arXiv:2303.02013v1 [math.CO] 3 Mar 2023

Dembowski 关于偶数阶有限反演平面的定理

Bhaskar Bagchi[1]B36 Medley，Good
Earth，Malhar Avenue，Kambipura，
班加罗尔560 074，印度。
bhaskarbagchi53@gmail.com

摘要

Peter Dembowski 提出的一个著名定理指出，若 I 是一个偶数阶 q 反演平面，则 q 必为 2 的幂，并且 I 必为射影三维空间中某个卵形体内的点与平面卵形曲线之间的关联系统，其中该射影三维空间定义在阶为 q 的域上。本文给出这一结果的一个简短且自包含的证明。我们的证明依赖于 Benson 对对称正则有限广义四边形的分类。本文还将由 Dembowski-Wagner 有限射影几何组合刻画推出 Benson 定理。

1 引言

一个 $t-(v,k,\lambda)$ 设计 D 是满足以下条件的关联系统：(i) D 有 v 个点；(ii) D 的每个区组恰与 k 个点关联；(iii) D 的任意 t 个不同点恰与 D 的 λ 个区组共同关联。通过一个简单的计数论证可知，对于 $0 \le s \le t$，任意 $t-(v,k,\lambda)$ 设计同时也是一个 $s-(v,k,\lambda_s)$ 设计，其中 $\lambda_s = \lambda\binom{v-s}{t-s}/\binom{k-s}{t-s}$。（下文将多次使用此公式，恕不另行说明。）特别地，t-设计的区组数为 $b := \lambda_0 = \binom{v}{t}/\binom{k}{t}$；当 $t > 0$ 时，与每个点关联的区组数为 $r := \lambda_1 = bk/v$。

Fisher 的一个著名结果指出，任意非平凡 2-设计的参数满足 $b \ge v$（等价地，满足 $r \ge k$）。满足 $b = v$（等价地，满足 $r = k$）的 2-设计称为对称 2-设计。当且仅当该设计中任意两个不同区组都与 λ 个点关联时，这个 2-设计是对称的。当且仅当将点与区组的概念互换后得到的对偶 2-设计仍是一个 2-设计（且必然具有相同参数）时，这一条件成立。注意，一个 $2-(v, k, \lambda)$ 设计是对称的，当且仅当其参数满足 $k(k-1) = \lambda(v-1)$。

[1]作者是印度统计研究所的一位退休教授。

t-设计的参数 λ 称为其平衡。平衡为$\lambda = 1$ 的 t-设计称为 Steiner t-设计。部分线性空间是一种关联系统，其中每一对不同的点至多关联一个区组。特别地，当每一对点都关联唯一一个区组时，这种关联系统称为线性空间。部分线性空间的区组通常称为直线。注意，Steiner 2-设计是线性空间。对称 Steiner 2-设计就是有限射影平面。它们恰好是参数为 $v = n^2 + n + 1$、$k = n + 1$、$\lambda = 1$ 的 2-设计。这个数 n 称为有限射影平面的阶。阶为 n 的仿射平面是一个 $2-(n^2, n, 1)$ 设计。给定一个阶为n 的射影平面及其中一条直线 ℓ，删去直线 ℓ 及其上的点 ℓ 后得到的关联系统是一个阶为 n 的仿射平面。这个过程也可以反向进行。可以证明，仿射平面的直线自然地分成若干个 $n + 1$ “平行类”，使得每个平行类中的直线构成点集的一个划分，而来自不同平行类的任意两条直线相交（这里我们采用通常的约定，将部分线性空间中的每条直线视为与之关联的点集）。给定一个阶为 n的仿射平面，通过添加 $n+1$ 个点（“无穷远点”），使其分别对应仿射平面的各个平行类，并添加一条新的直线（“无穷远直线”），使其与这些无穷远点关联，即可得到一个阶为 n 的射影平面。这称为给定仿射平面的射影闭包。

给定关联系统 D 及其一个点 x， D 在 x 处的收缩 D_x 是一个关联系统，其点为 D 中除 x 外的点，区组为 D 中与 x 关联的区组，其关联关系则是 D 的关联关系在这些点和区组上的限制。显然，当 $t > 0$ 时， $t-(v, k, \lambda)$ 设计的每个点收缩都是一个 $(t-1)-(v-1, k-1, \lambda)$ 设计。 $t-(v, k, \lambda)$ 设计 D 的单点扩张是一个 $(t+1)-(v+1, k+1, \lambda)E$ （若存在），且 D 是 E 在某个点处的收缩。阶为 n 的仿射平面的单点扩张称为阶为 n 的反演平面。这些正是 $3-(n^2+1, n+1, 1)$ 设计。显然，反演平面的阶等于其所有点收缩的共同阶。反演平面的区组通常称为反演平面的圆。

给定一个素数幂 q，以及 $n \geq 1$。阶为 q 的域上的 n维射影空间记作 $PG(n, q)$。注意，当 $n \geq 2$ 时， $PG(n, q)$ 中点与超平面之间的关联系统是一个（对称的） $2-(q^{n+1}-1)/(q-1), (q^n-1)/(q-1), (q^{n-1}-1)/(q-1))$ 设计。根据该设计可以唯一恢复出射影空间：射影空间的平坦正是该设计的区组的有限交集。

特别地，对于素数幂 q、 PG，(2, q) 是一个阶为 q 的射影平面。

阶为 n 的射影平面中的卵形，是由 $n+1$ 个点组成的集合，其中任意三点都不共线。因此，平面中的每条直线与卵形相交于 0、1 或 2 个点。相应地，这条直线称为卵形的外割线、切线或割线。容易看出，卵形上的每个点都在唯一一条切线上，因此共有 $n+1$ 条切线。当 C 是偶数阶 n 的射影平面中的一个卵形时，平面上存在唯一一点 x，使得与 C 相切的直线恰好是经过 x 的直线。这个点称为卵形的核。显然，卵形的核不属于该卵形。

对于素数幂 q， PG(3, q) 中的卵形体是一个点集，使得射影空间中的每个平面与该集合相交于一个卵形或一个单独的点。平面若与卵形体相交于一个点，则称为卵形体的切平面；若相交于一个卵形，则称为割平面。容易看出，PG(3, q) 中的卵形体恰有 q^2+1 个点，并且卵形体中的每个点 x 都在唯一一个与该卵形体相切的平面上。事实上，卵形体的切平面构成对偶射影三维空间中的一个卵形体。容易看出，卵形体中任意三点都不共线。由于 PG(3, q) 中任意三个不共线点共处于唯一一个平面内，因此卵形体中的任意三点都共处于卵形体所包含的唯一一个卵形中。

给定 PG(3, q) 中的一个卵形体 $\mathcal{O}$，令 $I(\mathcal{O})$ 表示这样一个关联系统：其点是 $\mathcal{O}$ 中的点，区组是包含在 $\mathcal{O}$ 中的卵形。从上一段的讨论可以立即看出，$I(\mathcal{O})$ 是一个（素数幂阶 q 的）反演平面。所有已知的有限反演平面都是由这一构造得到的。下面是 Dembowski 的一个著名定理（见 [4, 5]）。该定理的证明占据了 Dembowski 的著作 [5], 中几乎整整一章，尽管这本书的行文风格极其晦涩。

定理 1.1（Dembowski）：设 I 是一个偶数阶 q 的反演平面。那么， q 是 2 的幂，并且 I 同构于 $I(\mathcal{O})$，其中 $\mathcal{O}$ 是 PG(3, q) 中的某个卵形体。

人们普遍认为，任何有限射影平面（等价地，任何有限仿射平面）的阶都必定是素数幂。定理 1.1 表明，偶数阶仿射平面若要有单点扩张，其阶必须是 2 的幂。虽然证明不存在 10 阶仿射平面需要借助强大的计算机（见 [7]），但由该定理可立即得出，不存在 10 阶反演平面。

回顾一下， PG(3, q)中的直线线性复形是所有全迷向

直线的集合，其中的“全迷向”是相对于（ $PG(3,q)$的底层向量空间上的）非退化辛形式而言的。在下一节中，我们将讨论广义四边形的正则性，并给出 Benson 定理的证明：该定理刻画了 $PG(3,q)$（q 素数幂）中的直线线性复形，指出它们是唯一的正则对称有限广义四边形。我们的证明依赖于 Dembowski 和 Wagner 关于有限射影空间的一个精妙组合刻画。在第三节也是最后一节中，我们将给出 Dembowski 定理（定理 1.1）的一个简短证明，并从 Benson 定理推出该定理。我们认为，这里的证明比 Dembowski 的原始证明清晰得多。

对于本文中关于设计理论／有限射影空间的未经证明的断言，读者可参阅 [2, 5] 和 [6]。

2 Benson 定理

回顾一下（[8]）：对于整数 s、t，阶为（s、t）的广义四边形（简称广义四边形）是一个部分线性空间 X，其每条直线上有 $s+1$ 个点，且每个点上有 $t+1$ 条直线，并满足以下性质：给定 X 中任意一点 x 和一条直线 ℓ，使得 $x \notin \ell$，则存在唯一一点 y，使得 $y \in \ell$，并且 y 与 x 共线。简单的计数论证表明，阶为（s、t）的广义四边形 X 有（$s+1$）（$st+1$）个点和（$t+1$）（$st+1$）条直线。广义四边形中一点 x 的星（记作 star(x)）是与 x 共线的所有点 y（包括 x 本身）构成的集合。显然，任意一点的星包含 s（$t+1$）$+1$ 个点。由广义四边形的定义还可直接推出：对于 X 中任意两个不共线点 x、y，恰有 $t+1$ 个点同时与 x 和 y 共线。这 $t+1$ 个点构成的集合称为点对 x、y 的迹。由于迹中的任意两个点都不共线，因此至多有 $t+1$ 个点与 x、y 的迹中的所有点共线。这些点构成的集合称为点对 x、y 的张成。广义四边形 X 中一对不共线点 $\{x,y\}$ 若满足其张成 $\{x,y\}$ 的大小为（可能的最大值） $t+1$，则称该点对为正则。若 X 中所有此类点对均为正则，则称 X 为正则广义四边形。注意，若 σ 是正则广义四边形中的一个张成，则 σ 中的 $t+1$ 个点两两不共线，并且 σ 是其中任意两点的张成。

部分线性空间 X 的共线图是以 X 的点为顶点的图，其中两个点相邻，当且仅当它们互不相同且在 X中共线。回顾一下，对于正整数 m、n，完全二分图 $K_{m,\,n}$ 有 $m+n$ 个顶点，分成两个部分，大小分别为 m 和 n，图中两个顶点相邻，当且仅当它们属于不同部分。由此可对广义四边形的正则性概念作出如下直接的图论表述：

广义四边形的:

引理 2.1:

任意一个阶为（s,t）的广义四边形 X 的共线图，都有 $\leq \frac{1}{2}s^2$（$s+1$）（$st+1$）（$t+1$）$^{-1}$ 个与 $K_{t+1,\ t+1}$ 同构的导出子图。当且仅当X 是正则的时，等号成立。

证明：设 N 为 X 的共线图中导出K_{t+1}、$_{t+1}$ 的总数。注意，对于 X的任意一对不共线点 e，以及 X的共线图中包含 e 的任意导出子图 $K_{t+1,t+1}$，该图的两个部分必定分别是 e的迹和张成。因此，e 至多包含于一个$K_{t+1,t+1}$中，并且当且仅当 e 是正则的时，这样的$K_{t+1,t+1}$ 存在。由于 X有（$s+1$）（$st+1$）个点，且每个点与（$s+1$）（$st+1$）$-$（s（$t+1$）$+1$）$=s^2t$ 个其他点不共线，因此这样的点对共有$\frac{1}{2}s^2t$（$s+1$）（$st+1$）个 e。此外，X 中的每个N $K_{t+1,t+1}$ 都恰好包含$2\binom{t+1}{2}$ 个这样的点对。因此，我们可以用两种方式计算点对（e,G）的总数，其中 e 如上所述，而 G 是$K_{t+1,t+1}$ 的一个副本，其顶点集包含 e。由此得到$2\binom{t+1}{2}N \leq \frac{1}{2}s^2t$（$s+1$）（$st+1$），且当且仅当 X 是正则的时等号成立。 □

设 q 为素数幂。回顾一下，$PG(3,q)$ 的极性是一个保持关联关系、交换点与平面（因而将直线映射为直线）的置换。若一个点或平面与其在给定极性下的像关联，则称其为绝对的。若所有点（等价地，所有平面）都是绝对的，则称该极性为零极性。令 $W(q)$ 表示如下部分线性空间：其点是 $PG(3,q)$ 的点，其直线是 $PG(3,q)$ 中在给定零极性下保持不变的直线。在共轭作用下，$PG(3,q)$ 的共线变换群在 $PG(3,q)$ 的零极性上具有传递性，因此该关联系统 $W(q)$ 在同构意义下唯一。零极性由底层向量空间上相对于某个非退化辛形式的正交补给出。利用这一事实，容易验证，对于任意素数幂 q，$W(q)$ 是阶为 (q,q) 的正则广义四边形。在 [1], , Benson 证明:

定理 2.2（Benson）:

如果 W 是一个阶为（q，q）的正则广义四边形，那么 q 是一个素数幂，并且 W 与 $W(q)$同构。

我们回顾一下，如果 x、y 是 2-设计 D中的两条不同直线，那么连接 x 和 y 的 2-设计中的直线，是包含$\{x,y\}$的 D 的所有区组的交点。如果 λ 是 D 的平衡，则 D 的一条直线可以定义为 D 中由 λ 个不同区组的交集表示的 ≥ 2 个点的集合。Dembowski 和 Wagner（[3]）的一个著名定理指出:

定理 2.3（Dembowski 和 Wagner）:

设 D 是一个平衡为 >1的对称 2-设计。假设 D的每条直线都与 D的每个区组相交。那么存在素数幂 q 和一个大于 3 的整数 $n \geq$，使得 D 同构于$PG(n,q)$中点与超平面构成的设计。

定理 2.2 的证明：我们先提出两个断言。(i) W中的每条直线都与 W中的每个星相交；(ii) W中的每个张成集都与 W中的每个星相交。(i)显然成立，因为 W 是一个广义四边形：若 ℓ 是一条直线，且 x 是 W上的一个点，那么当 $x \in \ell$时，$\ell \subseteq$ star(x)；而当 $x \notin \ell$时，$\ell \cap$ star(x) $=\{y\}$，其中 y 是 ℓ 中与 x共线的唯一点。为证明(ii)，注意到由于 W 是正则的，张成集 σ 中的所有点对都有一个公共迹，记作 τ。若 $x \in \tau$，则 $\sigma \subseteq$ star(x)。反之，star(x)与 σ 至多交于一点。因此，集合$A(y) :=$ star(y) $\setminus \tau$, y $\in \sigma$两两不相交，且每个集合的大小均为 q^2（若对于 σ中的 $y_1 \neq y_2$，有 $z \in A(y_1) \cap A(y_2)$，则 $z \notin \tau$ 且 $z \in$trace($\{y_1, y_2\}$) $=\tau$，矛盾）。这些集合包含于 τ 的补集中，该补集的大小为$(q+1)q^2$。因此，这些集合构成 τ补集的一个划分。于是，对于任意点 $x \notin \tau$，存在唯一的点 $y \in \sigma$，使得 $x \in$ star(y)（即 $y \in$ star(x)）。因此 $\sigma \cap$star(x) $=\{y\}$。这就证明了(ii)。

令 D 为关联系统，其点是 W 的点，区组是 W各点的星。显然，D 有 $(q+1)(q^2+1)$ 个点，也有同样多的区组。此外，由于 W 中的每个点 x 都与 $1+q(q+1)$ 个 $=q^2+q+1$ 点共线，因此 D 的每个区组的大小为 q^2+q+1。又对于点 $x_1 \neq x_2$，同时包含这两点的 D 区组为 star(x)，其中 x $\in$trace($\{x_1, x_2\}$)；当 x_1、x_2 在 W中不共线时如此；当 x_1、x_2 共线时（例如位于 W的直线 ℓ 上），这些区组为 star(x)，其中 x $\in \ell$。因此，D是一个（对称）$2-((q+1)(q^2+1)\ q^2+q+1, q+1)$ 设计。此外，D中连接任意两个共线点的直线就是 W的一条直线，而 D 中连接任意两个不共线点的直线则是这对点所张成的空间。因此，鉴于上一段的结论，D 的每条直线都与 D的每个区组相交。因此，由于 D是一个平衡度为 >1的对称设计，定理 2.3 适用，由此可知 q 是一个素数幂，且 D 是 $PG(3,q)$的点与平面设计。

通过由 W 构造 $PG(3,q)$，可知 $PG(3,q)$ 的每个平面都具有 star(x) 的形式，其中 x 是唯一确定的点。但是，对于任意两点 x, y，有$y \in$star(x) 当且仅当 x, y在 W 中共线。由于共线性是该点集上的自反且对称关系，因此映射 $x \mapsto$star(x) 是 $PG(3,q)$ 的一个零极性。根据用 W 描述的 $PG(3,q)$ 的直线（即 W 的直线和张成），现在立即可知，W 的直线正是此极性的不动直线。因此，W 是 $W(q)$。 □

3 Dembowski 定理

广义四边形的一个卵形体是广义四边形的一个点集，它与广义四边形的每条直线恰好交于一个点。显然，阶为 (s,t) 的广义四边形中的一个卵形体含有 $st+1$ 个点，其中任意两点均不共线，并且点 x 的星与其交于 1 个或 $t+1$ 个点——这取决于 x 是否属于该卵形体。

引理3.1：

$W(q)$中的任意卵形体都是环境空间 $PG(3,q)$中的卵形体。

证明：由于 $W(q)$中点的星恰好是环境空间$PG(3,q)$中的平面，因此 $PG(3,q)$中的任意平面与 $W(q)$中的卵形体 $\mathcal{O}$ 交于一个或 $q+1$ 个点。设 $PG(3,q)$中的直线 ℓ 与 $\mathcal{O}$ 交于 $m \geq 2$ 个点。经过 ℓ 的平面将（q^2+1-m）集 $\mathcal{O} \setminus \ell$ 划分为 $q+1$ 个部分，每部分大小为 $q+1-m$。因此我们有（$q+1$）（$q+1-m$）$=q^2+1-m$，即 $m=2$。因此，$\mathcal{O}$ 中没有三个点在 $PG(3,q)$中共线。由此可知，$|mathcalO$是 $PG(3,q)$中的卵形体。 □

设 $\mathcal{O}$ 是 $W(q)$ 中的一个卵形体。由于 $\mathcal{O}$ 的割平面恰好是补集 $\mathcal{O}$ 中各点的星，我们可以将这些割平面（从而也将 $\mathcal{O}$ 中的卵形）与 W 中不属于 $\mathcal{O}$ 的点对应起来。因此，反演平面 $I(\mathcal{O})$（在引言中定义）可以用 $W(q)$ 作如下内在描述：$I(\mathcal{O})$ 的点和区组分别是 $\mathcal{O}$ 中的点以及补集 $\mathcal{O}$ 中的点。对于 $W(q)$ 中的点 x、y，$x \in \mathcal{O}$、$y \not\in \mathcal{O}$、x 在 $I(\mathcal{O})$ 中与 y 关联，当且仅当 x、y 在 $W(q)$ 中共线。根据引理3.1，下述定理是 Dembowski 定理（定理 1.1）的一个版本：

定理 3.2：

设 I 是一个偶数阶为 q 的反演平面。那么，q 是 2 的幂，并且对于某个 $W(q)$ 中的卵形体 $\mathcal{O}$，I 与 $I(\mathcal{O})$ 同构。

实际上，当 q 是 2 的幂，且 $\mathcal{O}$ 是 $PG(3,q)$ 的卵形体时，很容易看出，部分线性空间 W（其点为 $PG(3,q)$ 的点，直线为 $\mathcal{O}$ 的切线）（是一个阶为 (q,q) 的正则广义四边形，因此）同构于 $W(q)$。显然，$PG(3,q)$ 的任意卵形体（其中 q 为偶数），都是这个 $W(q)$ 副本的卵形体。（当 q 是奇素数幂时，$W(q)$ 没有卵形体。）因此，定理 3.1 实际上等价于 Dembowski 定理。

定理 3.2 证明背后的关键观察如下。由于阶为 q 的反演平面 I 是一个 Steiner 3-设计，且其点收缩是阶为 q 的仿射平面，因此，若 x 是一个点，C 是 I 的一个圆（区组），且 $x \notin C$，那么 C 就是 I 在 x 处收缩所得平面 π 的射影闭包中的一个卵形。当 q 为偶数时，存在一个 I 中的点 $y \neq x$（该卵形的核

心 C），所有经过 π 中 C 的切线都通过该点。（由于无穷远直线是 C 的一条外割线， C 的核必定是一个仿射点。）

如果反演平面中的两个圆恰有一个公共点，我们就称它们相切。回忆一下（[5], 第 253 页），反演平面中的圆束是由经过某一点 x 的一组两两相切的圆组成的，它将除 x以外的所有点划分为若干部分。点 x称为该圆束的承载点。

引理 3.3:

设 I 是一个阶为 q的反演平面。

(a) 若 x 是一个点， C 是 I 中的一个圆，且 $x \in C$，则存在唯一的 I 的圆束 p，使得 $C \in p$，并且 x 是 p的承载点。

(b) 假设 q 为偶数。若 p 是一个承载点为 x 的 I 圆束，且 C 是I 中的一个圆，使得 $x \notin C$，并且 $C \notin p$，则 p 中存在唯一一个与 C相切的圆。

证明：(a) 注意，圆集 p 是 I 的圆束，当且仅当 $\{C \setminus \{x\} : C \in p\}$是将 I 在x处收缩后得到的仿射平面 π 中的一个平行类。因此，由于仿射平面中的每条直线都属于唯一一个平行类，结论得证。

(b) 考虑 x处 I 的收缩 π。令 ∞ 表示与平行类 $\{D \setminus \{x\}$ 对应的无穷远点（位于仿射平面 π的射影闭包中）： $D \in p\}$。注意， C 是这个偶数阶q平面中的卵形。由于 $\infty \notin C$，且无穷远直线不是 C 的切线（显然它是 C的一条外割线），并且经过 ∞，因此存在唯一一条（在这个射影闭包中）经过 ∞ 且与 C相切的直线 l。于是，$(l \setminus \{\infty\}) \cup \{x\}$是圆束 p 中唯一与 C相切的圆。 □

引理 3.4:

设 e 是偶数阶 q反演平面 I 中的两个点所成的集合。那么， I中恰有 $q-1$ 个圆 C，使得 C 与I 中所有包含 e的圆相切。这些 $q-1$ 个圆将 I点集中的 e 的补集划分开。

证明：设 $e = \{x, y\}$。设 $\mathcal{C}_e$ 为 I 中所有满足以下条件的圆的集合：所有包含 e 的圆都与 C相切。我们首先注意到，对于 $C \in \mathcal{C}_e$，有 $C \cap e = \emptyset$。显然， x、y 中至多有一个点属于 C。不妨设 $y \notin C$。设 π 为在 y处压缩 I 后得到的仿射平面。设 $\overline{\pi}$ 为其射影闭包。 C 是 $\overline{\pi}$中的一个卵形。由于 $C \in \mathcal{C}_e$，经过 x 的 $\overline{\pi}$ 中的所有直线都与 C相切。因此， x 是 C的核。于是 $x \notin C$。

现在，设 C_1、C_2 是 $\mathcal{C}_e$ 中两个不同的圆。我们断言 $C_1 \cap C_2 = \emptyset$。反设不然。设 $z \in C_1 \cap C_2$。令 π 为 I 在 z 处的收缩。令 $\overline{\pi}$ 为

π 的射影闭包，即添加无穷远直线 ℓ 后得到的图形。又令 m 为 $\overline{\pi}$ 中连接点 x、y 的直线。对于 $i=1$，令 ℓ_i 为 $\overline{\pi}$ 中延伸仿射直线 $C_i\setminus\{z\}$ 的直线。记 w 为 $\overline{\pi}$ 中 ℓ_1 与 ℓ_2 的交点。注意，任何包含 e 但不包含 z 的 q 个圆 D，都是 $\overline{\pi}$ 的卵形。点 w 位于 D 的至少两条切线上，即 ℓ_1、ℓ_2。由于 $\overline{\pi}$ 是偶数阶 q 的射影平面，因此 w 是 D 的核。所以，对于 I 中满足 $z\notin D$、$e\subseteq D$ 的任意圆 D，都有 $w\notin D$。此外，由于 ℓ 是 D 的外割线，而 m 是 D 的割线，因此 $w\notin \ell\cup m$。这与事实矛盾：直线 ℓ、m 连同这些 q 个卵形 D 显然覆盖了 $\overline{\pi}$ 的整个点集。这就证明了该断言。

因此，$\mathcal{C}_e$ 中的圆两两不相交，每个圆都是大小为 $q+1$ 的集合，且包含在 e的补集中（其大小为 q^2-1）。因此，$\#(\mathcal{C}_e)\le(q^2-1)/(q+1)=q-1$，当且仅当 $\mathcal{C}_e$ 中的圆将 e的补集划分时取等号。所以，要完成证明，只需证明对于 I 的点集中的每个二元子集 e，这里都取等号。

对于 I 中的任意圆 C 和点 x，使得 $x\notin C$, C 是收缩 π I 于 x所得的射影闭包 $\overline{\pi}$ 中的一个卵形。由于 $\overline{\pi}$ 的阶 q为偶数，存在 $\overline{\pi}$ 中的唯一一点 y，使得经过 y 的 $\overline{\pi}$ 的所有直线都是 C的切线。由于无穷远直线是 C的外割线，y 必为仿射点。因此，C 的补集中 I 的每个 $(q^2+1)-(q+1)=q^2-q$ 个点 x，都属于唯一的二元子集 $e=\{x,y\}$，使得 $C\in\mathcal{C}_e$。因此，对于 I中的每个 q^2+1(q) 个圆 C，恰有 $\frac{q^2-q}{2}$ 2个 e-集使得 $C\in\mathcal{C}_e$。于是，当 e 遍历 I的点集中的 e 的 $\binom{q^2+1}{2}$ 2-子集时，$\mathcal{C}_e$ 的平均大小为 $q(q^2+1)$ $\frac{q^2-q}{2}/\binom{q^2+1}{2}=q-1$。但我们已经看到，$q-1$ 也是每个 $\mathcal{C}_e$大小的上界。因此，对所有 e，$\#(\mathcal{C}_e)=q-1$。 □

定理 3.2 的证明:

设 I 是一个偶数阶为 q 的反演平面。考虑关联系统 W，其点是 I 的点和圆，并且对于 I 的每个圆束 p，W 都有一个区组 $\hat{}p$，该区组由 p 的承载点以及 p 中的圆组成。由引理 3.3 (a) 可立即得到，W 是一个部分线性空间，每条直线上有 $q+1$ 个点，且每个点所在的直线数为 $q+1$。注意，根据 W 的构造，我们有：(i) I 中任意两个点在 W 中都不共线；(ii) 若 x 是一个点，C 是 I 的一个圆，则 x 和 C 在 W 中共线，当且仅当 $x\in C$；(iii) I 中的两个圆 C_1、C_2 在 W 中共线，当且仅当 C_1 和 C_2 是（相等或）相切圆。我们断言，W 与 $W(q)$ 同构。一旦该断言得到证明，证明即告完成，因为根据 W 的构造，I 的点集 $\mathcal{O}$ 是 W 的一个卵形体，并且 $I=I(\mathcal{O})$。

设 p 是以 x 为承载点的 I 圆束，且 $l=\hat{}p$ 是 p 对应的直线

。为证明 W 是一个阶为 (q,q) 的广义四边形，我们需要证明： W 中任意给定的、位于直线 l 外的点，都与 l 中 W 上唯一一个点共线。由于圆束 p 中的圆将除 x 以外的点划分成若干部分，若 W 中给定的点是 I 的一个点 $y \neq x$ ，则结论显然成立：此时，包含 y 的 p 中唯一的圆，是 l 中唯一与 y 共线的点。接下来，设 W 中的这个点是 I 的一个圆 $C \notin p$ 。若 $x \in C$，则 l 上与 W 中的 C 共线的唯一点是 x 。若 $x \notin C$，则由引理 3.3 (b) 保证存在的 I 中的圆，是 l 中与 W 共线的唯一点。因此， W 确实是一个阶为 (q, q) 的广义四边形。

对于点集 I 的每个二元子集 e ，我们按如下方式关联点集 W 的一个子集。该集合由 e 中的两个点、包含 e 的 I 个圆，以及引理 3.4 所保证的 I 个圆组成。由引理 3.4 以及上文对 W 中共线关系的描述可立即得出， W 的共线图在该集合上诱导出一个 $K_{q+1,\ q+1}$ 。因此，对于点集 I 的 $\binom{q^2+1}{2}$ 2-子集，我们在 W 的共线图中找到了 $\binom{q^2+1}{2}$ $K_{q+1,\ q+1}$ 。然而，在 $s = t = q$ 的情形下， $\binom{q^2+1}{2}$ 正是引理 2.1 中的上界。因此，由引理 2.1， W 是一个阶为 (q, q) 的正则广义四边形。于是，定理 2.2 蕴含 q 是一个素数幂，且 W 同构于 $W(q)$。由于 q 为偶数，可知 q 是 2 的幂。 □

参考文献

[1] C.T. Benson, 《广义四边形的结构》, J. Algebra 15（1970年）, 443-454。[2] P. J. Cameron 和 J.H. van Lint, 《设计、图、码及其联系》, 伦敦数学会学生教材 22, 剑桥大学出版社, 1996年。[3] P. Dembowski 和 A. Wagner, 《有限射影空间的一些刻画》, Arch. Math. 11（1960年）, 465-469。[4] P. Dembowski, 《偶数阶莫比乌斯平面》, Math. Ann. 157（1964年）, 179-205。[5] P. Dembowski, 《有限几何》, 施普林格出版社, 纽约, 1968年。[6] J.W.P. Hirschfeld, 《三维有限射影空间》, 牛津大学出版社, 1986年。[7] C.W.H. Lam, 《寻找10阶有限射影平面》, Amer. Math. Monthly 98（1991年）, 305-314。

[8] S.E. Payne 和 J.A. Thas，《有限广义四边形》，ResearchNotes in Maths 110，Pitman，伦敦，1984。