arXiv:2303.02036v1 [math.AG] 3 Mar 2023

射影流形上锥的格罗莫夫椭圆性

S. KALIMAN 和 M. ZAIDENBERG

摘要。我们找到了若干类在格罗莫夫意义下具有椭圆性的射影流形，并且这些流形上的仿射锥在其顶点之外也具有椭圆性。例如，对任意维数为$n \geq 3$、经有限多个点及无穷近点逐次爆破得到的广义旗流形，后一个性质都成立。对任意光滑射影有理曲面，该性质也成立。对于仿射锥，格罗莫夫椭圆性远弱于柔性。不过，它仍然意味着自同态幺半群在这些锥上的作用具有无限传递性。

目录

引言1 1. 预备知识 4 2. 锥的椭圆性 5 2.1. 技术引理 6 2.2. 非扭曲喷射 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化 8 2.3. 扭曲喷射 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化 9 2.4. 例子 11 3. 类 $\mathcal{A}_0$ 12 爆破簇上的增强曲线轨道性质 12 3.2. 旗簇上的增强曲线轨道性质 13 3.3. 维数 ≥ 3 14 4. 有理曲面上的椭圆锥 15 5. 附录 A：End(X)-作用的高传递性 17 6. 附录 B：格罗莫夫延拓引理 18 参考文献 20

引言

设 $\mathbb{K}$ 为一个特征零代数闭域，且 $\mathbb{A}^n$ 分别为 $\mathbb{K}$上的仿射和射影 n-空间。本文中的所有簇和向量丛均为代数的。我们所说的喷射和椭圆性，分别是指代数喷射和代数椭圆性。设 X 为一个光滑代数簇。回顾一下， X上的秩为 r 的喷射是一个三元组(E, p, s)，其中 p: $E \to X$是一个秩为 r、零截面为 Z的向量丛，且 s: $E \to X$是一个满足 $s|_Z = p|_Z$的态射。若喷射(E, p, s)是支配的

关键词和短语。 格罗莫夫椭圆性、喷射、射影簇、仿射锥、柔性簇、$\mathbb{G}_a$-作用。2020 数学主题分类。 主要分类：14R10、14D99；次要分类：32Q56。

于 $x \in X$，即其限制 $s|_{E_x}\colon E_x \to X$ 在纤维 $E_x = p^{-1}(x)$上，于向量空间 E_x 的原点 $0_x \in Z \cap E_x$ 处是支配的。构造性子集 $s(E_x) \subset X$ 称为 x的 s-轨道。若簇 X 存在一个在每个点 $x \in X$处均为支配的喷射(E, p, s)，则称其为椭圆的。椭圆性等价于较弱的局部椭圆性和次椭圆性，见 [KZ23，定理 0.1]。若对任意 $x \in X$，都存在一个定义在 x 的某个邻域中、在 x 处支配的局部喷射(E_x, p_x, s_x)，且 s_x 的取值位于 X中，则称 X 为局部椭圆。若簇 X 存在一个定义在 X 上的喷射族(E_i, p_i, s_i)，并且在每个点 $x \in X$处均为支配的，即

$$T_x X = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}s_i(T_{0_{i,x}} E_{i,x}) \quad \forall x \in X.$$

椭圆性蕴含许多其他有用性质；它在 Oka-Grauert 理论中十分重要，例如参见 [Gro89], [For17a] 和 [For23]。特别地，椭圆簇 $\mathrm{End}(X)$ 的自同态半群 X 对 X 具有高度传递性，参见第 5节附录 A。

本文证明了某些椭圆簇上的仿射锥具有椭圆性，参见定理 3.4和 4.1。总结而言，我们证明以下定理。回顾一下，ˆ由光滑射影簇 Y 上的 ample 除子 X 所定义的广义仿射锥$\mathbb{Q}$ 在 D 上 X 是仿射簇

$$\hat{Y} = \mathrm{Spec}\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0\left(X, \mathcal{O}_X(\lfloor nD \rfloor)\right)\right),$$

例如参见 [KPZ13，第 1 节。15]。在 D 是 $X \subset \mathbb{P}^n$ˆ 的超平面截面时，锥 Y 是 X上的通常仿射锥。

ˆ**定理 0.1**。设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是一个光滑射影簇，Y 是 X 上的广义仿射ˆ ˆ 锥，且 $Y = Y \setminus \{v\}$，其中 v 是 Y 的顶点。那么在以下情形中，Y 是椭圆的：

- X 是有理曲面；
- X 由从一个属于类 X_0、维数为 $n \geq 3$ 的簇出发，对点进行一系列连续爆破而得到，并满足命题 $\mathcal{A}_0$ 的条件$(**)$。*3.1*后一个条件对任意广义旗簇 $X_0 = G/P$ 均成立，其维数为 $n \geq 3$，其中 G 是约化群，P 是 G的抛物子群。特别地，这对 $X_0 = \mathbb{P}^n$、$n \geq 3$格拉斯曼流形等均成立。

回顾一下，簇 X 属于类 $\mathcal{A}_0$，如果 X 可以被与 $\mathbb{A}^n$同构的开集覆盖。光滑射影曲面属于类 $\mathcal{A}_0$ 当且仅当它是有理的。类 $\mathcal{A}_0$ 中的任意簇都是椭圆的，参见 [For17a，命题 6.4。5]以及 [KZ23，定理 0。1]。

众所周知，沿光滑闭子簇 $\mathcal{A}_0$ 爆破得到的簇具有椭圆性，参见 [LT17] 和 [KZ23]；另参见 [Gro89，命题 3.5E]。对于光滑局部稳定柔性簇，同样成立，参见 [KKT18]。由此产生了以下问题。

问题：光滑簇 Y 上的仿射锥的椭圆性，X 在对 X中的光滑闭子簇进行爆破后是否仍然成立？或者更具体地说，曲线轨道性质$(*)$、其增强版本$(**)$（见定义*2.7* 和命题*3.1*）及其适当的类似性质，在此类爆破后是否仍然成立？

推广 Forstneriˆc [For17b] 对完备椭圆簇成立的一个早期结果，Kusakabe [Kus22] 证明了任意光滑椭圆簇都存在一个满射态射 $\mathbb{A}^{\dim Y+1} \to Y$。这一事实立即推出以下推论。

推论 0.2。设 Y 是一个光滑椭圆簇。那么，自同态幺半群$\mathrm{End}(Y)$ 在 Y上高度传递作用；也就是说，对于任意 $k \geq 1$ 以及 Y中的两组互异点序列 $(y_1, \ldots, y_k)$ 和$(y'_1, \ldots, y'_k)$，存在 End(Y)，使得$(y_i) = y'_i$。

这一推论尤其适用于定理 0.1 中的广义仿射锥 Y。我们将定理 0.1 与关于仿射锥柔性的类似结论作一比较。回顾一下，维数为 $n \geq 2$ 的（准）仿射簇 X 称为柔性的，若对任意光滑点 $x \in X$，都存在 n 个代数$\mathcal{O}_X(X)$的局部幂零导子，使得它们在 x 处的向量张成切空间 T_xV，见 [AFKKZ13]。任意光滑柔性簇都是椭圆的。X 的柔性意味着，对于任意自然数 m，自同构群 Aut(X) 在 X的光滑部分上 m-传递作用；仿射情形见[AFKKZ13]，拟仿射情形见 [FKZ16]。

设 $X = X_d$ 是一个次数为 $d \geq 3$、反典范嵌入于 $\mathbb{P}^d$ 中的德尔佩佐曲面，并令 ˆ $Y \subset \mathbb{A}^{d+1}$ 为其上的仿射锥。已知对于 $d \geq 4$，锥 ˆY 具有柔性，参见 [Per13]；另请参见 [MPS18，第 4] 节，以及综述文章 [CPPZ21]，其中还介绍了其他此类例子。相反，如果 $d \leq 3$ 且 $X_d \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ 是一个多重反典范嵌入，那么代数 $\mathcal{O}(Y)$ 不存在任何非零局部幂零导子，参见 [CPW16]，以及（对于 $d = 1$，2） [KPZ11]。在这些情形下，Y 不具有柔性。然而，根据定理 0.1，对于任意德尔佩佐曲面 $X = X_d$、$d \in \{1, \ldots, 9\}$ˆ 以及 X 上的任意丰沛极化 D，对应于 D 的 X 上的广义仿射锥 Y 的光滑部分 Y 是椭圆的。因此，作为推论，光滑准仿射三维簇 Y 允许一个满射态射 $\mathbb{A}^4 \to Y$，并且自同态幺半群 End(Y) 在 Y 上高度传递地作用，参见第 5 节。

本文结构如下。第 1 节回顾格罗莫夫喷射的一些一般事实。特别地，我们需要一个关于喷射延拓的格罗莫夫引理版本，证明见命题 1.1 和附录 B（第 6 节）。此外，我们证明，在某些条件下，喷射可经由爆破进行拉回，见命题 1.5。第 2 节首先指出，射影簇X 的椭圆性是其上的仿射锥 X具有椭圆性的必要条件，见命题 2.1。我们不知道单凭这一条件是否足够。不过，X的椭圆性加上一项称为曲线轨道性质的附加条件，见定义 2.7 和命题 3.1，可保证 X 上的仿射锥具有椭圆性，见推论 2.13。定理 0.1 针对维数为 ≥ 3 的簇在第 3 节中证明，针对曲面则在第 4 节中证明，分别见定理 3.4 和 4.1。利用 Forstneriˆc [For17b]

和 Kusakabe [Kus22], 在附录 A（第 5 节）中，我们推出推论0.2；另见命题 5.1 和推论 5.4，其中给出了更强一些的结果。

1. 预备知识

在本节中，X 是一个正维光滑代数簇。

以下命题是针对我们所处情形采用的 Gromov 局部化引理的一个版本；参见 [Gro89，3.5.B]以了解证明概要，[For17a，命题 6.4.1– 6.4.2]以了解准射影簇情形下的严格证明，以及 [LT17，备注 3] 以了解其向一般情形的推广。

命题 *1.1.* 设 D 是 X 上的约化有效除子，且 (E, p, s) 是 $U = X \setminus$ 上的一个喷射，其定义域为 $\mathit{supp}(D)$，取值于 X，并满足 $p\colon E \to X$ 是一个秩为$r \geq 1$的平凡丛。则存在 X 上的一个喷射 $(E, \tilde{p}, \tilde{s})$，其在 U 上的限制与 (E, p, s) 同构，并且 $\tilde{s}|_{\tilde{p}^{-1}(X\setminus U)} = \tilde{p}|_{\tilde{p}^{-1}(X\setminus U)}$；对于每个 $x \in U$， $\tilde{s}$-轨道 x都与 s-轨道 x重合。

为方便读者，我们在附录 B 中给出证明，见第 6节。

回顾局部幂零向量场及其复制的概念，见 [Fre06] 和[AFKKZ13]。

定义 1.2。考虑光滑仿射簇 ν 上的正则向量场 $X = \operatorname{Spec} A$以及相应的代数 $A = \mathcal{O}_X(X)$ 的导子 ∂。如果对任意 $a \in A$，都存在某个 $n = n(a) \in \mathbb{N}$，使得 $\partial^n(a) = 0$，则称 ν 和 ∂是局部幂零的。任意$\mathbb{G}_a$-作用 λ 于 X 都是某个局部幂零向量场 ν的流。在这种情形下，记作 $\lambda(t) = \exp(t\nu)$。对于任意 $h \in \operatorname{Ker}(\partial)$，向量场 $h\nu$ 也局部幂零。$\mathbb{G}_a$- 作用 $\lambda_h(t) := \exp(th\nu)$ 称为 λ 的复制。点 $x \in h^{-1}(0)$ 在复制 λ_h下是不动点。

下文将讨论由 $\mathbb{G}_a$-作用生成的喷射。

定义 1.3. 设 U 是 X中的一个仿射稠密开子集。假设 U 配备了一个有效的 $\mathbb{G}_a$-作用 $\mathbb{G}_a \times U \to U$。后者的态射在 U 上定义了一个秩 1 喷射（L, p, s），我们称之为 $\mathbb{G}_a$-喷射，其中 $p\colon L \to U$是一个平凡线丛。若（L, p, s）是 U 上与 U 上的 $\mathbb{G}_a$-作用 λ 相关联的 $\mathbb{G}_a$-喷射，且 λ_h 是λ的复制，则 U 上的相应 $\mathbb{G}_a$-喷射（L, p, s_h）也称为（L, p, s）的复制。

定义 1.4. 设 $U = X\setminus\operatorname{supp}(D)$，其中 D 是 X 上的一个充足除子，并设（L, p, s）¯是 U上的一个 $\mathbb{G}_a$-喷射。根据命题 1.1，存在 X上的一个秩 1 喷射（$L, \bar{p}, \bar{s}$），其在 U 上的限制与（L, p, s）同构，并且满足$\bar{s}|_{\bar{p}^{-1}}$（$X\setminus U$） $= \bar{p}|_{\bar{p}^{-1}}$（$X\setminus U$）。¯我们称（$L, \bar{p}, \bar{s}$）为扩张的 $\mathbb{G}_a$-喷射。对于一个点 $x \in U$， s-轨道 O_x 与 x的 $\mathbb{G}_a$-轨道重合，而 $x \in X \setminus U$ 的 s-轨道是单点集 $\{x\}$。对于 U 中任意¯一维 $\mathbb{G}_a$-轨道 O，将（$L, \bar{p}, \bar{s}$）限制到 O 上所得的喷射是支配的。

众所周知，在某些条件下，支配喷射可以经由爆破提升，参见 [Gro89, 3.5E-E″]， [LT17] 和 [KKT18]。在下一个命题中，我们给出这类结果的一个简单版本，并使其适用于我们的设定。

命题 *1.5*。设 (E, p, s) 是 X 上的一个扩展 $\mathbb{G}_a$-喷射，$A \subset X$ 是余维至少为 *2* 的光滑子簇，并且任意点 $x \in A$ 的 s-轨道都是单点集；设 $\sigma\colon X \to X$ 是 A 在 X 中的爆破。则 (E, p, s) 可提升为 X 上的一个扩展 $\mathbb{G}_a$-喷射 $(E, \tilde{p}, \tilde{s})$，其中 $E = \sigma^* E$。令 $\tilde{\sigma}\colon E \to E$ 为诱导的同态，则 $\tilde{s}\colon E \to X$ 满足 $\sigma \circ \tilde{s} = s \circ \tilde{\sigma}$。特别地，$\sigma$ 将 $\tilde{s}$-轨道映至 s-轨道。此外，若 (E, p, s) 限制在一维 $\tilde{s}$-轨道 O 上时是支配的，并且 O 是 X 中满足 $\sigma(O) = O$ 的一个 $\tilde{s}$-轨道，则 $(E, \tilde{p}, \tilde{s})$ 限制在 O 上时是支配的。

证明。设 $U \subset X$ 为承载有效 $\mathbb{G}_a$-作用 λ的仿射稠密开子集，使得 (E, p, s) 由 U上的相应 $\mathbb{G}_a$-喷射延拓而来，见定义 1.3。由于 U 是仿射的，$D = X \setminus U$ 是一个除子。当且仅当 x 是 λ的不动点时，$x \in U$ 的 s-轨道是单点集。根据我们的假设，每个 $x \in A \cap U$ 都是 λ的不动点。因此，理想 $I(A \cap U)$ 在 λ作用下保持不变。根据爆破的泛性质，见 [Har04，推论 II.7.15]，λ 可提升为 $\tilde{U} = \sigma^{-1}(U)$上的 $\mathbb{G}_a$-作用 $\tilde{\lambda}$，使得态射 $\sigma|_{\tilde{U}}\colon U \to U$具有 $\tilde{}$ $\tilde{}$等变性。相应的 U上的 $\mathbb{G}_a$-喷射 $\tilde{s}$满足 $\sigma \circ \tilde{s}|_{\tilde{U}} = s \circ \tilde{\sigma}|_{\tilde{U}}$。根据命题 1.1 $\tilde{s}$可延拓为 X，仍记为 $\tilde{s}$，使得 $\sigma \circ \tilde{s} = s \circ \tilde{\sigma}$。其余断言都是该构造及后一个等式的直接推论。□

2. 锥的椭圆性

下面我们引入所谓的“曲线—轨道”性质 $(*)$，参见定义 2.7。利用这一性质，我们给出一个判据，用于判断去掉顶点后的射影簇上的仿射锥是否具有椭圆性。

回顾一下，在仿射锥的顶点处进行爆破，会得到底层射影簇上的一个线丛。去掉锥的顶点，相当于去掉该线丛的零截面。由此得到一个局部平凡纤维丛，其一般纤维是去心仿射直线 $\mathbb{A}^1_* = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$。在小节 2.2 中，我们更一般地讨论局部平凡的 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化。在小节 2.3 中，我们将结果推广到非局部平凡的扭曲 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化。在小节 2.4 中，我们给出若干椭圆锥的例子，其中包括旗簇上的锥。

以下事实见 [Gro89，3.5B′]。为方便读者，我们给出一个论证。

命题 2.1。设 $\varrho\colon Y \to X$ 是一个局部平凡纤维丛。如果 Y 是椭圆的，那么 X 也是椭圆的。

ˆ 证明。我们来证明 X 是局部椭圆的。设 $(E, \hat{}p, \hat{}s)$ 是 Y 上的一个支配喷射。对于一点 $x \in X$，选取 X 中 x 的一个邻域 U，使得限制 $Y|_U \to U$ 是一个平凡纤维丛。设 $\xi\colon U \to Y$ 是 $Y|_U \to U$ 的一个截面，令 $p\colon E_U := \xi^* \hat{}E \to U$ 为 U 上诱导的向量丛，且 $\varphi\colon E_U \xrightarrow{\cong} \hat{}E|_{\xi(U)}$ 为诱导的同构。令 $s = \varrho \circ \hat{}s \circ \varphi\colon E_U \to X$，我们便得到 U 上一个取值于 X 的局部喷射 (E_U, p, s) ˆ ˆ。事实上，设 Z 是 $\hat{}p\colon E \to Y$ 的零截面，且 Z_U 是 $p\colon E_U \to U$ 的零截面。由于 $\hat{}s|\hat{}_Z = \hat{}p|\hat{}_Z$，我们有 $s|_{Z_U} = p|_{Z_U}$。

设 $y = \xi(x) \in \hat{U} = \varrho^{-1}(U)$。设 0_y 为向量空间 $\hat{} E_y = \hat{} p^{-1}(y)$ 的原点。由于 $(\hat{} E, \hat{} p, \hat{} s)$ 是支配的，$d\hat{} s|_{T_{0_y}\hat{} E_y}\colon T_{0_y}\hat{} E_y \to T_y Y$ 是满射。这给出一个满射

$$ds = d\varrho \circ d\hat{s} \circ d\varphi|_{T_{0_x}E_x} : T_{0_x}E_x \xrightarrow{\cong} T_{0_y}\hat{E}_y \to T_y Y \to T_x X.$$

因此，喷射 (E_U, p, s) 在 x 处是支配的。这表明 X 是局部椭圆的，因而是椭圆的，参见 [KZ23，定理 0。1]。□

自然会产生这样一个问题：反向蕴含是否成立。显然，即使 X 是椭圆的，乘积 $X \times \mathbb{A}^1_*$ 也不是椭圆的。不过，下面我们将指出一些答案为肯定的特定情形。

2.1. **技术引理**。在下文中，X 表示一个光滑代数簇，$\varrho\colon F \to X$ 表示 X 上的一个线丛，其零截面为 Z_F，而 $Y = F \setminus Z_F$(除命题 2.1 外)。因此，$\varrho|_Y\colon Y \to X$ 是一个以 $\mathbb{A}^1_* = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ 为纤维的局部平凡纤维丛。事实上，任何以一般纤维 $\mathbb{A}^1_*$ 的局部平凡纤维丛都由此方式得到。

在引理 2.2–2.4 中，我们也在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-等变框架下工作，以便为处理扭曲的 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化准备工具，见小节 2.3。下文中 $\mu_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 表示单位根平方根群。

引理 2.2。设 $p : E \to X$ 是一个向量丛，其零截面为 Z，且 $\tau_i\colon F_i \to E$、$i = 1, 2$ 是 E 上的两个线丛。假设存在一个同构 $\varphi_0\colon F_1|_Z \to F_2|_Z$。那么 φ_0 可延拓为一个同构 $\varphi\colon F_1 \to F_2$。

此外，假设 X, E 和 $F_i|_Z$ 都配备了 μ_2-作用，使得 p, φ_0 以及 $\tau_i|_Z$（对 $i = 1,2$ 而言）都是 μ_2-等变的。那么 F_i 上存在 μ_2-作用，使得 φ 以及 τ_i（对 $i = 1,2$ 而言）都是 μ_2-等变的。

证明。拉回给出一个同构 皮卡群$(E) \cong p^*$皮卡群(X)，见 [Mag75，定理5]。因此，$p^*(F_i|_Z) \cong F_i$ 对于 $i = 1, 2$。现引理得证。□

由下述引理可知，X 上的一个喷射可拉回到 Y。

$\hat{}$**引理 2.3**。X 上的任意喷射(E, p, s) 诱导 $Y = F \setminus Z_F$ 上的一个喷射$(E, \hat{} p, \hat{} s)$，使得 E 可嵌入以下交换图中

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \hat{E} & \xrightarrow{\hat{p}} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{\varrho}} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho|_Y} \\ E & \xrightarrow{p} & X \end{array} \quad and \quad \begin{array}{ccc} \hat{E} & \xrightarrow{\hat{s}} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{\varrho}} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho|_Y} \\ E & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

此外，设 X，E 和 F 上存在 μ_2-作用（因此，Y）$\hat{}$ 上也存在 μ_2-作用），使得 p、s 和 $\varrho\colon F \to X$ 是 μ_2-等变的。那么，E 上存在一个 μ_2-作用，使得 $\hat{} p$ 和 $\hat{} s$ 是 μ_2-等变的。

证明。考虑分别通过态射 $p\colon E \to X$ 和 $s\colon E \to X$ 从 $\varrho\colon F \to X$ 诱导出的线丛 $F_1 = p^*F \to E$ 和 $F_2 = s^*F \to E$。它们构成

交换图

$$(2)\qquad \begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\hat{p}} & F \\ \downarrow & & \downarrow \varrho \\ E & \xrightarrow{p} & X \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} F_2 & \xrightarrow{\hat{s}} & F \\ \downarrow & & \downarrow \varrho \\ E & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

由于 $s|_Z = p|_Z$，在对 Z 和 X 的自然识别下，我们有 $F_1|_Z = F_2|_Z \cong F$。根据引理 2.2，线丛 $\hat{}\varrho_1\colon F_1 \to E\hat{}$ 和 $\hat{}\varrho_2\colon F_2 \to E$ 之间存在一个同构 $\varphi\colon F_1 \xrightarrow{=} F_2$。令 Z_i 为 F_i 和 $Y_i = F_i \setminus Z_i$ 的零截面，我们得到两个同构的纤维丛 $\hat{} Y_i \to E$，$i = 1, 2$，其一般纤维为 $\mathbb{A}^1_* = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$。令 $\hat{}E = \hat{}Y_1$，并将同构 $\varphi|_{\hat{E}}\colon \hat{}E \xrightarrow{\cong} \hat{}Y_2$ 与第二个图（2）中的态射 $\hat{} Y_2 \to Y$ 和 $\hat{}\hat{}Y_2 \to E$ 复合，得到（1）。图（1）的第一个图中的向量丛 $\hat{}p\colon E \to Y$ 是通过态射 $\varrho|_Y\colon Y \to X$ 从 $p\colon E \to X$ 诱导得到的。令 $\hat{}Z = \hat{}\varrho^{-1}(Z)$ 为 $\hat{}p\colon \hat{}E \to Y$ 的零截面。由于 $s|_Z = p|_Z$，我们有 $\hat{}s|\hat{}_Z = \hat{}p|\hat{}_Z$。因此，$\hat{}(E, \hat{}p, \hat{}s)$ 是 Y 上的一个喷射。

对于第二个结论，回忆同构 $\varphi\colon F_1 \xrightarrow{\cong} F_2$ 引理 2.2 是μ_2-等变的。因此，上述同构 $\varphi|_{\hat{E}}\colon \hat{}E \xrightarrow{\cong} \hat{}Y_2$ 也是 μ_2-等变的。由此诱导的态射 $\hat{}p|_{F_1}\colon F_1 \to F$和 $\hat{}s\colon F_2 \to F$在（2）中也都是 μ_2-等变的，因为根据我们的假设，p、s 和 ϱ都是 □

下一个引理保证了商空间上存在由μ_2-作用诱导的推前喷射。

引理 2.4。在引理 2.3 的假设下，进一步假设 μ_2- 作用在 X 上是自由的。令

$$X' = X/\mu_2, \quad Y' = Y/\mu_2, \quad E' = E/\mu_2 \quad \text{and} \quad \hat{E}' = \hat{E}/\mu_2$$

考虑诱导的态射

$$\varrho'\colon Y' \to X', \quad p'\colon E' \to X', \quad s'\colon E' \to X', \quad \hat{p}'\colon \hat{E}' \to Y' \quad \text{and} \quad \hat{s}'\colon \hat{E}' \to Y'.$$

那么 $\varrho'\colon Y' \to X'$是一个光滑的 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化。进一步假设 $p'\colon E' \to Y'$和$\hat{}p'\colon \hat{}E' \to Y'$是向量丛 [1]。那么$(E', p', s')$是作用在 X'上的喷射，而$(\hat{}E', \hat{}p', \hat{}s')$是作用在 Y' 上的喷射，使得 $\varrho' \circ \hat{}s' = s' \circ \hat{}p'$。

证明是直接的，留给读者完成。

接下来我们证明，喷射可以拉回到一个非分歧的 μ_2-覆盖上。

引理 2.5。设 (E, p, s) 是 X上的一个喷射，并且 $\tau\colon X \to X$是一个具有伽罗瓦群 μ_2的非分歧伽罗瓦覆盖。再设 $\tilde{p}\colon E \to X$ 是 X上的诱导向量丛。那么，在 E 上存在一个 μ_2-作用以及一个喷射 $(E, \tilde{p}, \tilde{s})$，使得 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{s}$ 都是μ_2-等变的，并且 $s \circ \tilde{\tau} = \tau \circ \tilde{s}$，其中 $\tilde{\tau}\colon E \to E = E/\mu_2$ 是商态射。

证明。μ_2上的 X-作用在 $X \times E$ 上生成一个在第二因子上平凡的 μ_2-作用。回忆

$$\tilde{E} = \tilde{X} \times_X E = \{(\tilde{x}, e) \in \tilde{X} \times E \,|\, \tau(\tilde{x}) = p(e)\}.$$

[1]先验地说，这些是 étale 拓扑下局部平凡的向量丛。

显然，自然投影 $\tilde{p}\colon E \to X$ 是 μ_2-等变的。令 $s' = s \circ \tilde{\tau}\colon E \to X$并且

$$E' = \tilde{X} \times_X \tilde{E} = \{(\tilde{x}, \tilde{e}) \in \tilde{X} \times \tilde{E} \,|\, \tau(\tilde{x}) = s'(\tilde{e})\}.$$

由于 $\tau(\tilde{x}) = \tau(\tilde{x}')$ 当且仅当 $\tilde{x}' = \lambda.\tilde{x}$ 对某个 $\lambda \in \mu_2$ 成立，而 s' 在 E 中的 μ_2-轨道上为常数，我们看到 E' 是 E 的非分歧二重覆盖。令 Z 为 $\tilde{E}$ 的零截面，考虑同构 $\varphi = \tilde{p}|_{\tilde{Z}}\colon \tilde{Z} \xrightarrow{\simeq} \tilde{X}$。注意， Z 在 E' 中的原像 Z' 由两个不可约分支组成

$$Z'_1 = \{(\varphi(z), z) |\, z \in \tilde{Z}\} \quad \text{and} \quad Z'_2 = \{(\lambda.\varphi(z), z) |\, z \in \tilde{Z}\}$$

$\lambda \in \mu_2$ 是一个阶为 2 的元素，其中 。还要注意， $\tilde{p}\colon E \to X \simeq Z$ 诱导出一个满射态射 $E' \to Z'$。因此， E' 由两个不可约分支 $E'_i, i = 1$ 组成，2 其中 E'_i 包含 Z'_i。取包含 Z'_1 的分支 E'_1 作为 $\tilde{s}$ 的 图像，我们得到一个提升 $\tilde{s}\colon E \to X$。 μ_2 作用在 E' 上的自然提升会交换 E'_1 和 E'_2。根据构造， $\tau \circ \tilde{s} = s \circ \tilde{\tau}$。特别是，

$$\tau \circ \tilde{s}(\lambda.\tilde{e}) = s \circ \tilde{\tau}(\lambda.\tilde{e}) = s(e) \quad \text{where} \quad e = \tilde{\tau}(\tilde{e}) = \tilde{\tau}(\lambda.\tilde{e}).$$

因此， $\tau \circ \tilde{s}(\lambda.\tilde{e}) = s(e) = \tau \circ \tilde{s}(\tilde{e})$。也就是说， $\tilde{s}(\lambda.\tilde{e})$ 与 $\lambda.\tilde{s}(\tilde{e})$ 或 $\tilde{s}(\tilde{e})$ 相同。由于对于 $\tilde{e} \in Z \simeq Z'_1$ 我们有前者，根据连续性，对于每个 $\tilde{e} \in E \simeq E'_1$， $\tilde{s}(\lambda.\tilde{e}) = \lambda.\tilde{s}(\tilde{e})$。证明至此结束。□

2.2. **非扭曲的喷射 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化**。设 $\varrho\colon Y \to X$ 是一个局部平凡的 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化。我们的目标是给出一个判据，以确定全空间 Y 是否为椭圆的。命题 2.1 给出了一个必要条件，而命题 2.6 和推论2.9 给出了充分条件。

命题 *2.6.* 设 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化 $\varrho\colon Y \to X$ *over a* 是椭圆簇 $\hat{X}$ *let* (E, p, s) 上的一个喷射，其中 X *and* $(E, \hat{p}, \hat{s})$ 是 Y 上诱导的喷射，见引理 *2.3*。给定点 $x \in X$ *and* $y \in \varrho^{-1}(x)$，设 $(\hat{E}_i, \hat{p}_i, \hat{s}_i)$， $i = 1, 2$ 是 $\hat{Y}$ 上的秩 *1* 喷射，使得 y 的 $\hat{s}_i$-轨道 O_i 在 X 中的像 $O_i = \varrho(O_i)$ 是光滑曲线。假设

(i) (E, p, s) 在 x 处是支配的，并且 (ii) $T_yO_1 \neq T_yO_2$，而 $T_xO_1 = T_xO_2$，也就是说， O_1 和 O_2 在 x 处相切。

Then 喷射族 $\{(E, \hat{p}, \hat{s}), (E_1, \hat{p}_1, \hat{s}_1), (E_2, \hat{p}_2, \hat{s}_2)\}$ 在 $y \in Y$处是支配的 .

证明。如果 $O_y \subset E$ 是 y 的 $\hat{s}$-轨道，那么 $\varrho(O_y)$ 与 s-轨道 O_x重合，见 (1) 中的 第二个图。根据 (i)， (E, p, s) 在 x处是支配的，因此 $d\varrho(T_yO_y) = T_xX$，从而 $\operatorname{codim}_{T_yY} T_yO_y = 1$。另一方面，(ii) 意味着 $T_yO_1 + T_yO_2 \subset T_yY$包含一个非零向量 v ，使得 $d\varrho(v) = 0$，即 $v \notin T_yO_y$。因此， $T_yY =$张成 $\operatorname{span}(T_yO_y, T_yO_1, T_yO_2)$，正如所需。□

下面的概念源自命题 2.6。

定义 2.7。令 X 为一个光滑代数簇， $x \in X$ 且令 $C_x \simeq \mathbb{P}^1$ 为 X 上经过 x的一条光滑有理曲线。若一对 (x, C_x) 满足双轨道性质 ，则

(∗) C_x 是 X上两个轨道 O_1 和 O_2 的并，分别对应秩 1 喷射 (E_1, p_1, s_1) 和 (E_2, p_2, s_2)，其中 $O_i \cong \mathbb{A}^1$ 经过 x ，且 (E_i, p_i, s_i) 在 O_i 上的限制在 x 处是支配的。

我们称 X 验证曲线轨道性质，如果每个点 $x \in X$ 上都经过一条光滑有理曲线 C_x ，且该曲线位于 X 上并满足 (∗)。如果 C_x 可以从 $\mathcal{F}$ 上的有理光滑射影曲线的某个特定族 $\mathcal{F}$ 中选取，那么我们称 X 验证关于 $\mathcal{F}$的曲线轨道性质。

注 2.8。 注意， $\mathbb{G}_a$-喷射的任意一维轨道 O_x 都同构于$\mathbb{A}^1$ ，且该喷射在 O_x 上的限制在 x处是支配的。在下文中，我们主要处理 $\mathbb{G}_a$-喷射。

推论 2.9。 设 X 是一个光滑簇， $\varrho\colon F \to X$ 是一个线丛，且 $Y = F \setminus Z_F$。假设

(i) X 是椭圆的，并且关于 X上的光滑射影有理曲线的覆盖族 $\{C_x\}$ 验证曲线轨道性质；以及(ii) $\varrho\colon F \to X$ 在该族的每个成员 C_x 上的限制都是非平凡线丛。那么 Y 是椭圆的。

ˆ ˆ 证明。固定 X 上的一个支配喷射 (E, p, s)。令 $(E_i, \hat{}p_i, \hat{}s_i)$、 $i = 1$、2 和 $(E, \hat{}p, \hat{}s)$ 分别为由 (E_i, p_i, s_i) 和 (E, p, s) 在 Y 上诱导的喷射，参见引理 2.3。根据命题 2.6，只需验证该命题的条件 (i) 和 (ii) 在任意点 $y \in \varrho^{-1}(x) \cap Y$ 处成立。事实上，这样一来，后一个喷射三元组在 y 处就是支配的。所有此类三元组构成的族在 Y 上支配 $x \in X$ ，这证明 Y 是次椭圆的，因此根据 KZ23，定理 0.1]，它也是椭圆的 [。

由于喷射 $(E$、 p、 $s)$ 是支配的，命题 2.6 的条件 (i) 成立。为验证命题 2.6 的条件 (ii)，我们必须证明，对于每个 $y \in \varrho^{-1}(x) \cap Y$， y 的 $\hat{}s_i$-轨道 ˆ ˆO_1 和 O_2 在 y 处横截。根据假设 (i)， s_i-轨道 O_i、 $i = 1$、2 为线丛 $\varrho|_{C_x}\colon F|_{C_x} \to C_x$ 提供了一个平凡化覆盖。由于 $\varrho|_{\cdot O_i}\colon O_i \to O_i$ 是一个 ˆ ˆ 同构， O_i 是 $F|_{C_x}$ 在 O_i 上的一个处处非零局部截面。因此， O_i 是一个常截面，在 $F|_{O_i} \simeq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1_*$ 中适当的坐标 (u_i, v_i) 下由 $v_i = 1$ 给出。

我们可以认为 $x = \{u_i = 1\}$ 属于 O_i, $i = 1, 2$。令 $z = u_1/u_2$ 为 $\omega = O_1 \cap O_2 \simeq \mathbb{A}^1_*$中的一个仿射坐标。由 (ii) 可知，线丛 $\varrho|_{C_x}\colon F|_{C_x} \to C_x$是非平凡的。因此，它在 ω 上的转移函数等于 $v_2/v_1 = z^k$ ，其中 $k \neq 0$为某个值。因此，在 $Y|_{O_1} \simeq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1_*$的坐标 (u_1, v_1) 中，曲线 ˆ O_2 由方程$v_1 = u_1^{-k}$给出。于是，ˆ O_2 在点 $y = (1, 1) \in F|_{O_1}$处与 ˆ O_1 横截相交。□

2.3. 扭曲的 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化的椭圆性。设 X 是一个光滑完备簇。本小节将推论 2.9 推广到任意光滑纤维化（不一定是局部平凡的） $\varrho\colon Y \to X$，其所有纤维均同构于 $\mathbb{A}^1_* = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$。这种纤维化可扩张为局部平凡纤维化 $\bar{\varrho}\colon \bar{Y} \to X$，其一般纤维为 $\mathbb{P}^1$，且˜ ¯为一个光滑除子 $X = Y \setminus Y$，它要么不可约，要么是 $\bar{\varrho}$ 的两个不相交截面 Z_0 和 Z_∞ 的并。前一种情形下， $\mathbb{A}^1_*$-纤维化 $\varrho\colon Y \to X$ 称为扭曲的；后一种情形下则称为非扭曲的。

¯在非扭曲情形下令 $F = Y \setminus Z_\infty$ 我们得到一个局部平凡线丛 $\bar{\varrho}|_F \colon F \to X$，其零截面为 Z_0，从而 $Y = F \setminus Z_0$。这使我们回到推论2.9的设定。

为了将推论 2.9 推广到扭曲设置，我们讨论 μ_2-簇和 μ_2-向量丛。事实上，扭曲的 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化 $\varrho \colon Y \to X$ 可以按如下方式消除扭曲。~考虑非分歧伽罗瓦覆盖 $\tilde{\varrho} = \bar{\varrho}|_{\tilde{X}} \colon X \to X$，其伽罗瓦群为 μ_2，使得 $X = \tilde{X}/\mu_2$。诱导的 $\mathbb{P}^1$-纤维丛 $\tilde{\varrho}^*\bar{Y} \to \tilde{X}$ 在 $\tilde{X}$ 上有两个不相交的~ ¯截面 Z_0 和 Z_∞，其中 Z_0 是典范截面。令 $F = \tilde{\varrho}^*Y \setminus Z_\infty$，我们得到一个线丛 $\tilde{F} \to \tilde{X}$。因此，诱导的$\mathbb{A}^1_*$-纤维化 $\tilde{Y} = \tilde{\varrho}^*\bar{Y} \setminus (Z_0 \cup Z_\infty) \to \tilde{X}$ ~ ~ ~是非扭曲的。此外，Y 带有一个自由的 μ_2作用，使得投影 $Y \to X$~是等变的，并且满足 $Y = Y/\mu_2$。现在我们可以推出以下关于扭曲的 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化的推论 2.9 的类似结论。

命题 2.10. 设 X 是一个光滑簇，且 $\varrho \colon Y \to X$ 是一个光滑的 $\mathbb{A}^1_*$-纤维化。假设

(i) X 是椭圆的，并且相对于 X 上由光滑射影有理曲线构成的覆盖族 $\{C_x\}$ 满足曲线轨道性质；(ii) 对于该族的任意成员 C_x，限制映射 $\varrho|_{\varrho^{-1}(C_x)} \colon \varrho^{-1}(C_x) \to C_x$ 是一个非平凡的 $\mathbb{A}^1_*$-纤维丛。 [2]

那么 Y 是椭圆的。

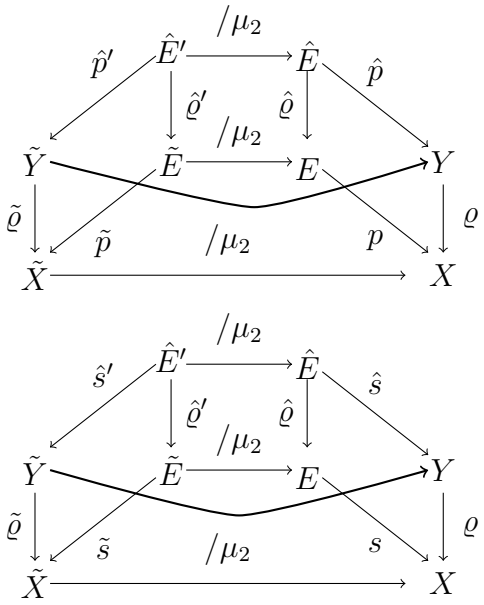

图 1。

[2]条件 (ii) 等价于以下条件：

~ ~ ~(ii′) $F \to X$ 在曲线 $C_x = \tilde{\varrho}^{-1}(C_x)$ 的两个分支上均限制为非平凡线丛，该曲线位于 $\tilde{X}$ 上。

证明。由于 X 是椭圆的，存在定义在 X 上的支配喷射 (E, p, s)。考虑 $\tilde{X}$ 上的自然 μ_2-作用。引理 2.5 保证存在定义在 X 上的拉回喷射 $\tilde{(E, \tilde{p}, \tilde{s})}$，使得诱导态射 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{s}$ 相对于 $\tilde{E}$ 上诱导的 μ_2-作用是 μ_2-等变的。根据引理 2.3，后一个喷射可拉回为定义在 Y 上的 $\hat{\tilde{\mu}}_2$-等变喷射 $(E', \hat{p}', \hat{s}')$，见图 1。

$\hat{}$喷射 $(E', \hat{p}', \hat{s}')$ 满足引理 2.4 的假设，只需相应地更改记号 $\hat{\tilde{}}$。根据该引理，μ_2-等变喷射 $(E', \hat{p}', \hat{s}')$ 在 Y 上诱导出一个推前喷射 $(E, \hat{p}, \hat{s})$，定义在 Y 上。由于 X 上的喷射 (E, p, s) 是支配的，因此得到的定义在 Y 上的喷射 $(E, \hat{p}, \hat{s})$ 在余维 1 上支配，也就是说，对于每个满足 $\varrho(y) = x$ 的 $y \in Y$ 和 $v \in T_x X$，y 的 s-轨道都与某个向量 $w \in T_y Y$ 相切，且 $d\varrho(w) = v$。X 的曲线轨道性质与上述条件 (ii) 一起保证存在定义在 Y 上的秩 1 喷射 (E_0, p_0, s_0)，使得 y 的 s_0-轨道与 $\mathrm{Ker}(d\varrho)$ 中的一个非零向量相切，参见命题 2.6 的证明。现在，利用后一个证明中的论证即可得出结论。□

2.4. **例子**。

例 2.11。设 B 是一个光滑完备簇，且 $\pi\colon X \to B$ 是一个纤维化，即在 B 上的局部平凡纤维丛，其一般纤维为 $\mathbb{P}^1$。假设 X 是椭圆的，并设 $F \to X$ 是一个线丛，其在 π 的某个纤维上的限制非平凡。则推论 2.9 的条件 (i) 和 (ii) 对于族 $\mathcal{F} = \{C_x\}_{x \in X}$ 成立，其中 $C_x = \pi^{-1}(\pi(x))$。根据该推论，$Y = F \setminus Z_F$ 是椭圆的。

例 2.12。推论 2.9 的判据可以应用于光滑射影簇 X 上由丰沛极化 D 定义的广义仿射锥 Y，参见引言中的定义。事实上，在顶点 $v \in Y$ 处对 Y 作爆破可得到线丛 $F = \mathcal{O}_X(-D) \to X$，从而 $Y \setminus \{v\} = F \setminus Z_F$。例如，如果 D 是 $X \subset \mathbb{P}^n$ 的超平面截面，则 $F = \mathcal{O}_X(-1)$。由于 D 是丰沛的，推论 2.9 的条件 (ii) 对 X 上的任意曲线 C 都成立。因此，我们得到如下判据。

推论 2.13。设光滑射影簇 X 是椭圆的，并满足曲线$\hat{}$轨道性质 $(*)$，参见定义 2.7。设 $Y \to X$ 是覆于 $X\hat{}$ 之上的广义仿射锥，其光滑部分为 $Y = Y \setminus \{v\}$。则 Y 是椭圆的。

例 2.14。1. 对于 $\mathbb{P}^1 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{K})/B_+$，曲线轨道性质成立，其中 $B^{\pm}$ 是 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$ 的 Borel 子群，由上/下三角矩阵组成。事实上，$B^{\pm}$ 的幺幂根基 $U^{\pm}$ 作用于 $\mathbb{P}^1$，有唯一的不动点 $x^{\pm}$，且 $x^+ \neq x^-$。由齐性可知，对任意 $x \in \mathbb{P}^1$，我们都可以选取一对新的相反 Borel 子群 $\tilde{B}^{\pm}$，使得 $x \notin \{\tilde{x}^+, \tilde{x}^-\}$，因此轨道 $\tilde{U}^{\pm} x$ 是一维的，并覆盖 $\mathbb{P}^1$。

2. 任意具有约化群 G、定义在 $\mathbb{K}$ 上的广义旗簇 G/P 都满足曲线轨道性质。事实上，由于 G/P 的齐性以及前一个例子，只需找到 G 的一个 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$ 或 $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{K})$ 子群 S，以及一个点 $x \in G/P$，使得轨道 $C = Sx$ 同构于 $\mathbb{P}^1$。实际上，我们处于前一个例子的情形，因为 S 中点 $x \in C$ 的各向同性子群是 S 的一个 Borel 子群 $B_S = S \cap P$，而相反 Borel 子群 B_S^- 的不动点 x^- 与 x 不同。

取 $\mathrm{lie}(P) \subset \mathrm{lie}(G)$ 的一个嘉当子代数 $\mathfrak{h}$，令 $\Delta \subset \mathfrak{h}^\vee$ 为与 G 关联的根系，$\Delta^\pm$ 为 Δ 中正根和负根的子集，$\Delta_P \subset \Delta$ 为 P 的根系。我们假设 $\Delta_P^+ = \Delta^+$。考虑根分解

$$\mathrm{lie}(P) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha_i \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha_i} \oplus \bigoplus_{\alpha_i \in \Delta_P^-} \mathfrak{g}_{\alpha_i} \tag{3}$$

其中，$\mathfrak{g}_\alpha$ 是 $\mathrm{lie}(G)$ 的根子空间，对应于根 $\alpha \in \Delta$。

取一个负根 $\alpha \in \Delta^- \setminus \Delta_P^-$，令 S 为 G 中李代数为

$$\mathrm{lie}(S) = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha \quad \text{where} \quad \mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}.$$

因此，S 同构于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$ 或 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{K})$，而 $S \cap P = B_S$ 是 S 的 Borel 子群，其李代数为

$$\mathrm{lie}(B_S) = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha\,.$$

由于 $B_S \subset B_P$，B_S 对 G/P 的作用固定 distinguished 点 $x_0 = eP \in G/P$。令 U^- 为 S 中李代数为 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的单参数幺幂子群。假设 U^- 也固定 x_0，我们得到 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathrm{lie}(P)] \subset \mathrm{lie}(P)$；特别地，$\mathfrak{g}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{h}_\alpha] \subset \mathrm{lie}(P)$。后者与 (3) 矛盾。因此，$x_0 \in (G/P)^{B_S} \setminus (G/P)^S$，所以，$S$-轨道 $C = Sx_0$ 同构于 $\mathbb{P}^1$。

回顾一下，若一个簇 X 称为属于类 $\mathcal{A}_0$，则 X 可由与仿射空间同构的开子集覆盖 $\mathbb{A}^n$ 其中 $n =$ 维数 X。此类簇是次椭圆的，参见[For17a，命题 6.4。5]。因此，根据 [KZ23，定理 0。1]，它是椭圆的。

广义旗簇 G/P 其中 G 是约化代数群，而 $P \subset G$是抛物子群，属于类 $\mathcal{A}_0$，参见 [APS14，第 4 节 (3)]；另参见 [Gro89，3.5F]。事实上，U 的极大幺幂子群 G 作用于 G/P，其有一个与仿射空间同构的开轨道，例如参见 [Akh95，第 3.1 节，命题 7]的证明。由于G 传递地作用于 G/P，故断言得证。更多例子亦见 [APS14，第 4] 节。

ˆ**推论 2.15.** 设 $X = G/P$ 是一个旗簇，Y 是一个ˆ ˆ在 X上的广义仿射锥。那么 Y 的光滑部分 $Y = Y \setminus \{v\}$ 是椭圆的。

证明.根据前面的讨论和例 2.14 X 满足推论2.13的假设。因此，结论由该推论得出。□

ˆ**备注 2.16.** 设 Y 是旗簇的仿射锥 G/P 嵌入于 $\mathbb{P}^n$ 中，且作为ˆ射影正规子簇。则 Y 是正规的，而且是柔性的，见 [AKZ12，¯定理 0。2]因此，$Y = Y \setminus \{v\}$ 是椭圆的。

3. $\mathbf{A_0}$ 类爆破簇上的锥

3.1. **增强曲线轨道性质。** 将簇爆破 X 类 $\mathcal{A}_0$ 且中心为一点后，所得仍为类 $\mathcal{A}_0$的簇，参见例如 [Gro89，第 3.5.D 节″] 或[For17a，命题 6.4。6]。特别地，任何有理光滑射影曲面都属于类 $\mathcal{A}_0$，参见 [For17a，推论 6.4。7]下面的命题允许将推论2.13 应用于类 $\mathcal{A}_0$ 在一点处爆破所得的簇。

命题 3.1。 设 X 是一个类 $\mathcal{A}_0$ 且维数为 $n \geq 3$的完备簇。假设 X 满足以下增强曲线轨道性质:

$(**)$ 对于每个 $x \in X$ 以及任意有限子集 M 中的 $X \setminus \{x\}$ 都可以找到一条曲线 $C_x \simeq \mathbb{P}^1$位于 X 上，且避开 M 并满足定义 $(*)$ 中的双轨道性质 2.7，其配对由 $\mathbb{G}_a$-喷射组成 (E_i, p_i, s_i)， $i = 1, 2$。

设 $\sigma\colon X \to X$ 是点 $x_0 \in X$的爆破。则 X 也满足 $(**)$。

证明。给定一点 $\tilde{x} \in X$，取一个有限子集 $M \subset X \setminus \{\tilde{x}\}$。首先假设 $x := \sigma(\tilde{x}) \neq x_0$。选取一条曲线 $C_x \subset X$ 以及一对扩展的 $\mathbb{G}_a$-喷射 (E_i, p_i, s_i)，它们位于 X 上，满足 $(**)$，且 $M = \{x_0\} \cup \sigma(M) \subset X$。将 (E_i, p_i, s_i) 替换为适当的复制，使得 x_0 的 s_i-轨道成为单点集，同时 x的 s_i-轨道 O_i 保持不变。根据命题 1.5，可以将这些喷射提升为扩展的 $\mathbb{G}_a$-喷射 $(E_i, \tilde{p}_i, \tilde{s}_i)$，它们位于 X, $i = 1, 2$ 上，且 $\sigma(O_i) = O_i$，其中 O_i 是点 $\tilde{x}$的 $\tilde{s}_i$-轨道。容易看出，曲线 $C_{\tilde{x}} = \sigma^{-1}(C_x)$ 和提升后的喷射 $(\tilde{E}_i, \tilde{p}_i, \tilde{s}_i)$ 满足 $(**)$。

现在设 $\tilde{x}$ 位于例外除子 $\mathcal{E} = \sigma^{-1}(x_0)$ 上。选取 $\tilde{x}$ 的一个邻域 $\Omega \simeq \mathbb{A}^n$ 在 X。将 Ω 识别为 $\mathbb{A}^n = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[u_1, \ldots, u_n]$，我们可以设 x 是 $\mathbb{A}^n$ 的原点。于是，$(u_1 : \cdots : u_n)$ 可作为 $\mathcal{E} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ 中的齐次坐标。注意到， $\tilde{X}$ 可以由 n 个开子集 $U_i \simeq \mathbb{A}^n$ 覆盖，使得 $U_i \cap \mathcal{E} = \mathcal{E} \setminus H_i \simeq A^{n-1}$，其中 H_i 是 $\mathcal{E} = \mathbb{P}^{n-1}$ 中由 $u_i = 0$ 给出的坐标超平面。

在 $X = \mathbb{A}^n$ 中选择仿射坐标 $(u_1, \ldots, u_n)$，使得 $\tilde{x} = (u_1 : \cdots : u_n) \in \mathbb{P}^{n-1}$ 具有两个非零坐标，分别记为 u_1 和 u_2，即 $\tilde{x} \in U_1 \cap U_2$。由于 $n - 1 \geq 2$，一条经过 $\tilde{x}$ 的一般射影直线 $C_{\tilde{x}} \subset \mathcal{E} = \mathbb{P}^{n-1}$ 与 H_1 和 H_2 分别在两个互异点相交，并且不与 M 相交。此外，对于 $i = 1, 2$， U_i 中的仿射直线 $\bar{O}_i = C_{\tilde{x}} \setminus H_i \simeq \mathbb{A}^1$ 是 $U_i \simeq \mathbb{A}^n$ 上一个 $\mathbb{G}_a$-作用的轨道，因此也是 X 上相关扩展 $\mathbb{G}_a$-喷射 $(E_i, \bar{p}_i, \bar{s}_i)$ 的 $\bar{s}_i$-轨道。于是有 $C_{\tilde{x}} = O_1 \cup O_2$。因此，对于 X，$(**)$ 成立。□

备注 3.2。 假设 M 为空，则对于$n = 2$，在 X 上构造两个扩展的 $\mathbb{G}_a$-喷射、且 $C_{\tilde{x}} = O_1 \cup O_2$ 满足双轨道性质的同样构造仍然成立，而这一次 $\mathcal{E} \simeq \mathbb{P}^1$。

3.2. **旗簇的增强曲线轨道性质**。

命题 3.3。 维数为 $n \geq 2$ 的广义旗簇 $X = G/P$ 满足增强曲线轨道性质$(**)$。

证明。特 distinguished 点 $x_0 = eP \in G/P$ 的稳定子与抛物子群 P 相同。例 2.14 的构造产生了 G 的一个子群 S，它同构于 SL(2, $\mathbb{K}$) 或 PGL(2, $\mathbb{K}$)；换言之，它是局部同构于 SL(2, $\mathbb{K}$) 的子群。此外，还得到 S 的一对相反的单参数幺幂子群 $U^{\pm}$，以及一个经过 x_0 的 S-轨道 $C = S/B^+ \simeq \mathbb{P}^1$，使得轨道 $U^{\pm}x_0$ 是一维的，并覆盖 C；其中 $B^+ = S \cap P$ 是 S 的一个 Borel 子群。

由元素 $a \in P$ 对 S 施加共轭作用，得到 G 中一族 SL(2, $\mathbb{K}$)（分别为 PGL(2, $\mathbb{K}$)）子群 $S_a = aSa^{-1}$，以及一族经过 x_0 的相应轨道 $C_a = aC \cong \mathbb{P}^1$。我们断言，$\mathbb{P}^1$-曲线族 $\mathcal{F} = \{C_a\}_{a\in P}$ 除 x_0 外没有基点。假设 $\mathcal{F}$ 至少包含两条不同的曲线，则基点集 Bs($\mathcal{F}$) 是有限的。由于抛物子群 P 连通，每个 $x \in$Bs($\mathcal{F}$) 都在 P 下是不动的。由于 P 与其正规化子 $N_G(P)$ 相同（见 [Hum95，定理 X.29.4(c)]），$x_0 = eP$ 是 P 的唯一不动点。事实上，若对某个$g \in G$ 有 $PgP = gP$，则 $g \in N_G(P) = P$，因此 $gP = P$。

我们来证明 $\mathrm{card}(\mathcal{F}) \geq 2$。按照（3）中的记号，我们有

$$\dim(G/P) = \mathrm{card}(\Delta^- \setminus \Delta_P^-) \geq 2.$$

因此，$\Delta^- \setminus \Delta_P^-$ 包含两个不同的负根 α_i, $i = 1, 2$。令 U_i^+ 为 P的根子群，满足 lie(U_i^+) $= \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$，令 S_i为 G中满足

$$\mathrm{lie}(S_i) = \mathrm{lie}(\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$$

并令 $B_i = S_i \cap P \supset U_i^+$ 为 S_i的一个 Borel 子群，参见例 2.14。特 distinguished 点 x_0的 S_i-轨道是 G/P上的一条 $\mathbb{P}^1$-曲线 $C_i = S_i/B_i$。注意，U_1^+和 U_2^+是P的幺幂根基 R_u中的两个不同子群。令 P^- 为 G 的相反抛物子群，令B_i^- 为 S_i 的相反 Borel 子群，其幺幂根基为 U_i^-。则 U_1^-和 U_2^-是P^-中的两个不同子群 R_u。x_0 的 R_u(P^-)-轨道在 G/P 中是开集，并且 x_0 在 $R_u(P^-)$中的各向同性子群是平凡的。因此，轨道$U_i^- x_0$, $i = 1, 2$互不相同，曲线$C_i = U_i^- x_0$, $i = 1, 2$也互不相同，证毕。

因此，对于任意有限子集 $M = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset G/P\setminus\{x_0\}$ 以及任意 $i = 1$，.....，m 都可以从我们的族中选取一条曲线 $C_{a_i} = a_i C$，使其不与 x_i相交。具有此性质的元素 $a_i \in P$ 在 P中构成一个开稠密集。因此，对于一般的$a \in P$，曲线 C_a 不与 M相交。由于 G/P 是齐性的，点 x_0 的选取无关紧要。由此可知，G/P 满足条件$(**)$，见例2.14。□

3.3. 维数为 ≥ 3时的主要结果。

定理 3.4. 设 X 是一个光滑完备簇，Y 是 X上的广义仿射锥的光滑部分，见引言。那么，在以下每种情形下，Y 都是椭圆的：

(a) $n =$ 维数$X \geq 3$ 且 X 由一个簇 X_0 经有限次连续爆破 $\mathcal{A}_0$ 得到，其中该簇属于$(**)$ 命题3.1 中验证条件 $X_0 = G/P$（例如，$n \geq 3$见命题3.3）；(b) X 由爆破希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_n$的一个有限子集 $n \geq 0$，或 $\mathbb{P}^2$（例如，X 是德尔佩佐曲面）。

证明。注意，在 (a) 和 (b) 中，X 属于 $\mathcal{A}_0$类，因此是椭圆的。因此，只需检验推论 2.9中的条件 (i) 和 (ii)。在所有情形下，条件 (ii) 都由推论 2.13得到。条件 (i) 则由命题 3.1 和 3.3、注 3.2以及例 2.11给出。□

注 3.5。 定理 3.4 (a) 的证明不适用于 $n = 2$。事实上，在这种情形下，证明命题 3.1 时的例外曲线 $\mathcal{E} = \mathbb{P}^1$ 可能包含M中的点。然而，其结论对 $n = 2$仍然成立；参见下一节中的定理 4.1 。

4. Elliptic cones over rational surfaces

本节将定理 3.4 推广到任意有理光滑射影曲面 X。

定理 4.1。 设 X 是有理光滑射影曲面， $Y = Y \setminus \{v\}$ 是广义锥 Y 在 X上的光滑部分。那么 Y 是椭圆的。

由推论 2.13可知，定理 4.1 可由下一个命题推出。

命题 4.2。 X 满足曲线轨道性质 $(*)$。

命题 4.2 的证明在构造X时，按照爆破次数进行归纳。下一个命题给出了归纳步骤。

命题 4.3。 设 X 是一光滑射影曲面，且 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ 是一个纤维化，其一般纤维为 $\mathbb{P}^1$。假设对于 π 的任意纤维分支 C 以及任意点 $x \in C$，以下条件成立。

(i) 存在 X 中的一个开子集 U_x，使得 $X \setminus U_x$ 没有孤立点，且 $O_x := U_x \cap C = C \setminus \{x\} \cong \mathbb{A}^1$；$(ii)$ 存在一个正常双有理态射 $\nu_x\colon U_x \to \mathbb{A}^2$，使得

- O_x 经 ν_x 同构地映到 $\mathbb{A}^2$ 中的一个坐标轴 L；
- ν_x 的例外除子由 π 的若干纤维分支组成；
- 这些分支中没有任何一个被压缩到 L 的一个点；(iii) 存在一个 $\mathbb{G}_a$-作用 λ_x 作用在 U_x 上，使得 O_x 是 x 的 λ_x-轨道；(iv) 对于 X 上与 λ_x 相关联的扩展 $\mathbb{G}_a$-喷射 (E_x, p_x, s_x)， O_x 是任意点 $x' \in O_x$ 的 s_x-轨道。

设 $\sigma\colon \tilde{X} \to X$ 为一点的爆破，且 $x_0 \in X$ 以及 $\tilde{\pi} = \pi \circ \sigma\colon \tilde{X} \to \mathbb{P}^1$ 为诱导的$\mathbb{P}^1$-纤维化。于是，$(i) - (iv)$ 成立，其中将 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ 替换为 $\tilde{\pi}\colon \tilde{X} \to \mathbb{P}^1$。

~ ~ ~ ~证明。设 C 是 $\tilde{\pi}$ 在 X 和 $\tilde{x} \in C$上的一个纤维分支。若 C 不同于~的 σ 例外曲线，则令 $C = \sigma(C) \subset X$ 和 $x = \sigma(\tilde{x}) \in C$；否则，令$x = x_0$。考虑满足 (i)–(iv) 的一个开子集 $U_x \subset X$。

可能出现以下情形：

(a) $\tilde{C} = \sigma^{-1}(x_0)$ 是 σ 和 $x = x_0$的例外曲线；(b) C 是 π 和 $x_0 \notin C$的纤维分支；(c) C 是 π 和 $x_0 \in C$的纤维分支。

在情形 (a) 中，我们选择 $U_0 \cong \mathbb{A}^2$ x_0 中的一个开邻域 X。由于 X 属于类 $\mathcal{A}_0$，这样的邻域确实存在。我们还在 $u\,v$ 上选择一个坐标系 $(U_0, \tilde{}\,)\, x_0$，使得 $L = \{u = 0\}$ 为原点，且坐标轴 $\tilde{x} \in C = \mathbb{P}T_{x_0}U_0$ 沿 $\tilde{U}_0$ 的方向。于是 $= \sigma^{-1}$:$U_0 (= \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2)$ $\tilde{U}_i \simeq \mathbb{A}^2$，其中 u_i 配备坐标 $(v_i,)$，使得

˜(α) 的限制 $\sigma_0|_{\tilde{U}_i}$： $U_i \to U_0$ 给出为

$$\sigma_0|_{\tilde{U}_1}\colon (u_1, v_1) \mapsto (u_1 v_1, v_1) \quad \text{and} \quad \sigma_0|_{\tilde{U}_2}\colon (u_2, v_2) \mapsto (u_2, u_2 v_2);$$

˜(β) σ_0 将坐标轴 $L_1 := \{u_1 = 0\}$ 在 U_1 中同构地映 onto L。

˜那么， $U_{\tilde{x}} := U_1$ 配备沿 L_1方向平移的 $\mathbb{G}_a$-作用 $\lambda_{\tilde{x}}$ ，满足 (i)–(iv)。

若情形 (b) 或 (c) 成立，则 $\tilde{X}$ 中的原像 $U_{\tilde{x}} = \sigma^{-1}(U_x)$ 满足

$$O_{\tilde{x}} := U_{\tilde{x}} \cap \tilde{C} = \sigma^{-1}(C \setminus \{x\}) = \tilde{C} \setminus \{\tilde{x}\}.$$

显然， $U_{\tilde{x}}$ 也满足条件 (i)。

假设情形 (b) 成立。容易看出，复合 $\nu_{\tilde{x}} = \nu_x \circ \sigma\colon U_{\tilde{x}} \to \mathbb{A}^2$ 满足 (ii)。如有必要，用适当的复制替换 λ_x ，我们可以假设 $x_0 \notin C$ 被 λ_x 固定，而 $O_x = C \cap U_x = C \setminus \{x\}$ 仍是 λ_x 的一个轨道。因此，可以将 λ_x 提升为 $U_{\tilde{x}}$ 上的一个 $\mathbb{G}_a$-作用 $\lambda_{\tilde{x}}$ ，使得 $O_{\tilde{x}}$ 是 $\tilde{x}$ 的 $\lambda_{\tilde{x}}$-轨道，并且˜，于是 (iii) 对 $\lambda_{\tilde{x}}$ 成立。令 $(E_{\tilde{x}}, p_{\tilde{x}}, s_{\tilde{x}})$ 为与 $\lambda_{\tilde{x}}$ 相关联的 X 上扩张的 $\mathbb{G}_a$-喷射，我们得到一组满足 (i)–(iv) 的数据。

情形 (c) 分为两个子情形：

(c') $x = x_0$;

(c'') $x \neq x_0$.

在情形 (c′) 中，我们有 $x_0 = x \notin U_x$。因此，令 $U_{\tilde{x}} = \sigma^{-1}(U_x)$，限制$\sigma|_{U_{\tilde{x}}}$: $U_{\tilde{x}} \to U_x$ 是一个同构。按照前述方法继续，即可得出所需结论。

在情形 (c'') 中，我们有 $x_0 \in C \setminus \{x\} = O_x$ 且 $\nu_x(x_0) \in \nu_x(O_x) = L$。不妨设 $\nu_x(x_0) = \bar{0} \in \mathbb{A}^2$ 是原点。由 (ii)， $\nu_x\colon U_x \to \mathbb{A}^2$ 在 $O_x \subset U_x$上是 étale 的。因此，ν_x 是 $\mathbb{A}^2$ 的爆破，其中心为理想 $I \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(\mathbb{A}^2)$，且支集包含于 $A^2 \setminus L$上。由于ν_x 将 O_x 同构地映到 L，正常双有理态射 $\nu_x \circ \sigma\colon U_{\tilde{x}} \to \mathbb{A}^2$ 也将 $O_{\tilde{x}}$ 同构地映到 L。注意，具有不相交中心的爆破可交换。因此， $\nu_x \circ \sigma = \sigma_0 \circ \nu_0$，其中 $\sigma_0\colon \tilde{U}_0 \to \mathbb{A}^2$ 是 $\mathbb{A}^2$ 在原点˜ ˜ ˜处的爆破，而 ν_0是 U_0的爆破，其中心为 $I = \sigma_0^*(I) \subset \mathcal{O}_{\tilde{U}_0}(U_0)$。这些态射构成一个交换图

$$\begin{array}{ccc} U_{\tilde{x}} & \xrightarrow{\sigma} & U_x \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_0} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_x} \\ \tilde{U}_0 & \xrightarrow{\sigma_0} & \mathbb{A}^2 \end{array}$$

在 $\mathbb{A}^2$ 上选取仿射坐标（u， v），使得 $x_0 =$(0, 0) 为原点，并且 $L =\{u = 0\}$。于是 $\tilde{U}_0 = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$，其中 $\tilde{U}_i \simeq \mathbb{A}^2$ 配备坐标（u_i， v_i），从而˜（α）以及上面的（{v13）成立。态射 σ_0 将 U_1 中的坐标轴 L_1 同构地映射到 L，而 ν_0 将 $O_{\tilde{x}}$ 同构地映射到 L_1。

现在将 $U_{\tilde{x}}$ 替换为$U_{\tilde{x},\,1} := \nu_0^{-1}(\tilde{U}_1)$，并将 ν 替换为$\nu_1 = \nu_0|_{U_{\tilde{x},\,1}}\colon U_{\tilde{x},\,1} \to \tilde{U}_1 \simeq \mathbb{A}^2$。我们˜有 $O_{\tilde{x}} = U_{\tilde{x},\,1} \cap C$，以及 $\nu_1|_{O_{\tilde{x}}}\colon O_{\tilde{x}} \to L_1$ 是一个将 $x_0 \in O_{\tilde{x}}$ 映射到原点 $\bar{0} \in \tilde{U}_1 = \mathbb{A}^2$ 的同构。此外， ν_1 在 $O_{\tilde{x}}$ 上是 étale 的，因此$U_{\tilde{x},\,1}$ 验证了（i）和（ii）。

现在考虑由沿 L_1 方向的平移在 $\tilde{U}_1 = \mathbb{A}^2$ 上定义的 $\mathbb{G}_a$-作用 λ，使得L_1 是一个 λ-轨道。将 λ 替换为适当的复制后，我们可以使 λ 自由作用

˜作用于 L_1 上，并保持爆破$\nu_0|_{U_{\tilde{x}}}$的中心$I|_{U_{\tilde{x},1}}$ 不变,1。于是， λ 可提升为$U_{\tilde{x},1}$ 上的一个作用˜ λ ，使得 $O_{\tilde{x}}$ 是一个 λ-轨道。因此，$U_{\tilde{x},1}$ 满足 (iii) 和 (iv)。□

命题 4.2 的证明。显然， $\mathbb{P}^2$ 以及满足 $n \geq 0$ 的希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_n$ 具有曲线轨道性质。众所周知，任何与 $\mathbb{P}^2$ 不同构的有理光滑射影曲面 X，都可由从某个 $\mathbb{F}_n$ 开始的一系列爆破得到，其中 $n \geq$0。此外，命题 3.1 的性质 (i)–(iv) 对 $\mathbb{P}^1$-纤维化 π: $\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1$ 仍成立。根据该命题并对爆破次数作归纳，这些性质对 X 仍成立。设 $x \in X$ 位于由此诱导的 $\mathbb{P}^1$-纤维化π: $X \to \mathbb{P}^1$ 的纤维分支 C 上。取两个互异点 $x_1, x_2 \in C \setminus \{x\}$。设 U_i 和 (E_i, p_i, s_i) 满足命题 3.1 的 (i)–(iv)，其中以 x_i, $i = 1, 2$ 代替 x。那么 $O_i = C \setminus \{x_i\}$ 是 x 的一个s_i-轨道。扩展后的 $\mathbb{G}_a$-喷射 (E_i, p_i, s_i) 在 O_i 上的限制是支配的。因此， X 具有曲线轨道性质。这就证明了命题 4.2。□

5. 附录 A：End(X)-作用的高传递性

众所周知，柔性簇 $\mathrm{Aut}(X)$ 的自同构群 X 在光滑部分 X_{reg}上具有高传递性，也就是说，对任意 m，它都是 $m \geq$ 1-传递的，参见 [AFKKZ13，定理 0。1]。自态射幺半群 $\mathrm{End}(X)$ 也具有类似的传递性，条件是 X 在格罗莫夫意义下是光滑椭圆簇。姑且不严格地说，若对$\mathrm{End}(X)$ 的任意两个同构的零维子概形 X 和 Z_1，其中 Z_2，X 之间的每个同构 $Z_1 \xrightarrow{\simeq} Z_2$都能延拓为 X的一个自态射，我们就称其在 X 上具有高传递性。

命题 5.1。 设 X 是一个光滑拟仿射簇。若 X 是椭圆的，则 $\mathrm{End}(X)$在 X上具有高传递性。

上述命题是 Kusakabe 提出的下述满射定理的直接推论 [Kus22，定理 1。2], 该定理推广了 Forstnerič 的早期结果[For17b，定理 1。6] 该早期结果适用于完备椭圆簇。这一现象在 [Gro89，第 3.4(C) 节]中已有预期；另见 [Arz22] ，其中给出了柔性簇情形下的类似结果。

定理 5.2。 对于任意维数为 n 的光滑（次）椭圆簇 X，存在一个态射 φ: $\mathbb{A}^{n+1} \to X$，使得 $\varphi\left(\mathbb{A}^{n+1} \setminus \mathrm{Sing}(\varphi)\right) = X$，其中

$$\mathrm{Sing}(\varphi) = \{x \in \mathbb{A}^{n+1} | \varphi \text{ is not smooth at } x\}$$

是 φ的奇异轨迹。如果 X 是完备的，那么以 $\mathbb{A}^n$ 代替$\mathbb{A}^{n+1}$时同样成立。

利用零维概形 $Z \to X$ 的任意态射都可以经由光滑态射 φ: $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \mathrm{Sing}(\varphi) \to X$提升这一事实，Kusakabe 得到了如下插值结果，见 [Kus22，推论 1。5]；参见 [Gro89，第 3.4(E) 节]。

推论 5.3. 设 X 是一个光滑的（次）椭圆簇， Y 是一个仿射簇， Z是 Y的一个零维子概形。那么，对于任意态射 f: $Z \to X$，都存在˜ ˜一个态射 f: $Y \to X$，使得 $f|_Z = f$。

事实上，推论 5.3 在假设 Y 为拟仿射的情况下，采用相同的证明仍然成立。在推论 中令 $Z_1 = Z$，我们便可以将给定的态射 $f\colon Z_1 \to Z_2$ 延拓到 Z_2 的零维子概形 X 上，得到一个自态射 $\sim f\colon X \to X$。由此得到命题 5.1。此外，在推论 3 $Y = \mathbb{A}^1$ 中取 [Gro89，第 3.4(B) 节] 和 [KZ00，第 1661]页。

推论 5.4. 任意光滑椭圆簇 X 都是 $\mathbb{A}^1$-丰富的，也就是说，对于 X 中的任意 m 个互异点，都存在一条经过它们的 $\mathbb{A}^1$-曲线 $\mathbb{A}^1 \to X$。此外，给定 X 上的有限个曲线喷流 $j_1, \ldots, j_m$，其中心不必互异，则存在一条 $\mathbb{A}^1$-曲线 $f\colon \mathbb{A}^1 \to X$ 插值这些喷流。

注意，对于柔性光滑仿射簇 X，可以找到一个 $\mathbb{G}_a$-作用在 X 上的轨道，使其插值给定的曲线喷流，参见 [AFKKZ13，定理 4。14]。

6. Appendix B: Gromov's Extension Lemma

为方便读者，我们回顾命题 1.1的表述。

命题 *6.1.* 设 D 是 X 上的约化有效除子，且 (E, p, s) 是 $U = X \setminus \mathit{supp}(D)$ 上取值于 X 的一个喷射，满足 $p\colon E \to X$ 是秩为 $r \geq 1$ 的平凡丛。则存在 X 上的一个喷射 $(E, \tilde{p}, \tilde{s})$，其在 U 上的限制与 (E, p, s) 同构，并且满足 $\tilde{s}|_{\tilde{p}^{-1}(X\setminus U)} = \tilde{p}|_{\tilde{p}^{-1}(X\setminus U)}$；对每个 $x \in U$，x的 $\tilde{s}$-轨道与 x的 s-轨道重合。

证明。将 E 延拓为 X上的平凡向量丛；为简便起见，仍将后者记作 $p\colon E \to X$。设 ξ是 $\mathcal{O}_X(D)$ 的一个典范截面 $\to X$，满足 $\mathrm{div}(\xi) = D$。

考虑扭曲向量丛 $p_n\colon E_n = E \otimes \mathcal{O}_X(-nD) \to X$，其中 $n \in \mathbb{N}$。由于 ξ 在 U 上不消失，由 ξ^n 的张量乘法诱导的同态 $\varphi_n\colon E_n \to E$ 限制在 U 上是一个同构，并将 $s_n := s \circ \varphi_n$ 映射到 s。我们断言，对于充分大的 n，s_n 可延拓为一个态射 $E_n \to X$。容易看出，在后一种情形下，$(E, \tilde{p}, \tilde{s}) = (E_n, p_n, s_n)$ 是 X上的一个所需喷射。

该论证是局部的，因此我们将考察范围限制在给定点 $x_0 \in \mathrm{supp}(D)$ 的一个仿射邻域$\omega \subset X$ 内，使得

- $D|_\omega = h^*(0)$，其中某个 $h \in \mathcal{O}_\omega(\omega)$，且
- $E_n|_\omega \cong_\omega \omega \times \mathbb{A}^r$ 是一个平凡向量丛。

注意，在 $\omega^* = \omega \setminus \mathrm{supp}(D)$ 上，喷射 (E_n, p_n, s_n) 是 (E, p, s) 的 h^n-位似。后者意味着，经过平凡化后，s_n 由下式给出：

$$s_n\colon (x, v) \mapsto s(x, h^n(x)v) \qquad \forall (x, v) \in \omega^* \times \mathbb{A}^r.$$

设 $\omega \hookrightarrow \mathbb{A}^m$ 是一个闭嵌入。那么 s 给出一个有理映射

$$s\colon \omega \times \mathbb{A}^r \dashrightarrow \mathbb{A}^m \quad \text{of the form} \quad (x, v) \mapsto x + \psi(x, v)$$

其中，ψ 是一个有理向量函数，在 $\omega^* \times \{0\}$的邻域内正则，并在 $\omega^* \times \{0\}$上消失。ψ 的每个坐标函数都可以写成如下形式

$$\frac{q(v)}{h^k r(v)} \quad \text{where} \quad v = (t_1, \ldots, t_r) \in \mathbb{A}^r \quad \text{and} \quad q, r \in \mathcal{O}_\omega(\omega)[t_1, \ldots, t_r]$$

满足 $q(0) = 0$，且 r 和 h 的零点轨迹在$\omega \times \mathbb{A}^r$中没有公共分支。

此外，我们可以假设除子 $r^*(0)$ 和 $q^*(0)$ 没有共同的不可约分支 T，该分支位于 $\omega \times \mathbb{A}^r$ 中并经过 $(x_0, 0) \in \omega \times \mathbb{A}^r$。事实上，设 T 是这样的一个分支。众所周知，$\mathrm{Pic}(\omega \times \mathbb{A}^r) = \mathrm{pr}_1^*(\mathrm{Pic}(\omega))$。因此，对于某个位于 ω 上的除子 T_0，除子 $T - \mathrm{pr}_1^*(T_0)$ 是主除子。将 ω 缩小后，可以假设 T_0 是主除子。因此，T 是主除子，即对于某个 $\omega \times \mathbb{A}^r$ 上的正则函数 f，有 $T = f^*(0)$。于是，将 r 和 q 都除以 f，便可消去 T。

这意味着 r 在 $\omega^* \times \{0\}$ 上不消失，因为否则 ψ 在 $\omega^* \times \{0\}$ 上就不是正则的。特别地，$r(0) = ah^l$，其中 a 是 ω 上处处不为零的函数。

h^n-位似 s_n of s 给出一个有理映射

$$s_n \colon \omega \times \mathbb{A}^r \dashrightarrow \omega \subset \mathbb{A}^m, \quad (x, v) \mapsto x + \psi_n(x, v),$$

其中 ψ 是一个有理向量函数，它在 $\omega^* \times \{0\}$的一个邻域内正则，并在 $\omega^* \times \{0\}$上消失。$\psi_n \in$ 的每个坐标函数都具有如下形式

$$\frac{q(h^n v)}{h^k r(h^n v)}.$$

由于 $q(0) = 0$ 且 $[r(h^n v) - r(v)]|_{v=0} = 0$，我们得到

$$q(h^n v) = h^n \tilde{q}(v) \quad \text{and} \quad r(h^n v) = r(0) + h^n \tilde{r}(v) = h^l a + h^n \tilde{r}(v).$$

因此，对于 $n > k + l$，函数

$$\frac{q(h^n v)}{h^k r(h^n v)} = \frac{h^{n-k-l} \tilde{q}(v)}{a + h^{n-l} \tilde{r}(v)}$$

在 $\omega \times \{0\}$的一个邻域 Ω 内正则，并在 $(\mathrm{supp}(D) \times \mathbb{A}^r) \cap \Omega$ 上至少 $n-k-l$阶消失。

现在考虑 $s_{n+1} = s \circ \varphi_{n+1} = s_n \circ \varphi_1$，其中经过平凡化后，

$$\varphi_1|_{\omega \times \mathbb{A}^r} \colon \omega \times \mathbb{A}^r \to \omega \times \mathbb{A}^r, \quad (x, v) \mapsto (x, h(x)v).$$

令 $\widetilde{\Omega} = \varphi_1^{-1}(\Omega) \subset \omega \times \mathbb{A}^r$，我们看到

$$\varphi_1(\widetilde{\Omega}) \subset \Omega \quad \text{and} \quad (\mathrm{supp}(D) \cap \omega) \times \mathbb{A}^r \subset \widetilde{\Omega}.$$

因此，s_{n+1} 在 $\widetilde{\Omega}$ 上是正则的，因而在 $p_{n+1}^{-1}(\mathrm{supp}(D) \cap \omega)$ 上也是如此。这给出了 $\omega \cup U$ 上一个取值于 X 的喷射 $(E_{n+1}, p_{n+1}, s_{n+1})$。选取 $\mathrm{supp}(D)$ 的一个有限仿射开子集覆盖 ω_i，并取充分大的 n，即可得到所需的将$\widetilde{(E, p, s)}$ 延拓为 X 上喷射 $(E, \tilde{p}, \tilde{s})$ 的结果。□

注 6.2。同样的证明也适用于原始的格罗莫夫局部化引理，参见 [Gro89，3.5.B]。

致谢。我们感谢 Ivan Arzhantsev 就旗簇问题提供了有益的咨询。他的建议使本部分的证明得以简化；原先的证明要长得多。

参考文献

[Akh95] D. N. Akhiezer, 《复分析中的李群作用》, 数学论丛 E 27。Friedr. Vieweg & Sohn, 1995。[Arz22] I. Arzhantsev, 《关于仿射空间的像》。arXiv:2209（2022）。[AFKKZ13] I. V. Arzhantsev、H. Flenner、S. Kaliman、F. Kutzschebauch 和 M. Zaidenberg, 《柔性簇与自同构群》, Duke Math. J. 162（2013）, 第4期, 767–823。[AKZ12] I. V. Arzhantsev、K. G. Kuyumzhiyan 和 M. G. Zaidenberg, 《旗簇、托里克簇与悬挂：无限传递性的三个实例》, Sbornik: Mathematics 203:7（2012）, 923–949。[APS14] I. Arzhantsev、A. Perepechko 和 H. S´uss, 《万能扭子上的无限传递性》, J. London Math. Soc. 89:3（2014）, 762–778。[CPPZ21] I. Cheltsov、J. Park、Yu. Prokhorov 和 M. Zaidenberg, 《Fano簇中的圆柱》, EMS Surv. Math. Sci. 8（2021）, 39–105, DOI 10.4171/EMSS/44。[CPW16] I. Cheltsov、J. Park 和 J. Won, 《光滑三次曲面上的仿射锥》。J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18:7), 1537–1564（2016. Zbl 1386.14068, MR 3506607。[FKZ16] H. Flenner、S. Kaliman 和 M. Zaidenberg, 《柔性簇的Gromov-Winkelmann型定理》, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18（2016）, 第11期, 2483-2510。[For17a] F. Forstnerič, 《Stein流形与全纯映射：复分析中的同伦原理》, Springer-Verlag, 柏林-海德堡, 2011。[For17b] F. Forstnerič, 《到 Oka流形上的满射全纯映射》。载于：《复几何与辛几何》, Springer INdAM丛书第21卷, 73–84。Springer, Cham, 2017。[For23]F. Forstnerič, 《Oka流形的最新进展》, Indag. Math. (N.S.) 2023（即将出版）。https://doi.org/10.1016/j.indag.2023.01.005。在线可见: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019357723000058?via%3Dihub#sec6[Fre06] G. Freudenburg, 《局部幂零导子的代数理论》, 数学科学百科全书, Springer, 柏林-海德堡-纽约, 2006。[Gro89] M. Gromov, 《椭圆丛全纯截面的 Oka原理》, J. Amer. Math. Soc. 2（1989）, 851–897。MR1001851。DOI10.2307/1990897。[Har04] R. Hartshorne, 《代数几何》。数学研究生教材第52卷, Springer 2004。[Hum95]J. E. Humphryes, 《线性代数群》, 数学研究生教材第21卷。Springer, 1995。[KKT18]S. Kaliman、F. Kutzschebauch 和 T. T. Truong, 《关于次椭圆流形》, Israel J. Mathem. 228（2018）, 229–247。[KZ00] S. Kaliman 和 M. Zaidenberg, 《Miyanishi 对仿射三空间的刻画在更高维数中不成立》。Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 50:6（2000）, 1649–1669。[KZ23] S. Kaliman 和 M. Zaidenberg, 《格罗莫夫椭圆性与次椭圆性》。arXiv:2301.03058（2023）。[KPZ11] T. Kishimoto、Y. Prokhorov 和 M. Zaidenberg, 《仿射锥上的群作用》。数学研究中心。CRM Proceedings and Lecture Notes 54, 2011, 123–163。[KPZ13] T. Kishimoto、Yu. Prokhorov 和 M. Zaidenberg, 《仿射锥上的 $\mathbb{G}_a$-作用》。Transform. groups 18:4（2013）, 1137–1153。[Kus22] Y. Kusakabe。《到次椭圆簇上的满射态射》。arXiv:2212.06412（2022）。[LT17] F. Lárusson 和 T. T. Truong, 《仿射空间爆破的代数次椭圆性与支配性》。Documenta Mathematica 22（2017）, 151–163。[Mag75] A. R. Magid, 《纤维化的皮卡序列》, Proc. Amer. Math. Soc. 53（1975）, 第1期, 37-40。[MPS18] M. Michałek、A. Perepechko 和 H. Süß, 《柔性仿射锥与柔性覆盖》, Math. Z. 290（2018）, 1457–1478。[Per13] A. Y. Perepechko, 《次数为4和5的德尔佩佐曲面上仿射锥的柔性》。Funct. Anal. Appl. 47（2013）, 284–289。Zbl 1312.14099, MR 3185123。

迈阿密大学数学系，科勒尔盖布尔斯，佛罗里达州 33124，美国电子邮箱地址：kaliman@math.miami.edu

格勒诺布尔-阿尔卑斯大学，法国国家科学研究中心，傅里叶研究所，法国格勒诺布尔 38000电子邮箱地址：mikhail.zaidenberg@univ-grenoble-alpes.fr