如 [3], 所示，我们考虑具有初始条件 $\psi_k(a) = \psi_k^0 (k \in \{1, ..., N\})$的系统。设连续函数

$$P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \text{with } P(0) = 0,$$

给定一个关于最大范数有界的函数。对于 $k \in \{1, ..., N\}$，粒子的运动由以下常微分方程控制

$$\begin{aligned} \psi_k'(t) &= (P * \mu_N)(\psi_k(t)) + u_k(t) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} P(\psi_i(t) - \psi_k(t)) + u_k(t), \quad \psi_k(a) = \psi_k^0, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $u_k(t) = u(t, \psi_k(t))$，且

$$\mu_N(t, x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta(x - \psi_i(t))$$

是以主体状态为支撑的经验测度。我们寻找控制 $u_k(t)$，使其成为满足代价泛函的最优控制问题的解

$$\mathcal{J}_{(N,a,b)}(\psi, u) = \int_a^b f_N(\psi(t), u(t))\, dt, \tag{4}$$

取最小值，其中

$$\begin{aligned} f_N(\psi, u) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(L(x) + \Psi(u(t,x))\right)\, d\mu_N(t,\, x) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Big(L(\psi_k(t)) + \Psi(u_k(t))\Big), \end{aligned} \tag{5}$$

其中，优化时域 $b-a$ 表示我们最小化运行代价所覆盖的时间范围。因此，我们的目标函数是状态和控制变量的函数。对于 $k \in \{1, ..., N\}$，我们分别将静态变量定义为$\psi^{(\sigma)}$和 $u^{(\sigma)}$，对应状态和控制。于是，给定初始数据$\psi_k(a) = \psi^{(\sigma)}$ 以及控制 $u_k^{(\sigma)} = u^{(\sigma)} = 0$，对于每个 $k \in \{1, ..., N\}$，系统都保持在稳态 $\psi_k(t) = \psi^{(\sigma)}$。该问题与 [25] 中所研究的问题类似。

对于正实数 a、b，满足 $b > a$，并给定初始状态 $\psi^0 \in X_N$，我们定义参数优化问题

$$\mathcal{Q}(N,\, a,\, b,\, \psi^0) :\, \min_u \mathcal{J}_{(N,\, a,\, b)}(\psi,\, u)$$

满足约束条件 (3)，且 $\mathcal{V}(N, a, b, \psi^0)$ 是 $\mathcal{Q}(N, a, b, \psi^0)$ 的最优值。

3 平均场极限下解的存在性

相互作用粒子系统 (3) 的原始表述是在微观层面通过一个常微分方程组给出的，但研究由大量个体构成的系统的微观模型需要付出相当大的努力，尤其是在数值模拟方面，因为基于真实数据的模型可能涉及数量极其庞大的相互作用个体。为降低这种复杂性，我们可以考虑一种更一般的描述层次，即推导原始动态的介观近似。其基本思路是分析粒子密度，而不是关注每个粒子的演化。因此，我们将考虑连续模型，以模拟主体数量庞大时的集体行为

。通过对常微分方程组 (3) 取平均场极限 $N \to \infty$，我们得到偏微分方程问题 (1)，它描述粒子密度 $\mu = \mu(t,x)$ 如何随时间变化。

为了证明动力学 (3) 和代价泛函 (4) 的平均场极限存在，我们考虑满足以下性质的函数：

(P) 函数 $P\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，满足 $P(0) = 0$，是一个局部利普希茨函数，使得

$$\|P(\psi)\| \le C_P\|\psi\|, \quad \text{for all } \psi \in \mathbb{R}^d.$$

(L) 函数 $L\colon \mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$ 关于 $\mathbb{R}^d$ 上由欧几里得距离生成的拓扑是连续函数。

(Ψ) 函数 $\Psi\colon \mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$，满足 $\Psi(0) = 0$，是一个非负凸函数，并且存在 $C_\Psi \ge 0$ 和 $1 \le q \le +\infty$ 使得

$$\mathrm{Lip}(\Psi, B(0,R)) \le C_\Psi R^{q-1},$$

对所有 $R > 0$ 均成立。

考虑函数 P、L 和 Ψ 的这三个假设后，我们可以应用 [25] 中的存在性定理 4.7。在定理 3.1 中，我们用 $\mathcal{W}_1$ 表示两个概率测度 μ 和 $\nu \in P_1(\mathbb{R}^d)$ 之间的瓦瑟斯坦距离，定义如下：

$$\mathcal{W}_1(\mu,\nu) := \inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \|x-y\|\, d\gamma(x,y),$$

其中，$\Gamma(\mu,\nu)$ 表示所有定义在 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上、在第一和第二个因子上的边缘分布分别为 μ 和 ν 的测度的集合。

定理 3.1. 设 $\mu^0 \in P_1(\mathbb{R}^d)$ 为给定的具有紧支撑的概率测度。我们假设经验测度序列 $(\mu_N^0)_{N\in\mathbb{N}}$ $\mu_N^0(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta(x-\psi_i^0)$ 满足 $\lim_{N\to\infty} \mathcal{W}_1(\mu_N^0,\mu^0) = 0$。令

$$\mu_N(t,x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta(x-\psi_i(t)),$$

支撑于相空间轨迹 $\psi_i(t) \in \mathbb{R}^d$（其中 $i = 1,\dots,N$），这些轨迹在 $[a,b]$ 中定义了方程 (3) 的解，其初始状态为 $\psi(a) = \psi^0$。于是存在一个映射 $\mu \in P_1(\mathbb{R}^d)$，使得

- $\lim_{N\to\infty} \mathcal{W}_1(\mu_N(t),\ \mu(t)) = 0$ 关于 $t \in [a,b]$ 一致收敛;
- μ 是（1）的一个弱等紧支撑解;

关于代价泛函（4），有如下极限:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \int_a^b \int_{\mathbb{R}^d} (L(x) + \Psi(u(t,x)))\ d\mu_N(t,\, x)\, dt \\ = \int_a^b \int_{\mathbb{R}^d} (L(x) + \Psi(u(t,x)))\ d\mu(t,\, x)\, dt.\end{aligned}$$

定理 3.1 对满足假设（P）、（L）、（Ψ）的一般 P、L、Ψ 函数成立。我们可以看到，在引言 1 中考虑的例子满足这些假设，其中

$$P(\psi) := H(\psi)\psi, \qquad L(\psi) := \|\psi - \overline{\psi}\|^2, \qquad \Psi(u) := \gamma\|u\|^2.$$

我们定义参数化的平均场优化问题

$$\mathbf{Q}(a,\, b,\, \mu^0) : \min_u \mathbf{J}_{(a,\,b)}(\mu,\, u)$$

约束条件为（1）。回顾一下，平均场目标泛函为

$$\mathbf{J}_{(a,\,b)}(\mu,\, u) = \int_a^b \int_{\mathbb{R}^d} (L(x) + \Psi(u(t,x)))\ d\mu(t,\, x)\, dt. \tag{6}$$

我们将平均场极限问题 Q(a, b, μ^0) 的最优值定义为 V(a, b, μ^0)。根据 [25] 中的定理 5.1，Q(a, b, μ^0) 的解存在。

4 严格耗散不等式

本节假设该最优控制问题满足严格耗散性假设。我们先考虑 N-粒子问题，然后讨论平均场极限表述。

4.1 微观问题的严格耗散不等式

对于任意可容许对 $(\psi(\cdot)\ u(\cdot))$ 以及所有 $\tau \in [a,\, b]$，我们假设以下耗散性不等式成立：

$$\begin{aligned}&\int_a^\tau f_N(\psi(t),\, u(t))\, dt \\ &\qquad \geq \int_a^\tau \frac{1}{N}\left(\|\psi(t)-\psi^{(\sigma)}\|_N + \|u(t)-u^{(\sigma)}\|_N\right)^2 dt\end{aligned} \tag{7}$$

这里，$\|z\|_N = \sqrt{\sum_{k=1}^N \|z_k\|^2}$, $\|\cdot\|$ 是通常的欧几里得范数，f_N 是式（5）中的运行代价。给定初始状态 ψ^0，问题 $\mathcal{Q}(N,\, a,\, b,\, \psi^0)$，即对 u 进行优化以最小化式（4）中的代价泛函 $\mathcal{J}_{(N,a,b)}$，是 $[a,b]$ 在$(\psi^{(\sigma)}, u^{(\sigma)})$处的严格耗散问题。

4.2 平均场极限中的严格耗散不等式

我们考虑以下从（7）开始的计算

$$\begin{aligned}&\int_a^\tau f_N(\psi(t),\, u(t))\, dt \\ &\quad \geq \int_a^\tau \frac{1}{N}\left(\|\psi(t)-\psi^{(\sigma)}\|_N + \|u(t)-u^{(\sigma)}\|_N\right)^2 dt \\ &\quad = \int_a^\tau \frac{1}{N}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^N \|\psi_k(t)-\psi^{(\sigma)}\|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^N \|u_k(t)-u^{(\sigma)}\|^2}\right)^2 dt \\ &\quad = \int_a^\tau \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^N \|\psi_k(t)-\psi^{(\sigma)}\|^2 + \sum_{k=1}^N \|u_k(t)-u^{(\sigma)}\|^2\right) dt \\ &\qquad + \int_a^\tau \frac{2}{N}\sqrt{\sum_{k,l=1}^N \|\psi_k(t)-\psi^{(\sigma)}\|^2\, \|u_l(t)-u^{(\sigma)}\|^2}\, dt \\ &\quad \geq \int_a^\tau \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^N \|\psi_k(t)-\psi^{(\sigma)}\|^2 + \sum_{k=1}^N \|u_k(t)-u^{(\sigma)}\|^2\right) dt.\end{aligned} \tag{8}$$

由于 (8) 中的所有量都存在平均场极限，得益于定理 3.1，我们可以考虑 $N \to \infty$ 的问题，并陈述一个耗散性

关于测度的 $[a,b]$ 不等式。对于所有 $\tau \in [a,\, b]$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_a^\tau f(\mu(t,x),\, u(t,x))dt\\&\quad\geq \int_a^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \left(\|x-\psi^{(\sigma)}\|^2+\|u(t,x)-u^{(\sigma)}\|^2\right)\, d\mu(t,\, x)\, dt,\end{aligned} \tag{9}$$

其中， f 是公式（2）中的泛函，也是微观运行成本（5）的平均场极限。

5 廉价控制条件

对我们的分析而言，廉价控制条件至关重要。该条件要求，最优值可用初始状态与期望静态状态之间的距离来界定。我们首先针对粒子数有限的情形讨论这一假设，然后将其推广到平均场情形。

5.1 微观问题的廉价控制条件

在本节中，我们将证明优化问题 $\mathcal{Q}(N,\, a,\, b,\, \psi^0)$ 满足如下意义下的廉价控制条件：

存在常数 $\mathcal{C}_0 > 0$，使得对所有初始时刻 a、所有初始状态 ψ^0 以及所有终止时刻 $b > a$，均有不等式

$$\mathcal{V}(N,\, a,\, b,\, \psi^0) \leq \mathcal{C}_0\, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \|\psi^0 - \psi^{(\sigma)}\|. \tag{10}$$

注 1. (7) 中的廉价控制条件和耗散性不等式意味着 $\mathcal{Q}(N,\, a,\, b,\, \psi^0)$ 具有积分型转向点性质，这意味着对于相应的最优状态/控制 (ψ, u) 对，我们有

$$\int_a^b \left(\|\psi(t)-\psi^{(\sigma)}\|_N + \|u(t)-u^{(\sigma)}\|_N\right)^2\, dt \leq \mathcal{C}_0 \sum_{k=1}^{N} \|\psi^0 - \psi^{(\sigma)}\|. \tag{11}$$

由于右端与 $b-a$无关，该不等式意味着，动态最优状态和控制与静态最优状态和控制之间的距离相对于时间范围一致有界。特别是，这意味着当时间范围足够大时，在时间区间的大部分区间内，这一距离必然很小。

为了证明 (10)，我们考虑一种稳定化反馈律，它使 $f_N(\psi(t)\ \ u(t))$指数衰减。设给定一个反馈参数 $\beta > 0$ 。我们定义控制

$$u(t, \psi_k(t)) = \beta \left(\psi^{(\sigma)} - \psi_k(t) \right) - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} P(\psi_l(t) - \psi_k(t)). \tag{12}$$

那么，对于初始状态为 ψ_k^0、时刻为 a 且满足微分方程的初值问题，其解

$$\psi_k'(t) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} P(\psi_l(t) - \psi_k(t)) + u(t, \psi_k(t))$$

满足

$$\psi_k'(t) = \beta \left(\psi^{(\sigma)} - \psi_k(t) \right).$$

引理 5.1. 考虑关于 L 的有界水平集的附加局部假设:

$$L(\psi) \leq C_L \, \| \psi - \psi^{(\sigma)} \|, \tag{13}$$

并令

$$\mathcal{L}_N(t) = \frac{1}{N} \| \psi_k(t) - \psi^{(\sigma)} \|^2.$$

那么， $\mathcal{L}_N$ 随时间以指数速度衰减。因此，我们得到不等式，其中 (10)
$\mathcal{C}_0$ 如下文（15）中所定义。

证明. 我们有

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{L}_N(t) &= \frac{2}{N} \langle \psi_k(t) - \psi^{(\sigma)},\ \psi_k'(t) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= \frac{2}{N} \langle \psi_k(t) - \psi^{(\sigma)},\ \beta \left(\psi^{(\sigma)} - \psi_k(t) \right) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= -\beta \, \frac{2}{N} \| \psi_k(t) - \psi^{(\sigma)} \|^2 \\ &= -2 \, \beta \, \mathcal{L}_N(t). \end{aligned}$$

因此，我们有 $\mathcal{L}_N(t) = \mathcal{L}_N(a)\ e^{-2\beta t}$。此外，我们甚至有

$$\| \psi_k(t) - \psi^{(\sigma)} \| = \| \psi_k(a) - \psi^{(\sigma)} \| \, e^{-\beta t}. \tag{14}$$

我们有以下不等式

$$\|u_k(t)\| \le \beta \left\|\psi^{(\sigma)} - \psi_k(t)\right\| + \frac{C_P}{N}\sum_{l=1}^{N}\Big(\|\psi_k(t) - \psi^{(\sigma)}\| + \|\psi_l(t) - \psi^{(\sigma)}\|\Big)$$
$$= (\beta + C_P)\left\|\psi^{(\sigma)} - \psi_k(t)\right\| + \frac{C_P}{N}\sum_{l=1}^{N}\|\psi_l(t) - \psi^{(\sigma)}\|,$$

其中我们用到了第 3 节中陈述的性质（P）。因此我们有

$$\|u_k(t)\| \le e^{-\beta t}\left((\beta + C_P)\|\psi_k(a) - \psi^{(\sigma)}\| + \frac{C_P}{N}\sum_{l=1}^{N}\|\psi_l(a) - \psi^{(\sigma)}\|\right).$$

根据第 3 节中的性质（Ψ），我们知道 $\Psi(u) \le C_\Psi\|u\|$，因此可以写成

$$\Psi(u_k(t)) \le e^{-\beta t}\, C_\Psi\left((\beta + C_P)\|\psi_k(a) - \psi^{(\sigma)}\| + \frac{C_P}{N}\sum_{l=1}^{N}\|\psi_l(a) - \psi^{(\sigma)}\|\right).$$

在等式两边加上项 $L(\psi_k(t))$，并利用（13）和（14），可得

$$L(\psi_k(t)) + \Psi(u_k(t)) \le e^{-\beta t}\, C_L\,\|\psi_k(a) - \psi^{(\sigma)}\| +$$
$$+ e^{-\beta t}\, C_\Psi\left((\beta + C_P)\|\psi_k(a) - \psi^{(\sigma)}\| + \frac{C_P}{N}\sum_{l=1}^{N}\|\psi_l(a) - \psi^{(\sigma)}\|\right).$$

由此得到

$$f_N(\psi(t),\, u(t)) \le \Big(C_L + \beta C_\Psi + 2C_P C_\Psi\Big)e^{-\beta t}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\|\psi_k(a) - \psi^{(\sigma)}\|.$$

因此， $f_N(\psi(t)\ \ u(t))$ 以速率 β 指数速度衰减。对于最优值，这意味着

$$\mathcal{V}(N,\, a,\, b,\, \psi^0) \le \Big(C_L + \beta C_\Psi + 2C_P C_\Psi\Big)\frac{1}{N\beta}\sum_{k=1}^{N}\|\psi_k(a) - \psi^{(\sigma)}\|.$$

因此，(10) 可由下式推出：

$$\mathcal{C}_0 = \frac{1}{\beta}\Big(C_L + \beta C_\Psi + 2C_P C_\Psi\Big). \tag{15}$$

□

5.2 平均场极限下的廉价控制条件

此外，对于廉价控制条件，我们可以用测度来计算极限不等式。给定 $\mathcal{C}_0 > 0$，对于所有初始时刻 $a \geq 0$、终止时刻$b > a$ 和初始状态 $\mu(a, x) = \mu^0(x) \in P_1(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\mathbf{V}(a,\, b,\, \mu^0) \leq \mathcal{C}_0 \int_{\mathbb{R}^d} \|x - \psi^{(\sigma)}\|\, d\mu^0(x). \tag{16}$$

回顾一下，V 是平均场优化问题的最优值。为证明平均场廉价控制不等式，我们沿用微观情形中的相同思路，即考虑一种稳定化反馈律，使平均场运行成本呈指数衰减。结合 (1) 和 (12)，并令 $N \to \infty$，我们有

$$\partial_t \mu(t,x) + \partial_x \Big(\beta \left(\psi^{(\sigma)} - x \right) \mu(t,x) \Big) = 0.$$

引理 5.2. 考虑关于 L 有界水平集的附加局部假设（见式 (13)），则廉价控制条件对平均场极限问题同样成立，即 (16)，其中 $\mathcal{C}_0$ 与微观情形中的常数 (15) 相同。

证明. 考虑 (12) 的平均场表述，我们得到

$$u(t,x)\mu(t,x) = \beta \left(\psi^{(\sigma)} - x \right) \mu(t,x) - \mathcal{P}[\mu](t,x)\mu(t,x).$$

由第 3 节中的性质 (P)，可得

$$\begin{aligned} \|u(t,x)\|\mu(t,x) &\leq \beta\, \|\psi^{(\sigma)} - x\|\, \mu(t,x) + C_P\, \mu(t,x) \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\|y - \psi^{(\sigma)}\| + \|x - \psi^{(\sigma)}\| \Big)\, d\mu(t,\, y) \\ &\leq (\beta + C_P)\, \|\psi^{(\sigma)} - x\|\, \mu(t,x) + C_P\, \mu(t,x) \int_{\mathbb{R}^d} \|y - \psi^{(\sigma)}\|\, d\mu(t,\, y). \end{aligned}$$

我们知道 $\Psi(u) \leq C_\Psi \|u\|$（性质 (Ψ)，第 3 节），因此有

$$\begin{aligned} &\Psi(u(t,x))\mu(t,x) \\ &\leq C_\Psi(\beta + C_P)\, \|\psi^{(\sigma)} - x\|\, \mu(t,x) + C_\Psi C_P\, \mu(t,x) \int_{\mathbb{R}^d} \|y - \psi^{(\sigma)}\|\, d\mu(t,\, y). \end{aligned}$$

如引理 5.1 的证明中所述，我们可以在两边加上 $L(\psi_k(t))$，并对 in$d\mu(t,x)$ 进行积分。然后利用 (13) 和 (14)，可得式 (2) 中定义的函数 f 满足

$$f(\mu(t,x), u(t,x)) \leq \Big(C_L + \beta C_\Psi + 2 C_P C_\Psi \Big) e^{-\beta\, t} \int_{\mathbb{R}^d} \|x - \psi^{(\sigma)}\|\, d\mu(a,x).$$

对于最优值，我们得到

$$\mathbf{V}(a,\, b,\, \mu^0) \le \mathcal{C}_0 \int_{\mathbb{R}^d} \|x - \psi^{(\sigma)}\|\, d\mu(a,x).$$

□

6 具有内部衰减的调节器性质

本节将探讨我们讨论的最优控制问题是否满足 [29] 中所述的具有内部衰减的调节器性质。我们先研究 N 粒子问题，然后讨论平均场极限问题。

6.1 微观问题的转向点不等式

本节介绍最优控制问题 $\mathcal{Q}(N,\, a,\, b,\, \psi^0)$ 的一种调节器性质，该性质由耗散性不等式 (7) 和廉价控制条件 (10) 推出。顾名思义，这一性质关注这样的情形：当 b 较大时，最优动态解与最优静态解之间距离较小的区域位于时间区间 $[a,b]$ 的末段，也就是说，该区域是形如 $[b-(1-\lambda)(b-a)\ b]$ 的区间，其中 $\lambda \in (0,1)$。

我们将时刻 t、初始状态为 $\psi(a) = \psi^0 = \hat{}\psi(a,\, b,\, \psi^0)(a)$ 时的最优状态和最优控制分别定义为 $\hat{}\,\psi(a,\, b,\, \psi^0)(t)$ 和 $\hat{}u(a,\, b,\, \psi^0)(t)$，其中该时刻位于区间 $[a,b]$ 内。给定 $\lambda \in (0,\, 1)$，对于 $b > 0$，考虑如下数值

$$\mathcal{A}_*(b) := \frac{1}{N} \int\limits_{a+\lambda(b-a)}^{b} \left(\|\hat{\psi}(a,b,\,\psi^0)(t) - \psi^{(\sigma)}\|_N + \|\hat{u}(a,b,\,\psi^0)(t) - u^{(\sigma)}\|_N \right)^2 dt.$$

下面的定理指出，具有 N 个主体的最优控制问题具有带内部衰减的转向点性质：

定理 6.1。优化问题 $\mathcal{Q}(N,\, a,\, b,\, \psi^0)$ 具有带内部衰减的转向点性质，即

$$\mathcal{A}_*(b) \le \frac{\mathcal{C}_0^2}{\lambda\,(b-a)} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \|\psi^0 - \psi^{(\sigma)}\|.$$

其中 $\mathcal{C}_0$ 与式 (15) 中相同。

证明。由式 (11) 可得

$$\frac{1}{N}\int_a^b \left(\|\hat{\psi}(a,b,\,\psi^0)(t)-\psi^{(\sigma)}\|_N+\|\hat{u}(a,b,\,\psi^0)(t)-u^{(\sigma)}\|_N\right)^2\,dt$$

$$\leq \frac{\mathcal{C}_0}{N}\sum_{k=1}^{N}\|\psi^0-\psi^{(\sigma)}\|.$$

因此，存在 $t_0\in[a,\,a+\lambda(b-a)]$ 使得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\left(\|\hat{\psi}(a,b,\,\psi^0)(t_0)-\psi^{(\sigma)}\|_N+\|\hat{u}(a,b,\,\psi^0)(t_0)-u^{(\sigma)}\|_N\right)^2\\&\quad\leq \frac{1}{\lambda(b-a)}\frac{\mathcal{C}_0}{N}\sum_{k=1}^{N}\|\psi^0-\psi^{(\sigma)}\|.\end{aligned}\tag{17}$$

廉价控制假设意味着，对于以初始状态$\hat{}\ \psi^0=\hat{}\psi(a,b,\,\psi^0)(t_0)$在 t_0 开始的优化问题$\mathcal{Q}(N,\,t_0,\,b,\,\hat{}\psi^0)$，我们有

$$\mathcal{V}(N,\,t_0,\,b,\,\hat{\psi}^0)\leq \mathcal{C}_0\,\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\|\hat{\psi}^0(a,b,\,\psi^0)(t_0)-\psi^{(\sigma)}\|.\tag{18}$$

结合(17)，这意味着

$$\mathcal{V}(N,\,t_0,\,b,\,\hat{\psi}^0)\leq \frac{\mathcal{C}_0^2}{\lambda(b-a)}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\|\psi^0-\psi^{(\sigma)}\|.\tag{19}$$

由(7)可得

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_*(b)&\leq \frac{1}{N}\int_{t_0}^{b}\left(\|\hat{\psi}(a,b,\,\psi^0)(t)-\psi^{(\sigma)}\|_N+\|\hat{u}(a,b,\,\psi^0)(t)-u^{(\sigma)}\|_N\right)^2\,dt\\&\leq \mathcal{V}(N,\,t_0,\,b,\,\hat{\psi}^0)\\&\leq \frac{\mathcal{C}_0^2}{\lambda(b-a)}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\|\psi^0-\psi^{(\sigma)}\|.\end{aligned}$$

因此，我们证明了该定理。 □

我们已经证明，在区间 $[a+\lambda(b-a)\ \ b]$ 上，这一时间区间部分对目标泛函的贡献以$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda\,b-a\,()}\right)$衰减。

6.1.1 归纳细化

现在考虑以下陈述

定理 6.2. 设给定 $\alpha \in (0,1)$。优化问题 $\mathcal{Q}(N,\, a,\, b,\, \psi^0)$ 具有转向点性质，并满足内部衰减，其含义是

$$\frac{1}{N} \int\limits_{a+(1-\alpha^2)(b-a)}^{b} \left(\|\hat{\psi}(a,b,\,\psi^0)(t) - \psi^{(\sigma)}\|_N + \|\hat{u}(a,b,\,\psi^0)(t) - u^{(\sigma)}\|_N \right)^2 dt$$

$$\leq \frac{\mathcal{C}_0^3}{\alpha\,(1-\alpha)^2 (b-a)^2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \|\psi^0 - \psi^{(\sigma)}\|$$

其中 $\mathcal{C}_0$ 与式 (15) 中的相同。

证明。我们已经证明，对于区间

$$[b - \alpha(b-a),\, b] = [a + (1-\alpha)(b-a),\, b]$$

静态解与动力学解之间的距离以 $\mathcal{O}\left({}_{1-\alpha}{}^{1}\ ()\ \ (b-a) \right)$ 的阶衰减。

现在假设 $t_0 \in [a,\, a + (1-\alpha)(b-a)]$ 已按照上一节所述选取，使得我们有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \left(\|\hat{\psi}(a,b,\,\psi^0)(t_0) - \psi^{(\sigma)}\|_N + \|\hat{u}(a,b,\,\psi^0)(t_0) - u^{(\sigma)}\|_N \right)^2 \\ &\quad \leq \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)} \frac{\mathcal{C}_0}{N} \sum_{k=1}^{N} \|\psi^0 - \psi^{(\sigma)}\|. \end{aligned} \tag{20}$$

然后，与上一节一样，利用耗散性不等式 (7) 和廉价控制条件 (10)，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \int\limits_{t_0}^{b} \left(\|\hat{\psi}(a,b,\,\psi^0)(t) - \psi^{(\sigma)}\|_N + \|\hat{u}(a,b,\,\psi^0)(t) - u^{(\sigma)}\|_N \right)^2 dt \\ &\quad \leq \mathcal{V}(N,\, t_0,\, b,\, \hat{\psi}^0) \\ &\quad \leq \frac{\mathcal{C}_0^2}{(1-\alpha)(b-a)} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \|\psi^0 - \psi^{(\sigma)}\|. \end{aligned}$$

类似于（17），由（7）可知存在

$$t_1 \in [a + (1-\alpha)(b-a),\, a + (1-\alpha^2)(b-a)] = [b - \alpha(b-a),\, b - \alpha^2(b-a)]$$

使得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\left(\|\hat{\psi}(a,b,\,\psi^0)(t_1)-\psi^{(\sigma)}\|_N+\|\hat{u}(a,b,\,\psi^0)(t_1)-u^{(\sigma)}\|_N\right)^2\\
&\quad\le\frac{1}{\alpha(1-\alpha)(b-a)}\mathcal{V}(N,\,t_0,\,b,\,\hat{\psi}^0)\\
&\quad\le\frac{1}{\alpha(1-\alpha)(b-a)}\frac{\mathcal{C}_0^2}{(1-\alpha)(b-a)}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\|\psi^0-\psi^{(\sigma)}\|..
\end{aligned}\tag{21}$$

廉价控制假设中的不等式 (10) 意味着，对于从 t_1 开始、初始状态为 $\hat{\psi}^1=\hat{\psi}(a,b,\,\psi^0)(t_1)$ 的优化问题 $\mathcal{Q}(N,\,t_1,\,b,\,\hat{\psi}^1)$，我们有

$$\mathcal{V}(N,\,t_1,\,b,\,\hat{\psi}^1)\le\mathcal{C}_0\,\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\|\hat{\psi}^1(a,b,\,\psi^0)(t_1)-\psi^{(\sigma)}\|.\tag{22}$$

结合 (21)，可得

$$\mathcal{V}(N,\,t_1,\,b,\,\hat{\psi}^1)\le\frac{1}{\alpha(1-\alpha)(b-a)}\frac{\mathcal{C}_0^3}{(1-\alpha)(b-a)}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\|\psi^0-\psi^{(\sigma)}\|.\tag{23}$$

由耗散性不等式 (7)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\int_{a+(1-\alpha^2)(b-a)}^{b}\left(\|\hat{\psi}(a,b,\,\psi^0)(t)-\psi^{(\sigma)}\|_N+\|\hat{u}(a,b,\,\psi^0)(t)-u^{(\sigma)}\|_N\right)^2dt\\
&\quad\le\frac{1}{N}\int_{t_1}^{b}\left(\|\hat{\psi}(a,b,\,\psi^0)(t)-\psi^{(\sigma)}\|_N+\|\hat{u}(a,b,\,\psi^0)(t)-u^{(\sigma)}\|_N\right)^2ds\\
&\quad\le\mathcal{V}(N,\,t_1,\,b,\,\hat{\psi}^1)\\
&\quad\le\frac{1}{\alpha(1-\alpha)^2(b-a)^2}\mathcal{C}_0^3\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\|\psi^0-\psi^{(\sigma)}\|.
\end{aligned}$$

证明至此结束。 □

因此，在 $[a+(1-\alpha^2)(b-a)\;\;b]$，这段时间区间对目标泛函的贡献以 $\mathcal{O}\left(\alpha\;1-\alpha\;\frac{1}{2}()(b-a)^2\right)$ 的速度衰减。现在，我们可以通过归纳得到 $\mathcal{O}(1/(b-a)^n)$ 阶的衰减，对于

$n \in \{1, 2, 3, ...\}$，相应常数为 $\mathcal{C}_n$，且随 n 增大。定理 6.2 也可以表述为一个积分的上界，其中积分区间的下界以比线性更慢的速度增长，即仅为 $\sqrt{b-a}$ 阶。对于 $b > 1$，定义

$$\mathcal{B}_*(b) = \frac{1}{N} \int_{a+2\sqrt{b-a}-1}^{b} \left(\|\hat{\psi}(a, b, \psi^0)(t) - \psi^{(\sigma)}\|_N + \|\hat{u}(a, b, y_0)(t) - u^{(\sigma)}\|_N \right)^2 dt.$$

于是我们得到以下结果。

定理 6.3. 对于 $b > 1$ 优化问题 $\mathcal{Q}(N, a, b, \psi^0)$，其具有转向点性质，并在内部意义下衰减，即

$$\mathcal{B}_*(b) \leq \frac{1}{\sqrt{b-a}(\sqrt{b-a}-1)} \mathcal{C}_0^3 \frac{1}{N} \|\psi^0 - \psi^{(\sigma)}\|_N$$

其中 $\mathcal{C}_0$ 与式 (15) 中相同。

证明. 令 $\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{b-a}} \in (0, 1)$。于是 $(1-\alpha)^2 = \frac{1}{b-a}$。因此我们有

$$\alpha (1-\alpha)^2 (b-a)^2 = \sqrt{b-a}(\sqrt{b-a}-1).$$

由于 $1 - \alpha^2 = \frac{2\sqrt{b-a}-1}{b-a}$，结论由定理 6.2 得出。 □

注 2. 与 *[29]* 类似，我们可以通过归纳法进一步改进此界。

6.2 平均场极限中的转向点不等式

本节陈述并证明关于测度的转向点性质定理。为此，我们使用严格耗散性（9）和廉价控制（16）条件的平均场版本。

定理 6.4. 给定 $\lambda \in (0, 1)$，以及满足 $b > 0$ 的区间 $[a, b]$。考虑如下量

$$\boldsymbol{A}_*(b) = \int_{a+\lambda(b-a)}^{b} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\|x - \psi^{(\sigma)}\|^2 + \|\hat{u}_{(a,b,\mu^0)}(t, x) - u^{(\sigma)}\|^2 \right) d\hat{\mu}_{(a,b,\mu^0)}(t, x)\, dt,$$

其中，我们将时间 t、初始条件为 $\mu(a, x) = \mu^0(x) = \hat{\mu}_{(a,b,\mu^0)}(a, x)$ 时的密度和控制分别定义为 $\hat{\mu}_{(a,b,\mu^0)}(t, x)$ 和 $\hat{u}_{(a,b,\mu^0)}(t, x)$。那么，优化问题 $\mathrm{Q}(a, b, \mu^0)$ 具有转向点性质，并且其内部衰减满足

$$\boldsymbol{A}_*(b) \leq \frac{\mathcal{C}_0^2}{\lambda(b-a)} \int_{\mathbb{R}^d} \|x - \psi^{(\sigma)}\|\, d\mu(a, x).$$

其中，$\mathcal{C}_0$ 与（15）中相同。

证明。由均场严格耗散性（9）和廉价控制（16）条件可知，最优密度和控制满足

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_{\mathbb{R}^d} \left(\|x-\psi^{(\sigma)}\|^2 + \|u(t,x)-u^{(\sigma)}\|^2 \right) d\mu(t,x)\,dt \\ \leq \mathcal{C}_0 \int_{\mathbb{R}^d} \|x-\psi^{(\sigma)}\|\, d\mu(a,x).\end{aligned} \tag{24}$$

此外，我们可以写为

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_{\mathbb{R}^d} \left(\|x-\psi^{(\sigma)}\|^2 + \|\hat{u}_{(a,b,\mu^0)}(t,x)-u^{(\sigma)}\|^2 \right) d\hat{\mu}_{(a,b,\mu^0)}(t,x)\,dt \\ \leq \mathcal{C}_0 \int_{\mathbb{R}^d} \|x-\psi^{(\sigma)}\|\, d\mu(a,x).\end{aligned}$$

因此，存在 $t_0 \in [a,\, a+\lambda(b-a)]$，使得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \left(\|x-\psi^{(\sigma)}\|^2 + \|\hat{u}_{(a,b,\mu^0)}(t_0,x)-u^{(\sigma)}\|^2 \right) d\hat{\mu}_{(a,b,\mu^0)}(t_0,x)\,dt \\ \leq \frac{\mathcal{C}_0}{\lambda(b-a)} \int_{\mathbb{R}^d} \|x-\psi^{(\sigma)}\|\, d\mu(a,x).\end{aligned} \tag{25}$$

根据廉价控制假设 (16)，从 t_0 出发、以初始密度 $\hat{\mu}_{(a,b,\,\mu^0)}(t_0,x)$ 为初始条件的优化问题 $\mathrm{Q}(t_0,\, b,\, \hat{\mu}^0)$ 满足

$$\mathbf{V}(t_0,\, b,\, \hat{\mu}^0) \leq \mathcal{C}_0 \int_{\mathbb{R}^d} \|x-\psi^{(\sigma)}\|\, d\hat{\mu}_{(a,b,\,\mu^0)}(t_0,x).$$

结合 (25)，我们得到

$$\mathbf{V}(t_0,\, b,\, \hat{\mu}^0) \leq \frac{\mathcal{C}_0^2}{\lambda(b-a)} \int_{\mathbb{R}^d} \|x-\psi^{(\sigma)}\|\, d\mu(a,x).$$

由耗散性不等式 (9)，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_*(b) &\leq \int_{t_0}^b \int_{\mathbb{R}^d} \left(\|x-\psi^{(\sigma)}\|^2 + \|\hat{u}_{(a,b,\mu^0)}(t,x)-u^{(\sigma)}\|^2 \right) d\hat{\mu}_{(a,b,\mu^0)}(t,x)\,dt \\ &\leq \mathbf{V}(t_0,\, b,\, \hat{\mu}^0) \\ &\leq \frac{\mathcal{C}_0^2}{\lambda(b-a)} \int_{\mathbb{R}^d} \|x-\psi^{(\sigma)}\|\, d\mu(a,x),\end{aligned}$$

这正是定理中陈述的不等式。 □

备注 3. 定理 6.4 中关于最优动态解与最优静态解之间距离的界，可以采用与微观情形相同的步骤，通过归纳进一步收紧。

7 结论

我们为满足严格耗散不等式的微观和介观最优控制问题得出了调节路径定理，并利用这些性质证明了最优控制问题满足廉价控制结果，进而具有调节路径性质。在给出保证平均场极限中解存在的适当假设后，我们证明了调节路径性质在有限个相互作用粒子层面以及平均场极限下均成立。调节路径性质无需附加假设即可成立。未来的研究方向可能包括数值模拟，以及将结果推广到例如由二阶动力学支配的微观模型情形。

致谢

作者感谢德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过项目 320021702/GRK2326、333849990/IRTG-2379、442047500/SFB1481 的 B04、B05 和 B06 项目、HE5386/18- 1、19-2、22-1、23-1、25-1、ERS SFDdM035，以及德国卓越战略 EXC-2023“生产互联网”（项目编号 390621612）和联邦政府与各州的卓越战略提供的资金支持。作者也感谢 EU DATAHYKING 项目提供的支持。本研究还获得德国研究联合会 TRR 154 项目的资助。该项目以天然气网络为例开展数学建模、仿真与优化，项目编号为 C03 和 C05，项目注册号为 239904186。

参考文献

[1] G. Albi, N. Bellomo, L. Fermo, S.-Y. Ha, J. Kim, L. Pareschi, D. Poyato, and J. Soler, 车辆交通、人群与群集：从动力学理论和多尺度方法到应用与研究展望，数学模型与应用科学方法，29（2019），第1901–2005页。[2] G. Albi, M. Bongini, E. Cristiani, and D. Kalise, 自组织主体离开未知环境的隐形控制，SIAM应用数学期刊，76（2016），第1683–1710页。[3] G. Albi, M. Herty, D. Kalise, and C. Segala, 平均场集体动力学的矩驱动预测控制，SIAM J. Control Optim.，60（2022），第814–841页。

[4] G. Albi, M. Herty, and L. Pareschi, 最优控制问题的动力学描述及其在意见共识中的应用，Commun. Math. Sci.，13（2015），第1407–1429页。[5] A. Bayen, J. Friedrich, A. Keimer, L. Pflug, and T. Veer-avalli, 利用非局部平衡律对含移动障碍物的多车道交通建模，SIAM 应用动力系统杂志，21（2022），第1495–1538页。
[6] N. Bellomo and J. Soler, 将群集动力学视为复杂系统的数学理论，数学模型与应用科学方法，22（2012），第1140006页，共29页。
[7] A. Borzi and L. Grüne, 运用模型预测控制求解平均场控制问题，IFAC-PapersOnLine，53（2020），第4973–4978页。第21届IFAC世界大会。[8] T. Breiten and L. Pfeiffer, 关于线性二次最优控制问题的调节器性质与滚动时域方法，SIAM J. Control Optim.，58（2020），第1077–1102页。[9] P. Cardaliaguet, 平均场博弈札记，技术报告，2010年。[10] Y.-P. Choi, D. Kalise, J. Peszek, and A. A. Peters, 具有分布式队形控制的无碰撞奇异Cucker-Smale模型，SIAM J. Appl. Dyn. Syst.，18（2019），第1954–1981页。
[11] M. Cirant and A. Porretta, 轻度非单调平均场博弈中的长期行为与驿站解，2021年。[12] G. M. Coclite, N. De Nitti, A. Keimer, and L. Pflug, 非局部守恒律的消失黏性奇异极限，Nonlinear Analysis，211（2021），第112370页。[13] S. Cordier, L. Pareschi, and G. Toscani, 关于简单市场经济的动力学模型，J. Stat. Phys.，120（2005），第253–277页。[14] P. Degond, J.-G. Liu, S. Motsch, and V. Panferov, 自组织动力学的流体动力学模型：推导与存在性理论，Methods Appl. Anal.，20（2013），第89–114页。[15] P. Degond, J.-G. Liu, and C. Ringhofer, 局部纳什均衡驱动的平均场博弈大尺度动力学，Journal of Nonlinear Science，24（2014），第93–115页。

[16] P. Degond and S. Motsch，具有方向相互作用的自驱动粒子的连续介质极限，《数学模型与应用科学方法》，18（2008），第1193–1215页。[17] N. P. Duteil，时变权重下集体动力学的平均场极限，《网络与异质介质》，17（2022），第129–161页。
[18] G. Estrada-Rodriguez and H. Gimperlein，采用 L ´évy 策略的相互作用粒子：群体机器人系统输运方程的极限，SIAM应用数学期刊，80（2020），第476–498页。[19] T. Faulwasser， K. Flasskamp， S. Ober-Blöbaum， M. Schaller，and K. Worthmann，流形调节器、配平与对称性，《控制、信号与系统数学》（2022）。
[20] T. Faulwasser and L. Grüne，《数值分析手册》中的最优控制调节器性质，E. Trelat 和 E. Zuazua 编，2022。[21] M. Fornasier， J. Haskovec， and G. Toscani，通过波兹纳-玻尔兹曼方程描述集群行为的流体动力学，《物理学D辑》，240（2011），第21–31页。
[22] M. Fornasier， S. Lisini， C. Orrieri， and G. Savaré，作为有限个体控制伽马极限的平均场最优控制，《欧洲应用数学杂志》，30（2019），第1153–1186页。[23] M. Fornasier， B. Piccoli， and F. Rossi，平均场稀疏最优控制，伦敦皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学，372（2014），第20130400页，共21页。
[24] M. Fornasier and F. Solombrino，平均场最优控制，ESAIM控制、优化与变分，20（2014），第1123–1152页。
[25] M. Fornasier and F. Solombrino，平均场最优控制，ESAIM：控制、优化与变分，20（2014），第1123–1152页。[26] J. Garnier， G. Papanicolaou， and T.-W. Yang，具有随机效应的共识收敛，《越南数学杂志》，45（2017），第51–75页。
[27] B. Geshkovski and E. Zuazua，偏微分方程、残差网络及其他领域最优控制中的调节器性质，《数值学报》，31（2022），第135–263页。

[28] L. Grüne, M. Schaller, and A. Schiela，抽象非线性灵敏度与转向点分析及其在半线性抛物型偏微分方程中的应用，ESAIM，控制、优化与变分，27（2021），第28页，编号56。[29] M. Gugat，关于最优控制问题中具有内部衰减的转向点性质，《控制、信号与系统数学》，33（2021），第237–258页。[30] S.-Y. Ha and J.-G. Liu，库克-斯梅尔集群动力学及平均场极限的一个简单证明，《数学科学通讯》，7（2009），第297–325页。[31] S.-Y. Ha and E. Tadmor，从粒子描述到集群行为的动力学与流体力学描述，《动力学相关模型》，1（2008），第415–435页。
[32] M. Herty and L. Pareschi，交通流模型的福克-普朗克渐近分析，《动力学相关模型》，3（2010），第165–179页。
[33] M. Herty and C. Ringhofer，交互智能体系统一致的平均场最优性条件，《数学科学通讯》，17（2019），第1095–1108页。
[34] B. Jacob and C. Totzeck，相互作用粒子系统的端口哈密顿建模，发表于《第25届网络与系统数学理论国际研讨会》，2022。
[35] J.-M. Lasry and P.-L. Lions，平均场博弈，《日本数学杂志》，2（2007），第229–260页。[36] P. A. Samuelson，涉及消费与黄金法则的悬链线转向点定理，《美国经济评论》，55（1965），第486–496页。
[37] A. Tosin and M. Zanella，配备驾驶辅助车辆的交通模型的动力学控制流体力学，《多尺度建模与仿真》，17（2019），第716–749页。
[38] E. Trélat and C. Zhang，无限维最优控制系统的积分型与测度转向点性质，《控制、信号与系统数学》，30（2018），第34页，编号3。
[39] E. Trélat and E. Zuazua，有限维非线性最优控制中的转向点性质，《微分方程杂志》，258（2015），第81–114页。

[40] A. J. Zaslavski, 《无限维最优控制中的图尔派克条件》, Springer 优化与应用第148卷, 查姆: 施普林格, 2019。

利益冲突: 作者声明不存在利益冲突。