arXiv:2303.02022v1 [math.AT] 3 Mar 2023

色高度史密斯不动点定理的初等证明

WILLIAM BALDERRAMA 和 NICHOLAS J. KUHN

ABSTRACT. T. Barthel、M. Hausmann、N. Nau- mann、T. Nikolaus、J. Noel 和 N. Stapleton 最近的一项定理指出：如果 A 是一个秩为 r 的有限阿贝尔 p–群，那么任何在带有 $n \geq r$ 的第 n 层 Morava K–理论中无环的有限 A–空间 X，其不动点子空间 X^A 在第 $(n-r)$ 层 Morava K–理论中也是无环的。这是色高度同伦版本的 P. A. Smith 经典定理：如果 X 在模 p 同调中无环，那么 X^A 也同样如此。

本文的主要目的是给出这一新定理的一个初等证明，只需最少的背景知识，并尽可能遵循经典定理标准证明中的推理。我们还给出了一个针对有限维但可能无限的 A-CW 复形的新不动点定理，由此提出了一些开放问题。

1. INTRODUCTION

设 p 为素数， G 为有限群，称 G–空间 X 为有限 G–空间，若其 p–局部化是有限 G–CW 复形的 p–局部化在 G–等变同伦范畴中的一个收缩子。令 X^G 表示其不动点子空间。

令 $K(n)_*$ 表示素数 p 处的第 n 个 Morava K–理论。特别地，$K(1)_*$ 是带模 p 系数的复 K–理论的一个直和项，而 $K(0)_*$ 是有理同调。

[6A19] 中的一个关键结果可表述如下。

定理 1.1. 设 A 为秩 r 的有限阿贝尔 p-群， X 为有限 A–空间。若 $\widetilde{K}(n)_*(X) = 0$ 且 $n \geq r$，则 $\widetilde{K}(n-r)_*(X^A) = 0$。

这是 P. A. Smith [S41] 以下经典定理的色高度同伦论类比。

定理 1.2. 设 P 是有限 p群，且 X 是有限维P–空间。若 $\widetilde{H}_*(X; \mathbb{Z}/p) = 0$，则 $\widetilde{H}_*(X^P; \mathbb{Z}/p) = 0$。

我们注意到，定理 1.1 可通过对 $A = C_{p^k}$ 的情形进行迭代而得出，其中 p 是阶为 p^k 的循环群；定理 1.2 则可由 $P = C_p$ 的情形推出。

Date: 2023年3月6日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 55M35；次要分类号 55N20、55P42、55P91。

本文的主要目的是对下文的定理 1.1 给出一个初等证明，并尽可能遵循经典定理标准证明中的推理思路。关于 $K(n)_*$ 及相关理论所需的全部背景资料，均见于 2000 年以前发表的论文。我们希望本文的阐述能使该领域尚待解决的有趣问题更加明晰。

经典定理包括以下陈述： $X^P \neq \emptyset$，而在 [6A19]中证明的定理 1.1 版本则隐含地假设 X 有一个被 A固定的不动点；我们无需作此假设。事实上，我们证明的最初步骤仅要求 X 是有限维的，并不一定是有限的，从而得到以下新的不动点定理。

定理 1.3。设 A 是一个秩为 r 的有限阿贝尔 p–群，且 X 是一个有限维 A–CW 复形。如果 $\widetilde{K}(n)_*(X) = 0$ 且 $n \geq r$，那么 $X^A \neq \emptyset$。

~ ~我们注意到，如果 X 是任意空间，那么对于$n \geq r \geq 1$ [Bou99], $K(n)_*(X) = 0 \Rightarrow K(r)_*(X) = 0$。（这推广了 Ravenel 的结果 [Rav84, Thm.2.11]关于有限 X的结果。）因此，对于所有 n 成立的不动点定理，可由 $n = r$时的特殊情形推出。

在第 2 节中，我们回顾一些所需的背景材料，并推导出一些简单的结论。随后在第 3 节中迅速证明这些定理。

最后一节包含若干评论和猜想。特别是，我们想知道是否可以放宽定理 1.1 的有限性假设；我们也很想知道是否存在一些例子，能表明定理 1.3 已经尽可能强。

1.1. 致谢。第二作者是 RTG NSF 拨款 DMS-1839968 的首席研究员，该拨款资助了第一作者的研究。本文的部分内容是在第二作者访问乌得勒支几何中心期间完成的，访问经费来自 Simons Foundation Collaboration Grant 709802。我们感谢 Neil Strickland 就文献引用提供有益的邮件建议，也感谢 Tom Goodwillie 和 Ian Leary 对 MathOverflow 上一个问题的热心解答（见第 4.3 节）。

2. Background material and a localization result

2.1. Morava E 理论与 $E_n^*(BA)$。回顾 Brown–Peterson 同调理论 BP，其系数环为 $BP_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \ldots]$。我们研究复定向理论 E，它们是 p 局部的，并具有 p-典型形式群律。此类理论的系数环 E_* 是一个 BP_*-代数；若 $v_0, v_1, \ldots$ 在 E_* 上构成正则序列，且 v_n 在 $E_*/(v_0, \ldots, v_{n-1})$ 中为单位，则称该理论是 Landweber 精确且 v_n 周期的。（全文中，我们令 $v_0 = p$，这是标准约定。）

引理 2.1. [H95a，推论 1.12] 设 E_* 为 Landweber 精确且 v_n–周期的。一个谱是 E_*–无效的，当且仅当它是 $K(m)_*$–无效的，其中 $0 \leq m \leq n$。因此，若一个有限谱是 E^*–无效的，则它也是 $K(n)_*$–无效的。

现在令 E_n 为第 n 个 Morava E–理论，如 [H95b], [HS99], 或 [HKR00] 中所述。这些理论有多个变体，为了明确起见，我们将称

$$E_n^* = \mathbb{Z}_p[u^{\pm 1}][[v_1, \dots, v_{n-1}]],$$

其中 $u \in E_n^{-2}$，并且带有复定向 $y \in E_n^2(BU(1))$，其相关形式群律 F 具有如下形式的 p–级数

$$[p](y) = py +_F v_1 y^p +_F \cdots +_F v_{n-1} y^{p^{n-1}} +_F u^{p^n-1} y^{p^n}.$$

特别地， $v_n = u^{p^n-1}$。这是一个 Landweber 精确且 v_n-周期的理论，并具有以下附加性质。

引理 2.2. [H95b, 命题3.6] 若 $f : X \to Y$ 是谱之间的映射，则 f 是一个 E_n^*–同构，当且仅当它是一个 $K(n)_*$–同构。

~命题 2.3. 设 G 为有限群， X 为一个 G–空间。若 $K(n)_*(X) = 0$，则映射 $EG \times_G X \to BG$ 诱导一个同构

$$E_n^*(BG) \simeq E_n^*(EG \times_G X).$$

证明。存在如下蕴含关系

$$\begin{aligned} \widetilde{K}(n)_*(X) = 0 &\Leftrightarrow K(n)_*(X) \simeq K(n)_*(pt) \\ &\Rightarrow K(n)_*(EG \times_G X) \simeq K(n)_*(BG) \\ &\Leftrightarrow E_n^*(BG) \simeq E_n^*(EG \times_G X). \end{aligned}$$

前一个引理给出了第三个蕴含。第二个蕴含是一个一般事实的特例：若 $f : X \to Y$ 是两个 G– 空间之间的一个 G– 等变映射，且它在广义同调理论 E_* 中是同构，那么它会在相应的 Borel 理论 $E_*(EG \times_G X) \xrightarrow{\sim} E_*(EG \times_G Y)$ 上诱导一个同构。□

我们回顾一些基本计算，见 [HKR00, §5]。复定向 $y \in E_n^2(BU(1))$ 定义了一个同构 $E_n^*(BU(1)) \simeq E_n^*[[y]]$，而 p^k–级数满足 $[p^k](y) \equiv u^{p^{nk}-1} y^{p^{nk}} \bmod (v_0, \dots, v_{n-1}, y^{p^{nk}+1})$。

标准嵌入 $i_k : C_{p^k} \hookrightarrow U(1)$ 诱导一个同构

$$E_n^*(BC_{p^k}) \simeq E_n^*[[y_k]]/([p^k](y_k)),$$

其中 $y_k = i_k^*(y)$，由魏尔斯特拉斯预备定理可知， $E_n^*(BC_{p^k})$ 是一个以 1、y_k、y_k^2、……、$y_k^{p^{nk}-1}$ 为基的自由 E_n^*–模。

类似地，若 $l < k$ 和 $q : C_{p^k} \to C_{p^l}$ 是标准商映射，则映射 $q^* : E_n^*(BC_{p^l}) \to E_n^*(BC_{p^k})$ 满足 $q^*(y_l) = [p^{k-l}](y_k)$，并诱导出一个同构

$$E_n^*(BC_{p^k}) \simeq E_n^*(BC_{p^l})[[y_k]]/([p^{k-l}](y_k) - y_l).$$

这使得 $E_n^*(BC_{p^k})$ 成为一个秩为 $p^{n(k-l)}$ 的自由 $E_n^*(BC_{p^l})$ 模。

从这些计算中可以得出几个一般性结论。

引理 2.4. (a) 若 A 是有限阿贝尔 p-群，则 $E_n^*(BA)$ 是一个秩为 $|A|^n$ 的自由 E_n^*–模，并且存在一个自然同构

$$E_n^*(BA) \otimes_{E_n^*} E_n^*(X) \simeq E_n^*(BA \times X)$$

对于任意空间 X。

(b) 若 $q\colon A \to A$ 是两个有限阿贝尔 p-群之间的满同态，则 $q^*\colon E_n^*(BA) \to E_n^*(BA)$ 使 $E_n^*(BA)$ 成为一个秩为 $|\operatorname{Ker} q|^n$ 的自由 $E_n^*(BA)$–模。

2.2. 局部化。设 A 是一个有限阿贝尔 p-群。注意，$C_p^\times$的自同构群在非平凡同态集合 $\alpha\colon A \to C_p$ 上通过后复合自由作用。

若 $\alpha\colon A \to C_p$ 是一个同态，我们记 $e(\alpha) = \alpha^*(y_1) \in E_n^2(BA)$。这是由复合映射 $A \xrightarrow{\alpha} C_p \hookrightarrow U(1)$ 所定义的一维复表示的欧拉类。采用这一记号，我们如下定义两个欧拉类 $e(A)$ $\bar{e}(A) \in E_n^*(BA)$。

定义 2.5。令 $e(A) = \prod e(\alpha)$，其中乘积遍历所有非平凡$\alpha\colon A \to C_p$。令 $\bar{e}(A) = \prod e(\alpha)$，其中乘积遍历每个 $C_p^\times$–轨道的一个代表元。$\bar{e}(A)$ 的定义涉及选择，但为明确起见，我们令 $\bar{e}(C_p) = y_1$，即选择恒等 $C_p \to C_p$。

关于这些对象的基本事实总结于下一个引理中。

引理 2.6。(a) 如果 $i\colon A' \hookrightarrow A$ 是一个真子群的包含映射，则 $i^*(e(A)) = i^*\bar{e}(A(=0))$。

(b) $e(A)^{-1}E_n^*(BA) = \bar{e}(A)^{-1}E_n^*(BA)$。

证明。$e(A)$ 和 $\bar{e}(A)$ 是各种 $e(\alpha)$ 的乘积。如果 A' 是 A 的真子群，则至少有一个 α 限制为 A' 的平凡表示。由于平凡表示的欧拉类为零，结论 (a) 得证。

为证明命题 (b)，我们首先注意到，由于 $\bar{e}(A)$ 整除 $e(A)$，对 $e(A)$ 取逆也会对 $\bar{e}(A)$ 取逆。要证明反向结论，我们需要说明：给定一个非平凡的 $\alpha\colon A \to C_p$，对 $e(\alpha)$ 取逆也会对 $e(\beta)$ 取逆，其中 β 遍历 α 的 $C_p^\times$–轨道。这样的 β 由复合映射 $A \xrightarrow{\alpha} C_p \xrightarrow{m} C_p$ 给出，其中 $m \in \{1, \dots, p-1\}$。

由于 $e(m \circ \alpha) = [m](e(\alpha))$，只需证明对任意 $m \in \{1, \dots, p-1\}$，对 $e(\alpha)$ 取逆也会对 $[m](e(\alpha))$ 取逆。证明方法如下。选取 s 使得 $sm \equiv 1$ 模 p。于是 $y_1 = [s]([m](y_1)) \in E_n^*(BC_p)$，从而 $e(\alpha) = [s]([m](e(\alpha))) \in E_n^*(BA)$。由于 x 总是整除 $[s](x)$，可知 $[m](e(\alpha))$ 整除 $e(\alpha)$，因此对 $e(\alpha)$ 取逆也会对 $[m](e(\alpha))$ 取逆。□

命题 2.7. 设 A 是一个有限阿贝尔 p–群，并且 e 是 $e(A)$ 或 $\bar{e}(A)$。若 X 是一个有限维 A–CW 复形，则包含映射 $X^A \hookrightarrow X$ 诱导一个同构

$$e^{-1}E_n^*(EA \times_A X) \xrightarrow{\sim} e^{-1}E_n^*(BA \times X^A).$$

证明. 这是经典局部化理论的一个应用，如 [tD87, 第 III 章], 所示。一个简单的证明如下。为简化记号，令 $F = X^A$。 A–等变余纤维化序列 $F \to X \to X/F$ 诱导出一个余纤维化序列

$$BA \times F \to EA \times_A X \to EA_+ \wedge_A X/F,$$

因此，我们需要证明 $e^{-1}\widetilde{E}_n^*(EA_+ \wedge_A X/F) = 0$。由于 X 是有限维的， X/F 有一个由其等变骨架 $(X/F)^j$构成的有限滤过，因此只需证明对于每个 j, $e^{-1}\widetilde{E}_n^*(EA_+ \wedge_A (X/F)^j/(X/F)^{j-1}) = 0$。存在如下形式的等变等价

$$(X/F)^j/(X/F)^{j-1} \simeq \bigvee_i \Sigma^j (A/A_i)_+$$

其中每个 A_i 都是 A的真子群。由于 $EA_+ \wedge_A (A/A_i)_+ \simeq BA_{i+}$，我们需要证明 $e^{-1}\prod E_n^*(BA_i) = 0$。但这可由引理 2.6(a)立即得出$_i$。

□

3. 证明定理

命题 2.3、命题 2.7 和引理 2.4 合在一起证明了以下定理，这使我们在证明定理 1.1 和定理 1.3 的道路上向前迈进了一大步。

定理 3.1. 设 A 是一个有限阿贝尔 p–群，且 X 是一个有限~维 A–CW 复形。若 $K(n)_*(X) = 0$，那么取 e 为 $e(A)$ 或$\bar{e}(A)$ 时，映射 $X^A \to pt$ 诱导一个同构

$$e^{-1}E_n^*(BA) \xrightarrow{\sim} e^{-1}E_n^*(BA) \otimes_{E_n^*} E_n^*(X^A).$$

现在我们需要了解一些关于$e^{-1}E_n^*(BA)$的内容。Mark Hovey 和 Hal Sadofsky 的下述代数结果足以证明定理 1.1。

命题 3.2. 设 $e = \bar{e}(C_p) = y \in E_n^*(BC_p) \simeq E_n^*[[y]]/([p](y))$。环 $e^{-1}E_n^*(BC_p) \simeq E_n^*((y))/([p](y))$ 是 Landweber 精确且 v_{n-1}-周期的。

证明。 [HS96，第 3583] 页给出了一个初等证明。为求完整起见，并强调其初等性质，我们给出一个略有不同的简短证明。

由于 $E_n^*(BC_p)$ 是自由的 E_n^*-模，且正则序列在局部化下保持不变，因此环 $e^{-1}E_n^*(BC_p)$ 是 Landweber 精确的。我们只需证明它是 v_{n-1}-周期的。令 $I = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-2})$。那么我们必须证明 $(e^{-1}E_n^*(BC_p))/I$ 非零，且 v_{n-1} 在此环中是单位。

回忆 $v_n = u^{p^n-1}$。我们有 $[p](y) \equiv v_{n-1}y^{p^{n-1}} +_F v_n y^{p^n}$ 模 I，因此

$$v_{n-1}y^{p^{n-1}} \equiv [-1](v_n y^{p^n}) \mod (I, [p](y))$$

其中， $[-1](y)$ 是与形式群律 F 相关联的 (-1)–级数。

当 $n \geq 2$ 时，可得

$$\begin{aligned}(e^{-1}E_n^*(BC_p))/I &\simeq \mathbb{Z}/p[u^{\pm 1}][[v_{n-1}]]((y))/(v_{n-1}y^{p^{n-1}} +_F v_n y^{p^n}) \\ &\simeq \mathbb{Z}/p[u^{\pm 1}][[v_{n-1}]]((y))/(v_{n-1} - y^{-p^{n-1}} \cdot [-1](v_n y^{p^n})) \\ &\simeq \mathbb{Z}/p[u^{\pm 1}]((y))\end{aligned}$$

由于 $y^{-p^{n-1}} \cdot [-1](v_n y^{p^n})) = -v_n y^{p^n - p^{n-1}} \epsilon(y)$，其中 $\epsilon(y)$ 是关于 y 的首一幂级数。当 $n = 1$ 时，类似的计算同样适用；此时最终得到 $e^{-1}E_1^*(BC_p) \simeq \mathbb{Z}_p[u^{\pm 1}]((y))/(p - y^{-1} \cdot [-1](v_1 y^p))$，它将是一个自由$\mathbb{Q}_p[u^{\pm 1}]$–模，其基为 1、$y$、.....、$y^{p-2}$。无论哪种情况，这个环显然都不为零，并且包含作为单位元的 v_{n-1}，如所声称。□

命题 3.2 的一个变体足以证明定理 1.3。

命题 3.3。设 $n \geq r$。环 $e(C_p^r)^{-1}E_n^*(BC_p^r)$ 不为零。

证明。$r = n$ 的特殊情形已在 HKR00 §6.2] 中分析：环$e(C_p^n)^{-1}E_n^*(BC_p^n)$ 是其中称为 $L_1(E_*)$ 的非零环，并且很容易证明它是 $p^{-1}E_n^*$上的有限且忠实平坦代数。对于一般情形，注意到投影 $C_p^n \to C_p^r$ 到前 r 个坐标，会诱导一个代数映射，从 $e(C_p^r)^{-1}E_n^*(BC_p^r)$映到非零环 $e(C_p^n)^{-1}E_n^*(BC_p^n)$。□

这两个命题都蕴含了关于更一般阿贝尔群的类似结果。

推论 3.4。(a) 环 $e(C_{p^k})^{-1}E_n^*(BC_{p^k})$ 是 Landweber 精确且v_{n-1}-周期的。

(b) 设 A 是一个秩为 r的有限阿贝尔 p-群。设 $n \geq r$，并设 $e \in E_n^*(BA)$为 $e(A)$ 或 $\bar{e}(A)$。那么环 $e^{-1}E_n^*(BA)$非零。

证明。若 A 的秩为 r，则任意满射 $q : A \to C_p^r$ 都会诱导一个双射 q^*: Hom$(C_p^r, C_p) \xrightarrow{\sim}$ Hom(A, C_p)。由此可得 $q^*(e(C_p^r)) = e(A)$。引理 2.4(b) 告诉我们，通过 q^*，$E_n^*(BA)$ 是一个有限生成自由 $E_n^*(BC_p^r)$–代数，因此 $e(A)^{-1}E_n^*(BA)$ 将是一个有限生成自由$e(C_p^r)^{-1}E_n^*(BC_p^r)$–代数。于是，命题 3.2 证明了陈述 (a)，而命题 3.3 推出了陈述 (b)。□

3.1. 定理 1.3 的证明。设 A 的秩为 r。定理 3.1 告诉我们，若 $\widetilde{K}(n)_*(X) = 0$，则 $e^{-1}E_n^*(BA) \xrightarrow{\sim} e^{-1}E_n^*(BA) \otimes_{E_n^*} E_n^*(X^A)$。推论 3.4(b) 告诉我们，若 $n \geq r$，则 $e^{-1}E_n^*(BA) \neq 0$。（当 $r = 1$ 时，推论 3.4(a) 已经说明了这一点。）因此 $E_n^*(X^A) \neq 0$，从而 $X^A \neq \emptyset$。

3.2. 定理 1.1 的证明。我们首先注意到，如果 A 是阿贝尔的，且 A' 是 A 的子群，那么 $X^A = (X^{A'})^{A/A'}$。因此，只需在 A 是循环群时证明定理 1.1，因为一般情形可通过迭代得到。

因此，设 $X = C_{p^k}$，并设 $n \geq 1$。和它们一样，定理 3.1 告诉我们 $\widetilde{K}(n)_*(X) = 0$，对于某个 X 是一个有限的一样，定理 3.1 告诉我们 $X^C \neq \emptyset$，进而得到$e(C)^{-1}E_n^*(BC) \otimes_{E_n^*} \widetilde{E}_n^*(X^C) = 0$。

给定一个有限 CW 复形 Y，令 $h^*(Y) = e(C)^{-1}E_n^*(BC) \otimes_{E_n^*} \widetilde{E}_n^*(Y)$。根据推论 3.4(a)，这定义了一个系数环为 Landweber 精确且 v_{n-1}–周期的约化上同调理论。由于 $h^*(X^C) = 0$，引理 2.1 告诉我们 $\widetilde{K}(n-1)_*(X^C) = 0$。

4. Further Remarks

4.1. 与其他证明的比较。首先要指出的是，我们所知的每一种定理 1.1 的证明，在论证的某个环节都涉及对欧拉类取逆。

特别地，Strickland [S10, Thm.16.17]（未发表）或 Balmer 和 Sanders 96], BS [6 对此定理在 $A = C_p$ 的特殊情形下给出的证明，使用了 Φ^A HSA 的结果；Barthel 等人 A 则在其论文关键的第 3 节中对欧拉类取逆。（在所有这些论文中，定理 1.1 都是以几何不动点函子 作用于一个 –谱中的紧对象的方式表述的；但很容易看出，这等价于上述表述的定理 1.1，只是额外假设存在一个不动点。）

与这些证明不同，我们在此的证明转而采用 E_n–上同调，这导出了定理 3.1，也使我们能够利用推论 3.4，从 $A = C_p$ 的情形简单地推出所有 A 的定理 1.1；而推论 3.4 本身也有一个简单的证明。

对我们的目的而言，更强的结论是：若 A 是秩为 r 的有限阿贝尔 p–群，且 $n \geq r$，那么 $e(A)^{-1}E_n^*(BA)$ 是 Landweber 精确且 v_{n-r} 周期的。在 [T02], T. Torii 证明了当 A 为初等阿贝尔群时这一结论成立。在 [MNN19, 命题 5.28], A. Mathew、N. Naumann 和 J. Noel 将此结论推广到一般的 A，这是 Greenlees 和 Strickland 对 [GS99] 中环 $E_n^*(BA)/(v_0, \ldots, v_t)$ 的分析的一个应用。

关于我们的不动点定理——定理 1.3——我们注意到，应用 [KL20] 中的主定理，可以推导出定理 1.3 的一个推广，该推广适用于所有有限 p–群 P [KL20, 定理 2.20], ，但仅限于有限 P–空间的情形。我们在此证明阿贝尔群情形下的定理 1.3，论证更为简单；当然，它也适用于带有适当 A–作用的所有有限维复形。

从另一个方向来看，第二作者指出，在 $n = r$ 的情形下，定理 1.1 可以立即从 [HKR00], 的广义特征标理论中“读出”，而一般情形下的定理也可以类似地由 Stapleton 更一般的跨染色特征标 [S13] 推导出来。（这一论证给出了定理 1.1 的完整无基点版本。）构造这些特征标还涉及在阿贝尔 p– 群的 Morava E– 理论中求适当类的逆（然后将这些局部化环组装成一个适当的泛环）。为了证明定理 1.1，本文的证明对 $E_n^*(BA)$ 的分析远少于 [HKR00] 和 [S13] 中所采用的分析。

4.2. 非阿贝尔群的推广。论文 [BS17] 将理解某个

稳定等变同伦范畴的 Balmer 谱拓扑这一问题，化为如下问题：给定 $n \geq 0$，以及有限 p–群 P 的一个子群 Q，计算 $r_n(P,Q)$，其中 $r_n(P,Q)$ 是满足以下条件的最小 r：若 X 是一个有限 P–空间，且 X^Q 是 $K(n+r)_*$-无环的，则 X^P 是 $K(n)_*$-无环的。

如 [KL20], 中所述，反复应用定理 1.1 表明，$r_n(P,Q) \leq r(P,Q)$，其中 $r(P,Q)$ 是满足存在一列子群 $Q = K_0 \lhd K_1 \lhd \cdots \lhd K_r = P$ 的最小 r，其中每个 K_{i-1} 都正规于 K_i，且每个 K_i/K_{i-1} 都是循环的。（特别地，当 P 为阿贝尔时，$r(P,Q)$ 是 P/Q 的秩。）

人们可能会问，这个上界是否是最佳可能值。要证明对于特定的 n 和一对 $Q < P$这是如此，需要找到一个有限的 P–空间 X，使得

$$\widetilde{K}(n+r)_*(X^Q) = 0 \text{ but } \widetilde{K}(n)_*(X^P) \neq 0,$$

其中 $r = r(P,Q) - 1$。[6A19] 的作者在 P 为阿贝尔时找到了这样的例子。

[KL20] 的主定理指出，命题“对于所有有限的 P-空间 X，若 X^Q 是 $K(n+r)_*$–非循环的，则 X^P 是 $K(n)_*$-非循环的”蕴含着表面上更强的命题“对于所有有限的 P-空间 X，都有不等式 $\dim_{K(n+r)_*} K(n+r)_*(X^Q) \geq \dim_{K(n)_*} K(n)_*(X^P)$。”（这种结论类似于 Floyd [F52] 在经典情形下的一个定理。）这既带来了定理 1.1 [KL21] 的有趣应用，也带来了更多的例子族，表明 $r_n(P,Q) = r(P,Q)$ [KL20]。

我们对定理 1.1 的证明中有些步骤相当形式化，可以推广到非阿贝尔群。但证明最终依赖于推论 3.4，而该推论对非阿贝尔群完全失效：可以为任意有限群 G 定义欧拉类 $e \in E_n^*(BG)$，但只要 G 是非阿贝尔群，$e^{-1}E_n^*(BG) = 0$。如果存在某些对 $Q < P$，使得 $r_n(P,Q)$ 严格小于 $r(P,Q)$，那么要证明这一点就需要一些巧妙的新思路。[KL20] 列举了若干对 $Q < P$，其对应的 $r_n(P,Q)$ 目前尚不清楚。这里我们只介绍其中一个：设 C 是阶为 2 的非中心子群，且它包含于阶 16 的二面体群 D 中。$r_n(D,C)$ 等于 2 还是 3？（注意，$r(D,C) = 3$ 且 $r_n(D,\{e\}) = r(D,\{e\}) = 2$。）

4.3. 关于有限维复形的问题。一个显而易见的问题是，定理 1.1 是否也适用于不一定是有限复形的有限维复形。我们的证明中需要有限性，以确保$e^{-1}E_n^*(BC) \otimes_{E_n^*} E_n^*(X^C) = 0 \implies K(n-1)_*(X^C) = 0$。不过，我们仍可以提出：

问题 4.1. 设 A 是一个秩为 r的有限阿贝尔 p-群，且 X 是~一个有限维 A–CW 复形。如果 $K(n)_*(X) = 0$ 且满足 $n \geq r$，那么$\widetilde{K}(n-r)_*(X^A) = 0$吗？

首先要说明的是，如果 $n = r$，答案是否定的。如果 $M(\mathbb{Q})$ 是 $S^1 \xrightarrow{2} S^1 \xrightarrow{3} S^1 \xrightarrow{4} \dots$ 的映射望远镜，那么 $\widetilde{H}_*(M(\mathbb{Q}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$,

集中在 1 维。因此，若令阿贝尔 p–群 A 以平凡方式作用于 $M(\mathbb{Q})$，那么对所有 $n > 0$（以及所有 p），都有 $K(n)_*(M(\mathbb{Q})) = 0$，但$\widetilde{K}(0)_*(M(\mathbb{Q})^A) \neq 0$。不过，这实际上是一个非等变例子；而布斯菲尔德在 [Bou99]，中的结果指出，若 X 是一个空间，那么 $K(n)_*(X) = 0$ 意味着 $K(n-r)_*(X) = 0$ 对 $n - r \geq 1$ 成立。因此，对于 $n - r \geq 1$，这个问题可能有肯定答案。我们指出， [KL20] 表明，这样的色性史密斯定理将意味着相应的色性 Floyd 定理成立；此外，不动点定理 [KL20, Thm.2.20] 将推广到带有有限 p–群作用的有限维复形。

人们还可能会想知道，我们的不动点定理定理 1.3 是否已经是最佳可能结果。

问题 4.2。对于所有 $r \geq 1$，是否存在一个有限维 C_p^r–空间X，它是 $K(r-1)_*$–无圈的，并且没有不动点?

当 $r = 1$ 时，答案是肯定的。第二作者曾在 MathOverflow 上提问：C_p 是否能在一个有理平凡的有限维复形上无不动点地作用。作为回答，Tom Goodwillie [G22] 描述了C_2 在一个有理无圈的二维复形上的自由作用，而 Ian Leary 则指出了他的一篇论文，该论文构造了任意有限群在一个 3维有理无圈复形上的无不动点作用 [L05, 定理 13.1]

References

[BS17] P. Balmer 和 B. Sanders, *The spectrum of the equivariant stable homotopy theory of a finite group* **208** 2017 283 326 , 《Invent. Math.》 （） , –。

[BA19] T. Barthel, M. Hausmann, N. Naumann, T. Nikolaus, J. Noel 和 N. Stapleton, *The Balmer spectrum of the equivariant homotopy category of a finite abelian group* **216** 2019 215 240 , 《Invent. Math.》 （） , –。

[Bou99] A. K. Bousfield, *On $K(n)$–equivalences of spaces*, 《同伦不变代数结构》（巴尔的摩） , A. M. S. Cont. Math. Series 239（1999） , 85–89。[tD87] T. tom Dieck, *Transformation groups*, De Gruyter 数学研究丛书 8, de Gruyter, 1987。[F52] E. E. Floyd, *On periodic maps and the Euler characteristics of associated spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 72（1952） , 138–147。[GS99] J. P. C. Greenlees 和 N. P. Strickland, *Varieties and local cohomology for chromatic group rings* **38** 1999 1093 1139 , 《Topology》 （） , –。

[G22] T. Goodwillie, 对 MathOverflow 上 *Can a cyclic group of prime order act on a rationally acyclic finite dimensional complex and have no fixed points?* 提出的问题的回答, https://mathoverflow.net/q/438014。[HKR00] M. J. Hopkins, N. J. Kuhn 和 D. C. Ravenel, *Generalized group characters and complex oriented cohomology theories* **13** 2000 553 594 , J. Amer. Math. Soc. （） , –。[H95a] M. Hovey, *Bousfield localization functors and Hopkins' chromatic splitting conjecture* **181** 1995 225 250 , J.A.M.S. Cont. Math. （） , –。[H95b] M. Hovey, *Cohomological Bousfield classes*, J. P. A. A. 103（1995） , 45–59。[HS96] M. Hovey 和 H. Sadofsky, *Tate cohomology lowers chromatic Bousfield classes*, Proc. A. M. S. 124（1996） , 3579–3585。

[HS99] M. Hovey 和 N. P. Strickland, *Morava K–theories and localizations*, Mem. A
mer. Math. Soc. 666, 1999。[KL20] N. J. Kuhn 和 C. J. R. Lloyd, *Chromatic Fixed Point Theory and the Balmer spectrum for extraspecial 2-groups* 2020 , Amer. J. Math., 即将发表。预印本 [KL21] N. J. Kuhn 和 C. J. R. Lloyd, *Computing the Morava K-theory of real Grassmanians using chromatic fixed point theory* , Alg. Geo. Top., 即将发表。2021 年预印本。[K21] N. J. Kuhn, *A short proof of the chromatic Smith fixed point theorem*, 预印本 2021 *Generalized character theory implies the chromatic Smith* 。拟更名为 [*fixed point theorem*
L05] I. Leary, *On finite subgroups of groups of type VF*, Geo. Top. 9（2005）, 1953–1976。[MNN19] A. Mathew、N. Naumann 和 J. Noel, *Derived induction and restriction theory*, Geom. Topol. 23（2019）, 541–636。[Rav84] D. C. Ravenel, *Localization with respect to certain periodic homology theories*, Amer. J. Math. 106（1984）, 351–414。[S41] P. A. Smith, *Fixed point theorems for periodic transformations*, Amer. J. Math. 63（1941）, 1–8。[S13] N. Stapleton, *Transchromatic generalized character maps*, Algebr. Geom. Topol. 13（2013）, 171–203。[S10] N. P. Strickland, *Thick ideals of finite G–spectra*, 2010 年未发表的笔记。[T02] T. Torii, *The geometric fixed point spectrum of $\mathbb{Z}/p^r$ Borel cohomology for E_n and its completion* **293** 2002 343 369 （）, A.M.S. Cont. Math.（）, –。*Email address*: eqr8nm@virginia.edu*Email address*: njk4x@virginia.eduDepartment of Mathematics, University of Virginia, Charlottesville, VA