arXiv:2303.02031v1 [math.OC] 3 Mar 2023

SONC在动力系统李雅普诺夫稳定性中的初步应用

JANIN HEUER 和 TIMO DE WOLFF

Abstract. 对动力系统稳定性进行认证是控制理论和系统分析中的一项核心且具有挑战性的任务。为解决这些问题，我们提出了一种用于寻找多项式李雅普诺夫函数的算法方法。我们的方法基于非负电路函数之和（SONC），这是一种实多项式的非负性证书。我们证明，借助 SONC 证书，既可以通过相对熵规划验证李雅普诺夫函数，也可以完成更困难的李雅普诺夫函数搜索任务。这种方法与利用平方和（SOS）证书和半定规划寻找李雅普诺夫函数的方法类似，但彼此独立。此外，我们还探究了对于这类问题，采用近期提出的相关证书 DSONC 是否比 SONC 更有优势。我们实现了相关成果，并通过示例展示其适用性。

1. 引言

本文研究由有限个多项式一阶微分方程建模的动力系统。具体而言，我们关注此类系统平衡点的稳定性。通常，这种稳定性用李雅普诺夫稳定性来刻画，见定义 2.2。

验证稳定性是控制理论和系统分析中常见的问题 [Kha02, H+67] ，也存在于种群动力学 [SS01],、化学反应 [´ET89, Fei95], 、航空航天制导系统 [PDH07, Ros95], 以及混沌理论 [Wil97]等应用领域。确定平衡点的李雅普诺夫稳定性是一项极具挑战性的工作，因为通常不存在用于寻找李雅普诺夫函数的系统化算法。在某些情况下，寻找自然的基于能量的李雅普诺夫函数可能有效，见 [Kha02]。然而，求得精确的能量函数也可能十分困难；而且，对于经济、生物或抽象数学系统等，甚至可能不存在能量这一性质。

本文提出一种算法方法，用于寻找多项式动态系统的李雅普诺夫函数。根据李雅普诺夫稳定性定理（定理 2.3），我们知道，判定稳定性与判定实多元多项式的非负性密切相关；然而，这是一个难题（无论在理论上还是实践中都是如此）。因此，在假设多项式李雅普诺夫函数存在的前提下，通过检验给定多项式是否能作为某种（更容易检验的）

2010 数学主题分类。12D15,14P99, 90C26,90C30,93D05, 93D30,37C75。关键词和短语。非负性证书，电路多项式，SONC，非负多项式，DSONC，李雅普诺夫稳定性，动力系统。

非负性证书。利用这种联系的现有方法依赖于平方和（*SOS*）证书，参见例如 [JA15、PP02、HGGS18、Tan06]。显然，若一个多项式能够表示为其他多项式的平方和，则它必定是非负的。然而，寻找这种平方和表示只需解决一个半定规划问题；半定规划是凸优化问题中广为人知的一类。关于平方和的概述，参见例如 [Lau09、Las01、Par00a]。

另一种非负性证书是非负回路和（*SONC*）证书。Reznick 首先研究了电路多项式的一个特殊情形，称为仿射几何形式，见 [Rez89]。随后，Iliman 和第二作者给出了其一般多项式形式，见 [IdW16a]。在符号多项式的框架下，不久之后，相关理论也由其他研究者独立发展，见 [CS16]。在化学反应网络的背景下，该理论也由其他研究者独立发展，见 [PKC12]。电路多项式的主要特征是其支撑集构成一个极小仿射相关集。此外，它还满足若干其他条件，我们将在定义 2.5 中正式给出。要判断单个电路多项式是否非负，只需解一个线性方程组。这一点由 Iliman 和第二作者证明，并且可以由算术平均数—几何平均数（*AM/GM*）不等式推导得出。这种多项式非负性方法独立于平方和（SOS），尤其适用于大型稀疏多项式。使用 SONC 方法证明非负性，可以通过相对熵规划完成；这也是一个凸优化问题，见 [IdW16b, CS16,MCW21b]。

本文表明，非负性证书可用于证明多项式动力系统的李雅普诺夫稳定性，见定理 3.1。尽管这一结论适用于任意非负性证书，我们尤其关注 SONC 锥的情形。我们还进一步探讨了 *DSONC* 锥——这一近期在 [HdW22], 中提出的对象——对于这类问题有何用处，见推论 3.2。它是 SONC 锥的一个子锥，由 SONC 锥的对偶推导而来；此外，验证给定多项式是否属于该锥，可以通过线性规划实现。

第 3 节的前半部分仅关注验证给定函数是否为李雅普诺夫函数，而第 3.1 节则探讨更困难的问题：如何为给定系统实际寻找李雅普诺夫函数。我们在命题 3.7 中证明，尽管没有具体的李雅普诺夫候选函数可用于验证稳定性，增加了问题的难度，但寻找李雅普诺夫函数仍然只需要求解相对熵规划。我们在算法 3.8 中给出了实现这一过程的算法。在第 3.2 节中，我们说明，如果尝试采用 DSONC 方法搜索李雅普诺夫函数，就不能再通过线性规划来实现。相反，我们在命题 3.10 中证明，通过 DSONC 锥搜索李雅普诺夫函数同样需要求解相对熵规划，这意味着在这种情况下使用 DSONC 锥不再具有计算优势。第 4 节中，我们给出若干精选示例，以展示该算法的功能。最后，我们展望了未来可能采取的步骤，以进一步推进这一研究方向。

Acknowledgments

我们感谢 Christian Kirches 提出的宝贵意见。作者的研究工作得到了德国研究联合会资助，项目编号为 WO 2206/1-1。

2. 预备知识

2.1. 记号。本文中我们使用以下基本记号。我们分别用符号 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 表示自然数集和实数集。如果将 $\mathbb{R}$ 限制在正正交象限内，则记作 $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$。表示向量时，我们使用粗体符号。例如，向量 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 记作 $\boldsymbol{x}$。对于给定的有限集 $S \subseteq \mathbb{R}^n$，我们用 conv(S) 表示 S 的凸包，并用 Vert (conv(S)) 表示 conv(S) 的顶点集。 S 的基数记作 #S。如果 C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个锥或线性空间，则用 $\check{C}$ 表示其对偶锥／对偶空间。

2.2. **非线性系统分析**。 稳定性理论的目标是分析微分方程系统解的行为，而无需显式计算其解轨迹。尽管早在 1788 年，拉格朗日就已研究稳定性[Lag88], ，但基本定义以及许多重要定理由李雅普诺夫于 1892 年在其博士论文中提出，参见 [Lya92]，其中收录了俄语原文的出版译本。本小节将简要概述这一主题。更全面的介绍可参见例如 [Kha02], [Vid02],或 [Sas99]。

本文研究如下形式的微分方程多项式系统的稳定性

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)), \\ \text{subject to} \quad \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

这里， $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示系统在 $t \geq 0$ 中的状态，其对应的导数向量为 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$， $\boldsymbol{x_0} \in \mathcal{U}$ 是初始状态，其中某个邻域 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ 包含原点，且 $\boldsymbol{f}$ 是由实多项式函数组成的向量 $f_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n, \ i \in [n]$。注意，由于 $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathcal{U}$上局部满足利普希茨条件，方程（2.1）的解存在且（局部）唯一。这是皮卡德–林德勒夫定理的直接推论；例如参见 [Hal09]。

定义 2.1。若点 $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ 满足平衡点的定义，即对于方程（2.1），有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*(t) = \mathbf{0}$对所有 $t \geq 0$均成立，则称其为○

换言之，平衡点 $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ 是系统（2.1）的一个常值解。全文中不失一般性地假设 $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$ 是一个平衡点。在李雅普诺夫稳定性理论中，人们关注的是初始状态接近平衡点时系统轨迹的行为。

定义 2.2. 如果对每个$\varepsilon > 0$，都存在某个 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得对于所有$t \geq 0$, $\|\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{x}^*\| < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*\| < \varepsilon$，则称系统 (2.1) 的平衡点 $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ 稳定。如果平衡点稳定，且可以选择 δ 使得 $\|\boldsymbol{x_0}\| < \delta \ \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*$，则称其渐近稳定。如果平衡点不稳定，则称其不稳定。○

分析系统稳定性的一种常见方法称为李雅普诺夫直接法，下面的定理将对此进行介绍。

定理 2.3。 如果存在连续可微函数 $V\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$，使得系统 (2.1) 的平衡点 $\mathbf{0} = \boldsymbol{x}^* \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ 稳定，

$$\begin{aligned} V(\mathbf{0}) &= 0, \\ V(\boldsymbol{x}) &> 0 \qquad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ \dot{V}(\boldsymbol{x}) &\leq 0 \qquad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

此外，如果

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0 \qquad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\},$$

则 $\boldsymbol{x}^*$ 渐近稳定。

函数 V 可理解为一种函数，其行为类似于描述物理系统所储存总能量的函数。也就是说，如果我们把 V 视为描述系统中存在的（正）能量的函数，并且这种能量随时间递减（$-V \leq 0$），那么，如果系统达到最终静止状态（$V(\mathbf{0}) = 0$），就认为该系统是稳定的。李雅普诺夫的贡献在于证明，无需了解确切的物理能量，就能判断一个平衡点是稳定、渐近稳定还是不稳定。我们只需考虑一个行为类似的函数。这个函数称为李雅普诺夫函数。

本文旨在寻找一种新算法，利用多项式非负性领域的方法来搜索这类多项式李雅普诺夫函数。在下一小节中，我们将看到，以定理 2.3 为出发点，多项式优化是寻找多项式李雅普诺夫函数的一种自然方法。

2.3. **多项式优化**。 我们简要介绍多项式优化的基本原理，以及与之密切相关的多项式非负性判定问题。若想全面了解相关内容，感兴趣的读者可参阅例如[Lau09、Las15、BPT13]。

实多项式 p in $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是如下形式的函数

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in A} c_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \tag{2.2}$$

其中，集合 $A \subset \mathbb{N}^n$ 由有限个指数构成，我们采用多重指标记法 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{i=1}^n x_j^{\alpha_j}$。对于每个指数，系数 $c_{\boldsymbol{\alpha}}$ 属于 $\mathbb{R}$。我们将集合 $\boldsymbol{\alpha} \in A$称为$\operatorname{supp}(p) = \{\boldsymbol{\alpha} \in A : c_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0\}$ 的支撑集，记作 p。支撑集的凸包 conv(supp(p)) 称为 p 的牛顿多面体。p令

$$\mathbb{R}^A = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} : \boldsymbol{\alpha} \in A\}$$

表示具有固定支撑集 A 的实多项式集合。注意，$\mathbb{R}^A$ 中的每个多项式都可由其系数向量 $(c_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha} \in A}$唯一描述，该向量是 $\mathbb{R}^{\#A}$中的一个元素。

这意味着我们可以找到一个同构 $\mathbb{R}^A \simeq \mathbb{R}^{\#A}$。因此，我们使用记号 $\mathbb{R}^A$ 同时表示支撑集为 A 的多项式集合，以及由 A 中元素索引的向量集合。当我们不限制多项式的支撑集，即当我们指所有实多元多项式构成的空间时，记为 $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$。若给定多项式 p 满足非负，即对于所有 $p(\boldsymbol{x}) \geq 0$ 均有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$。

定义 2.4。设 p 是关于 $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$的多项式。该问题

$$\text{(POP)} \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \; p(\boldsymbol{x})$$

称为（无约束）多项式优化问题（*POP*），其目标函数 p。⬡

注意　一般而言，多项式优化问题并非凸问题，求解它们是 NP-困难的，参见例如 [Lau09]。

该问题（POP）可等价地表述为一个非负性问题

$$\max\{\gamma \in \mathbb{R} \;:\; p(\boldsymbol{x}) - \gamma \geq 0 \text{ for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}. \tag{2.3}$$

具体而言，我们关注关于非负性锥 A

$$\mathcal{P}_A = \{p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \;:\; \operatorname{supp}(p) \subseteq A,\; p(\boldsymbol{x}) \geq 0 \;\text{ for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\},$$

其中 A 是 $\mathbb{N}^n$的一个有限子集。

重述式 (2.3) 使我们能够使用称为非负性证书的对象来求解 (POP) 的下界。这些是实多元多项式上的条件，满足这些条件即可推出其非负性，而且比直接检验非负性更容易。我们还要求这些证书适用于相当广泛的一类多项式。非负性证书的经典例子是平方和 *(SOS)*

$$\Sigma_A \;=\; \left\{ p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \;:\; \operatorname{supp}(p) \subseteq A,\; p(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} s_i^2(\boldsymbol{x}) \text{ for some } s_i \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \right\} \subseteq \mathcal{P}_A.$$

有关平方和的更多内容，参见例如 [Lau09、Las01]。

2.3.1. *SONC* 锥。一种较新的非负性研究方法，是考察一类称为电路多项式的多项式。这些多项式引出了一种新的非负性证书，称为非负回路和 *(SONC)*证书。电路多项式的概念最早由 Reznick 在 [Rez89]中提出。Reznick 研究了一种特殊形式的电路多项式，并称之为单纯形仿射形式。一般定义由 Iliman 和第二作者在 [IdW16a]中给出。回顾一下，集合 A 称为回路，如果 A 是极小仿射相关的，即 A 的所有真子集都是仿射无关的；例如参见 [LRS10]。

定义 2.5（电路多项式）。一个多项式 $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 具有有限支撑集$A \subset \mathbb{N}^n$ 时称为电路多项式，如果

(1) A 是一个单纯形回路；

(2) 它满足

$$\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Vert}(\operatorname{conv}(A)) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\alpha} \in (2\mathbb{N})^n \;\text{ and }\; c_{\boldsymbol{\alpha}} > 0, \text{ and}$$

(3) 若 $\boldsymbol{\beta} \in A \setminus \operatorname{Vert}(\operatorname{conv}(A))$, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\operatorname{conv}(A)$ 的严格内部点。

⬡

注意，定义 2.5 表明，回路多项式具有如下形式

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} c_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} + c_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}},$$

其中 $A^+ = \{\boldsymbol{\alpha} \in A : \ \boldsymbol{\alpha} \in (2\mathbb{N})^n, \ c_{\boldsymbol{\alpha}} > 0\} \subset (2\mathbb{N})^n$ 且 $\boldsymbol{\beta}$ 包含于牛顿多面体 $\operatorname{conv}(A)$ $p\operatorname{conv}(A)$ 按定义是一个单纯形，因此 $\boldsymbol{\beta}$ 相对于 A^+存在唯一的重心坐标。我们将其记为$\boldsymbol{\lambda}$。Iliman 和第二作者进一步证明，回路多项式的非负性可通过一个称为回路数的不变量来判定。

定理 2.6 ([IdW16a])。 回路多项式 $p(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} c_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} + c_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ 非负，当且仅当

(1) p 是单项式平方之和，即 $\boldsymbol{\beta} \in (2\mathbb{N})^n$ 且 $c_{\boldsymbol{\beta}} > 0$，或者

(2) $|c_{\boldsymbol{\beta}}| \leq \prod_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} \left(\frac{c_{\boldsymbol{\alpha}}}{\lambda_{\boldsymbol{\alpha}}}\right)^{\lambda_{\boldsymbol{\alpha}}} =: \Theta_p.$

这个不变量 Θ_p 称为 p的

为了将上述关于电路多项式的结果应用于具有一般支撑集的多项式，我们定义非负电路（*SONC*）多项式之和所构成的锥。

定义 2.7 （SONC 锥）。 SONC 锥 $\mathcal{S}_A$ 是所有非负多项式 p 的子集，这些多项式在 $A \subset \mathbb{N}^n$中具有有限支撑，并且可以表示为非负回路多项式之和或单项式平方。⬡

定理 2.8 ([DIdW17])。 令 $A \subseteq \mathbb{N}^n$ 为某个有限支撑集。那么 $\mathcal{S}_A$ 是 $\mathcal{P}_A$中的一个凸的满维锥。一般而言，还有 $\mathcal{S}_A \not\subset \Sigma_A$成立。

在多项式优化中，我们利用 SONC 性质蕴含非负性这一事实，注意到

$$\max\{\gamma \in \mathbb{R}^n \ : \ p(\boldsymbol{x}) - \gamma \geq 0 \text{ for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\} \ \geq \ \max\{\gamma \in \mathbb{R}^n \ : \ p(\boldsymbol{x}) - \gamma \text{ is SONC}\}.$$

也就是说，我们在 SONC 锥上进行优化，为初始多项式优化问题求得下界。基于回路的 SONC 优化方法可以通过几何规划实现，参见例如 [IdW16b]。在多项式优化问题中，我们通常已知系数向量的信息。因此，假设系数向量具有固定的符号分布是合理的。令 $p \in \mathbb{R}^A$为如下形式的多项式 $p(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A} c_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$。那么，我们将 p 的支撑集写作 $A = A^+ \cup A^-$，其中 A^+ 定义同前，即为对应系数为正的偶指数向量集合，且 $A^- = A \setminus A^+$。对于 SONC 锥，我们用以下记法表示这种情况$\mathcal{S}_{A^+,\ A^-}$。在处理多项式优化问题时，经常采用这种将支撑集划分为正支撑集和负支撑集的方法，参见例如[DIdW19,IdW16b, MCW21a,MCW21b]。

本文采用 SONC 锥的一种替代性刻画方式，该方式不依赖于将其显式分解为回路，最早由 Chandrasekaran 和 Shah 在 [CS16]中提出，并称为 算术-几何指数和（*SAGE*）。对于等支持集，SONC 锥与 SAGE 锥是等价的，参见

[Wan22, MCW21a]；另见 [FdW22]。在 SAGE 语言中，相关结果针对 指数和 $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A} c_{\boldsymbol{\alpha}} \exp(\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\alpha})$ 的情形进行了表述。如果要求 $A \subset \mathbb{N}^n$，则可通过对所有 $x_i \mapsto \ln(x_i)$ 使用 $i \in [n]$变量变换 [IdW16a]，在正正交象限上恢复多项式。利用 SAGE 文献中的结果，我们得到多项式语言下 SONC 锥的如下刻画。

定理 2.9（本质上是 [CS16，引理 2] 和 [MCW21a，定理 3]）。设 $A = A^+ \cup A^- \subset \mathbb{N}^n$ 是一个有限的非空支撑集。那么，多项式 $p(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} c_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} + \sum_{\boldsymbol{\beta}\in A^-} c_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ 属于 $\mathcal{S}_{A^+, A^-}$ 当且仅当对每个 $\boldsymbol{\beta} \in A^-$，都存在 $\boldsymbol{c}^{(\boldsymbol{\beta})}$ 和 $\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{\beta})}$ 属于 $\mathbb{R}^{A^+}_{\geq 0}$，使得

$$\begin{aligned} \sum_{\boldsymbol{\beta}\in A^-} c_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\boldsymbol{\beta})} &= c_{\boldsymbol{\alpha}} \quad \text{for all } \boldsymbol{\alpha} \in A^+, \\ D(\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{\beta})}, e \cdot \boldsymbol{c}^{(\boldsymbol{\beta})}) &\leq c_{\boldsymbol{\beta}} \quad \text{for all } \boldsymbol{\beta} \in A^-, \text{ and} \\ \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} v_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\boldsymbol{\beta})} (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) &= 0 \quad \text{for all } \boldsymbol{\beta} \in A^-, \end{aligned}$$

其中 $D\colon \mathbb{R}^A_{\geq 0} \times \mathbb{R}^A_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ 是 相对熵函数 $D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{c}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A} v_{\boldsymbol{\alpha}} \ln\left(\frac{v_{\boldsymbol{\alpha}}}{c_{\boldsymbol{\alpha}}}\right)$。 —

如果我们采用基于 SAGE 的多项式优化方法，则需要求解一个 相对熵规划，参见 [CS16]。

定义 2.10 (相对熵规划)。一个优化问题称为相对熵规划 *(REP)*，如果它具有以下形式

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} \quad & g_i(\boldsymbol{x}) \geq 0 \qquad \text{for all } i \in [m], \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}_n, \end{aligned}$$

其中 f，g_1，……，g_m 是线性函数，且

$$\mathcal{R}_n = \left\{ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;:\; y_j \ln\left(\frac{y_j}{z_j}\right) \leq t_j \text{ for all } j \in [n] \right\}$$

表示相对熵锥。 ⬡

最后，我们还指出，SONC 和 SAGE 领域中的各种结果，例如定理 2.6，早在 2012 年就由 Craciun、Pantea 和 Koeppl 在化学反应网络的背景下独立证明了 [PKC12]。

2.3.2. *DSONC* 锥。本文重点讨论*SONC* 锥的对偶 以及与之密切相关的*DSONC* 锥，它可作为非负性的次级证书。SONC 锥的对偶已在例如 [DHNdW20, KNT21], 中得到研究，而 DSONC 锥则是近期在 [HdW22]中引入的。此处仅作简要概述，详情请参阅 [HdW22]。

DSONC 锥不仅能提供非负性证书，还具有一项额外优势：对该锥进行优化可通过线性规划实现，参见命题 2.12。为定义 DSONC 锥，我们使用自然对偶配对

$$\boldsymbol{v}(p) \;=\; \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} v_{\boldsymbol{\alpha}} c_{\boldsymbol{\alpha}} + \sum_{\boldsymbol{\beta}\in A^-} v_{\boldsymbol{\beta}} c_{\boldsymbol{\beta}} \;\in\; \mathbb{R},$$

其中 $\boldsymbol{v}(\cdot) \in \check{\mathbb{R}}^A$ 且 $p(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} c_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} + \sum_{\boldsymbol{\beta}\in A^-} c_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{R}^A$。结合对偶锥的通常定义，对偶 SONC 锥为集合

$$\check{\mathcal{S}}_{A^+,A^-} = \left\{\boldsymbol{v} \in \check{\mathbb{R}}^A \;:\; \boldsymbol{v}(p) \geq 0 \text{ for all } p \in \mathcal{S}_{A^+,A^-}\right\}.$$

为了将多项式 $p \in \mathbb{R}^A$（其中 $A = A^+ \cup \{\boldsymbol{\beta}\}$）与元素 $\boldsymbol{v} \in \check{\mathcal{S}}_{A^+,\,\boldsymbol{\beta}}$ 相关联，我们考虑

$$p(\boldsymbol{x}) \;=\; \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} v_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} + v_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}. \tag{2.4}$$

每个这种形式的多项式也包含于 SONC 锥 $\mathcal{S}_{A^+,\,\boldsymbol{\beta}}$ 因此是非负的，参见 [DHNdW20]。类似于原始 SONC 锥的构造$\mathcal{S}_{A^+,\,A^-}$，现在我们将其推广到任意支撑集，并作如下定义。

定义 2.11（DSONC 锥）。令 $A = A^+ \cup A^-$ 为任意固定的支撑集。则闵可夫斯基和

$$\mathcal{D}_{A^+,A^-} \;=\; \sum_{\boldsymbol{\beta}\in A^-} \left\{ \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} c_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} + c_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} \;:\; \boldsymbol{c} \in \check{\mathcal{S}}_{A^+,\boldsymbol{\beta}} \right\}.$$

称为（带符号的）*DSONC* 锥。如果不固定符号分布，则记作$\mathcal{D}_A$。 ⬡

我们指出，只需写成如下形式，就可以轻松地将该锥推广到非固定支撑集：

$$\mathcal{D} \;=\; \{p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \;:\; \text{there exists } A \subset \mathbb{N}^n \text{ such that } p \in \mathcal{D}_A\}. \tag{2.5}$$

˘ 以下可行性问题验证了其包含于 $\mathcal{S}_{A^+,\,\boldsymbol{\beta}}$，并由此可得其包含于 DSONC 锥 $\mathcal{D}_{A^+,\,\boldsymbol{\beta}}$。

命题 2.12 ([DHNdW20])。对于某个固定支撑集 $A = A^+ \cup \{\boldsymbol{\beta}\} \subset \mathbb{N}^n$，令$\boldsymbol{v} \in \check{\mathbb{R}}^A$，并令 $v_{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0$ 对每个 $\boldsymbol{\alpha} \in \text{Vert (conv}(A))$ 都成立。线性可行性规划

$$\ln\left(\frac{|v_{\boldsymbol{\beta}}|}{v_{\boldsymbol{\alpha}}}\right) \;\leq\; (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{\beta})} \quad \text{for all} \quad \boldsymbol{\alpha} \in A^+ \tag{2.6}$$

˘ 以变量 $\boldsymbol{\tau}$ 为变量，验证其包含于 $\mathcal{S}_{A^+,\,\boldsymbol{\beta}}$。

命题 2.12 中的可行性问题构成了我们在第 3.2 节采用 DSONC 方法进行李雅普诺夫稳定性分析的基础。

3. Polynomial Optimization for Lyapunov Analysis

现在我们说明如何利用多项式优化构造稳定性的一个充分条件。对于平方和这一特殊情形，相关内容已见

[Par00b, JA15,AP13], 等文献。为了利用定义 2.4 中定义的多项式优化来解决这一问题，我们将讨论范围限定在无约束情形。下面的定理使用任意非负性证书 $\mathbb{GEN}$ 和定义域 $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$。

定理 3.1. </style}若， $p_2 \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$上严格为正，则如果存在满足以下条件的多项式函数 $V\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，系统 (2.1) 的平衡点 $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$是稳定的

$$\begin{aligned} V(\mathbf{0}) &= 0, \\ V(\boldsymbol{x}) - p_1(\boldsymbol{x}) &\in \mathbb{GEN} \qquad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ -\dot{V}(\boldsymbol{x}) &\in \mathbb{GEN} \qquad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

此外，若

$$-\dot{V}(\boldsymbol{x}) - p_2(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{GEN} \qquad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\},$$

则 $\boldsymbol{x}^*$ 渐近稳定。

证明. 设 V 为满足上述条件的多项式函数。为了证明这意味着（渐近）稳定性，我们需要检查定理 2.3 中给出的条件是否成立。由于 V 是多项式函数，因此连续可微。条件 $V(\boldsymbol{x}) - p_1(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{GEN}$ 对某个非负性证书 $\mathbb{GEN}$ 成立，这意味着

$$V(\boldsymbol{x}) \geq p_1(\boldsymbol{x}) > 0 \qquad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\},$$

，并且若 $-V(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{GEN}$ 成立，则对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0$。根据定理 2.3，可得稳定性。此外，$-V(\boldsymbol{x}) - p_2(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{GEN}$ 意味着

$$-\dot{V}(\boldsymbol{x}) \geq p_2(\boldsymbol{x}) > 0 \qquad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

因此，由定理 2.3 可知，系统渐近稳定。 □

事实上，对于情形 $\mathbb{GEN} = \mathcal{D}$（见 (2.5)），若平衡点为 $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$，则定理 3.1 可简化。DSONC 锥中的多项式在原点之外没有实零点，零多项式这一平凡例外除外，见 [HdW22]。因此，我们可以省去减去正多项式这一步，从而得到以下推论。

推论 3.2. 若存在多项式函数 $V\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足 V 不是零多项式，且则系统 (2.1) 的平衡点 $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$ 渐近稳定，

$$\begin{aligned} V(\mathbf{0}) &= 0, \\ V(\boldsymbol{x}) &\in \mathcal{D} \qquad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \\ -\dot{V}(\boldsymbol{x}) &\in \mathcal{D} \qquad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

证明。 这是以下事实的直接推论：属于 DSONC 锥 $\mathcal{D}$意味着具有正性，参见 [HdW22，推论 4。11], 以及定理 3.1。 □

我们的最终目标是提供一种基于（D）SONC 的过程，以寻找李雅普诺夫函数 V。目前，我们假设已经有一个候选函数 V，并且只想检验 V 是否为李雅普诺夫函数，方法是使用定理 3.1 和推论 3.2。我们将这样的函数称为 V 一个李雅普诺夫候选函数。

例 3.3. 考虑多项式系统

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_1^3 - x_1 - x_1x_3^2, \\ \dot{x_2} &= x_1^2 - x_2, \\ \dot{x_3} &= -x_3, \end{aligned} \tag{3.1}$$

该系统在原点有唯一的平衡点。我们希望对不同的非负性证书 $\mathbb{GEN}$ 使用定理 3.1，以证明 (3.1) 渐近稳定。为此，我们考虑李雅普诺夫候选函数 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$。此函数在$\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$上为正。它也是单项式平方之和，因此显然可以写成其他多项式的平方和。此外，它显然属于 SONC 锥和 DSONC 锥。

该李雅普诺夫候选函数的负导数为

$$\begin{aligned} -\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= -\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^\top \dot{\boldsymbol{x}} \\ &= 2x_1^4 + 2x_1^2x_3^2 - 2x_1^2x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2. \end{aligned}$$

如果我们能证明，对于以下不同的 $\mathbb{GEN}$ 选取中的任意一种，$-V(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{GEN}$，那么 (3.1) 的平衡点就是（渐近）稳定的。

(1) 首先，考虑 $\mathbb{GEN}$ 表示 SOS 锥的情形。我们可以很容易验证，$-V$ 可以写成

$$\begin{aligned} -\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}x_1^2 + \frac{1}{2}\sqrt{6}x_2\right)^2 + \left(\sqrt{2}x_3\right)^2 + \left(\sqrt{2}x_1\right)^2 \\ &\quad + \left(\sqrt{2}x_1x_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2\right)^2, \end{aligned}$$

因此它是多项式平方和。根据定理 3.1，(3.1) 在其平衡点 $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$ 处是稳定的。

事实上，我们甚至可以证明渐近稳定性。为此，考虑 $P(\boldsymbol{x}) = -\dot{V}(\boldsymbol{x}) - p_2(\boldsymbol{x})$，其中 p_2 可以选为例如 $p_2(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$。可以证明 P 仍然是平方和，因此可推出渐近稳定性。

(2) 现在令 $\mathbb{GEN}$ 为 SONC 锥。为验证 $-\dot{V}$ 可以写成若干非负单项式之和，考虑如下表示

$$-\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \underbrace{\left(2x_2^2 - 2x_1^2x_2 + 2x_1^4\right)}_{=c(x_1,x_2)} + 2x_1^2x_3^2 + 2x_1^2 + 2x_3^2.$$

如果我们能证明 $c(x_1, x_2)$ 是一个非负回路多项式，那么系统 (3.1) 的稳定性便可得出。首先注意，对于 c 的支撑集 $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$，我们有

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}.$$

这表明 c 的支撑集是一个回路，其外点 $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ 均为偶数。现在，如果我们按照定理 2.6 中的定义计算回路数，就会得到

$$\Theta_c = (4 \cdot 4)^{\frac{1}{2}} = 4 > |-2|,$$

这证明了非负性。要证明该系统是渐近稳定的，例如，我们可以从 $-\dot{V}$中减去 $p_2(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_3^2$。

(3) 最后，我们选择 $\mathbb{GEN} = \mathcal{D}$。 $-$的正支撑为 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$由下式给出

$$A^+ = \left\{\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

由于我们只有一个内点 $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in A^- = \{\boldsymbol{\beta}\}$，因此只需验证其包含于锥 $\mathcal{D}_{A^+,\boldsymbol{\beta}}$ 中。请注意，我们可以不验证 $-\dot{V}(\boldsymbol{x})$的非负性，而改为考虑 $-\frac{1}{2}\dot{V}(\boldsymbol{x})$，二者等价。这样做的好处是，现在所有涉及的系数的绝对值均为 1，正如我们接下来将看到的，这简化了计算。因此，我们尝试为 $-\frac{1}{2}\dot{V}(\boldsymbol{x})$求解可行性问题命题 2.12。注意，对于所有$\boldsymbol{\alpha} \in A^+$，均有 $\ln\left(\frac{|c_{\boldsymbol{\beta}}|}{c_{\boldsymbol{\alpha}}}\right) = \ln(1) = 0$，其中 $c_{\boldsymbol{\alpha}}$，$c_{\boldsymbol{\beta}}$表示 $-\frac{1}{2}\dot{V}(\boldsymbol{x})$的系数。因此，该可行性问题有一个平凡解 $\overline{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0}$。由此，根据推论 3.2，(3.1) 是渐近稳定的。

⬡

为了说明稳定性与渐近稳定性之间的区别，我们考察另一个小例子。

例 3.4（线性化悬挂摆）。 考虑以下系统

$$\dot{x_1} = x_2, \qquad \dot{x_2} = -\sin(x_1),$$

这可以解释为一个简单的归一化悬挂摆，其中 x_1 表示摆相对于垂直轴的偏转角。该系统的平衡点（x_1，x_2）$= (0, 0)$ 描述的是摆垂直向下悬挂的状态。对于小角度 x_1，我们可以使用泰勒展开将该系统线性化

并改为考虑

$$\dot{x_1} = x_2, \qquad \dot{x_2} = -x_1.$$

例如，我们可以选择 $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$作为该系统的李雅普诺夫函数。采用这一选择后，我们得到 $\dot{-V}$是零多项式，因此能够证明稳定性，但无法证明渐近稳定性。

事实上，摆受到扰动时会沿着对应于恒定能量的轨迹运动，如图1中的相图所示。也就是说，一旦摆开始运动，它就会沿着同一条轨迹持续摆动（因为我们假设不存在外部影响）。⎔

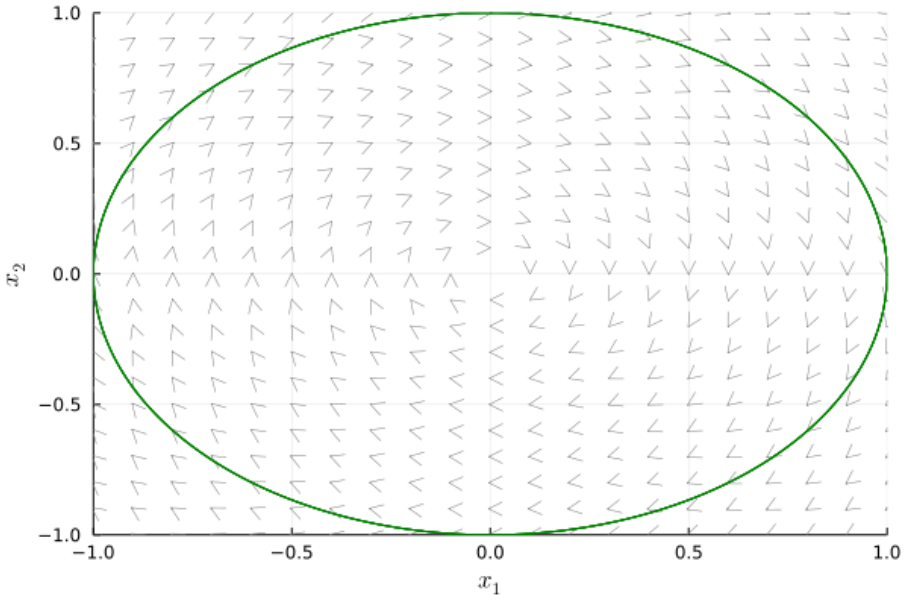

FIGURE 1. 线性化悬挂摆的相图

正如我们之前指出的，目前通过多项式优化进行李雅普诺夫函数搜索的方法使用平方和证书（以及半定规划）。事实上，可以证明，只要存在多项式李雅普诺夫函数，就存在平方和李雅普诺夫函数。

引理3.5 ([AP13，引理5.1])。 如果形式为 (2.1) 的多项式系统存在一个多项式李雅普诺夫函数，那么它也存在一个平方和李雅普诺夫函数。

要证明该引理成立，只需将多项式李雅普诺夫函数V替换为它的平方。不过，对于一般的多项式系统，尚不清楚这个平方李雅普诺夫函数的负导数是否也是平方和。若要使其成立，还需额外要求系统由齐次 多项式定义，参见 [AP13，定理 5.3]。

在本文其余部分，我们将探讨如何使用 SONC 和 DSONC 非负性证书，为给定的多项式系统寻找李雅普诺夫函数，以此作为 SOS 方法的替代方案。

3.1. 通过 SONC 锥进行全局稳定性分析。 在寻找多项式李雅普诺夫函数时，涉及的系数不再是固定的，而是优化问题中的额外变量。因此，在将多项式优化技术应用于稳定性分析之前，我们需要研究变量系数如何影响计算。

命题 3.6。 验证支撑集为 $A = A^+ \cup A^-$、具有变量 系数 $\{c_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $\{c_{\boldsymbol{\beta}}\}_{\boldsymbol{\beta}\in A^-} \subset \mathbb{R}$ 的多项式是否属于 SONC 锥 $\mathcal{S}_{A^+,\ A^-}$ 可以写成一个相对熵规划。

证明。 设 $A \subset \mathbb{N}^n$ 是具有固定符号分布 $A = A^+ \cup A^-$ 的支撑集，并设 p 是支撑集为 A、具有变量系数 $\{c_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+}$ 和 $\{c_{\boldsymbol{\beta}}\}_{\boldsymbol{\beta}\in A^-}$ 的多项式。根据定理 2.9 可直接推出，$p \in \mathcal{S}_{A^+,\ A^-}$ 当且仅当系数取值使得相对熵规划

$$
\begin{aligned}
&\min && 0 && \\
&\text{subject to} && \sum_{\boldsymbol{\beta}\in A^-} c_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\boldsymbol{\beta})} && = c_{\boldsymbol{\alpha}} && \text{for all } \boldsymbol{\alpha} \in A^+, \\
&&& D(\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{\beta})}, e\cdot \boldsymbol{c}^{(\boldsymbol{\beta})}) && \leq c_{\boldsymbol{\beta}} && \text{for all } \boldsymbol{\beta} \in A^-, \text{ and} \\
&&& \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} v_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\boldsymbol{\beta})}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) && = 0 && \text{for all } \boldsymbol{\beta} \in A^-,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

在附加变量 $\boldsymbol{c}^{(\boldsymbol{\beta})}$、$\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{\beta})} \in \mathbb{R}^{A^+}_{\geq 0}$、$\boldsymbol{\beta} \in A^-$ 中有一个可行解。 □

命题 3.7。 可以通过相对熵规划，在 SONC 锥中寻找一个李雅普诺夫函数，以验证形式为 (2.1) 的系统 $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]^n$ 的平衡点 $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$ 稳定。

证明。 我们已在命题 3.6 中看到，验证一个具有变量系数的多项式是否包含于 SONC 锥中，可以通过求解相对熵规划 (3.2) 来完成。若现在采用这种方法来寻找李雅普诺夫函数，则必须验证李雅普诺夫函数及其负导数均包含于 SONC 锥中。设 $A \subset \mathbb{N}^n$ 为具有固定符号分布 $A = A^+ \cup A^-$的一个合适支撑集，设 V为一个支撑于 A、具有变量系数 $\{c_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+}$ 和 $\{c_{\boldsymbol{\beta}}\}_{\boldsymbol{\beta}\in A^-}$的多项式李雅普诺夫候选函数，并设 $p \in \mathbb{R}^A$ 为一个具有固定系数 $\{\varepsilon_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in A}$的严格正多项式。我们对 $\mathbb{GEN} = \mathcal{S}_A$ 应用定理 3.1，这首先要求 $V - p \in \mathcal{S}_A$。即，我们需要求解

相对熵可行性问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 0 \\
\text{subject to} \quad & \sum_{\boldsymbol{\beta}\in A^-} c_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\boldsymbol{\beta})} && = c_{\boldsymbol{\alpha}} - \varepsilon_{\boldsymbol{\alpha}} && \text{for all } \ \boldsymbol{\alpha}\in A^+, \\
& D(\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{\beta})}, e\cdot \boldsymbol{c}^{(\boldsymbol{\beta})}) && \le c_{\boldsymbol{\beta}} - \varepsilon_{\boldsymbol{\beta}} && \text{for all } \ \boldsymbol{\beta}\in A^-, \text{ and} \\
& \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} v_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\boldsymbol{\beta})}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) && = 0 && \text{for all } \ \boldsymbol{\beta}\in A^-,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

由命题 3.6 给出。接下来，$-V$ 必须包含于 SONC 锥中。为此，注意 $-V$的系数（记为 $\boldsymbol{d(c)}$）由 V的变量系数 $\boldsymbol{c}$ 以及系统 $\boldsymbol{f}$ （如式 (2.1)）通过线性方程给出。这相当于在上述优化问题中添加线性约束。令 $B = B^+ \cup B^-$ 表示 $-V$ 与某个固定符号分布共同构成的支撑集。我们在附加变量 $\boldsymbol{d}^{(\boldsymbol{\beta})}$，$\boldsymbol{w}^{(\boldsymbol{\beta})} \in \mathbb{R}^{B^+}_{\ge 0}$ 中添加另一组类型为 (3.2) 的约束，其中 $\boldsymbol{\beta}\in B^-$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\boldsymbol{\beta}\in B^-} d_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\boldsymbol{\beta})} &= d_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{c}) && \text{for all } \ \boldsymbol{\alpha}\in B^+, \\
D(\boldsymbol{w}^{(\boldsymbol{\beta})}, e\cdot \boldsymbol{d}^{(\boldsymbol{\beta})}) &\le d_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{c}) && \text{for all } \ \boldsymbol{\beta}\in B^-, \quad \text{and} \\
\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in B^+} w_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\boldsymbol{\beta})}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) &= 0 && \text{for all } \ \boldsymbol{\beta}\in B^-.
\end{aligned}
$$

这确保了 $-V \in \mathcal{S}_B$，因此对于优化问题的任意解，根据定理 3.1，$\boldsymbol{f}$ 的平衡点的稳定性均可得证。由于所有约束都是（相对）熵约束或线性约束，所构造的问题是一个相对熵规划。□

现在，我们通过 SONC 锥来构造一个计算李雅普诺夫函数的算法。目标是针对给定的支撑集 $A \subset \mathbb{N}^n$，求出系数 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^A$，使得$V\boldsymbol{(x)} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A} c_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ 满足定理 3.1 中的条件。我们希望使用定理 2.9 和定理 3.1。因此，该算法必须计算具有变量系数 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^A$ 的多项式

$$P(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x}) - p_1(\boldsymbol{x})$$

具有变量系数 $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^A$，并且

$$P'(\boldsymbol{x}) = -\dot{V}(\boldsymbol{x}) - p_2(\boldsymbol{x})$$

其系数为 $\boldsymbol{d(c)} \in \mathbb{R}^A$，并且关于 $\boldsymbol{c}$ 线性依赖。根据我们希望证明稳定性还是渐近稳定性，p_2 可以取为零多项式。我们假设 p_1 和 p_2 是多项式；除了在 $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上为正之外，它们的支撑集还包含于 A 中。定理 3.1 并未要求这一点，但这样做的优点是可以避免添加额外的负项。为了确定系数 $\boldsymbol{c}$ 的适当取值，我们采用命题 3.7 的证明中提出的优化问题。该方法涉及选择一个固定的符号分布，而我们希望选择一种可能导出可行解的分布。为此，我们对系数的符号作出如下合理选择:

(1) 计算 P 和 P' 的支撑集的子集，其中包含于 $(2\mathbb{N})^n$ 中。(2) 计算 P 和 P' 的牛顿多面体。

对于任意非负多项式，作为牛顿多面体顶点的指数必须为偶数，且对应的系数必须为正。这促使我们作出以下假设。

(3) 将所有对应于已计算出的牛顿多面体的奇数顶点的变量系数约束为零。(4) 将所有对应于牛顿多面体顶点的系数约束为非负。

对于其余变量系数，如何分配符号并没有显而易见的最佳选择。但由于目标是构造非负多项式，我们力求尽可能多地生成正项。为此，我们添加以下约束。

(5) 若对应的指数为偶数，则将尚未指定符号的系数约束为非负。

由于变量系数彼此相关，冗余约束的数量可能会非常庞大。因此，最后一步是删除迄今为止添加的所有冗余约束。我们通过求解以下线性规划来完成这一步。

(6) 假设我们的约束以如下列表形式给出：$[c_i \leq 0 : \ i \in [l]]$，其中 c_i 是线性函数。进一步假设，对于某个 $k < l$，这些约束已知对 $i \in [k]$ 而言不是冗余约束，并将包含所有非冗余约束的列表初始化为 $\texttt{constraints} = [c_i \leq 0 : \ i \in [k]]$。然后，对于所有剩余的满足 $j \in \{k+1, \ldots, l\}$ 的线性函数 c_j，我们求解

$$\begin{gathered}\max c_j \\ \text{满足 } \texttt{constraints}\end{gathered}$$

如果该线性规划存在正的可行解，那么由 c_j 定义的约束就不是冗余约束，我们将其加入列表 `constraints`，然后对 c_{j+1}重复该过程。如果该线性规划不存在正的可行解，那么我们可以忽略由 c_j给出的约束。

我们将 (1)-(6) 中给出的符号选择方法称为 `distribute signs`。相应的伪代码见附录，参见算法 A.1。请注意，步骤 (4) 虽然是一个简单且合理的假设，但未必是最佳选择。我们在例 4.3 中说明了这一点。一般而言，对于系数的符号选择，如果能够得到李雅普诺夫函数，则这种选择并非唯一。我们在算法 3.8 中总结了通过 SONC 锥搜索李雅普诺夫函数的方法。

算法 3.8。
输入： $A \subset \mathbb{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]^n$, p_1, $p_2 \in \mathcal{S}_A$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上严格为正**输出：** $V \in \mathcal{S}_A$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上严格为正

1: $V \leftarrow \texttt{poly}(\boldsymbol{c}, A)$ ▷ 具有变量系数向量的多项式 $\boldsymbol{c}$ 及其支撑集 A

2: 计算 $-V' = \texttt{poly}(\boldsymbol{d}(\boldsymbol{c}))\ A')$ ▷ V的负导数；系数取决于 $\boldsymbol{c}$

3: $P \leftarrow V - p_1$, $P' \leftarrow -V' - p_2$4: 根据 `distribute signs` 为 $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{c})$ 添加符号约束5: 添加约束 $P \in \mathcal{S}_{A^+,\ A^-}$ 和 $P' \in \mathcal{S}_{(A')^+,\ (A')^-}$6: 求解可行性问题7: **返回**V

请注意，通过该算法找到的李雅普诺夫函数可以证明底层系统的渐近稳定性。如果只需要稳定性证书，那么我们可以将p_2 选为零多项式。

3.2. **通过 DSONC 锥进行全局稳定性分析**。 如第2.3.2节所述，包含于 DSONC 锥中是非负性证书。因此，令 $\mathbb{GEN} = \mathcal{D}_{A^+,\ A^-}$，其中支撑集为 $A = A^+ \cup A^-$，可得出（2.1）中平衡点渐近稳定的一个充分判据。此外，通过线性规划可以在 DSONC 锥上进行优化，参见命题 2.12。利用线性规划找到李雅普诺夫函数非常理想，因此我们首先研究：当所涉及的系数是变量而非固定值时，使用 DSONC 锥证明非负性的优化问题会发生怎样的变化。

命题3.9。 验证具有支撑集 $A = A^+ \cup A^-$ 和变量 系数 $\{c_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+}$ 和 $\{c_{\boldsymbol{\beta}}\}_{\boldsymbol{\beta}\in A^-}$ 的多项式是否属于锥 $\mathcal{D}_{A^+,\ A^-} = \sum_{\boldsymbol{\beta}\in A^-} \mathcal{D}_{A^+,\ \boldsymbol{\beta}}$ 可以写成一个线性规划。

证明。 首先，考虑 $A^- = \{\boldsymbol{\beta}\}$ 的情形。为验证系数向量 $\check{}\boldsymbol{c}$ 属于对偶 SONC 锥 $\mathcal{S}_{A^+,\ \boldsymbol{\beta}}$，我们需要找到某个 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\ln\left(\frac{|c_{\boldsymbol{\beta}}|}{c_{\boldsymbol{\alpha}}}\right) \ \leq\ (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{\tau} \tag{3.4}$$

对所有 $\boldsymbol{\alpha} \in A^+$ 均成立。为了将其写成关于变量系数的线性 不等式组，我们定义变量 $\rho^{(\boldsymbol{\alpha})} = \ln(c_{\boldsymbol{\alpha}})$ 和 $\sigma^{(\boldsymbol{\beta})} = -\ln(|c_{\boldsymbol{\beta}}|)$。这样，(3.4) 变为

$$0 \ \leq\ (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{\tau} + \sigma^{(\boldsymbol{\beta})} + \rho^{(\boldsymbol{\alpha})}, \tag{3.5}$$

这是线性的。对于一般支撑集的情形，我们利用以下事实：根据构造，任意 DSONC 多项式 $p(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} c_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} + \sum_{\boldsymbol{\beta}\in A^-} c_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ 均可写成

$$p(\boldsymbol{x}) \ =\ \sum_{\boldsymbol{\beta}\in A^-} p_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}),$$

其中 $p_{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} c_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\boldsymbol{\beta})}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} + c_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} \in \mathcal{D}_{A^+,\ \boldsymbol{\beta}}$。因此，我们只得到形式为 $\sum_{\boldsymbol{\beta}\in A^-} c_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\boldsymbol{\beta})} = c_{\boldsymbol{\alpha}}$ 的额外线性约束，结论得证。

□

遗憾的是，若要解决定理 3.1 中用于验证多项式系统渐近稳定性的优化问题，情况便不再如此。原因在于，我们现在需要解决两个彼此依赖的可行性问题。

具体而言，李雅普诺夫候选函数的导数的系数依赖于李雅普诺夫候选函数 $V(\boldsymbol{x})$ 的变量系数。不过，正如下述命题所示，我们可以将该问题表述为一个相对熵规划。

命题 3.10。 当 $\mathbb{GEN} = \mathcal{D}_{A^+,\ A^-}$ 时，定理 3.1 中的问题可以表述为一个相对熵规划。

*P*证明。 我们首先注意到，对于任意固定的 $\boldsymbol{\beta} \in A^-$，可以将该条件替换为

$$\ln\left(\frac{|c_{\boldsymbol{\beta}}|}{c_{\boldsymbol{\alpha}}}\right) \ \leq\ (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{\tau} \qquad \text{for all } \ \boldsymbol{\alpha} \in A^+$$

关于 $\mathcal{D}_{A^+,\ \boldsymbol{\beta}}$ 的包含关系的条件替换为

$$|c_{\boldsymbol{\beta}}| \cdot \ln\left(\frac{|c_{\boldsymbol{\beta}}|}{c_{\boldsymbol{\alpha}}}\right) \ \leq\ (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^\top \widetilde{\boldsymbol{\tau}} \qquad \text{for all } \ \boldsymbol{\alpha} \in A^+, \tag{3.6}$$

其中我们设定 $\widetilde{\boldsymbol{\tau}} = |c_{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{\tau}$。随后我们观察到，导数 $V(\boldsymbol{x})$ 的系数在李雅普诺夫候选函数 $V(\boldsymbol{x})$ 的系数上呈线性 依赖。因此，所有需要的约束要么是形如 (3.6) 的相对熵约束，要么是线性约束。□

我们无法像在 (3.5) 中那样将其表述为线性规划，原因在于：在关于变量 $\rho^{(\boldsymbol{\alpha})}$ 和 $\sigma^{(\boldsymbol{\beta})}$ 的优化问题求解后，我们不能再简单地代入 $\rho^{(\boldsymbol{\alpha})} = \ln(c_{\boldsymbol{\alpha}})$ 和 $\sigma^{(\boldsymbol{\beta})} = -\ln(|c_{\boldsymbol{\beta}}|)$，从而恢复变量 $c_{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $c_{\boldsymbol{\beta}}$ 的真实取值。这是因为，现在所有描述 $-V$ 系数的变量 $c_{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $c_{\boldsymbol{\beta}}$ 又线性依赖于 V 的变量系数。这意味着，尽管我们仍可使用 DSONC 锥来寻找李雅普诺夫函数，但它不再比原始 SONC 锥具有计算优势。由于在任一锥上寻找李雅普诺夫函数都是一个相对熵规划，且 DSONC 锥是 SONC 锥的子集，因此使用更大的 SONC 锥总是更可取。

4. Examples

本节将探讨一些精选的多项式系统示例，并尝试使用前文介绍的算法以及 SOS 方法验证这些系统的稳定性。本文介绍的算法均在 `Python`中实现，通过这些方法找到的所有李雅普诺夫函数均使用 POEM 软件 [SdW19]进行了验证。SOS 结果则使用 Julia 软件包 `SumOfSquares.jl` [LWK+22]获得。所有计算均在配备 24GB RAM 的 Apple M2 上执行。完整代码和所有示例可通过以下地址访问

`https://moto.math.nat.tu-bs.de/appliedalgebra_public/sonclyapunov_initial`。

在本节的所有示例中，对于 SONC 和平方和计算，定理 3.1 所要求的正多项式 p_1 和 p_2 均选为以下形式的变量多项式

的

$$p(\boldsymbol{x}) \;=\; \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in A^+} \varepsilon_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

其中，A^+ 表示在过程 `distribute signs` 中确定的、具有正系数的偶指数集合（V 或 $-V$的），而 ε_α 是变量，我们对其施加约束，使其非负且总和至少为 10^{-3}。

例4.1 ([SLX+13，例 1])。我们先来看一个简单的两个变量的例子，在这个例子中，所有受测算法都得出了相近的结果。我们研究的系统为

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_1 - \frac{3}{2}x_1x_2^3, \\ \dot{x_2} &= -x_2^3 + \frac{1}{2}x_1^2x_2^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

该系统在原点处有唯一的平衡点，这意味着所有介绍过的算法都适用。我们尝试搜索形式为$V(\boldsymbol{x}) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2$的李雅普诺夫函数，而算法 3.8 找到

$$V(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2.$$

SOS方法求得 $V(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{3}x_1^2 + 2x_2^2$。(4.1) 的相图以及该 $V(\boldsymbol{x})$ 的等值集如图2所示。⬡

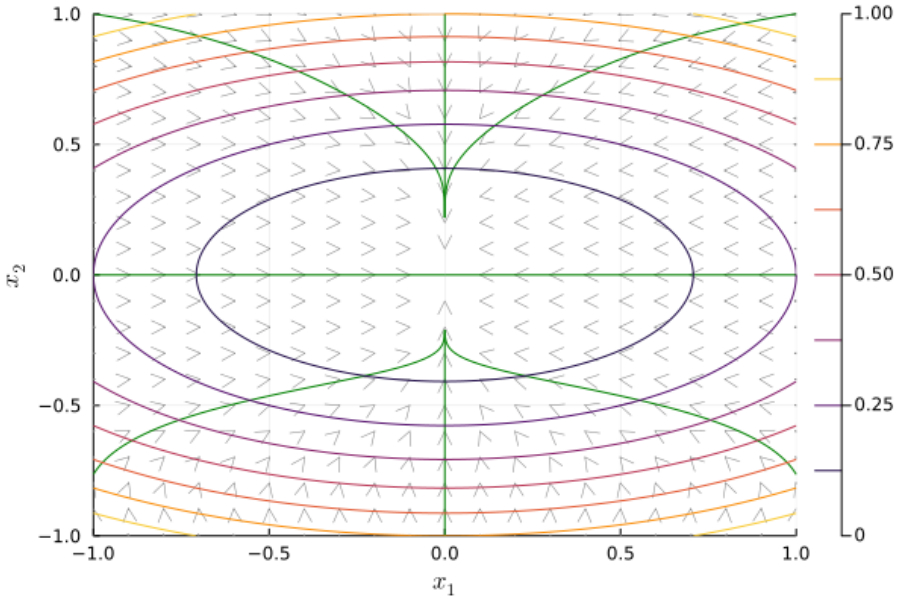

FIGURE 2. 系统 (4.1) 的相图，其中包含所找到的李雅普诺夫函数的等值集。

例4.2 ([PP02，例 1])。 现在我们尝试验证该系统的稳定性

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_1^3 + 4x_2^3 - 6x_3x_4, & \dot{x_4} &= x_1x_3 + x_3x_6 - x_4^3, \\ \dot{x_2} &= -x_1 - x_2 + x_5^3, & \dot{x_5} &= -2x_2^3 - x_5 + x_6, \\ \dot{x_3} &= x_1x_4 - x_3 + x_4x_6, & \dot{x_6} &= -3x_3x_4 - x_5^3 - x_6 \end{aligned}$$

在 6 个变量中，次数为 3，唯一的平衡点为 $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$ 。通过搜索形式为 $V(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{6} c_j x_j^2$ 的李雅普诺夫函数，.....然而，算法 3.8 未能找到这种形式的合适李雅普诺夫函数。SOS方法也无法找到次数为 2 的李雅普诺夫函数。

对于基于SONC的方法，我们发现，只需在上述 $V(\boldsymbol{x})$ 中添加项 $c_7x_2^4$ 和 $c_8x_5^4$ 即可。现在我们得到李雅普诺夫函数

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{x}) &= 3.426139247207665x_6^2 + 1.7130696236038325x_5^4 + 10.278417741622995x_4^2 \\ &\quad + 3.426139247207665x_2^4 + 1.7130696236038325x_1^2. \end{aligned}$$

通过平方和找到的次数为 4 的李雅普诺夫函数为

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{x}) &= 1.7448099617085968x_2^4 + 0.8723988328198938x_5^4 \\ &\quad + 0.0010865978195663756x_1x_3x_4 + 0.0015224558578035 53x_3x_4x_5 \\ &\quad + 0.9336697311290476x_1^2 + 0.41698555619326955x_1x_2 \\ &\quad + 0.038922626081588314x_1x_5 + 0.20849276323163046x_2^2 \\ &\quad + 0.03892256726985556x_2x_5 + 2.6975458027715975x_3^2 + 1.9302454720518627x_4^2 \\ &\quad + 0.38197987972890357x_5^2 + 1.6669816282831071x_6^2. \end{aligned}$$

⬡

例 4.3. 现在我们考察系统

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_1^3x_2^2 + x_1x_2^4 - x_1x_3^2, \\ \dot{x_2} &= -2x_1^2x_2^3 + 5x_1^2x_2x_3^2 + x_2^2x_3^3, \\ \dot{x_3} &= -3x_1^2x_2^2x_3 - x_2^3x_3^2 - x_3^5 + x_1^2x_3. \end{aligned}$$

如果我们尝试使用本文所述的算法计算次数为 2 的李雅普诺夫函数，则不会得到任何结果。然而，我们可以找到李雅普诺夫函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2$$

通过对 SONC 方法作如下修改。回想一下，在为 `distribute signs` 分配符号时，我们选择让所有含偶指数的项都为正。在这种情况下，我们取消对牛顿多面体内部所有项的这一限制，而是将这些项设为负。

事实证明，尽管上面的函数 V 显然是平方和，但 SOS方法无法为该系统找到一个二次李雅普诺夫函数。原因是 V 的负导数为

$$-\dot{V}(\boldsymbol{x}) = x_3^6 - 2x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^4 + x_1^4x_2^2.$$

这是 Motzkin 多项式的齐次化版本，而众所周知，它不是平方和，参见 [Mot67]。我们尝试将次数提高到 8，但仍无法通过 SOS方法得到可验证的结果。也就是说，要么没有返回任何结果，要么（例如次数为 4、6 和 8 的情况）虽然返回了结果，但求解器每次返回的问题状态都是“未知”。这意味着返回的函数可能违反了给定的约束。在这些情况下，我们分别检查了返回函数的非负性，结果发现它们都无界，因此都不是可行的李雅普诺夫函数。⬡

到目前为止，我们仅展示了能够使用基于回路的算法找到李雅普诺夫函数的示例。然而，我们无法保证对任意多项式系统都能成功，下面的示例便说明了这一点。

例 4.4 ([SLX+13, 例 2])。 对于该系统，针对次数不超过 8 的李雅普诺夫候选函数，我们的算法未能成功。

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= x_2 - x_1^3 + x_1x_2^4\\ \dot{x_2} &= -x_1^3 - x_2^5.\end{aligned}$$

通过搜索平方和李雅普诺夫函数，我们发现

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{x}) &= 0.044373193847826196x_1^5x_2 + 0.22554047027447183x_1^3x_2^3\\ &\quad + 0.17304563146952115x_1^2x_2^4 + 0.4653621747641972x_1x_2^5 + 0.757506544645783x_2^6\\ &\quad + 0.5557146174641293x_1^4 + 1.1114262218679964x_2^2,\end{aligned}$$

这确实不是一个非负电路多项式。 ⬡

5. Limitations and Outlook

5.1. 多项式李雅普诺夫函数的存在性。 尽管我们只研究多项式动力系统 (2.1) 的稳定性，但即使系统是全局渐近稳定的，也可能不存在多项式李雅普诺夫函数。 [AKP11] 的以下定理给出了一个例子。

定理 5.1 （[AKP11]）。 多项式向量场

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= -x_1 + x_1x_2,\\ \dot{x_2} &= -x_2\end{aligned}$$

在平衡点 $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$ 处全局渐近稳定，但不存在多项式李雅普诺夫函数。

在这种情况下，算法 3.8 显然不适用于证明稳定性。

5.2. 非负电路李雅普诺夫函数的存在性。 我们再次指出，即使存在多项式李雅普诺夫函数，也不清楚我们是否还能找到非负电路李雅普诺夫函数。其存在的一个判断依据是定义动力系统的多项式 $\dot{x_i} = f_i$ 的支撑结构。例如，如果 f_i 能分解为适当的“负回路多项式”，即满足以下条件的多项式：

(1) 支撑集是极小仿射相关的，并且
（2）如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是牛顿多面体的一个顶点，那么 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{e}_i \in (2\mathbb{N})^n$ 和 $c_{\boldsymbol{\alpha}}<0$，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 个单位向量，而 $c_{\boldsymbol{\alpha}}$ 表示与 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应的系数，

那么，当这些负回路多项式的内部项足够小时，算法 3.8 将找到一个李雅普诺夫函数。这里，“足够小”意味着这些项的系数的绝对值受到类似回路数条件的界定。如果满足这一条件，那么我们甚至可以找到形如 $V(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2$ 的李雅普诺夫函数。

5.3. **扩展至受约束系统**。到目前为止，我们仅考虑了无约束情形。然而，在众多应用中，我们必须在具有限制性约束集的情况下研究李雅普诺夫函数搜索问题。尽管我们尚未为本文介绍的（D）SONC 方法实现受约束情形，但计划在未来的工作中扩展这些算法。沿这一方向自然的下一步是使用$X\text{-}SAGE$ 方法，见 [MCW21b、MNT22、DM22]。这也将使我们能够探索更多现实世界中的示例和应用。

5.4. **最优符号分布**。 如第 3.1 节所述，并在例 4.3 中再次展示，我们的方法 `distribute signs` 尚未达到最优。未来一个有趣的研究方向是探究如何做出最佳的符号分布选择，或者完全绕过选择符号这一步。

References

[AKP11] A.A. Ahmadi、M. Krstic 和 P.A. Parrilo，一个全局渐近稳定且不存在多项式李雅普诺夫函数的多项式向量场，2011年第50届IEEE决策与控制会议暨欧洲控制会议，CDC-ECC 2011，2011年，第7579–7580页（英语（美国））。[AP13] A.A. Ahmadi 和 P.A. Parrilo，多项式微分方程的稳定性：复杂性与李雅普诺夫逆问题，2013年，arXiv:1308.6833。[BPT13] G. Blekherman、P.A. Parrilo 和 R.R. Thomas，半定优化与凸代数几何，《MOS-SIAM 优化丛书》第13卷，SIAM 和数学优化学会，费城，2013年。[CS16] V. Chandrasekaran 和 P. Shah，符号单项式优化的相对熵松弛，《SIAM 优化杂志》**26**（2016），第2期，1147–1173页。[DHNdW20] M. Dressler、J. Heuer、H. Naumann 和 T. de Wolff，通过对偶 *SONC* 锥和线性规划进行全局优化，《第45届国际符号与代数计算研讨会论文集》（美国纽约），ISSAC '20，计算机协会，2020年，第138–145页。[DIdW17] M. Dressler、S. Iliman 和 T. de Wolff，非负回路多项式之和的正定性定理，《SIAM 应用代数与几何杂志》**1**（2017），第1期，536–555页。[DIdW19] ,通过非负回路多项式和几何规划求解受约束多项式优化的一种方法，《符号计算杂志》**91**（2019），149–172页。[DM22] M. Dressler 和 R. Murray，符号单项式优化的代数视角，《SIAM 应用代数与几何杂志》**6**（2022），第4期，650–684页。[´ET89] P. ´Erdi 和 J. T´oth，化学反应的数学模型：确定性与随机模型的理论和应用，曼彻斯特大学出版社，1989年。[FdW22] Jens Forsg˚ard 和 Timo de Wolff，*SONC* 锥的代数边界，《SIAM 应用代数与几何杂志》**6**（2022），第3期，468–502页。

[Fei95] M. Feinberg，《一类化学反应网络稳态的存在性与唯一性》，《理性力学与分析档案》132（1995），第4期，311–370页。[H+67] W. Hahn 等，《运动稳定性》，第138卷，施普林格，1967年。[Hal09] J.K. Hale，《常微分方程》，Courier Corporation，2009年。[HdW22] J. Heuer 和 T. de Wolff，《SONC 对偶性：基于回路的证书的进展》，2022年，arXiv:2204.03918。[HGGS18] S. Hafstein、S. Gudmundsson、P. Giesl 和 E. Scalas，《使用平方和规划计算自治线性随机微分方程的李雅普诺夫函数》，《离散与连续动力系统-B》23（2018），第2期，939页。[IdW16a] S. Iliman 和 T. de Wolff，《触角、非负多项式及支撑于回路上的平方和》，《数学科学研究》3（2016），3:9。[IdW16b] ，《基于几何规划的单纯形牛顿多面体多项式下界》，《SIAM 优化杂志》26（2016），第2期，1128–1146页。[JA15] A. Papachristodoulou、J. Anderson，《利用平方和规划推进计算李雅普诺夫分析》，《离散与连续动力系统-B》20（2015），第1531-3492期，2015年8月，2361页。[Kha02] H.K. Khalil，《非线性系统》，培生教育、普伦蒂斯·霍尔，2002年。[KNT21] L. Katth¨an、H. Naumann 和 T. Theobald，《SAGE 与 SONC 多项式及其对偶理论的统一框架》，《计算数学》90（2021），第329期，1297–1322页。[Lag88] J.-L. 拉格朗日，《分析力学》，第1卷，Gauthier-Villars，1788年。[Las01] J.B. Lasserre，《利用多项式进行全局优化与矩问题》，《SIAM 优化杂志》11（2001），第3期，796–817页。[Las15] ，《多项式与半代数优化导论》，第52卷，剑桥大学出版社，2015年。[Lau09] M. Laurent，《平方和、矩矩阵与多项式优化》，《代数几何的新兴应用》，IMA 数学应用丛书，第149卷，施普林格，纽约，2009年，第157–270页。[LRS10] J.A. De Loera、J. Rambau 和 F. Santos，《三角剖分》，《数学中的算法与计算》第25卷，施普林格出版社，柏林，2010年，《算法与应用结构》。[LWK+22] B. Legat、T. Weisser、L. Kapelevich、J. Huchette、A. Bhatia、T. Votroubek、O. Dowson、M. Forets、A. Moat、C. Coffrin、C. C.、E. Saba、E. Hanson、G. Berger、J. TagBot、M. Kaluba、M. Lubin、S. Tu 和 T. Kelman，jump-dev/sumofsquares.jl：v0.6.2，2022年3月。[Lya92] A.M. 李雅普诺夫，《运动稳定性的一般问题》，《国际控制杂志》55（1992），第3期，531–534页。[MCW21a] R. Murray、V. Chandrasekaran 和 A. Wierman，《牛顿多面体与相对熵优化》，《计算数学基础》21（2021），第6期，1703–1737页。[MCW21b] ，《通过相对熵与部分对偶化进行符号单项式和多项式优化》，《数学规划计算》13（2021），第2期，257–295页。[MNT22] R. Murray、H. Naumann 和 T. Theobald，《次线性回路与约束符号单项式非负性问题》，《数学规划》（2022），1–35页。[Mot67] T.S. Motzkin，《算术—几何平均不等式》，《不等式：会议论文集》第1卷，学术出版社，1967年，第203–224页。[Par00a] P.A. Parrilo，《鲁棒性与优化中的结构化半定规划及半代数几何方法》，博士论文，加州理工学院，2000年。[Par00b] ，《鲁棒性与优化中的结构化半定规划及半代数几何方法》，博士论文，加州理工学院，2000年。[PDH07] S. Park、J. Deyst 和 J.P. How，《非线性路径跟随制导方法的性能与李雅普诺夫稳定性》，《制导、控制与动力学杂志》30（2007），第6期，1718–1728页。

[PKC12] C. Pantea、H. Koeppl 和 G. Craciun，《单分子和双分子反应网络中的全局单射性与多重平衡》，Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 17（2012），第 6 期，2153–2170。[PP02] A. Papachristodoulou 和 S. Prajna，《利用平方和分解构造李雅普诺夫函数》，第 41 届 IEEE 决策与控制会议论文集，2002 年，第 3 卷，2002 年，第 3482–3487 页，第 3 卷。[Rez89] B. Reznick，《由算术—几何平均不等式导出的形式》，Mathematische Annalen 283（1989），431–464。[Ros95] J. Roskam，《飞机飞行动力学与自动飞行控制》，DARcorporation，1995。[Sas99] S. Sastry，《非线性系统：分析、稳定性与控制》，Springer Science & Business Media，1999。[SdW19] H. Seidler 和 T. de Wolff，《POEM：多项式优化的有效方法》，版本 0.2.1.0(a)，http://www.iaa.tu-bs.de/AppliedAlgebra/POEM/index.html，2019 年 7 月。[SLX+13] Z. She、H. Li、B. Xue、Z. Zheng 和 B. Xia，《发现连续动力系统的多项式李雅普诺夫函数》，《符号计算杂志》58（2013），41–63。[SS01] I.M. Stamova 和 G.T. Stamov，《脉冲型泛函微分方程的李雅普诺夫–拉祖米欣方法及其在种群动力学中的应用》，Journal of Computational and Applied Mathematics 130（2001），第 1–2 期，163–171。[Tan06] W. Tan，《利用平方和规划进行非线性控制分析与综合》，ProQuest，2006。[Vid02] M. Vidyasagar，《非线性系统分析》，SIAM，2002。[Wan22] J. Wang，《非负多项式与回路多项式》，SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry 6（2022），第 2 期，111–133。[Wil97] G. Williams，《驯服混沌理论》，CRC Press，1997。

AppendixA. Pseudocode

我们在此给出计算符号分布所需的显式伪代码 `distribute signs`。我们假设所有约束均为 `lhs` $\leq$ `rhs` 的形式。

算法 A.1（`distribute signs`）。输入：支撑集 $A, A' \subset \mathbb{N}^n$ 以及变量系数向量 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^A$ 和 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{A'}$，对应$P(\boldsymbol{x})$ 和 $P'(\boldsymbol{x})$；现有约束集 `constraints`。输出：符号约束集$A^+ \leftarrow A \cap (2\mathbb{N})^n$; $A^- \leftarrow A \setminus A^+(A')^+ \leftarrow A' \cap (2\mathbb{N})^n$; $(A')^- \leftarrow A' \setminus (A')^+$`hull P` $\leftarrow$ Vert (conv(A)) 对于 `exponent`在 `hull P` 中执行 5: 如果 `exponent`在 A^- 中，则 $A \leftarrow A \setminus \{$`exponent`$\}$, $A^- \leftarrow A^- \setminus \{$`exponent`$\}$结束如果 结束循环`hull Pprime` $\leftarrow$ Vert (conv(A')) 10: 对于 `exponent` 在 `hull Pprime`中执行 如果 `exponent` 在 $(A')^-$ 中，则 $A' \leftarrow A' \setminus \{$`exponent`$\}$, $(A')^- \leftarrow (A')^- \setminus \{$`exponent`$\}$结束如果 结束循环

15: **对于** $\boldsymbol{\alpha} \in A^+$ **执行**
`constraints` $+= [c_{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0]$**结束循**
环 对于 $\boldsymbol{\alpha} \in (A')^+$ **执行**
`constraints` $+= [d_{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0]$
20: **end for**`constraints reduced` $\leftarrow$ `constraints`$[1]$**for** `con`
在 `constraints`$[2:$ `end`$]$ **执行**`objective` $\leftarrow$ `lhs`$($`con`$)$ $-$ `rhs`$($
`con`$)$`problem` $=$ `maximize`$($`objective`$,$ `constraints reduced`$)$
25: `sol` $=$ `solve`$($`problem`$)$**如果** `sol` $\geq 1 \times 10^{-3}$ **则**
`constraints reduced` $+=$ `con`**结束 if 结束 for**30: **返回**
`constraints reduced`

Janin Heuer, Technische Universität Braunschweig, Institut für Analysis und Alge-bra, AG Algebra, Universitätsplatz 2, 38106 Braunschweig, Germany
电子邮箱地址: janin.heuer@tu-braunschweig.de

Timo de Wolff, Technische Universität Braunschweig, Institut für Analysis und Algebra, AG Algebra, Universitätsplatz 2, 38106 Braunschweig, Germany
电子邮箱地址: t.de-wolff@tu-braunschweig.de