arXiv:2303.02019v1 [math.AC] 3 Mar 2023

与图相关的阿廷代数的底

JORGE NEVES

Abstract. 给定一个简单图，考虑一个系数取自某个域、变量与该图的边相对应的多项式环。给定一个非空的偶数边欧拉子图，并选取其中一半的边，考虑由这些边的乘积减去该子图中其余边的乘积所得到的齐次二项式。我们定义一个齐次理想，其生成元包括以这种方式得到的所有二项式（遍历各个欧拉子图及其一半边的选取），以及环中变量的平方。这个理想与 Neves、Vaz Pinto 和 Villarreal 引入的欧拉理想有关。我们将相应的商称为与该图相关的欧拉阿廷代数。本文旨在从图论的角度研究这些代数的底。主要结果包括对底的单项式基的组合刻画、二部图情形下 Gorenstein 欧拉阿廷代数的刻画，以及完全图和完全二部图情形下 h-向量与底次数的计算。

1. Introduction

设 $R = K[t_1, \ldots, t_s]$ 为域 K上的一个标准分次多项式环。一个标准Artin分次代数 $A = R/I$是 R 关于某个齐次理想 $I \subseteq R$的一个零维商。这些分次环已从多种视角得到研究；例如，对其Lefschetz性质的研究，尤其是在Gorenstein情形和level情形中（参见 [1, 3, 4, 6, 9], 以了解近期工作的少量实例，以及 [10], 以查阅综述）。在本文中，我们研究与简单图相关的标准Artin分次代数的底。通过将简单图的边集与 R的变量集对应起来，我们考虑如下形式的 I：

$$I = (\mathscr{E}, t_1^2, \ldots, t_s^2),$$

其中 $\mathscr{E}$ 是由图的边的偶数基数欧拉子集得到的一组二项式。这些标准Artin分次代数（我们将其称为欧拉阿廷代数）与该图的欧拉理想存在典范关联，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13E10, 13H10, 05E40; 05C70.

Key words and phrases. 标准Artin分次代数，底， T-连接。本工作得到了科英布拉大学数学中心（UIDB/00324/2020）的部分资助，该项目由葡萄牙政府通过FCT/MCTES资助。作者在例子的计算中使用计算机代数系统Macaulay2, [5], 。

该图由 [13]引入。我们的目标是对欧拉阿廷代数的底给出组合刻画。

在第 2 节中，基于 [12] 和 [11] 关于欧拉理想的结果，我们根据图对欧拉阿廷代数的单项式基给出组合刻画（参见命题 2.7）。这个基中的单项式是无平方单项式，它们对应于图的边集；对于任意偶数边欧拉子图，这些边集所含边数都不超过其边数的一半，并且还须满足由边集的某种排序所带来的附加条件。这些特殊的边集称为约化奇偶连接（参见定义 2.6），它们与由以下元素构成的数对集合一一对应：(T, p)，其中 T 是图的一个顶点集合，p 是 $\mathbb{Z}_2$ 的一个元素，并且存在一个基数奇偶性为 p 的 T-连接（参见命题 2.12 和推论 2.13）。在第 4 节和第 5 节中，我们利用这些刻画，计算完全图和完全二部图的欧拉阿廷代数的 h-向量。在第 3 节中，我们研究欧拉阿廷代数的底。我们首先证明它由 K 上的单项式剩余类生成（参见命题 3.1），然后给出组合刻画，描述底基中的单项式所对应的边集（参见定理 3.4）。作为应用，我们证明，如果图是二部图，那么唯一的 Gorenstein 欧拉阿廷代数是完全交，即当上文的 $\mathscr{E}$ 为空时所得到的代数（参见定理 3.6）。

2. Preliminaries

2.1. 设定。下文中，G 表示一个简单无向图。G 的顶点集记为 V_G，其边集（我们将其视为 V_G的非空子集集合）记为 E_G。我们为 G 关联多项式环

$$K[E_G] = K[t_e : e \in E_G],$$

其中 K 是任意域。若 $\alpha \in \mathbb{N}^{E_G}$，当$e$ 在 E_G中变化时，$t_e^{\alpha(e)}$的乘积所得到的单项式记为 t^α。若 $J \subseteq E_G$ 是任意边集，我们也用 t_J 表示标识 J中各条边的所有变量之积。

设 $C \subseteq E_G$ 和 $v \in V_G$。v 在 C 中的度定义为

$$\deg_C(v) = \sum_{e \in C} |\{v\} \cap e|.$$

若子集 C满足对每个 $v \in V_G$，$\deg_C(v)$均为偶数，则称其为欧拉的。设 J、$L \subseteq E_G$均非空。若 $J \cap L = \emptyset$、$|J| = |L|$ 且$C = J \cup L$ 为欧拉的，则称二项式 $\mathsf{t}_J - \mathsf{t}_L$ 为欧拉二项式。将欧拉二项式的集合记为 $\mathscr{E}$。

定义 2.1. 若 G 是任意简单图，定义 $I(G) = (\mathscr{E} \cup \{t_e^2 : e \in E_G\})$，并将与 G 相关联的欧拉阿廷代数定义为 $A(G) = K[E_G]/I(G)$。

如果唯一的偶数基数边欧拉子集是空集——当 G 是森林或具有唯一奇圈的图时即是如此——那么

$$A(G) = K[E_G]/(t_e^2 : e \in E_G),$$

这是一个众所周知的完全交。

2.2. 欧拉理想。考虑 $K[V_G] = K[x_i : \ i \in V_G]$ 并令 φ: $K[E_G] \to K[V_G]$为由下式定义的环同态 $\varphi(t_e) = x_i x_j$ 对每个 $e = \{i, j\} \in E_G$。定义 G 中的欧拉理想见 [13, 定义 1。1] 如下

$$I(X_G) = \varphi^{-1}(x_i^2 - x_j^2 : i, j \in V_G).$$

由 [13, 命题 2.5] 可知, $I(X_G) = (\mathscr{E} \cup \{t_e^2 - t_f^2 : \ e, f \in E_G\})$。换言之，对于任意选取的 $e \in E_G$, $I(G)$ 与 $I(X_G)$ 通过 $I(G) = I(X_G) + (t_e^2)$ 相关联。

2.3. 格罗布纳基。根据[11, 12], , 研究欧拉理想 $I(X_G)$ 的第一步是描述一个格罗布纳基。正如我们接下来要说明的，可以从[11, 12]的结果轻松推导出 $I(G)$ 的格罗布纳基。

定义 2.2. 给定边集 $E_G = \{e_1, \ldots, e_s\}$ 的一个排序，在 $K[E_G]$ 上定义 $\succeq$，即关联的分次反字典序，规定当且仅当 $\deg(\mathsf{t}^\alpha) > \deg(\mathsf{t}^\beta)$，或 $\deg(\mathsf{t}^\alpha) = \deg(\mathsf{t}^\beta)$ 且 $(\alpha(e_1) - \beta(e_1) \ldots, \alpha(e_s) - \beta(e_s))$ 的最后一个非零坐标为负时，$\mathsf{t}^\alpha \succ \mathsf{t}^\beta$，其中 $\alpha \neq \beta \in \mathbb{N}^{E_G}$。

命题 2.3. 给定 E_G 的一个排序，集合 $\mathscr{E} \cup \{t_e^2 : \ e \in E_G\}$ 是关于关联的分次反字典序的 Gr ¨obner 基，适用于 $I(G)$。

证明. 根据 [11, 定理 3.3] , 集合 $\mathscr{E} \cup \{t_e^2 - t_f^2 : \ e, f \in E_G\}$ 是欧拉理想 $I(X_G)$ 关于分次反字典序的 Gr¨obner 基。考虑 $\ell \in E_G$，即最后一条边。由于该 Gr¨obner 基中没有元素的首项能被 t_ℓ 整除，根据布赫伯格判据，我们推得

$$\mathscr{E} \cup \{t_e^2 - t_f^2 : e, f \in E_G\} \cup \{t_\ell^2\} \tag{1}$$

是一个 Gr¨obner 基，适用于 $I(G) = I(X_G) + (t_\ell^2)$。由于集合 $\mathscr{E} \cup \{t_e^2 : \ e \in E_G\}$ 中元素的首项生成的理想与 (1) 的理想相同，因此该集合也是适用于 ¨obner 基，适用于 $I(G)$。□

我们用 $\triangle$ 表示集合的对称差。

推论 2.4. 设 $M \subseteq E_G$ 是任意边集。当且仅当存在一个偶数基数的欧拉子集 $C \subseteq E_G$ 满足 $|M \triangle C| < |M|$ 时，$\mathsf{t}_M \in I(G)$。

证明。假设 t_M 可被 $\mathscr{E}$ 中某个元素的首项整除。不失一般性，设该元素为 $\mathsf{t}_J - \mathsf{t}_L$, 其中 $J \cap L = \emptyset$、 $|J| = |L|$, 且 $C = J \cup L$ 是一个欧拉子集，其最后一条边属于 L。则 $\mathsf{t}_J \nmid \mathsf{t}_M \iff J \subseteq M$, 并且

$$\mathbf{t}_M = \mathbf{t}_{M \setminus J}(\mathbf{t}_J - \mathbf{t}_L) + \mathbf{t}_{M \setminus J}\mathbf{t}_L. \tag{2}$$

如果 $\mathsf{t}^{M \setminus J}\mathsf{t}_L$ 是一个平方自由单项式，那么

$$M \cap C = J \iff (M \setminus J) \cup L = M \triangle C,$$

使得 $\mathsf{t}^{M \setminus J}\mathsf{t}_L = \mathsf{t}_{M \triangle C}$和 $|M| = |M \triangle C|$。如果 $\mathsf{t}^{M \setminus J}\mathsf{t}_L$ 不是无平方因子的，那么

$$|M \cap C| > |J| = |C|/2 \iff |M \triangle C| < |M|.$$

如果存在一个偶数基数的欧拉子集 $C \subseteq E_G$，其

$$|M \triangle C| < |M| \iff |M \cap C| > |C|/2,$$

我们可以选择 $J \subseteq M \cap C$，这是一个基数为 $|C|/2$ 且不包含 C 的最后一条边的集合。于是，$\mathsf{t}_J - \mathsf{t}_L$ 是如上所述的欧拉二项式，而在 (2) 中，单项式 $\mathsf{t}^{M \setminus J}\mathsf{t}_L$ 可被某个变量的平方整除。因此，$\mathsf{t}_M \in I(G)$。反过来，若 $\mathsf{t}_M \in I(G)$，则 t_M 在关于命题 2.3 的 Gr¨obner 基的标准表达式中余数为零。我们先仅用 $\mathscr{E}$ 中的元素进行除法，直到得到一个非平方自由单项式，以此计算该余数。设 $C_1, \ldots, C_m$，其中 $m \geq 1$，为相应的偶数基数欧拉子集。根据我们最初的论证，

$$|(M \triangle C_1 \triangle \cdots \triangle C_{m-1}) \triangle C_m| < |M \triangle C_1 \triangle \cdots \triangle C_{m-1}| = |M|.$$

设 $C = C_1 \triangle C_2 \triangle \cdots \triangle C_m$，它也是一个偶数基数欧拉子集。于是$|M \triangle C| < |M|$。□

不满足推论 $M \subseteq E_G$ 2.4 中的条件的子集称为奇偶连接。

定义 2.5（参见 [11, 定义 4.11]）。若对于每个偶数基数的欧拉子集 $C \subseteq E_G$，$J \subseteq E_G$ 都是奇偶连接，则称子集 $J \subseteq E_G$ 为奇偶连接。

$$|J \cap C| \leq \tfrac{|C|}{2} \iff |J \triangle C| \geq |J|.$$

由推论2.4 可知，使 d非零的 $A(G)_d$ 的最大值称为最大 socle 次数，它是 $A(G$ 的图的奇偶连接的最大基数。

2.4. 单项式基。设 I 是赋有单项式序的多项式环中的一个理想，则根据 Macaulay 定理（参见 [2, 定理 2.6]），不属于 I 的初始理想的单项式的留数构成多项式环对该理想取商的 K-基。在我们的情形中，固定 E_G 的任意排序后，不属于 $I(G)$ 的初始理想的单项式必定具有 t_J 的形式，其中 $J \subseteq E_G$ 是一个奇偶连接，但反之不成立。以下概念在[12, 定义 14] 中引入。

定义 2.6。给定 E_G 的一个排序，若对于任意非空且具有偶数基数的欧拉子集 $C \subseteq E_G$，且

$$|J \triangle C| = |J| \iff |J \cap C| = |C|/2,$$

则 J 包含 C 中的最后一条边。

命题 2.7。给定 E_G 的任意排序，由 $\mathsf{t}_J + I(G)$ 给出的单项式剩余类构成 $A(G)$ 的一个 K-基，其中 J 属于 G 的约化奇偶连接集合。

证明。参见 [12, 定理 15]。 □

我们可以利用图的相关概念—— T-连接，为 $A(G)$的 K-基给出第二种刻画。设 $T \subseteq V_G$ 和 $J \subseteq E_G$。当且仅当满足以下条件时，我们称 J 为 T-连接：

$$T = \{v \in V_G : \deg_J(v) \text{ is odd}\}.$$

因此，子集 $C \subseteq E_G$ 是欧拉子集，当且仅当 C 是一个 $\emptyset$连接。给定$T \subseteq V_G$，可以证明，存在一个 T连接，当且仅当 T 与 G 每个连通分支的顶点集的交集的基数都是偶数（参见 [8, 命题 127]）。

记号 2.8。令 $\mathcal{T}_G$ 表示存在一个 T-连接的所有 $T \subseteq V_G$ 构成的集合。

固定 $T \in \mathcal{T}_G$，并令 J_1 和 J_2 为两个 T-连接。则 $J_1 \triangle J_2$ 是一个 $\emptyset$-连接（例如参见 [8, 命题 12.6]）；换言之，$J_1 \triangle J_2$ 是一个欧拉子集。由于

$$|J_1 \triangle J_2| \equiv_2 |J_1| + |J_2|,$$

如果存在基数奇偶性相反的 T-连接，则该图包含一个奇圈，即它是非二分图。反过来结论也成立（例如参见 [11,引理 4.6]）。

定义 2.9. 设 $T \subseteq V_G$, $p \in \mathbb{Z}_2$ 和 $J \subseteq E_G$。

(i) 若 J是一个 T-连接且 $|J| + 2\mathbb{Z} = p$，则称 J为一个 (T, p)-连接。

(ii) 令 $\mathcal{T}_{\mathrm{p},G}$ 表示允许存在一个 (T, p)-连接的 $(T, p) \in \mathcal{T}_G \times \mathbb{Z}_2$ 的集合。(iii) 若 $(T, p) \in \mathcal{T}_{\mathrm{p},G}$，记 $\tau(T, p) = \min\{|J| : J$是一个 (T, p)-连接$\}$。(iv) 定义 $\theta(J) = (T, p) \in \mathcal{T}_{\mathrm{p},G}$，令 $T = \{v \in V_G : \deg_J(v)$ 为奇数$\}$ 且$p = |J| + 2\mathbb{Z}$。

若 G 是非二分图，则 $\mathcal{T}_{\mathrm{p},\,G} = \mathcal{T}_G \times \mathbb{Z}_2$；而若 G 是二部图，则对每个 $T \in \mathcal{T}_G$，集合 $\mathcal{T}_{\mathrm{p},\,G}$ 恰好包含 $(T, 0)$ 或 $(T, 1)$ 这两对中的一对，因此 T-连接的基数由 T 决定。对于二部图 G，我们将 $\tau(T, p)$ 简写为 $\tau(T)$。

下面的引理由上述关于 T-连接的初等性质（参见 [8, 命题 12.6]）以及对称差基数的公式即可得出。

引理 2.10. 若 J_1 是一个 (T_1, p_1)-连接，且 J_2 是一个 (T_2, p_2)-连接，则 $J_1 \triangle J_2$ 是一个 $(T_1 \triangle T_2, p_1 + p_2)$-连接。特别地，若 J_1 和 J_2 是两个 (T, p)-连接，则存在一个偶数基数的欧拉子集 $C \subseteq E_G$，使得 $J_2 = J_1 \triangle C$。

注 2.11. 令 $J \subseteq E_G$，并令 $(T, p) = \theta(J)$。上述引理可用于证明：J是奇偶连接，当且仅当 $\tau(T, p) = |J|$，即奇偶连接与基数最小的(T, p)-连接相同。

最后，下一个结果给出了命题 $A(G)$的2.7的单项式基的第二种组合刻画，其形式为 T-连接。

命题 2.12. 固定 E_G 的一个排序。对于每个 $(T, p) \in \mathcal{T}_{\mathrm{p},G}$，在所有 (T, p)-连接中，存在唯一的约化奇偶连接。

证明。 参见 [12, 命题 22]。 □

由此可知，在所有（T， p）-连接中，唯一的约化奇偶连接的基数为 τ（T， p），且将 θ 限制在G 的约化奇偶连接集合上，可得到与$\mathcal{T}_{\mathrm{p},\ G}$之间的一个双射。利用这一点和命题2.7，可得以下推论。

推论 2.13. $A(G)$ 关于变量 z 的希尔伯特级数，是所有$z^{\tau(T,p)}$ 之和，其中（T， p）遍历$\mathcal{T}_{\mathrm{p},\ G}$；并且固定边集的任意一种排序后，它也是所有 $z^{|J|}$ 之和，其中 J 遍历 G的约化奇偶连接集合。

最后，我们利用推论2.13 来计算 h-向量：对于仅有一个非空且基数为偶数的欧拉边子集的图，计算 A（G）。在第4 节和第5节中，我们还将利用这一结果，分别计算完全图和完全二部图的 h-向量，即 A（G）。

命题 2.14. 假设 E_G 恰有一个非空且基数为偶数的欧拉边子集 $C \subseteq E_G$。记 $s = |E_G|$, $c = {}^{|C|}\!/_2$ ，并令 $(h_0, h_1, \ldots, h_r)$ 表示 $A(G)$ 的 h-向量。那么

$$h_i = \begin{cases} \binom{s}{i}, & \text{if} \quad 0 \le i \le c-1, \\ \binom{2c-1}{c-1}\binom{s-2c}{i-c} + \sum_{k\ge 1}\binom{2c}{c-k}\binom{s-2c}{i-c+k}, & \text{if} \quad i \ge c. \end{cases}$$

特别地， $A(G)$ 的底次数 r 等于 $s-c$。

证明. 若 $J \subseteq E_G$ 满足 $|J| \le c-1$ ，则必有 $|J \cap C| < c$ ，因此，根据我们对图的假设， J 是一个约化奇偶连接。因此，对所有 $0 \le i \le c-1$，都有 $h_i = \binom{s}{i}$。若 $i \ge c$，则任一约化奇偶连接在 C 中至多包含 c条边；若达到此最大数目，则必包含C中的最后一条边。因此，对于 $i \ge c$,

$$h_i = \binom{2c-1}{c-1}\binom{s-2c}{i-c} + \sum_{k\ge 1}\binom{2c}{c-k}\binom{s-2c}{i-c+k}. \quad \square$$

3. The socle of $A(G)$

设 R 是一个系数取自域 K的标准分次多项式环，并记其无关理想为 $\mathfrak{m}$ 。若 M 是 R上的分次模，则M 的底是分次子模 $\operatorname{Soc} M = \{u \in M : \ \mathfrak{m}u = (0)\}$。标准Artin分次代数的底的极小生成元的度决定了该代数在多项式环上的极小分次自由分解的最后一项（参见 [14, 引理 5.3.3]）。特别地，标准Artin分次代数是Gorenstein 的，当且仅当其底在 K上是一维的。底模的极小生成元的度称为底次数；底的维数称为型。若标准Artin分次代数的底由单一度数上的元素生成，则称其为水平代数。

定理 3.1. $A(G)$ 的底由单项式的留数生成。

证明。 选取 E_G 的一个排序，并考虑其在$K[E_G]$上的相应分次反字典序。令 $0 \neq u \in$ 底 $A(G)$。根据命题 2.7，我们可以写成

$$u = (c_1\mathbf{t}_{J_1} + \cdots + c_m\mathbf{t}_{J_m}) + I(G)$$

对于某些 J_1、.....、J_m，约化奇偶连接 $c_i \in K \setminus \{0\}$ 和 $m > 0$。根据假设，对于每个 $e \in E_G$,

$$c_1\mathbf{t}_{J_1}t_e + \cdots + c_m\mathbf{t}_{J_m}t_e \in I(G). \tag{3}$$

固定 $e \in E_G$ 。为简化记号，假设存在 $0 \leq k \leq m$ ，使得对于所有 $1 \leq i \leq k$ 都有 $c_i\mathbf{t}_{J_i}t_e \notin I(G)$，并且对于所有 $k+1 \leq i \leq m$都有 $c_i\mathbf{t}_{J_i}t_e \in I(G)$。我们希望证明 $k = 0$。由于 $\mathscr{E}$由二项式组成，单项式模此集合的约化结果仍为单项式。因此，令 $d_i\mathbf{t}^{\beta_i}$，其中 $d_i \neq 0$，表示 $c_i\mathbf{t}_{J_i}t_e$模 $\mathscr{E}$的约化结果。由于 $\mathscr{E} \cup \{t_e^2 : e \in E_G\}$是 $I(G)$ 的 Gröbner 基，根据我们的假设，$d_1\mathbf{t}^{\beta_1}$、.....、$d_k\mathbf{t}^{\beta_k}$ 中没有一个可被平方整除，而 $d_{k+1}\mathbf{t}^{\beta_{k+1}}$、.....、$d_m\mathbf{t}^{\beta_m}$ 全都可被平方整除。因此，$c_1\mathbf{t}_{J_1}t_e + \cdots + c_m\mathbf{t}_{J_m}t_e$模 $\mathscr{E} \cup \{t_e^2 : e \in E_G\}$ 的余式为 $d_1\mathbf{t}^{\beta_1} + \cdots + d_k\mathbf{t}^{\beta_k}$。由 (3) 可得

$$d_1\mathbf{t}^{\beta_1} + \cdots + d_k\mathbf{t}^{\beta_k} = 0. \tag{4}$$

由 [11, 定理 3。3]，$\mathscr{E} \cup \{t_e^2 - t_f^2 : e, f \in E_G\}$ 是欧拉理想的 Gröbner 基，$I(X_G) \subseteq K[E_G]$，因此利用（4），我们推得

$$(c_1\mathbf{t}_{J_1} + \cdots + c_k\mathbf{t}_{J_k})t_e \in I(X_G).$$

由于 t_e 在 $K[E_G]/I(X_G)$ 上是正则的（参见 [12, 命题 2.1]），我们得到

$$c_1\mathbf{t}_{J_1} + \cdots + c_k\mathbf{t}_{J_k} \in I(X_G) \subseteq I(G),$$

这就产生了矛盾。我们得出结论：$k = 0$。改变 $e \in E_G$，我们推得对于每个 $i = 1, \ldots, r$，$\mathbf{t}_{J_i} + I(G)$ 都属于 Soc $A(G)$。□

现在我们来讨论如何对能在 $A（G）$的底中产生单项式剩余类的约化奇偶连接进行组合刻画。固定 E_G的一个排序。若 J 是一个约化奇偶连接，且$\mathbf{t}_J + I（G）$属于$A（G$的底，则$\mathbf{t}_J t_e \in I（G）$，对所有 $e \in E_G$均成立。利用推论2.4，这意味着对每个 $J \cup \{e\}$，$e \notin J$不再是奇偶连接。因此，$A（G）$的单项式底基与所有奇偶连接中按包含关系极大的约化奇偶连接集合一一对应。注意，例4.4 表明，在约化奇偶连接集合中极大的约化奇偶连接，并不一定在所有奇偶连接集合中极大。

这种关于底的组合刻画取决于 E_G 的排序。接下来，我们将根据图的不变量 $\tau(T, p)$ 给出另一种组合刻画；特别是，这种刻画与 E_G 的排序无关。首先，我们需要陈述一个关于这些数的初等结果。回想一下，我们将 G 的一条边视为 V_G 的一个子集。因此，如果 $e \in E_G$ 和 $T \subseteq V_G$，那么取对称差 $T \triangle e$ 是有意义的。

引理 3.2。设 $(T,p)\in\mathcal{T}_{\mathrm{p},\ G}$ 且 $e\in E_G$。则 $(T\triangle e,p+1)\in\mathcal{T}_{\mathrm{p},\ G}$ 且

$$\tau(T\triangle e,p+1)=\tau(T,p)\pm 1.$$

证明。若 $J\subseteq E_G$ 是一个（T，p）-连接，则由引理 2.10，$J\triangle\{e\}$ 是一个（$T\triangle e$，$p+1$）-连接。因此，τ（$T\triangle e$，$p+1$）$\leq\tau$（J，p）$+1$。用（$T\triangle e$，$p+1$）重复这一论证，可得

$$\tau(T,p)-1\leq\tau(T\triangle e,p+1)\leq\tau(J,p)+1$$

因此 $\tau(T\triangle e,p+1)=\tau(T,p)\pm 1$。 □

定义 3.3。若 $(T,p)\in\mathcal{T}_{\mathrm{p},\ G}$ 满足 $\tau(T\triangle e,p+1)=\tau(T,p)-1$，对每个 $e\in E_G$ 均成立，则称 (T,p) 为 G 的一个底对。为简化记号，若 G 是二部的，我们省略奇偶性；当且仅当对每个 $e\in E_G$，$T\in\mathcal{T}_G$ 满足 $\tau(T\triangle e)=\tau(T)-1$ 时，称其为一个底集。

现在我们可以陈述第二个主要结果了。

定理 3.4。$A(G)$ 的底次数由 $\tau(T,p)$ 给出，其中 (T,p) 在底对集合中变化。或者，固定 E_G 的一种排序后，底次数就是约化奇偶连接 $J\subseteq E_G$ 的基数，其中 $\mathbf{t}_Jt_e\in I(G)$ 对所有 $e\in E_G$ 都成立；等价地，它们也是在所有奇偶连接组成的集合中极大的约化奇偶连接的基数。

证明。固定 E_G 的一种排序。令 $\{J_1,\dots,J_t\}$ 为满足 $\mathbf{t}_Jt_e\in I(G)$ 对每个 $e\in E_G$ 都成立的约化奇偶连接 $J\subseteq E_G$ 的集合。由命题 2.7 和定理 3.1，$\{\mathbf{t}_{J_1}+I(G)\dots,\mathbf{t}_{J_t}+I(G)\}$ 是 $K(A(G))$ 的底的一组基，因此底次数由 $J_1,\dots,J_t$ 的基数给出。现在，任取一个约化奇偶连接 J，并记 $\theta(J)=(T,p)$。由于 $\tau(T,p)=|J|$（参见注 2.11），根据引理 3.2，要证明第一个断言，只需证明对任意 $e\in E_G$，

$$\mathbf{t}_Jt_e\in I(G)\iff\tau(T\triangle e,p+1)<|J|+1. \tag{5}$$

若 $e\in J$ 则 $\mathbf{t}_Jt_e$ 可被一个平方数整除，因此属于 I（G），另一方面，$J\triangle\{e\}$ 是一个（$T\triangle e$，$p+1$）连接，其基数为 $|J|-1$。若 $e\notin J$ 则利用推论 2.4 和引理 2.10，$\mathbf{t}_Jt_e\in I$（G）当且仅当存在一个偶数基数的欧拉子集 $C\subseteq E_G$ 使得

$$|C\triangle(J\cup\{e\})|<|J\cup\{e\}|=|J|+1,$$

这等价于 $\tau(T\triangle e,p+1)<|J|+1$。 □

推论 3.5. 若 E_G 具有唯一的非空偶数基数欧拉子集 $C\subseteq E_G$，则 $A(G)$ 是 socle 次数为 $s-c$ 的水平，且型为 $\binom{2c-1}{c-1}$，其中 $s=|E_G|$ 和 $c=|C|/2$。

证明。若 $J\subseteq E_G$ 是奇偶连接集合中极大的约化奇偶连接，则 $J\cap C=\frac{|C|}{2}$；否则，可以将 $C\setminus J$ 的最后一条边添加到 J 中，从而形成另一个约化奇偶连接。同理，J 必须包含 $G\setminus C$ 的所有边。因此，任何此类约化奇偶连接的基数都是 $c+(s-2c)=s-c$，故 $A(G)$ 是水平的，且其数量为 $\binom{2c-1}{c-1}$。□

让我们通过给出定理的一个应用来结束本节3.4。

定理 3.6. 若 G 是二部的，则 $A(G)$ 是 Gorenstein，当且仅当 E_G 不含任何非空的偶数基数欧拉子集。若此条件成立，则$I(G) = (t_e^2 : e \in E_G)$，因此 $A(G)$ 是完全交。

证明。若 E_G 不含任何非空且具有偶数基数的欧拉子集，则$\mathscr{E} = \emptyset$，因此 $I(G) = (t_e^2 : e \in E_G)$。由此可得， $A(G)$ 是完全交，进而 $A(G)$ 是 Gorenstein（参见 [7, 推论 A.6.4]）。假设E_G存在一个非空且具有偶数基数的欧拉子集。取 $C \subseteq E_G$为其中基数最小的一个，并证明 $A(G)$ 的底不是一维的。由于 G 是二部的， C 是长度最短的偶圈的边集。记 $2c = |C| \geq 4$，并固定 E_G 的一个排序，使得 G 的最后一条边属于 C。令 v 和 v' 为最后一条边的顶点。令 J_1 表示包含于 C中的一条路径的边集；该路径从v出发，经过 v'，长度为 c。令 w 表示这条路径的另一个端点。类似地，令 J_2 表示包含于 C中的一条路径的边集；该路径从v'出发，经过 v，长度为 c；并记这条路径的另一个端点为 w'。鉴于 c 是欧拉子集的最小基数， C 中任意包含最后一条边且由 c 个元素组成的子集，都是G中的约化奇偶连接。因此， J_1 和 J_2 都是约化奇偶连接。特别地，若 $T_1 = \{v, w\}$和 $T_2 = \{v', w'\}$，则 $\tau(T_1) = \tau(T_2) = c$（参见注 2.11；另请注意，由于 G 是二部的，我们在记号中省略了奇偶性）。若 T_1 不是底集，则存在 $e \in E_G$ 使得 $\tau(T_1 \triangle e) = c+1$。显然， e不可能属于 C。对 T_2也同样如此。重复这一过程，令 $\{e_1, \ldots, e_k\}$ 和 $\{f_1, \ldots, f_r\}$ 分别为基数为 k 和 r的边集（可以为空），使得$\{e_1, \ldots, e_k\}$ 和 $\{f_1, \ldots, f_r\}$ 都与 C不相交， $T_1 \triangle e_1 \triangle \ldots \triangle e_k$和 $T_2 \triangle f_1 \triangle \ldots \triangle f_r$ 都是底集，并且

$$\tau(T_1 \triangle e_1 \triangle \ldots \triangle e_k) = c + k, \quad \tau(T_2 \triangle f_1 \triangle \ldots \triangle f_r) = c + r.$$

注意到由于 $J_1 \cup \{e_1, \ldots, e_k\}$ 是一个基数为 $(T_1 \triangle e_1 \triangle \cdots \triangle e_k)$ 的连接

$$c + k = \tau(T_1 \triangle e_1 \triangle \cdots \triangle e_k),$$

我们推得 $J_1 \cup \{e_1, \ldots, e_k\}$ 是一个奇偶连接（参见备注 2.11）。同样适用于 $J_2 \cup \{f_1, \ldots, f_r\}$，然而它们中的任一个都可能不是约化的。如果 $k \neq r$ 那么这些底集产生两个度不同的根单项式，因此 $A（G）$不是水平的，从而 $A（G）$的底不是 1 维的。如果 $k = r$ 且 $A（G）$的底是 1 维的，那么我们必有

$$\begin{aligned} & T_1 \triangle e_1 \triangle \cdots \triangle e_k = T_2 \triangle f_1 \triangle \cdots \triangle f_k \\ \iff & T_1 \triangle T_2 = \{v, v', w, w'\} = e_1 \triangle \cdots \triangle e_k \triangle f_1 \triangle \cdots \triangle f_k. \end{aligned} \tag{6}$$

为了导出矛盾，假设此结论成立，并由（

$$\{e_1, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, \ldots, f_k\} = \emptyset.$$

如果 $\{e_1,\dots,e_k\}\cup\{f_1,\dots,f_k\}$ 包含任意一个环的边集，那么由于 G 是二部图，该环必为偶环。设 $2m$ 为其长度。正如我们上文所论证的，$J_1\cup\{e_1,\dots,e_k\}$ 和 $J_2\cup\{f_1,\dots,f_r\}$ 是奇偶连接，因此该环必由 $\{e_1,\dots,e_k\}$中的 m条边组成，设为 e_{i_1}、.....、 e_{i_m}，以及 $\{f_1,\dots,f_k\}$中的 m 条边组成，设为 f_{j_1}、.....、 f_{j_m}，于是，

$$e_{i_1}\triangle\cdots\triangle e_{i_m}=f_{j_1}\triangle\cdots\triangle f_{j_m}.$$

因此，我们可以假设 $\{e_1,\dots,e_k\}\cup\{f_1,\dots,f_k\}$ 不包含任何环的边集。于是，由（6）可知

$$\{e_1,\dots,e_k\}\cup\{f_1,\dots,f_k\}=P\sqcup Q,$$

其中， $P\sqcup Q$ 表示两个路径的边集的不交并；这两个路径没有公共边，且它们的端点构成集合 $\{v,w,v',w'\}$。记

$$P_e=P\cap\{e_1,\dots,e_k\},\quad P_f=P\cap\{f_1,\dots,f_k\}$$

类似地，我们用记号 Q_e 和 Q_f 表示Q中相应的子集。不失一般性，我们可以假设 v 是 P 的一个端点。需要考虑三种情形。

首先，考虑 P 的端点为 v 和 w的情形。考虑由 $J_1\triangle P$给出的欧拉子集。由于 $P\cap C=\emptyset$ 且 $J_1\subseteq C$，因此可得 $J_1\triangle P=J_1\sqcup P$，进而有 $|J_1\triangle P|=c+|P|>0$。此外，由于 G 是二部图，我们推知 $c+|P|$是偶数。由于 $J_1\cup P_e\subseteq J_1\cup\{e_1,\dots,e_k\}$和$J_2\cup P_f\subseteq J_2\cup\{f_1,\dots,f_k\}$都是奇偶连接。将定义中的条件（参见定义 2.5）用于 $C=J_1\triangle P$，可得

$$c+|P_e|\le\tfrac{c+|P|}{2}\quad\text{and}\quad 1+|P_f|\le\tfrac{c+|P|}{2}$$

这意味着 $c+1+|P_e|+|P_f|\le c+|P|\iff 1\le 0$，与矛盾。

其次，设 P 的端点为 v 和 w'。如前所述，我们推得 $J_1\triangle\{\{w,w'\}\}\triangle P$ 是一个偶数基数的欧拉子集，等于 $c+1+|P|$。由于 $J_1\cup P_e$ 是奇偶连接，我们得到：

$$c+|P_e|\le\tfrac{c+1+|P|}{2}.$$

同理，由于基数为 $c-1+|P|$的 $J_2\triangle\{\{v,v'\}\}\triangle P$ 也是一个偶数基数的欧拉子集，且 $J_2\cup P_f$ 是奇偶连接，我们得到

$$c-1+|P_f|\le\tfrac{c-1+|P|}{2}.$$

将上面的两个不等式相加，我们得出 $c\le 1$，这与矛盾。

第三，也是最后一种情况，假设 P 的端点为 v 和 v'，那么 Q 的端点为 w 和 w'。考虑由 $C\triangle\{\{w,w'\}\}\triangle Q$ 给出的非空偶数基数欧拉子集。像之前一样，利用奇偶连接 $J_1\cup Q_e$ 和 $J_2\cup Q_f$，我们可推得 $2c+|Q|\le 2c-1+|Q|\iff 0\le -1$。□

推论 3.7. 若 G 是二部的，则 $K[E_G]/I(X_G)$（ $K[E_G]$ 对欧拉理想取商）是 Gorenstein 的，当且仅当 E_G 不含任何非空偶数基数子集。

证明。取 $e \in E_G$。由于根据 [13, 命题 2.1], $K[E_G]/I(X_G)$ 是 Cohen–Macaulay 的，且 t_e^2 在 $K[E_G]/I(X_G)$ 中是正则的；又由于 $A(G) = K[E_G]/(I(X_G)\ t_e^2)$，我们推得 $A(G)$ 是 Gorenstein 的，当且仅当 $K[E_G]/I(X_G)$ 是 Gorenstein 的（参见 [7, 命题 A.6.2]）。□

4. The case $G = \mathcal{K}_n$

下文中， $\mathcal{K}_n$ 表示一个具有 n 个顶点的完全图。本节旨在计算 $G = \mathcal{K}_n$ 时 $A(G)$ 的 h-向量（$h_0, h_1, \ldots, h_r$）和底次数。我们首先计算 T 为一个由顶点组成的偶数基数集合且 $p \in \mathbb{Z}_2$ 时 $\tau(T, p)$ 的所有可能取值。

引理 4.1. 若 $G = \mathcal{K}_n$，且 $n \geq 3$，并且 $\emptyset \neq T \subseteq V_G$ 的基数为偶数，则

$$\{\tau(T,0), \tau(T,1)\} = \{\tfrac{|T|}{2}, \tfrac{|T|}{2} + 1\}.$$

此外， $\tau(\emptyset, 0) = 0$ 以及 $\tau(\emptyset, 1) = 3$。

证明。若 $T = \emptyset$，则显然， $\tau(\emptyset, 0) = 0$。此外，任何构成三角形的三条边都是奇数基数的 $\emptyset$-连接。由于不存在基数更小的 $(\emptyset, 1)$-连接， $\tau(\emptyset, 1) = 3$。若 $T = \{v, w\}$ 且 $v \neq w \in V_G$，则边 $\{v, w\}$ 是基数最小的 $(T, 1)$-连接；取任意顶点 $u \in V_G \setminus \{v, w\}$，两条边 $\{v, u\}$ 和 $\{w, u\}$ 构成基数最小的 $(T, 0)$-连接。因此 $\tau(T, 0) = |T|/2 + 1 = 2$ 且 $\tau(T, 1) = |T|/2 = 1$。

现在假设 $|T| \geq 4$，并取 $J \subseteq E_G$，即 T 中顶点的任意匹配。于是 $|J|$ 等于 $|T|/2$，而 J 是一个基数最小的 T-连接。不失一般性，假设 $|J|$ 为偶数，从而 $\tau(T, 0) = |T|/2$。由于 J 在所有 T-连接中具有最小基数，任何 $(T, 1)$-连接的基数至少为 $|T|/2 + 1$。下面证明存在这样一个 $(T, 1)$-连接。取 $\{v, w\} \in J$ 和 $u \in T \setminus \{v, w\}$。于是

$$(J \setminus \{\{v, w\}\}) \cup \{\{u, v\}, \{u, w\}\}$$

是一个基数为 $|T|/2 + 1$ 的 $(T, 1)$-连接。 □

定理 4.2。设 $G = \mathcal{K}_n$，其中 $n \geq 4$。

(i) $h_1 = \binom{n}{2}$, $h_3 = 1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{6}$ 且若 $i \neq 1$，则为3， $h_i = \binom{n}{2i-2} + \binom{n}{2i}$。

(ii) 若 n 为奇数，则底对为$(\emptyset, 1)$，以及$(T, \frac{n+1}{2} + 2\mathbb{Z})$，其中$T \subseteq V_G$ 是基数为 $n - 1$的任意子集。特别地， $A(G)$的型为$n + 1$，底次数序列为3, $\frac{n+1}{2}$, . . . , $\frac{n+1}{2}$。(iii) 若 n 为偶数，则底对为 $\{(\emptyset, 1), (V_G, 0), (V_G, 1)\}$。特别地， $A(G)$的型为3，底次数序列为3, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2} + 1$。

证明。 (i) 若 $i \neq 0,\ 1,\ 3$，根据引理 4.1 和推论 2.13， h_i 等于基数为 $T \subseteq V_G$的 $2i-2$个数，加上基数为 $2i$的那些，因此 $h_i = \binom{n}{2i-2} + \binom{n}{2i}$。该引理给出 $h_0 = 1$，这也与此公式一致。情况 $i = 1,\ 3$ 的处理方式类似。

(ii) 关于 $A(G)$的型和底次数的结论由定理3.4得出。由引理4.1，显然（$\emptyset,\ 1$）是一个底对（若 n 为偶数时也成立）。令 $T \subseteq V_G$ 满足 $|T| = n-1$。那么，由引理 4.1，

$$\{\tau(T,0), \tau(T,1)\} = \{\tfrac{n-1}{2}, \tfrac{n+1}{2}\}. \tag{7}$$

令 $p = \frac{n+1}{2} + 2\mathbb{Z}$，使得 $\tau(T,p) = \frac{n+1}{2}$。若 $e \in E_G$是任意一条边，那么，由于 $n \geq 4$,$T \triangle e \neq \emptyset$，因此

$$\{\tau(T\triangle e, p), \tau(T\triangle e, p+1)\} \subseteq \{\tfrac{n-2}{2}, \tfrac{n-1}{2}, \tfrac{n}{2}, \tfrac{n+1}{2}\}.$$

由于$\frac{n+3}{2}$ 不属于上述包含关系右侧的集合，由引理3.2，我们必有

$$\tau(T\triangle e, p+1) = \tfrac{n-1}{2} = \tfrac{n+1}{2} - 1 = \tau(T,p) - 1$$

由此我们得出（T,p）是一个底对。还需证明，除已列出的底对外，不存在其他底对（T,p）。设 $T \subseteq V_G$ 具有偶数基数，且令 $p \in \mathbb{Z}_2$。假设（T,p） $\neq$ （$\emptyset, 1$），并且存在 $v \neq w \in V_G \setminus T$。若$e = \{v,w\}$，则 $T \triangle e \neq \emptyset$，因此

$$\begin{cases} \tau(T,p) \in \{\frac{|T|}{2}, \frac{|T|}{2}+1\} \quad \text{and} \\ \tau(T\triangle e, p+1) \in \{\frac{|T|}{2}+1, \frac{|T|}{2}+2\} \end{cases}$$

因此， $\tau(T\triangle e,\ p+1) = \tau(T,\ p) + 1$，也就是说，($T,\ p$)不是底对。最后，如果$|T| = n-1$且 $p = \frac{n-1}{2} + 2\mathbb{Z}$，此时由(7)可知， $\tau(T,\ p) = \frac{n-1}{2}$，我们选取 $e \in E_G$，它是与 $V_G \setminus T$中的顶点关联的一条边。于是 $|T\triangle e| = |T|$ 因此

$$\tau(T\triangle e, p+1) = \tfrac{n+1}{2} = \tau(T,p) + 1,$$

也就是说，(T,p)不是底对。

(iii) 如前所述，($\emptyset,\ 1$)是一个底对。令 $e \in E_G$。由于根据引理4.1，

$$\begin{cases} \tau(V_G,p) \in \left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right\} \quad \text{and} \\ \tau(V_G\triangle e, p+1) \in \left\{\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}\right\}, \end{cases}$$

我们不可能有 $\tau(V_G\triangle e,\ p+1) = \tau(V_G,\ p)+1$。因此，利用引理3.2，我们推得($V_G$, 0)和($V_G,\ 1$)都是底对。如果 $T \subsetneq V_G$ 是一个具有偶数基数的顶点集合，那么存在 $v \neq w \in V_G \setminus T$。因此，按照上述论证，对任意$T,\ p$)，我们可以排除 $p \in \mathbb{Z}_2$。 □

备注 4.3. (i) 如果 $G = \mathcal{K}_n$满足 $n = 2k$，我们注意到 $(h_1, \ldots, h_r)$（ $A(G)$ 的 h-向量）近乎对称。事实上，如果 $i \notin \{1, 3, k-2, k\}$，则

$$h_i = \tbinom{2k}{2i-2} + \tbinom{2k}{2i} = \tbinom{2k}{2k+2-2i} + \tbinom{2k}{2k-2i} = h_{r-i},$$

其中 $r = k+1$ 是最大 socle 次数，而

$$\begin{cases} h_1 = \binom{2k}{2}, \quad h_k = \binom{2k}{2k-2} + \binom{2k}{2k} = h_1 + 1 \quad \text{and} \\ h_3 = 1 + \binom{2k}{4} + \binom{2k}{6}, \quad h_{k-2} = \binom{2k}{2k-6} + \binom{2k}{2k-4} = h_3 - 1. \end{cases}$$

(ii) 若 $n = 5$ 底次数为 3,3,3,3,3,3，即 $A(G)$ 是水平的。这是使 n 下的 $A(G)$（其中 $G = \mathcal{K}_n$）成为水平的唯一取值。

例 4.4。我们用 $G = \mathcal{K}_6$ 举例说明一个约化奇偶连接：它在约化奇偶连接的集合中按包含序是极大的，但在奇偶连接的集合中并非极大。固定 E_G的一个排序。由定理4.2和3.4可知，在所有奇偶连接的集合中极大的约化奇偶连接，其基数仅可能为 $\tau(\emptyset, 1) = 3$、 $\tau(V_G, 0) = 4$和 $\tau(V_G, 1) = 3$。这 3 个约化奇偶连接的并集的基数至多为 $3+4+3 = 10$。设 $e \in E_G$ 是一条不属于该并集的边。那么显然， $\{e\}$ 是一个约化奇偶连接。设 J 是包含 e且在所有约化奇偶连接的集合中极大的约化奇偶连接。那么 J 在奇偶连接的集合中不可能是极大的。

5. The case $G = \mathcal{K}_{a,b}$

我们将 $\mathcal{K}_{a,b}$ 记作一个完全二部图，其顶点集的一个划分 $V_G = V_1 \cup V_2$ 分为两部分，基数分别为 a 和 b。当 $G = \mathcal{K}_{a,b}$ 时，我们将通过与上一节类似的方法，计算 $A(G)$ 的 h-向量 $(h_0, h_1, \ldots, h_r)$ 及底次数；不同之处在于，由于 G 是二部的，我们可以省略记号 $\tau(T, p)$ 中的奇偶性。

引理 5.1. 若 $G = \mathcal{K}_{a,b}$，其中 a、 $b \geq 2$，且 $T \subseteq V_G$ 具有偶数基数，则令 $T_1 = T \cap V_1$ 和 $T_2 = T \cap V_2$, $\tau(T) = \max\{|T_1|, |T_2|\}$。

证明. 不妨设 $|T_1| \leq |T_2|$，并取 $T_2' \subseteq T_2$ 的任意一个基数为 $|T_1|$的子集。由于 $|T|$ 为偶数且 $|T| = 2|T_1| + |T_2 \setminus T_2'|$，我们必有 $|T_2 \setminus T_2'|$ 为偶数。若 $T_2' = \emptyset$，令 $J = \emptyset \subseteq E_G$；否则，取 $J \subseteq E_G$，即 $T_1 \cup T_2'$ 中顶点的一个匹配。若 $T_2 \setminus T_2' = \emptyset$，取 $L = \emptyset \subseteq E_G$；否则取任意顶点 $v \in V_1$，并令 L 为与 v 以及 $T_2 \setminus T_2'$ 中某个顶点相 incident 的边集。于是， J 是一个 $(T_1 \cup T_2')$-连接，而 L 是一个 $(T_2 \setminus T_2')$-连接。根据引理 2.10， $J \triangle L = J \cup L$ 是一个 T-连接。由于 $J \cup L$ 的基数

$$|T_2'| + |T_2 \setminus T_2'| = |T_2|$$

并且任意 T连接至少有 $|T_2|$ 条边，因此我们得出 $\tau(T) = |T_2|$。 □

定理5.2。设 $G = \mathcal{K}_{a,b}$ 是一个完全二部图。

(i) $h_i = \left[\sum_{k\geq 0} \binom{a}{i-2k}\right]\left[\sum_{k\geq 0} \binom{b}{i-2k}\right] - \left[\sum_{k\geq 1} \binom{a}{i-2k}\right]\left[\sum_{k\geq 1} \binom{b}{i-2k}\right]$.

(ii) $T \subseteq V_G$ 的基数为偶数，当且仅当它是一个底集

$$|T_i| = \max\{|T_1|, |T_2|\} \implies T_i = V_i.$$

特别地，若 $a<b$，底次数为

$$\underbrace{a,\cdots,a}_{\sum_{i\geq 1}\binom{b}{a-2i}},\ \underbrace{b,\cdots,b}_{\sum_{i\geq 1}\binom{a}{b-2i}}$$

并且若 $a=b$，则 $A(G)$ 是水平的，其 socle 次数为 a，型为 2^a-1。

证明。 (i) 由引理 5.1 和推论2.13， h_i 是满足以下条件的偶数基数子集的数量：$T\subseteq V_G$ 使得，若 $T_1=T\cap V_1$ 且 $T_2=T\cap V_2$， $i=$最大值$\{|T_1|,|T_2|\}$。满足 $T\subset V_G$ 且 $i=|T_1|>|T_2|$ 的偶数基数子集的数量为：

$$\tbinom{a}{i}\sum_{k\geq 1}\tbinom{b}{i-2k}.$$

利用对称性并加上 $|T_1|=|T_2|$ 的情形，我们可推得

$$\begin{aligned} h_i &= \tbinom{a}{i}\sum_{k\geq 1}\tbinom{b}{i-2k}+\tbinom{b}{i}\sum_{k\geq 1}\tbinom{a}{i-2k}+\tbinom{a}{i}\tbinom{b}{i} \\ &= \left[\tbinom{a}{i}+\sum_{k\geq 1}\tbinom{a}{i-2k}\right]\left[\tbinom{b}{i}+\sum_{k\geq 1}\tbinom{b}{i-2k}\right]-\left[\sum_{k\geq 1}\tbinom{a}{i-2k}\right]\left[\sum_{k\geq 1}\tbinom{b}{i-2k}\right] \\ &= \left[\sum_{k\geq 0}\tbinom{a}{i-2k}\right]\left[\sum_{k\geq 0}\tbinom{b}{i-2k}\right]-\left[\sum_{k\geq 1}\tbinom{a}{i-2k}\right]\left[\sum_{k\geq 1}\tbinom{b}{i-2k}\right]. \end{aligned}$$

(ii) 先证明 T 不是底集，当且仅当存在 $i\in\{1,2\}$ 使得

$$|T_i|=\max\{|T_1|,|T_2|\}\quad\text{and}\quad T_i\neq V_i. \tag{8}$$

若 T 不是底集，则存在 $e\in E_G$ 使得

$$\tau(T\triangle e)=\tau(T)+1=\max\{|T_1|,|T_2|\}+1. \tag{9}$$

(参见引理3.2 和5.1). 因此，对于某个 $i\in\{1,2\}$，我们有（$V_i\cap e$）$\cap T_i=\emptyset$且 $|T_i|=$最大值$\{|T_1|,|T_2|\}$，由此得到（8）。反过来，假设（8）成立，其中某个 $i\in\{1,2\}$。取 $v\in V_i\setminus T_i$ 和 $e\in E_G$，一条与 v关联的边。则（9）成立，因此 T 不是一个底集。

现在，若 $a\neq b$，则根据上述刻画，

$$\textstyle\sum_{i\geq 1}\binom{b}{a-2i}\quad\text{and}\quad\sum_{i\geq 1}\binom{a}{b-2i}$$

分别是使底次数等于 a 的底集数量，以及使底次数等于 b 的底集数量。若 $a=b$，则 $T_1=V_1$、$T_2=V_2$ 的情形未计入前述计数，因此在此情况下，$A(G)$ 的型为

$$2\textstyle\sum_{i\geq 1}\binom{a}{a-2i}+1=2(2^{a-1}-1)+1=2^a-1.\quad\square$$

References

[1] N. Altafi, *Hilbert functions of Artinian Gorenstein algebras with the strong Lefschetz prop-erty*, 《美国数学会会刊》，150（2022），第 499–513 页。

[2] V. Ene and J. Herzog, *Gröbner bases in commutative algebra*, 《研究生数学丛书》第 130 卷，罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2012 年。

[3] R. Gondim, *On higher Hessians and the Lefschetz properties*, 《代数杂志》，489（2017），第 241–263 页。

[4] R. Gondim and G. Zappalà,
Lefschetz properties for Artinian Gorenstein algebras presentedby quadrics, 《美国数学会会刊》, 146（2018）, 第 993–1003 页。[5] D. R. Grayson and M. E. Stillman, *Macaulay2, a software system for research in algebraicgeometry*。可见于 http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/。[6] T. Harima, A. Wachi, and J. Watanabe,
The strong Lefschetz property for complete inter-sections defined by products of linear forms, 《数学档案》, 113（2019）, 第 43–51 页。[7] J. Herzog and T. Hibi, *Monomial ideals*, 数学研究生教材第 260 卷, 伦敦：施普林格, 2011 年。[8] B. Korte and J. Vygen,
Combinatorial optimization. Theory and algorithms, 组合学算法第 21 卷, 柏林：施普林格, 第 6 版, 2018 年。[9] J. McCullough and A. Seceleanu,
Quadratic Gorenstein algebras with many surprisingproperties, 《数学档案》, 115（2020）, 第 509–521 页。[10] J. Migliore and U. Nagel,
A tour of the weak and strong Lefschetz properties, 《交换代数杂志》, 5（2013）, 第 329–358 页。[11] J. Neves, *Eulerian ideals*, 《通讯代数》, 51（2023）, 第 552–564 页。
[12] J. Neves and G. Varejão, *Degree and regularity of Eulerian ideals of hypergraphs*, 《电子组合学杂志》, 29（2022）, 研究论文 p4.3, 第 18 页。[13] J. Neves, M. Vaz Pinto, and R. H. Villarreal, *Joins, ears and Castelnuovo-Mumfordregularity*, 《代数杂志》, 560（2020）, 第 67–88 页。[14] R. H. Villarreal, *Monomial algebras*, 《专著、研究与笔记：数学》, 佛罗里达州博卡拉顿：CRC 出版社, 第 2 版, 2015 年。

Univ. Coimbra, CMUC, Department of Mathematics, 3001-501 Coimbra, Portugal.
Email address: neves@mat.uc.pt