arXiv:2303.02008v1 [math.AG] 3 Mar 2023

平面四次曲线实双切线符号计数的界

MARIO KUMMER 和 STEPHEN MCKEAN

摘要。利用富化枚举几何的方法，Larson 和 Vogt 给出了实光滑平面四次曲线的实双切线数量的有符号计数。这个有符号计数取决于特定直线的选择。Larson 和 Vogt 证明，该有符号计数的下界为 0，并猜想其上界为 8。我们利用实代数几何、平面几何以及凸集的一些性质证明了这一猜想。

1. 引言

在本文中，我们证明了 Larson 和 Vogt [LV21] 引入的实光滑平面四次曲线实双切线有符号计数的上界。利用 $\mathbb{A}^1$-枚举几何（也称为二次 或富化 枚举几何）的工具，Larson 和 Vogt 定义了实光滑平面四次曲线 Q的一条双切线B 相对于一条辅助直线 $L \subset \mathbb{P}^2$的符号 Q 型$_L(B)$。随后，他们定义了有符号计数

$$s_L(Q) := \sum_{B \text{ real bitangent}} \mathrm{QType}_L(B).$$

若 $L \cap Q(\mathbb{R}) = \varnothing$，则 $s_L(Q) = 4$ [LV21，定理 1]。一般而言， $s_L(Q)$ 是非负偶整数 [LV21，命题 4.3]。Larson 和 Vogt 给出了直线与四次曲线的例子，使得 $s_L(Q) = 0$,2,4,6 和 8。这引出了如下猜想：对任意选取的直线与四次曲线 [，都有 $s_L(Q) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ LV21，猜想 2]。利用热带几何的工具，Markwig、Payne 和 Shaw 给出了满足 $s_L(Q) \in \{0, 2, 4\}$ [的四次曲线的热带判据 MPS22，定理 5.2]。我们从实代数几何和平面几何中汇集了一些思路，以证明对于任意选取的平面四次曲线和辅助直线， $s_L(Q) \leq 8$。结合 Larson 和 Vogt 给出的下界与例子，可得 $s_L(Q) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$。

定理 1.1。设 $Q \subset \mathbb{P}^2$ 为一条实光滑平面四次曲线。对于任意容许直线 L，有符号计数 $s_L(Q)$ 至多为 *8*。特别地， $s_L(Q) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$。

致谢。MK 获得了德国研究联合会第 502861109 号资助的支持。SM 获得了美国国家科学基金会数学科学博士后研究奖（NSF MSPRF）资助（DMS-2202825）。

2020 数学学科分类。 主要分类：14H50。次要分类：14P99、14N10。

2. 关于平面几何与凸集的一些结果

本节汇集了一些关于平面几何和凸集的结果，我们将利用这些结果证明定理 1.1。

引理 2.1. 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为一个紧集，$L \subset \mathbb{R}^n$ 为一条直线。若 $|L \cap K| \geq 2$，则 $|L \cap \partial K| \geq 2$。

证明。我们将 L 与实直线 $\mathbb{R}$等同。于是，$L \cap K$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个至少含有两个元素的紧子集。特别地，它的最小值和最大值是 $L \cap K$边界上的两个不同点。因此，L 与 K 的边界至少相交于两点。□

推论 2.2. 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为一个紧集，$L \subset \mathbb{R}^n$ 为一条直线。若 $L \cap K^\circ \neq \varnothing$，则 $|L \cap \partial K| \geq 2$。

证明。条件 $L \cap K^\circ \neq \varnothing$ 意味着 $|L \cap K| = \infty$，因此我们可以应用前一个引理。□

推论 2.3. 设 $I \subset \mathbb{R}^2$ 是端点为 a 和 b 的线段。设 $C \subset \mathbb{R}^2$ 是端点为 a 和 b 的 *Jordan* 弧。假设 $|I \cap C|$ 是有限集。那么，任何与 I 相交的直线 $L \subset \mathbb{R}^2$ 也与 C相交。

证明。令 $\varphi\colon [s,t] \to \mathbb{R}^2$ 是一个单射连续映射，满足 $\varphi(t_0) = a$ 且 $\varphi(t_1) = b$，其像为 C。令 $s = t_0 < \cdots < t_m = t$，使得 $\varphi^{-1}(I \cap C) = \{t_0, \ldots, t_m\}$。选取 $0 \leq i < m$，使得 L 与端点分别为 $\varphi(t_i)$ 和$\varphi(t_{i+1})$ 的线段 I' 相交。将 I 替换为 I'，并将 C 替换为 $\varphi([t_i, t_{i+1}])$ 后，我们可以只考虑 $I \cap C$ 仅由 I 的端点组成的情形。这意味着 $I \cup C$ 是一条 Jordan 曲线。不失一般性，可假设 L 与 I 横截相交于恰好一点，且该点不在 C 上。这意味着 L 与 Jordan 曲线 $I \cup C$ 的内部（按 Jordan 曲线定理的含义）相交；我们将其紧闭包记为 K。根据推论 2.2 L 与 $\partial K = I \cup C$ 至少相交于两点。因此 $L \cap C \neq \varnothing$，因为 $|I \cap L| = 1$。□

引理 2.4. 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为紧凸集，$L \subset \mathbb{R}^n$ 为一条直线。若 $L \cap K^\circ \neq \varnothing$，则 $|L \cap \partial K| = 2$。

证明。根据假设，$L \cap K$ 是由 K 的两个不同边界点v 和 w 张成的线段，并且 $L \cap K^\circ$ 上存在某个 u。设 K中 u 的一个开邻域为 $u \in U \subset K$。接下来只需证明，$L \cap K$ 上除 v、w 之外的每个点 u' 都位于 K的内部。不失一般性，我们可以假设 u' 位于由 v和 u张成的线段上。因此，对某个 $0 \leq \mu < 1$，有 $u' = \mu v + (1-\mu)u$。集合

$$U' = \{\mu v + (1-\mu)x \mid x \in U\}$$

于是它是 K 中 u' 的一个开邻域。□

引理 2.5. 设 $Q \subset \mathbb{R}^2$ 是一个凸四边形。一条与 Q 相交的直线至少与其两条边相交。

证明。设 L 是一条与 Q 相交的直线。若 L 包含 Q 的一个顶点，则它会与包含该顶点的两条边相交。因此，假设 L 不包含 Q 的任何顶点。这意味着 L 与 Q 的内部相交，且与每条边至多相交于一点。根据引理 2.4，它与 Q 的边界（即所有边的并集）相交于两点。这就证明了所述结论。□

引理 2.6。设 $Q \subset \mathbb{R}^2$ 是一个凸四边形。设 L 是一条与 Q 的两条对角线都相交的直线。则 L 与 Q 的两条对边相交。

证明。先考虑 L 与 Q 的内部不相交的情形。此时， L 与 Q 的交集要么是单个顶点，要么是整条边。前一种情况下， L 只与 Q 的一条对角线相交；后一种情况下， L 与两条对边相交。

现在假设 L 与 Q的内部相交。根据引理 2.4，直线 L 与 Q 的边界恰好交于两个不同的点 P_1 和 P_2。首先假设 P_1 是 Q的一个顶点。那么 P_2 不能位于包含 P_1 的边 E 上，否则 L 就会与 Q的内部相交。因此， L 至少与 Q的三条边相交，尤其是与两条对边相交。

最后假设 P_1 和 P_2 都不是 Q的顶点。那么 P_1 和 P_2 分别位于两条不同的边 E_1 和 E_2上。为导出矛盾，假设 E_1 和 E_2 不是对边。那么 $E_1 \cup E_2$ 的凸包是一个三角形 T，其边为 E_1、 E_2 和 D，其中 D 是 Q的一条对角线。由于 L 不与 T的任何顶点相交，因此它与 T的内部相交。于是，根据引理 2.4，点 P_1 和 P_2 是 L 与 T 的边界的唯一交点。特别地，我们的直线 L 不与D相交。□

引理 2.7. 设 $Q \subset \mathbb{R}^2$ 是一个凸四边形。设 E， $E' \subset \partial Q$ 是 Q的一对对边。设 x 是 Q的两条对角线的交点。那么，位于某条经过 E 和 E' 的直线上的点集，等于 Q 与位于某条经过 E 和 x 的直线上的点集的并集（见图 *1*）。

证明。 由于 Q 是其四个顶点的凸包，因此它也是 E 和E'的凸包。由此，后一个点集包含于前一个点集；因此，只需证明：若点$y \in \mathbb{R}^2 \backslash Q$ 位于一条经过 E 和 E'的直线 L 上，则 y 位于一条经过 E 和 x的直线上。

令 L' 为经过 x 和 y 的直线。我们将证明 $L' \cap E$ 非空。根据假设，L' 经过 x，因此经过 Q 的两条对角线。于是，若 $L' \cap E = \varnothing$，则由引理 2.6 可知， L' 经过 Q 的另一对对边。因此， L 和 L' 分别与 Q 的互补对边相交，所以 L 和 L' 必须在 Q 内相交。但根据假设， $y \in L \cap L'$ 位于 Q 之外。因此，我们要么得到与该假设矛盾的结论，要么发现 $|L \cap L'| \geq 2$，这又构成一个矛盾。□

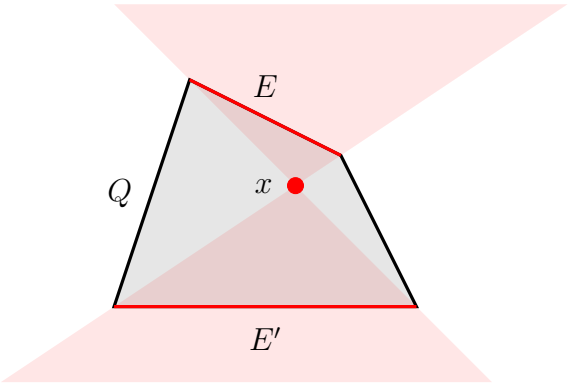

图 1. 穿过四边形对边的直线的支撑

3. 证明猜想

令 $Q \subset \mathbb{P}^2$ 为一条实光滑平面四次曲线。我们称实直线 $L \subset \mathbb{P}^2$ 为可容许的，如果它与每条实双切线 B 对应的 $Q \cap B$ 不相交，其中 B 是 Q 的实双切线。实双切线 B 的 Q 型 [LV21（定义 1.2] ）是对 B 进行计数时应采用的符号。

定义3.1。 设 $f \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$ 是一个齐次四次多项式，使得 $\mathbb{V}(f) = Q$。设 B 是 Q 的一条双切线，并记 $Q \cap B = 2Z$ 为 $Z = z_1 + z_2$ 的一个二次除子。设 L 是一条可容许实直线。记 ∂_L 为关于沿 L 消失的线性形式的导子。 B 关于 L 的Q 型 定义为

$$\mathrm{QType}_L(B) := \mathrm{sign}(\partial_L f(z_1) \cdot \partial_L f(z_2)) \in \{+1, -1\}.$$

根据 [LV21，公式 (6)]，实双切线只有在与 Q 仅交于实点时，才可能具有负 Q 型。在这种情况下，我们称该双切线为分裂的。从几何上说，若一条分裂双切线 B 所交的 $Q(\mathbb{R})$ 的所有连通分支都位于 $\mathbb{R}^2 \backslash B$ 的同一连通分支中，则其 Q 型为 $+1$；若它分隔了其所交的 $Q(\mathbb{R})$ 的连通分支，则其 Q 型为 -1 （见引理 3.6）。这里我们将 $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{P}^2 \setminus L)(\mathbb{R})$ 视为相同。

注3.2。 先验地，Q 型$_L(B)$取决于切出 Q的多项式 f 的选择，以及确定 ∂_L的线性形式 ℓ 的选择。然而，改变其中任一选择，都会使 $\partial_L f(z_i)$同时乘以相同的非零标量。这表明，$\mathrm{sign}(\partial_L f(z_1) \cdot \partial_L f(z_2))$是良定义的。

对于容许直线 $L \subset \mathbb{P}^2$，令

$$s_L(Q) := \sum_{B \text{ real bitangent}} \mathrm{QType}_L(B)$$

表示相对于 L的双切线有符号计数。

定义3.3. 设 $L \subset \mathbb{P}^2$为一条实直线， B为一条分裂双切线，且 $B \cap L \cap Q = \varnothing$。相对于 L， B的栅格 $g_L(B)$是 $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{P}^2 \backslash L)(\mathbb{R})$ 中 $B \cap Q$ 的凸包。若 Q 型$_L(B) = +1$，或 Q 型$_L(B) = -1$，则称 B的栅格分别为正 或负 。

下一个引理的陈述见 [LV21，第 15] 页。

引理3.4。设 B 是一条分裂双切线，L_1，L_2 是两条满足 $B \cap L_i \cap Q = \varnothing$（$i = 1, 2$）的实直线。则有

$$\mathrm{QType}_{L_2}(B) = \begin{cases} \mathrm{QType}_{L_1}(B) & \text{if } L_2 \cap g_{L_1}(B) = \varnothing \\ -\mathrm{QType}_{L_1}(B) & \text{if } L_2 \cap g_{L_1}(B) \neq \varnothing. \end{cases}$$

由此可以推出下述结论，即 [LV21，式（7）]。

引理3.5。设 L，$L' \subset \mathbb{P}^2$ 是两条容许直线。对于 $\epsilon \in \{\pm 1\}$，记 $\sigma(L, L', \epsilon)$为满足 Q 型 Q 型 $_L(B) = \epsilon$ 且与 L' 相交于 $g_L(B)$ 的分裂双切线数量。则

$$s_{L'}(Q) = s_L(Q) - 2 \cdot (\sigma(L, L', +1) - \sigma(L, L', -1)).$$

从现在起，固定一条与 Q（$\mathbb{R}$）不相交的容许直线 L_0。根据 [LV21 定理 1]，有 s_{L_0}（Q）$= 4$。因此，对于任意容许直线 L，由引理3.5可知 s_L（Q）为偶数。又由于根据 [LV21 命题4.3]，我们还有 s_L（Q）≥ 0，所以只需证明 s_L（Q）≤ 8。由引理3.5，这等价于证明

$$\sigma(L_0, L, -1) - \sigma(L_0, L, +1) \leq 2. \tag{3.1}$$

总体策略分两种情况。首先，如果我们的四次曲线至多有 8 条实双切线，那么定理 1.1 显然成立。其次，如果 Q 有超过 8 条实双切线，那么对于 $Q(\mathbb{R})$ 的每两个连通分支 Q_1、Q_2，我们将分别研究与 Q_1 和 Q_2 相交的分裂双切线。我们首先证明，连接 Q_1 和 Q_2 的正格和负栅格各恰有两个。随后证明，如果一条直线与这四个栅格中负栅格的相交数量多于正格，那么它必与 Q_1 和 Q_2 相交。由贝祖定理，这条直线不会与 $Q(\mathbb{R})$ 的其他任何连通分支相交。由此便得到所需的上界。

首先，我们将确定负栅格的分裂双切线刻画为：它们分隔 $Q(\mathbb{R})$ 的一对连通分支。

引理 3.6. 设 B 是一条分裂双切线，L 是一条满足 $L \cap B \cap Q = \varnothing$ 的实直线。令 V_1, V_2 为 $(\mathbb{P}^2 \setminus (L \cup B))(\mathbb{R})$ 的两个连通分支的闭包。那么 $Q(\mathbb{R})$ 的每个连通分支都包含于 V_1 或 V_2 中。Q 型$_L(B) = -1$ 当且仅当 B 与一个包含于 V_1 中的连通分支和一个包含于 V_2 中的连通分支相交。

证明。显然，如果 B 仅在一个点处与 Q 相交，则 Q 型$_L(B) = +1$。因此，我们可以假设 B 与 $Q(\mathbb{R})$ 在两个不同的点 z_1 和 z_2 处相交。设$P \in (\mathbb{P}^2 \setminus L)(\mathbb{R})$为任意一点，该点不包含在 $Q(\mathbb{R})$ 的任何椭圆内部（即，P 包含在 $(\mathbb{P}^2 \setminus Q)(\mathbb{R})$ 的不可定向连通分支中）。我们将$\mathbb{R}^2$与 $(\mathbb{P}^2 \setminus L)(\mathbb{R})$ 等同，并令 F 为 $\mathbb{R}^2$ 上定义 Q 的一个多项式。不失一般性，我们可以假设 $F(P) < 0$。于是，Q 在 z_i 处的法向量，即 F 在 z_1 处的梯度，指向包含 z_i 的分支 Q_i 的内部。因此，

z_1 和 z_2 处的法向量分别指向 $\mathbb{R}^2 \setminus B$ 的不同连通分支，当且仅当 V_1 和 V_2 各自包含分支 Q_1 和 Q_2 中的一个。□

推论 3.7. 设 L 是实光滑平面四次曲线 Q 的一条分裂双切线。若 L 只与 $Q(\mathbb{R})$ 的一个连通分支相交，则与 L 相关联的栅格为正。

证明。 根据引理 3.6，只有当分裂双切线与 $Q(\mathbb{R})$ 的两个不同连通分支相交时，其 Q 型才可能为负。□

因此，我们可以将注意力限制在与 $Q(\mathbb{R})$ 的两个不同连通分支相交的分裂双切线上。设 s 为 $Q(\mathbb{R})$ 的连通分支数；若 $Q(\mathbb{C}) \setminus Q(\mathbb{R})$ 连通，则令 $a = 1$，否则令 $a = 0$。根据 Harnack 定理，有 $0 \le s \le 4$。若 $s = 4$，则 $a = 0$；若 $s = 0$，则 $a = 1$。最后，若 s 为奇数，则由 GH81，命题 3.1] 可得 $a = 1$ [。实双切线的总数等于 $s > 0$ 时的 $4 \cdot (2^{s-1} - 1 + a)$，而在 $s = 0$ [时为 4（GH81，命题 5.1]）。特别地，这意味着若 $s < 3$，实双切线不超过 8 条。因此，我们可以进一步将注意力限制在 $s \ge 3$ 的情形。接下来的引理表明，任意一对不同的连通分支总有四条双切线与之相交。此外，这四条分裂双切线确定两个正栅格和两个负栅格。

引理3.8。 假设 $s \ge 3$。令 Q_1， Q_2 为$Q(\mathbb{R})$的两个不同连通分支。以下结论成立：

（*a*）恰有四条分裂双切线同时与 Q_1 和 Q_2相交。（*b*）相对于 L_0，与 Q_1 和 Q_2 相交的四条分裂双切线确定了两个正栅格 G_1^+， G_2^+和两个负栅格 G_1^-， G_2^-。（*c*）两个正栅格 G_1^+， G_2^+是 $Q_1 \cup Q_2$的凸包的边。（*d*）两个负栅格G_1^-，G_2^-相交。

证明。令 $Q_1, \ldots, Q_s$为 $Q(\mathbb{R})$的连通分支。首先我们断言，存在一条不与 $Q(\mathbb{R})$相交的直线 L_1，使得 Q_1 和 Q_2 分别包含在$(\mathbb{P}^2 \setminus (L_0 \cup L_1))(\mathbb{R})$的两个不同连通分支中。令 ω_0 为一个零点集是 L_0的线性形式。由于 Q是典范嵌入的，我们可以将 ω_0 视为 Q上的全纯微分，且它没有实零点。因此，它在 $Q(\mathbb{R})$上诱导一个定向Ω_0 。Kum19，推论2.2] 指出，在 $Q(\mathbb{R})$上与Ω_0 在 Q_1 上相一致的定向中，除至多一个外，每个定向都由 Q 上没有实零点的全纯微分诱导。由于 $s \ge 3$，在 $Q(\mathbb{R})$上至少有两个定向与Ω_0 在 Q_1 上相一致，但在 Q_2上不同于Ω_0 。因此，它们中至少有一个由没有实零点的全纯微分 ω_1 诱导。这意味着有理函数$\frac{\omega_0}{\omega_1}$在 Q_1 上为正，在 Q_2上为负。因此，Q_1 和 Q_2 分别包含在$(\mathbb{P}^2 \setminus (L_0 \cup L_1))(\mathbb{R})$的两个不同连通分支中，其中 L_1 是将 ω_1 视为 $\mathbb{P}^2$上的线性形式后，其零点集所定义的直线。

现在我们将 $Q(\mathbb{R})$视为 $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{P}^2 \setminus L_0)(\mathbb{R})$的子集。我们已经证明，分量 Q_1 和 Q_2 被 $\mathbb{R}^2$ 中的直线 L_1 严格分隔。因此我们可以应用

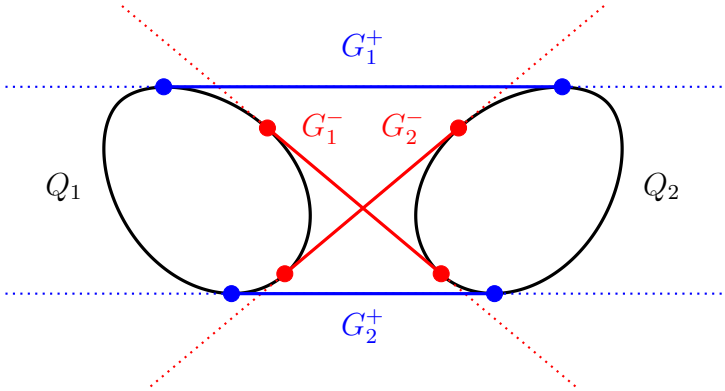

图2. 与两个分支相交的栅格

[Kum19，命题 3.2]到 Q_1 和 Q_2 的凸包上，该命题表明，恰有两个仿射线性函数（相差一个非零标量倍数），在 $Q_1 \cup Q_2$ 上非负，且在 Q_1 和 Q_2各自至少一点处为零。因此，恰有两条分裂双切线 B，其 Q 型为 QType(B) $= +1$，并且同时与 Q_1 和 Q_2相交。它们的栅格必定是 $Q_1 \cup Q_2$凸包的边。

为了证明 (a)、(b) 和 (c)，还需证明与 Q_1 和 Q_2 相交的实双切线总数为四。回想一下，半定向 是将定向模去全局反向后得到的等价类。因此，$Q(\mathbb{R})$上恰有 2^{s-1} 个半定向。首先考虑情形 $s = 3$。此时必有 $a = 1$ 和 [Kum23，定理 6.9] 指出，与 Q_1 和 Q_2 相交的实双切线数量，等于 $Q(\mathbb{R})$ 上的半定向数量。由于 $s = 3$，共有四个半定向，由此得证。现在考虑情形 $s = 4$。此时必有 $a = 0$和 [Kum23，定理 6.11] 指出，与 Q_1 和 Q_2相交的实双切线数量，等于 $Q(\mathbb{R})$上限制为 $Q_3 \cup Q_4$上的某个固定半定向的半定向数量。由于 $s = 4$，这样的半定向有四个，由此得证。

对于部分（d），令 α_i 为一个线性形式，其零点集为双切线 B_i，使得 $g_{L_0}(B_i) = G_i^-$ 对于 $i = 1$、2 成立。由于 Q 型 $_{L_0}(B_i) = -1$，由引理 3.6 可知，Q_1 和 Q_2 分别包含在 $(\mathbb{P}^2 \setminus (L_0 \cup B_i))(\mathbb{R})$ 的不同连通分支的闭包中。因此，如有必要，将 α_i 替换为 $-\alpha_i$ 后，我们可以假设 $\frac{\alpha_i}{\omega_0}$ 在 Q_1 上非负，在 Q_2上非正。因此，$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ 在 $Q_1 \cup Q_2$上非负。这表明 Q_1 和 Q_2 包含在 $(\mathbb{P}^2 \setminus (B_1 \cup B_2))(\mathbb{R})$ 的同一个连通分支的闭包中，由此可得 Q 型$_{B_1}(B_2) = +1$ 且 Q 型$_{B_2}(B_1) = +1$。由引理3.4，且由于对于 $i = 1$、2，Q 型$_{L_0}(B_i) = -1$，可知 $B_1 \cap g_{L_0}(B_2) \neq \varnothing$且 $B_2 \cap g_{L_0}(B_1) \neq \varnothing$。由于 B_1和 B_2恰好交于一点，必有 $g_{L_0}(B_1) \cap g_{L_0}(B_2) \neq \varnothing$。□

给定 Q_1, Q_2 的两个连通分支 $Q(\mathbb{R})$，我们将始终分别用 G_1^+, G_2^+ 和 G_1^-, G_2^- 表示由同时与 Q_1 和 Q_2 相交的分裂双切线所确定的正格和负格。

Q_1, Q_2 中每条确定负格的分裂双切线，都与每条确定正格的分裂双切线相交。事实上，这些交点均位于正格内。

引理 3.9。 设 B_1, B_2 为包含 G_1^-, G_2^- 的分裂双切线。那么 $|B_i \cap G_j^+| = 1$ 对于 $i, j \in \{1, 2\}$。

证明。 任意两条与 Q 相切的双切线都不同，因此我们只需证明 $|B_i \cap G_j^+| > 0$。如果一条分裂双切线确定一个正格，我们就称其为正 分裂双切线；若确定一个负格，则称其为负分裂双切线。每个正格都恰好与每个 Q_i 相接一次，因此，根据 Jordan 曲线定理，正格之间的区域 R 和 $Q_1 \cup Q_2$ 是有界的。负双切线无法穿过各个分支 Q_i，所以只能通过正格进入或离开 R 。

根据引理 3.6，与两个分支 Q_1, Q_2 相交的分裂双切线 L 是负的，当且仅当由 Q_1 和 Q_2 围成的区域位于 $\mathbb{R}^2 \backslash L$ 的不同分支中。特别地，负双切线会穿过 $Q_1 \cup Q_2$ 的凸包 K 的内部。根据引理 2.4， $|B_i \cap \partial K| = 2$。边界 ∂K 由正格 G_1^+, G_2^+ 以及另外两个边界分支组成，这两个分支被连接 $G_1^+ \cap Q_i$ 和 $G_2^+ \cap Q_i$ 的线段 S_i 隔开（见图 3）。由于 L 无法穿过 Q_i，负双切线无法穿过 S_i，因此 $B_i \cap \partial K \subset G_1^+ \cup G_2^+$。于是 $|B_i \cap G_1^+| + |B_i \cap G_2^+| = 2$，所以 $|B_i \cap G_j^+| = 1$。□

由此可推得，负栅格包含在正栅格的凸包内部。

推论 3.10。 负栅格 G_1^-， G_2^- 包含在 $G_1^+ \cup G_2^+$ 的凸包中。

证明。 引理 3.9 指出，包含 G_1^- 和 G_2^- 的分裂双切线与正栅格相交，因此 G_1^-、G_2^- 包含在 $G_1^+ \cup G_2^+$ 的凸包中。□

引理 3.11。 设 Q_0 是 $Q(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2 = (\mathbb{P}^2 \backslash L_0)(\mathbb{R})$ 的一个连通分支。设 a， $b \in Q_0$ 是两个不同的点，且 S 是由 a 和 b 确定的线段。如果一条直线与 S 相交，那么它也与 Q_0 相交。

证明。 设 J 是 $Q_0 \setminus \{a, b\}$ 的两个连通分支之一的闭包。这是一条与 S 端点相同的 Jordan 弧。因此，根据推论 2.3，任何与 S 相交的直线也与 $J \subset Q_0$ 相交。□

现在我们证明：如果一条直线与负栅格相交，那么它至少与 Q_1、Q_2、G_1^+、G_2^+ 中的两个相交。

引理 3.12. 设 $L \subset \mathbb{P}^2$ 是一条容许直线。如果 L 与 Q_1 的某个负栅格相交, Q_2，那么 L 至少与 Q_1, Q_2, G_1^+, G_2^+ 中的两个相交。

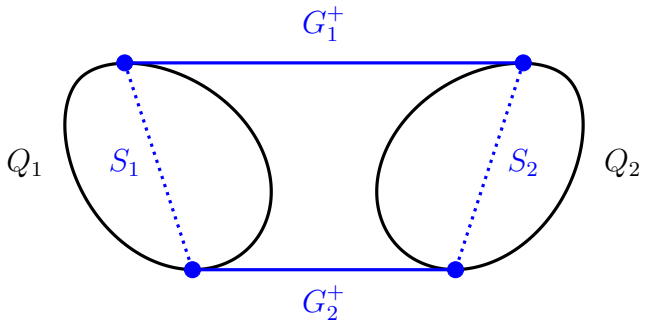

图 3. 由正格构成的四边形

证明。 设 R 是 $G_1^+ \cup G_2^+$ 的凸包。注意， R 是一个凸四边形，其边为 S_1、 S_2、 G_1^+ 和 G_2^+，其中 S_i 是连接 $G_1^+ \cap Q_i$ 和 $G_2^+ \cap Q_i$ 的线段（见图 3）。如果 L 与一个负栅格相交，那么根据引理 2.5， L 至少与 R 的两条边相交。根据引理 3.11，任何与 S_i 相交的直线也与 Q_i 相交。因此，如果 L 至少与 S_1、S_2、G_1^+、G_2^+ 中的两个相交，那么 L 至少与 Q_1、Q_2、G_1^+、G_2^+ 中的两个相交。□

作为最后一个要素，我们证明：如果一条直线与两个负栅格都相交，那么它要么同时与 Q_1 和 Q_2 相交，要么同时与 G_1^+ 和 G_2^+ 相交。

引理3.13。 设 $L \subset \mathbb{P}^2$ 是一条容许直线。假设 L 与 G_1^- 和 G_2^- 都相交。那么， L 要么与 Q_1 和 Q_2 都相交，要么 L 与 G_1^+ 和 G_2^+ 都相交。

证明。 图4展示了该证明中出现的部分对象。设 R 为 $G_1^- \cup G_2^-$ 的凸包。根据引理 3.8，负栅格相交（必然在 R° 内），这意味着负栅格 G_1^-、 G_2^- 是凸四边形 R 的对角线。设

- E 为连接 $G_1^- \cap Q_1$ 和 $G_2^- \cap Q_2$ 的线段，
- E' 为连接 $G_1^- \cap Q_2$ 和 $G_2^- \cap Q_1$的线段，
- F 为连接 $G_1^- \cap Q_1$ 和 $G_2^- \cap Q_1$的线段，且
- F' 为连接 $G_1^- \cap Q_2$ 和 $G_2^- \cap Q_2$的线段。

这些是 R 的四条边，根据引理 2.6， L 要么同时经过 E和 E'，要么同时经过 F和 F'。如果 L同时经过 F和 F'，那么根据引理 3.11 L也与 Q_1 和 Q_2相交。

现在假设 L 同时经过 E 和 E'。设 $x = G_1^- \cap G_2^-$为 R的对角线的交点。设 X 为所有位于某条经过 x 和 E的直线上的点的集合。由于 L与 E相交， E'，引理 2.7 蕴含 L 包含于 $X \cup R$中。根据引理 3.9，正栅格 G_1^+、 G_2^+在 $X \cup R$内界定了四边形 R。 $X \cup R$中的任何直线都必须经过这个有界部分，因此 L 必须经过 G_1^+和 G_2^+。□

现在我们可以证明定理 1.1。

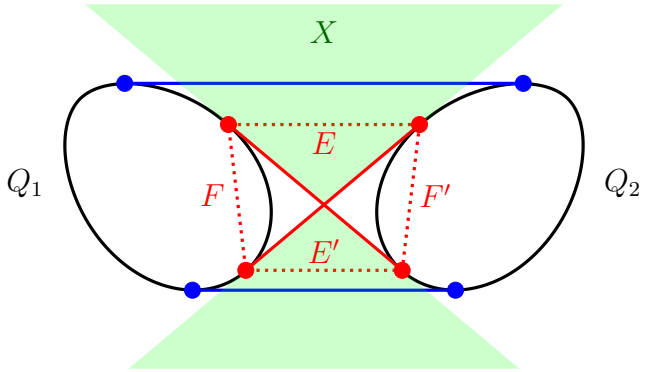

图4. 两个负栅格的相交

定理 *1.1* 的证明。回想一下，我们要证明的是

$$\sigma(L_0, L, -1) - \sigma(L_0, L, +1) \leq 2,$$

其中， L_0 是不与 $Q(\mathbb{R})$相交的直线，而 L是任意一条容许直线（见不等式3.1）。换言之，我们希望证明，任意一条容许直线与负栅格相交的数量至多比与正格相交的数量多 2 个。设 Q_1、……、 $Q_s \subset Q(\mathbb{R})$为这 $s \geq 3$ 个不同的连通分支。对于 $1 \leq i < j \leq s$ 和 $\epsilon \in \{\pm 1\}$，我们用 $\sigma_{ij}(L_0$、 L、 $\epsilon)$表示满足以下条件的分裂双切线 B 的数量：其 Q 型$_{L_0}(B) = \epsilon$， 且 L 与$g_{L_0}(B)$相交，并且 B同时与 Q_i和 Q_j相交。此外，令 $\sigma_{ij}(L_0$、 $L) = \sigma_{ij}(L_0$、 L、 $-1)$ $- \sigma_{ij}(L_0$、 L、 $+1)$。根据推论 3.7，我们有

$$\sigma(L_0, L, -1) - \sigma(L_0, L, +1) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq s} \sigma_{ij}(L_0, L). \tag{3.2}$$

对于每个 $i \neq j$，设 G^+_{ij}, G'^+_{ij} 为与 Q_i 和 Q_j 相关联的正栅格，G^-_{ij}, G'^-_{ij} 为负栅格。只有在以下情况下， $\sigma_{ij}(L_0, L) > 0$：

(i) L 与 G^-_{ij} ,G'^-_{ij} 中恰好一个相交，且与 G^+_{ij} ,G'^+_{ij} 均不相交；或者

(ii) L 与 G^-_{ij}, G'^-_{ij} 都相交，且与 G^+_{ij}, G'^+_{ij} 中至多一个相交。

在情形 (i) 中，根据引理 3.12， L 与 Q_i 和 Q_j 都相交。在情形 (ii) 中，根据引理3.13， L 与 Q_i 和 Q_j 都相交。因此，只有当 L 与 Q_i 和 Q_j 都相交时，任意情形 $\sigma_{ij}(L_0, L) > 0$。

然而， L 与 Q_1、……、 Q_s最多只能相交于两处。事实上，若 $L \cap Q_i$ 非空，则要么 L 与 Q_i 相切（因此与 Q_i 的交点重数至少为 2），要么 L 穿过由 Q_i 围成的区域（因此与 Q_i 至少相交两次）。因此， L要么与 Q_i 不相交，要么与 Q_i 的交点重数至少为 2，所以由贝祖定理可知， L 最多与 Q（$\mathbb{R}$）的两个连通分支相交。因此，方程 3.2右侧至多有一项为正。此外，由引理3.8可得 σ_{ij}（L_0， L， -1） ≤ 2，从而对所有 $1 \leq i < j \leq s$，均有 σ_{ij}（L_0， L） ≤ 2。这就给出了所需的上界 2。□

参考文献

[GH81] Benedict H. Gross 和 Joe Harris。《实代数曲线》。《法国高等师范学校科学年刊》（第*4*辑），14(2):157–182，1981。[Kum19] Mario Kummer。《全实θ特征》。《纯粹与应用数学年刊》（第*4*辑），198(6):2141–2150，2019。[Kum23] Mario Kummer。《实阿贝尔簇上 2-扭点的有符号计数》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2301.10621*，2023。[LV21] Hannah Larson 和 Isabel Vogt。《对光滑平面四次曲线双切线的增强计数》。数学科学研究，8(2):第26号论文，21页，2021。[MPS22] Hannah Markwig、Sam Payne 和 Kris Shaw。《通过热带几何研究平面四次曲线的双切线：有理性、 $\mathbb{A}^1$-枚举与实有符号计数》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2207.01305*，2022。

德累斯顿工业大学数学系几何研究所

电子邮箱：mario.kummer@tu-dresden.de

网址：tu-dresden.de/mn/math/geometrie/kummer/startseite/

数学系 ，哈佛大学

电子邮件地址：smckean@math.harvard.edu

网址：shmckean.github.io