arXiv:2303.02012v1 [math.DG] 3 Mar 2023

Carnot 群上正规流与电荷的平坦紧性

ANTOINE JULIA 和 PIERRE PANSU

Abstract. 我们证明，Carnot 群中按 Rumin 意义定义的正规流族在平坦拓扑下是紧的。该结果通过对 Rumin 微分形式的对偶紧性论证得出，并使用了 Folland、Christ-Geller-Głowacki-Polin 和 Rumin 在群上发展起来的伪微分演算。作为应用，我们仿照 de Pauw-Moonens-Pfeffer，描述了 Carnot 群上的电荷空间。

Contents

1. 引言 21.1. Rumin 微分形式 21.2. Rumin流 31.3. 示例 41.4. 结果 42. 预备知识 52.1. 泛函分析 52.2. Rumin形式与流 52.3. 嵌入的连续性 63. 形式的紧性 83.1. Rumin复形的整体求逆 83.2. 局部化 103.3. 定理证明 3 114. 电荷 114.1. 半自反性 114.2. 电荷表示的证明 12参考文献 13

A. Julia 获得 Simons基金会 601941 号资助。P. Pansu 获得法国国家研究署 ANR-22-CE40-0004 GOFR 项目资助。

1. Introduction

为了在Carnot群中发展几何测度论，我们研究一种经调整的流概念，它通过与Rumin微分形式的对偶来定义。这个概念并非新近提出；它在D. Vittone近期关于Heisenberg群中内在Lipschitz图的研究中发挥着关键作用， [12]。我们的长远目标是找到一种恰当的概念，并建立积分流的相关性质。我们离这一目标还很远，因此先从较为温和的正规流入手：我们证明，在Carnot群中，支集包含于某个固定紧集的Rumin意义下的正规流族，在平坦拓扑中是紧的。

在欧几里得情形下，正规流的平坦紧性通常被视为变形定理的一个推论。该定理（[5, 定理 4.2.9]）旨在证明积分流的平坦紧性。在一般的 Carnot 群中，该定理并不适用。因此，我们采用对偶方法。针对 Rumin 微分形式的对偶紧性论证，相当于求逆 Rumin 微分算子。我们依据 M. Rumin 的观察：Rumin 复形是极大亚椭圆的，[10], 并利用 G. Folland、[7] M. Christ、D. Geller、P. G lowacki 和 L. Polin 所发展的群上的伪微分演算， [3]。

作为紧性定理的一个应用，我们仿照 T. De Pauw、L. Moonens 和 W. Pfeffer， [4], 描述 Carnot 群上的电荷空间。电荷是定义在紧支撑流上的线性泛函，具体定义和陈述见下文。

1.1. Rumin 微分形式。

Carnot 群是一种李群 $\mathbb{G}$，配备了一参数自同构群 $(\delta_t)_{t>0}$，称为膨胀，且满足以下性质：李代数 $\mathfrak{g}$ 由第 1 层生成，即由无穷小生成元的 1-特征空间生成（该生成元是 $\mathfrak{g}$ 的一个导子）。由此得到一个分次 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathfrak{g}_i$，进而得到外代数 $\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}^*$ 的分次。因此，可以定义余向量的权，并进一步定义 $\mathbb{G}$ 上微分形式的权。例如，左不变形式 ω 的权为 w，当且仅当 $\delta_t^*\omega = t^w\omega$。

例 1. 三维 Heisenberg 群上的微分形式。在该群上，0-形式的权为 0；1-形式的权为 1 或 2，其中权为 2 的 1-形式是沿左不变接触结构消失的形式。同样，2-形式的权为 2 或 3，其中权为 2 的 2-形式由接触形式的微分生成，权为 3 的 2-形式是沿左不变接触结构消失的形式。3-形式的权为 4。

Rumin 理论旨在改进 Carnot 群上的 de Rham 复形，使其与膨胀相容。理想情况下，通过将其约化为

每个次数恰好只有一个权，就像阿贝尔群中那样。这里存在一个障碍，即左不变形式的上同调的分次。Ru- min 构造了一个最优复形，它与 de Rham 复形同伦等价，并且在每个次数中具有最少数量的权（等于上同调中的权数）。该复形可视为微分形式的一个子空间，由某些分量的消失来定义，并配备了一个修改后的微分 d_c。d_c 是一个微分算子，其阶数随微分形式的次数和权而变化。它满足 $\mathrm{d}_c \circ \mathrm{d}_c = 0$。Rumin复形与 de Rham 复形同伦等价，因此可用于计算上同调。

示例 2。三维海森堡群上的 Rumin 微分形式。Rumin 的构造选取权为 0 的 0-形式、权为 1 的 1-形式、权为 3 的 2-形式以及权为 4 的 3-形式。Rumin 微分 d_c 在 1 次上阶为 2，在其他次数上阶为 1。在 0-形式上，d_c 是通常微分在左不变接触结构上的限制。

Heisenberg群是该过程完全成功的示例，每个次数中都只有一个权。下面给出一个不太成功但仍然最优的示例。

示例 3。四维 Engel群上的 Rumin 微分形式。Rumin 的构造选取权为 0 的 0-形式、权为 1 的 1-形式、权为 3 和 4 的 2-形式、权为 6 的 3- 形式以及权为 7 的 4- 形式。Rumin 微分 d_c 在次数 1 和次数 2 上分别具有两个阶为 2 和 3 的分量，在其他次数上阶为 1。

Rumin 的构造并非完全不变：需要在 Carnot 群上选取一个与膨胀的特征子空间相适配的左不变黎曼度量。此选择还可用于规范化 Haar 测度，并测量 Rumin形式的逐点范数。此外，它确定了一种左不变距离，即 Carnot-Carath´eodory 距离，该距离在膨胀作用下是 1 次齐次的。

有关该理论的综述，参见 [11]。以下近期文献中可以找到略有不同的方法： [8], [6]。

1.2. Rumin流。Rumin流是一个连续泛函，作用于 n
光滑紧支集 Rumin 微分形式空间。边界 y
算子 ∂_c 由对偶定义，

$$\langle \partial_c T, \omega \rangle = \langle T, \mathrm{d}_c \omega \rangle.$$

T 的支集具有这样的性质： T 在支集位于其补集中的微分形式上为零。流的质量通过与 C^0的对偶来定义

光滑紧支集 Rumin形式上的范数,

$$\mathbf{M}(T) = \sup\{T(\omega)\,;\, \|\omega\|_{C^0(\mathbb{G})} \leq 1\}.$$

Rumin流 T 是正规流，当且仅当 T 和 $\partial_c T$ 具有有限质量：N(T) =M(T) + M($\partial_c T$)。

Rumin流 T的平坦质量，是对所有表达式 $T = S + \partial_c R$中 M(R)+M(S) 取下确界。

1.3. 示例。弥散流。一个 C^1 Rumin 微分形式 ϕ定义了一个余维为 P(ϕ) 的流，其定义如下:

$$\langle P(\phi), \omega\rangle = \int \phi \wedge \omega.$$

（请注意，Rumin形式一般不在外积运算下封闭，但对于互补次数的微分形式，外积是有定义的。）于是 M(P(ϕ)) $= \|\phi\|_1$, $\partial_c P$(ϕ) $= \pm P$(d$_c\phi$)。这类弥散流 P(ϕ) 在平坦范数下于正规 Rumin 流空间中稠密。

积分流。在三维海森堡群$\mathbb{H}^1$中，带边界的光滑二维子流形 V定义了一个 Rumin流T_V，其质量等于其 Hausdorff三维测度。Rumin边界 $\partial_c T_V$与 ∂T_V不同：若 ω 是一个光滑紧支撑 1-形式,

$$\langle \partial_c T_V, \omega\rangle = \langle \partial T_V, \omega - \frac{d\omega}{d\theta}\theta\rangle,$$

其中 θ 表示单位竖直左不变形式。因此， $< \infty$ 当且仅当 ∂V 是一条水平曲线。在这种情况下，$\partial_c T_V = \partial T_V$。

更一般地，在 Carnot 群中，边界为水平曲线的紧致光滑子流形定义了一个流 T_V，它是正规 Rumin 流，并且 $\partial_c T_V = \partial T_V$。（顺便说一句，这是积分 Rumin 流的一个合理候选。）

1.4. 结果。

定理1（紧致性）。正规 Rumin 流空间中，正规质量有界且支集包含于 $\mathbb{G}$ 某个固定紧致子集内的流，在平坦拓扑下是紧致的。

作为应用，仿照 T. de Pauw、L. Moonens 和 W. Pfeffer，我们将 Carnot 群 $\mathbb{G}$ 上的 Rumin 电荷定义为紧支撑正规 Rumin 流空间上的线性泛函，它们在每个

$S(K,\nu)$ $=$ {支集在 K 且正规质量为 $\leq \nu$}的Rumin流,

配备平坦质量，对于所有紧集 $K \subset \mathbb{G}$ 和 $\nu > 0$。

以下内容是对 [4] 在 Carnot 群上的直接推广，所需的唯一新要素是定理 1。

定理 2（Rumin 电荷的表示）。Rumin 电荷空间为 $C^0 + \mathrm{d}_c C^0$，即如果 ϕ 是 $\mathbb{G}$上的连续 Rumin 形式，则 ϕ 和 $\mathrm{d}_c\phi$ 都定义了 Rumin 电荷。反之，每个 Rumin 电荷都具有 $\phi + \mathrm{d}_c\psi$的形式，其中 ϕ 和 ψ 是 $\mathbb{G}$上的连续 Rumin 形式。

2. Preliminaries

2.1. 泛函分析。

命题 4. 设 X 和 Y 是赋范向量空间。设 $P\colon X \to Y$ 是一个紧算子，即它将有界集映射为相对紧集。那么 $P^*\colon Y^* \to X^*$ 也是紧算子。

证明 设 B 表示 Y 中的单位球，B^* 表示 Y^*中的单位球，即由满足 $\sup_{y\in B}\langle y^*, y\rangle \le 1$ 的 Y 上的线性泛函 y^* 构成的集合。B^* 中的每个元素都是 Y 上的 1-Lipschitz函数，且将 0 映射为 0。因此，B^* 可以视为 $P(B)$ 的完备化上所有将 0 映射为 0 的 1-Lipschitz函数所构成的集合 S 的子集。由于 $P(B)$ 是一个相对紧度量空间，其完备化（不一定与其在 $\overline{Y}$ 中的闭包重合）$P(B)$ 是紧的。根据 Arzel`a–Ascoli 定理，S 关于 $P(B)$ 上的一致收敛是相对紧的。注意，对于 $y^* \in \overline{Y^*}$，

$$\begin{aligned}\|y^*\|_{C^0(\overline{P(B)})} &= \|y^*\|_{C^0(P(B))} = \sup_{x\in B}\langle y^*, P(x)\rangle = \sup_{x\in B}\langle P^*(y^*), x\rangle \\ &= \|P^*(y^*)\|_{X^*}.\end{aligned}$$

因此，$P^*(B^*)$ 在 X^* 的范数下是预紧的。 ∎

2.2. Rumin形式与流。

具有紧支撑的次数为 m 的光滑Rumin形式空间记作 $\mathscr{D}_c^m(\mathbb{G})$，赋予其 C^∞ 拓扑后得到一个 Fr´echet 空间。我们将在此空间上使用三种不同的半范数：C^0 范数 $\omega \mapsto |\cdot|$、平坦范数

$$\omega \mapsto \mathbf{F}(\omega) := \max\{|\omega|, |\mathrm{d}_c\omega|\}$$

以及“正规范数”

$$\mathbf{N}(\omega) := \inf\{\max\{|\phi|, |\psi|\}\,;\, \omega = \phi + \mathrm{d}_c\psi, \phi \in \mathscr{D}_c^m(\mathbb{G}), \psi \in \mathscr{D}_c^{m-1}(\mathbb{G})\}.$$

$\mathscr{D}_c^m(\mathbb{G})$ 在 Fr´echet 拓扑下的对偶空间，是维数为 m, $\mathscr{D}_{c,\ m}(\mathbb{G})$ 的 Rumin 流。维数为 $m \ge 1$ 的 Rumin 流 T 的边界是维数为

$m-1$，定义为 $\partial_c T(\omega) = T(\mathrm{d}_c\omega)$。对于一个流 $T \in \mathscr{D}_{c,\,m}(\mathbb{G})$，我们可以关联三个“范数”（它们并不总是有限的），

(1) 质量

$$\mathbf{M}(T) := \sup\{T(\omega), |\omega| \leq 1\}.$$

(2) 正规质量

$$\mathbf{N}(T) := \mathbf{M}(T) + \mathbf{M}(\partial T) = \sup\{T(\omega), \mathbf{N}(\omega) \leq 1\}.$$

(3) 平坦质量

$$\mathbf{F}(T) := \sup\{T(\omega), \mathbf{F}(\omega) \leq 1\} = \inf\{\mathbf{M}(R) + \mathbf{M}(S), T = S + \partial_c R\}.$$

第三个定义中的等式成立的条件是 T 的平坦质量有限。下面证明第二个和第三个定义中的等式。对于正规质量，方向 $\geq$显然；对于反方向，可以假设 $\mathbf{M}(T) + \mathbf{M}(\partial_c T) < +\infty$。特别地，存在微分形式 ϕ 和 ψ，满足 $|\phi| = |\psi| = 1$，使得 $T(\phi)$ 和 $\partial T(\psi)$ 分别任意接近 $\mathbf{M}(T)$ 和 $\mathbf{M}(\partial T)$。于是只需取 $\omega := \phi + \mathrm{d}_c\psi$。对于平坦质量，不等式 $\leq$ 显然。要证明反向不等式，需要像 [5, 4.1.12] 中那样使用 Hahn-Banach 定理。

最后，流 T 的支集是最小的闭子集 K，它属于$\mathbb{G}$，且满足：只要 ω 支集包含在 K补集的某个紧子集中，就有 $T(\omega) = 0$。我们用 $\mathbf{N}_{c,\,m}(\mathbb{G})$ 表示由维数为 m 、具有有限正规质量且紧支撑的正规Rumin流构成的子空间；用 $\mathbf{F}_{c,\,m}(\mathbb{G})$ 表示 $\mathbf{N}_{c,\,m}(\mathbb{G})$ 关于平坦质量的闭包。

2.3. 嵌入的连续性。我们的目标是证明，支集于紧集$K \subset \mathbb{G}$中的维数为 m 的正规 Rumin 流空间 $\mathbf{N}_{c,\,m,\,K}(\mathbb{G})$，在平坦质量拓扑下紧嵌入 $\mathbf{F}_{c,\,m,\,K}(\mathbb{G})$。为此，我们首先证明以下映射链

$$\mathbf{N}_{c,m,K}(\mathbb{G}) \hookrightarrow E_2^* \overset{\Theta^*}{\hookrightarrow} E_1^* \hookrightarrow \mathbf{F}_{c,m}(\mathbb{G}), \tag{1}$$

是连续的，其中 E_2^* 和 E_1^* 是两个微分形式 Banach 空间的对偶空间，并且映射 $\Theta\colon\ E_1 \hookrightarrow E_2$ 是紧的（这一事实将在下一节中证明）。根据命题 4，对偶箭头是紧的，因此（1）中的三个箭头的复合也是紧的。现在来定义这些空间。

令 B' 为 $\mathbb{G}$ 中包含 K的一个邻域的开球。令B 为与其同心的较大开球。令 $\mathscr{E}_c^m(B)$ 表示由以下元素构成的空间：

B 上的光滑Rumin形式，它们在 B 上有界，且其 Rumin 微分在 B上有界。在此空间上，令

$$\mathbf{F}_B = \max(|\cdot|_{C^0(B)}, |\mathrm{d}_c \cdot|_{C^0(B)})), \quad \mathbf{F}_K = \max(|\cdot|_{C^0(K)}, |\mathrm{d}_c \cdot|_{C^0(K)}).$$

空间 E_1 是商空间的完备化

$$\big(\mathscr{E}_c^m(B), \mathbf{F}_B\big)/\big\{\omega \in \mathscr{E}_c^m(B), \mathbf{F}_K(\omega) = 0\big\}.$$

为定义 E_2，考虑 $\mathscr{E}_c^m(B')$ 上由下式定义的平坦半范数

$$\mathbf{N}_{B'}(\omega) = \inf\big\{\max(|\phi|_{C^0(B')}, |\psi|_{C^0(B')})\,;\, \phi \in \mathscr{E}_c^m(B'),\, \psi \in \mathscr{D}_{c,B'}^{m-1},\, \omega = \phi + \mathrm{d}_c\psi\big\}.$$

$$\mathbf{N}_K(\omega) = \inf\big\{\max(|\phi|_{C^0(K)}, |\psi|_{C^0(K)})\,;\, \phi \in \mathscr{E}_c^m(B'),\, \psi \in \mathscr{D}_{c,B'}^{m-1},\, \omega = \phi + \mathrm{d}_c\psi\big\}.$$

空间 E_2 随后是商空间的完备化

$$\big(\mathscr{E}_c^m(B'), \mathbf{N}_{B'}\big)/\{\omega \in \mathscr{E}_c^m(B') \,:\, \mathbf{N}_K(\omega) = 0\}.$$

回顾一下，赋范空间对闭子空间取商所得空间上的典范范数，是其代表元范数的下确界。

映射 $\Theta\colon E_1 \to E_2$ 是通过将定义在较大球 B 上的微分形式限制到较小球 B' 上而诱导得到的。

命题 5. 空间 E_1 和 E_2 是 Banach 空间。此外，箭头

$$\mathbf{N}_{c,m,K}(\mathbb{G}) \hookrightarrow E_2^* \quad and \quad E_1^* \hookrightarrow \mathbf{F}_{c,m}(\mathbb{G})$$

是连续的。

证明

由于 $\mathbf{F}_K \le \mathbf{F}_B$ 且 $\mathbf{N}_K \le \mathbf{N}_{B'}$，取商所用的子空间是闭的，因此 E_1 和 E_2 是 Banach 空间。

我们来检验第一个箭头的连续性。关键在于，若 T 是一个支集包含于 K中的正规流，则 T 和 $\partial_c T$ 可表示为关于积分的形式，且由支集包含于 K中的测度承载，因此

$$T(\phi) \le \mathbf{M}(T)|\phi|_{C^0(K)}, \quad \partial_c T(\phi) \le \mathbf{M}(\partial_c T)|\phi|_{C^0(K)}$$

对于在 K 的某个邻域内定义的所有光滑形式。首先，这意味着 T 在 $\{\omega \in \mathscr{E}_c^m(B');\ \mathbf{N}_K(\omega) = 0\}$ 上消失，因此定义了 E_2^* 的一个元素。其次，当 $\omega = \phi + \mathrm{d}_c\psi$，且 ϕ、ψ 定义在 B' 上时，

$$\begin{aligned} T(\omega) &\le \mathbf{M}(T)|\phi|_{C^0(K)} + \mathbf{M}(\partial_c T)|\psi|_{C^0(K)} \\ &\le \mathbf{N}(T)\max(|\phi|_{C^0(B')}, |\psi|_{C^0(B')}), \end{aligned}$$

由此得到 $\|T\|_{E_2^*} \leq \mathbf{N}(T)$。

最后，我们来检验第二个箭头的连续性。光滑且紧支集的 Rumin 微分形式限制后属于 $\mathscr{E}_c^m(B)$，$\omega \mapsto \omega_{|B}$。显然，

$$\mathbf{F}_B(\omega_{|B}) \leq \mathbf{F}(\omega),$$

因此，E_1^* 中的元素定义的流，其平坦范数小于它们的 E_1^*-范数。

■

3. Compactness of forms

本节旨在证明以下结果。

定理3. 将定义在 B 上的微分形式限制到 B' 所诱导的映射 $\Theta : E_1 \hookrightarrow E_2$ 是紧的。

该结果将由 Rumin 微分的部分逆算子的构造及其范数的某种控制推出。我们需要介绍一些适用于 Rumin 复形的 Carnot 群上的伪微分演算结果。

3.1. Rumin 复形的整体求逆。按照 [3]，我们在 $\mathcal{S}_0$ 上定义一个算子。该空间由系数属于施瓦茨类且所有多项式矩均为零的微分形式构成。稍后将把此算子扩展到微分形式的索博列夫空间。按照 [7] 和[9]，，我们还考虑标量次拉普拉斯算子 $|\nabla_H|$ 的平方根 Δ_H，它作用于 $\mathbb{G}$上的函数。对于每个 $m \in \mathbb{R}$，伪微分算子$|\nabla_H|^m$ 是 m阶齐次的。我们固定一个左不变标架，并令 $|\nabla_H|^m$ 逐分量作用于 Rumin 微分形式。

命题6（[9, 命题 5。2]）。存在一个算子 K_c，作用于 $\mathcal{S}_0$ 中的 Rumin 微分形式空间，使得若 ω 是这样的微分形式，

$$\omega = \mathrm{d}_c K_c \omega + K_c \mathrm{d}_c \omega.$$

此外，若 ω 的次数为 k 且权重为纯权重 N，则 $K_c\omega$ 是一个次数为 $k-1$ 的微分形式，并可分解为纯权重为 $N-\ell$的微分形式 $(K_c\omega)_\ell$，其中 ℓ取遍 $\{1, \ldots,$与 δ、N的最小值之间的值 $\}$；这里 δ是微分形式 α 与其 Rumin 微分 $\mathrm{d}_c\alpha$之间最大的权重差。齐次分量 $(K_c\omega)_\ell$ 对每个 $m \in \mathbb{R}$ 和 $p \in (1, +\infty)$ 均满足，

$$\left\| |\nabla_H|^{m+\ell} (K_c\omega)_\ell \right\|_p \lesssim \left\| |\nabla_H|^m \omega \right\|_p. \tag{2}$$

对于正的 m，半范数 $\| |\nabla|^m \cdot \|_p$ 与水平索博列夫范数 $W^{1,}{}_c{}^p$相当，其定义如下。对于开集 $U \subset \mathbb{G}$上的标量函数 u，$W^{1,}{}_c{}^p$范数为

$$|u|_{W_c^{1,p}(U)} = |u|_{L^p(U)} + |\mathrm{d}_c u|_{L^p(U)},$$

对于微分形式， $W^{1,p}_c$范数是其在所选左不变标架下各分量的 $W^{1,p}_c$范数之和。

下述结论是 [7, 定理 410]的一个特例。

命题 7. 给定 $p \in (1,\infty)$，对所有 $f \in \mathcal{S}_0$,

$$\|f\|_{W^{1,p}_c} \lesssim \||\nabla_H| f\|_p + \|f\|_p.$$

此外，只要 p 大于 $\mathbb{G}$ 的齐性维数 Q（$Q = \sum_{i=1}^{s} i \dim(\mathfrak{g}_i)$），Sobolev $W^{1,p}_c$范数就能控制关于 Carnot–Carathéodory 度量的 $1 - Q/p$ 阶 H¨older 半范数。事实上，根据 [7, 定理 5.15]，，我们有

命题 8. 若 f 是 $\mathbb{G}$ 上的函数或 Rumin 微分形式,

$$\sup_{x,y\in\mathbb{G}} \frac{|f(y) - f(x)|}{\|x^{-1}y\|^{1-Q/p}} \lesssim \|f\|_{W^{1,p}_c}.$$

设 $0 < \alpha < 1$。设 U 是 $\mathbb{G}$ 的一个开子集。下文中， U 上 H¨older 半范数的连续函数（或 Rumin 微分形式）空间

$$\|f\|_{\dot{C}^{\alpha}_c(U)} := \sup_{x,y\in U} \frac{|f(y) - f(x)|}{\|x^{-1}y\|^{\alpha}}$$

˙是有限的，记为 $C^{\alpha}_c(U)$。H¨older 范数为 $\|f\|_{C^{\alpha}_c(U)} = \|f\|_{\dot{C}^{\alpha}_c(U)} + \|f\|_{C^0(U)}$。

对于负的 m，我们需要用 f 的范数来控制 $|\nabla_H|^m f$ 的范数。我们有以下估计:

命题 9. 给定 $\ell \in (0, Q)$ 和 $p, q > 1$，使得 $p^{-1} = q^{-1} - \ell/Q$，对于每个 f 属于 $L^q(\mathbb{G})$,

$$\||\nabla_H|^{-\ell} f\|_p \lesssim \|f\|_q.$$

证明 由 [7]，中的命题 3.17，算子 $|\nabla|^{-m}$ 具有如下核

$$R_m(x) := C_m \int_0^{\infty} t^{(m/2)-1} h(x,t)\, dt,$$

其中， $h(x,t)$ 是与 $\mathbb{G}$ 中的次拉普拉斯算子相关联的热核。这意味着我们可以写成 $|\nabla|^{-m}\omega = R_m * \omega$，其中 $*$ 表示 $\mathbb{G}$ 中的群卷积（并将 ω 按所选的左不变基展开）。由于 $m < Q$，根据 [7] 中的命题 3.17， R_m 属于 $C^{\infty}(\mathbb{G}\backslash\{0\})$，且是一个 m 型核。根据 [7]，中的命题 1.11，给定 p，存在 $q > 1$ 使得 $p^{-1} = q^{-1} - m/Q$，对于 $f \in L^q(\mathbb{G})$,

$$\|R_m * f\|_p \lesssim_q \|f\|_q.$$

■

综合这些估计，我们得到

引理 10。设 $p > Q$。设 δ 为 Rumin 微分所增加的最大权重。则 $\delta \leq Q-1$。设 $q > 1$ 由 $p^{-1} = q^{-1} - (\delta/Q)$ 定义。则 K_c 可扩张为一个有界算子，从 $L^p \cap L^q(\mathbb{G})$ 映射到 $\dot{C}_c^{1-(Q/p)}(\mathbb{G}) \cap L^p(\mathbb{G})$。

证明 结合命题 6 和 7 可得，对于权重为 $\omega \in \mathcal{S}_0$ 的齐次微分形式 N 以及任意 $\ell \in \{1, \dots, \delta\}$，$K_c\omega$ 的权重为 $N-\ell$ 的齐次分量满足

$$\|(K_c\omega)_\ell\|_{W_c^{1,p}} \lesssim \big\|(K_c\omega)_\ell\big\|_p + \big\||\nabla|(K_c\omega)_\ell\big\|_p \lesssim \big\||\nabla|^{-\ell}\omega\big\|_p + \big\||\nabla|^{1-\ell}\omega\big\|_p,$$

根据命题 9，右侧有界于 $\|\omega\|_{q_\ell} + \|\omega\|_{q_{\ell-1}}$，其中 $p^{-1} = q_s^{-1} - (s/Q)$ 对于 $s = 0$，……，δ。出现的最小指数为 q_δ。由于 $\mathcal{S}_0$ 在所有 L^q ([9, 命题 7.1]) 中稠密，K_c 可扩张为一个有界算子，从 $L^p \cap L^q(\mathbb{G})$ 映射到 $W^1{}_c{}^p(\mathbb{G})$。命题 8 允许将这个 Sobole夫空间替换为 $\dot{C}_c^{1-(Q/p)}(\mathbb{G}) \cap L^p(\mathbb{G})$。 ∎

3.2. 局部化。我们从 [1] 借鉴以下技巧。左不变算子 K_c 由与函数 k_c 的卷积给出，该函数在 $\mathbb{G}$ 中除原点外处处光滑。设 χ 为一个光滑截断函数，其支集包含在一个小球内（其直径至多为 B 与 B'的半径之差），且在原点的某个邻域内等于 1。令 $k = \chi\, k_c$ 与 $k' = (1-\chi)\, k_c$，使得 k 的支集较小，且 k' 在 $\mathbb{G}$ 上光滑。令 P（分别为 P'）表示与 k（分别为 k'）作卷积的算子，于是 $K_c = P + P'$。于是

$$1 = \mathrm{d}_c P + P\mathrm{d}_c + S,$$

其中 $S = \mathrm{d}_c P' + P'\mathrm{d}_c$ 是平滑算子。令 ρ 表示从 B 到 B'的限制算子。注意，ρP 作为从 $\mathscr{E}_c^m(B)$ 到 $\mathscr{E}_c^{m-1}(B')$ 的映射是良定义的。因此，$\rho S = \rho - \mathrm{d}_c\rho P - \rho P\mathrm{d}_c$ 作为从 $\mathscr{E}_c^m(B)$ 到 $\mathscr{E}_c^m(B')$ 的映射是良定义且平滑的。

引理 11. 固定 $p \in (1, \infty)$。如果 $\omega \in \mathscr{E}_c^m(B)$，则

$$\begin{aligned}
\|\rho P\omega\|_{C_c^{1-(Q/p)}(B')} &\lesssim \|\omega\|_{C^0(B)}, \\
\|\rho P\mathrm{d}_c\omega\|_{C_c^{1-(Q/p)}(B')} &\lesssim \|\mathrm{d}_c\omega\|_{C^0(B)}, \\
\|\rho S\omega\|_{C_c^{1-(Q/p)}(B')} &\lesssim \|\omega\|_{C^0(B)} + \|\mathrm{d}_c\omega\|_{C^0(B)}
\end{aligned}$$

特别是，

$$\|\rho P\omega\|_{C_c^{1-(Q/p)}(B')} + \|\rho(P\mathrm{d}_c + S)\omega\|_{C_c^{1-(Q/p)}(B')} \lesssim \mathbf{F}_B(\omega).$$

证明：将 $L^p(B)$ 上的微分形式延拓为在 B 上取 0，可将其视为 $L^p(\mathbb{G})$ 的子空间。由于它具有光滑的核， $\rho P'$ 从$L^p(B)$ 到任意 H¨lder 空间都是有界的，例如 $C^{k,\ c}{}^{1-(Q/p)}(B')$，其中 k 大于 d_c 的阶数再加一，因此得到估计

$$\|\rho S\omega\|_{C_c^{1-(Q/p)}(B')\cap L^p(B')} \lesssim \|\omega\|_{L^p(B)}+\|\mathrm{d}_c\omega\|_{L^p(B)} \lesssim \|\omega\|_{C^0(B)}+\|\mathrm{d}_c\omega\|_{C^0(B)}.$$

此外，根据引理 10， $\rho P = \rho K_c - \rho P'$ 从空间交集 $L^q(B) \subset L^q(\mathbb{G})$ 到 $\dot{C}_c^{1-(Q/p)}(B') \cap L^p(B')$ $=C_c^{1-(Q/p)}(B'$有界。这个交集包含 $C^0(B)$。

■

3.3. 定理 **3** 的证明。

证明：考虑 e_j 中的一个有界等价类序列。我们可以选取代表元 ω_j，并通过逼近，选取定义在 B 上的光滑 Rumin形式 ω_j'，它们在平坦范数 F_B 中一致有界，并且 $\mathrm{F}_B(\omega_j' - \omega_j)$ 趋于 0。

根据引理 11，在较小球 B' 上的限制可以写成

$$\rho(\omega_j') = \rho(P\mathrm{d}_c + S)(\omega_j') + \mathrm{d}_c\rho P(\omega_j'),$$

其中 $\phi_j := (P\mathrm{d}_c+S)(\omega_j')$ 和 $\psi_j := \rho P(\omega_j')$ 在 $C_c^{1-(Q/p)}(B')$ 中有界。由 Arzel`a-Ascoli 定理，经过抽取子列后，可以假设 ϕ_j 和 ψ_j 在 $C^0(B')$ 中收敛。因此，子列 $\rho(\omega_j')$ 在 $\mathrm{N}_{B'}$ 范数下收敛。将原序列 ω_j 限制到 B' 上，也有一个子列收敛。这表明 $\Theta(e_j)$ 有一个子列在 $\mathrm{F}_{c,m}(\mathbb{G})$ 中收敛。

■

4. Charges

Rumin 电荷空间 CH 是定义在 $\mathbb{G}$ 上、具有紧支撑的 Rumin 流所成的局部凸拓扑空间的许多可能对偶空间之一。但事实证明，它有一个简单的描述。

若 ϕ、ψ 是定义在 $\mathbb{G}$ 上的连续 Rumin 形式，则 $\phi + \mathrm{d}_c\psi$ 显然定义了一个电荷。反过来，我们将证明每个 Rumin 电荷都具有这种形式。

由于关于 Carnot 群中 Rumin 电荷的讨论与欧几里得空间中电荷的讨论完全平行，因此我们仅概述 [4], 定理所需之处1 。

4.1. 半自反性。固定一个紧集 $K \subset \mathbb{G}$，令 $\mathcal{M}_K$（分别为 $\mathcal{N}_K$）表示支集在 $K \subset \mathbb{G}$ 中的有限质量（分别为有限 N 质量）流空间，

那么 $\mathcal{M}_K$ 是 K 上连续 Rumin 形式的对偶空间， $\mathcal{M}_K = C^0(K)'$。因此，$\mathcal{N}_K$ 也是一个对偶空间，

$$\mathcal{N}_K = \mathcal{M}_K \cap \mathrm{d}_c^{-1}(\mathcal{M}_K) = (C^0(K) + \mathrm{d}_c C^0(K))'.$$

因此，我们的目标是使 $C^0 + \mathrm{d}_c C^0$ 具备某种自反性，但这并不成立！关键在于改变 $\mathcal{N}_K$ 上的拓扑：从 **N** 质量拓扑转为平坦质量拓扑。关键词是 半自反性， [2,第四章。2]。

定义 12（布尔巴基）。拓扑向量空间上的线性形式，如果在有界子集上有界，则称为强连续的。

局部凸拓扑向量空间 X 称为半自反的，如果其拓扑对偶 X' 上的每个强连续线性形式都由 X中的一个元素导出。

设 X 为一个局部凸空间，设 $\mathcal{S}$ 为 X的凸子集的膨胀稳定族。存在 X上的一个拓扑 $\mathcal{T}_S$，其在每个 $S \in \mathcal{S}$上诱导初始拓扑，使得线性映射 $X \to Y$连续，当且仅当它对 S 中各元素的所有限制都连续， [4,命题 4。3]

命题 13（[4, 定理3.16]）。设 X 是一个局部凸空间，设 $\mathcal{S}$ 是 X 的一个穷尽性紧凸子集族。则（$X, \mathcal{T}_S$）是半自反的。

如果 $\mathcal{N}$ 是赋予平坦拓扑的紧支撑正规 Rumin 电流空间，且 $\mathcal{S} = \{S_{K,\nu}\}$ （见第1.4节中的定义），那么 Rumin电荷恰好是（$\mathcal{N}$, $\mathcal{T}_S$）上的连续线性泛函，

$$CH \simeq (\mathcal{N}, \mathcal{T}_S)'.$$

得益于定理1，命题13得以应用。根据半自反性，电荷空间上的每个强连续线性泛函 CH都源自一个具有紧支撑的正规流，

$$(\mathcal{N}, \mathcal{T}_S) \simeq CH^*.$$

4.2. 电荷表示的证明。第二个要点是确定 C^0的有界子集。

命题 14（[4, 引理 6。4]）。如果子集 S 在 $\mathcal{N}$ 上作为线性泛函是一致有界的， C^0那么 S 中的所有元素都具有包含于 $\mathbb{G}$中同一个紧集内的支集。

我们要证明 $\Theta\colon\ C^0 \oplus C^0 \to CH$， $(\phi,\ \psi) \mapsto \phi + \mathrm{d}_c\psi$是满射。我们将通过证明其伴随 $\Theta^*\colon\ \mathcal{N} = CH^* \to (C^0 \oplus C^0)^*$ 来实现，其中该伴随由下式给出

$$\langle \Theta^*(T), (\phi, \psi)\rangle = \langle T, \phi + \mathrm{d}_c\psi\rangle = \langle T, \phi\rangle + \langle \partial_c T, \psi\rangle,$$

是 proper 的。如果 $S \subset \mathcal{N}$ 和 $\Theta^*(S)$ 在 $C^0 \oplus C^0$的所有有界子集上均有界，那么对于 $T \in S$， $N(T)$ 有界，且 supp(T) 包含于某个公共紧集内。根据定理 1， S 是平坦紧的。

由 [4, 命题68], 可知， Θ^* 的值域是弱*闭的，因此根据闭值域定理， Θ 的值域是闭的。该值域包含光滑紧支集 Rumin 微分形式这一稠密子空间，因此 Θ 是满射，即每个电荷都可以写成$\phi + \mathrm{d}_c\psi$，其中 ϕ， $\psi \in C^0$。

References

[1] A. Baldi、B. Franchi 和 P. Pansu。环带的上同调、对偶性以及 Heisenberg 群上的 l^∞- 微分形式。arXiv 预印本，2021 年。[2] N. 布尔巴基。《拓扑向量空间》。第 1 `a 至 5 章。Springer，柏林—海德堡，新版，2007 年。´数学´要´素。[数学要素]。[3] M. Christ、D. Geller、P. G l owacki 和 L. Polin。带膨胀的群上的伪微分算子。《Duke 数学杂志》，68(1):31–65，1992 年。[4] T. De Pauw、L. Moonens 和 W. F. Pfeffer。中间维度中的电荷。《纯粹与应用数学杂志》（第9辑），92(1):86–112，2009 年。[5] H. Federer。《几何测度论》。《经典数学》。柏林：Springer-Verlag，1969 年版重印，1996 年。[6] V. Fischer 和 F. Tripaldi。齐次幂零李群上 Rumin 复形的另一种构造。arXiv 预印本，2022 年。[7]G. B. Folland。幂零李群上的次椭圆估计与函数空间。《Arkiv för Matematik》，13:161–207，1975 年。[8] A. Lerario 和 F. Tripaldi。Carnot群上的多复形及其相关谱序列。arXiv 预印本，2022 年。[9] P. Pansu 和 M. Rumin。关于 Carnot 群的 $\ell^{q,\,p}$ 上同调。《Annales Henri Lebesgue》，1:267–295，2018 年。[10] M. Rumin。关于微分形式上的热衰减以及幂零李群的关系。在《谱理论与几何学研讨会》，第 ´期´，第 ´卷´，2000—2001 ´年度，第19卷，《谱 ´理论 ´与 ´几何学研讨会》，第123–164页。格勒诺布尔第一大学，Saint-Martin-d'H`eres，2001 年。[11] M. Rumin。Carnot—Carath´éodory 空间中的谱几何与微分几何导论。《巴勒莫数学学会通报》（第2辑）增刊，（75）：139–196，2005 年。[12] D. Vittone。Heisenberg 群中的 Lipschitz图与流。《Forum Math. Sigma》，10：论文编号 e6，共104页，2022 年。

Antoine Julia: Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay,91405 Orsay Cédex, France电子邮箱地址: antoine.julia@universite-paris-saclay.fr

Pierre Pansu: Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay,91405 Orsay Cédex, France电子邮箱地址: pierre.pansu@universite-paris-saclay.fr