arXiv:2303.02042v1 [math.NA] 3 Mar 2023

平移缩放 Ginibre 矩阵的 GMRES、伪谱与 Crouzeix 猜想*

TYLER CHEN†、ANNE GREENBAUM‡、和 THOMAS TROGDON§

摘要。 我们研究 GMRES 算法应用于包含缩放平移 $N \times N$ 矩阵的线性方程组的情形，该矩阵的各个元素均为相互独立的复高斯随机变量。当该线性系统的右端项与此随机矩阵相互独立时，可以精确确定 GMRES残差误差的 $N \to \infty$ 行为。为处理右端项依赖于随机矩阵的情形，我们研究 Ginibre 矩阵的伪谱和数值域，并证明 Crouzeix 猜想的一个受限版本。

关键词。 GMRES、随机矩阵、数值域、伪谱、Crouzeix 猜想

AMS 学科分类。68Q25,65F35, 15A60

1. 引言。 求解线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 是计算科学中最重要的任务之一，而 Krylov 子空间方法是解决这一任务最广泛使用的算法之一。如果$\mathbf{A}$ 是厄米矩阵，或更一般地说是正规矩阵，那么 Krylov 子空间方法在（精确算术下）的表现相对而言已得到充分理解。另一方面，当 $\mathbf{A}$ 为非正规矩阵时，Krylov 子空间方法的表现可能极其多变，相关研究至今仍在持续开展 [7]。本文分析 GMRES 在涉及经过缩放和平移的 $N \times N$ 复高斯随机矩阵 $\mathbf{A}_N$ （称为 Ginibre 矩阵，见 第 3 节）的线性系统上的表现。尽管此类矩阵是非正规的（其特征值条件数随矩阵阶数线性增长 N [8]），但若因此便认为这对 GMRES 而言是一个难题，就错了。因此，本文又提供了一个例证，说明 Edelman 和 Rao 所说的这句话：“将随机矩阵与‘典型’矩阵的直观概念在心理上联系起来，是一种错误” [19]。

与其他 Krylov 子空间方法一样，对线性系统$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 应用 GMRES k 步后，会得到$\mathbf{A}$的一个近似 $p(\mathbf{A})\mathbf{b}$，用于近似$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$，其中 p 是一个 $k-1$ 次多项式。第 k次 GMRES 迭代的残差$\mathbf{r}^{(k)}$ 具有这样的性质：在所有此类近似中，其 2-范数最小。也就是说，

$$\|\mathbf{r}^{(k)}\| = \min_{\deg(p)<k} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}p(\mathbf{A})\mathbf{b}\| = \min_{\substack{\deg(p)\le k \\ p(0)=1}} \|p(\mathbf{A})\mathbf{b}\|. \tag{1.1}$$

表达式 (1.1) 取决于右端项向量 $\mathbf{b}$ 及其与矩阵 $\mathbf{A}$的关系。通常，我们希望得到关于 $\|\mathbf{r}^{(k)}\|$ 的界，使其不以平凡的方式依赖于 $\mathbf{b}$。也许最简单的这类界是

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} \le \min_{\substack{\deg(p)\le k \\ p(0)=1}} \|p(\mathbf{A})\|,$$

*资助： </style}本材料基于美国国家科学基金会资助的研究工作，资助编号为 DGE-1762114（TC）和 DMS-1945652（TT）。本材料中表达的任何意见、发现、结论或建议均为作者的观点，不一定反映美国国家科学基金会的看法。

†纽约大学， tyler.chen@nyu.edu
‡华盛顿大学， greenbau@uw.edu§华盛顿大学，
trogdon@uw.edu

其中 $\|p(\mathbf{A})\|$ 表示矩阵 $p(\mathbf{A})$ 的诱导算子 2-范数。达到此界的多项式通常称为理想 GMRES 多项式，这类多项式已在多种情形下得到研究 [20, 23]。

对于正规矩阵，界定 $\|p(\mathbf{A})\|$ 只需界定$\mathbf{A}$的特征值上的 p 。当$\mathbf{A}$ 的特征值为实数时，即$\mathbf{A}$ 为厄米矩阵时，这本质上是一个经典逼近理论问题。然而，对于非正规矩阵，仅凭特征值不足以确定 GMRES 的收敛性。事实上，在所有具有 N 给定特征值的 $N \times N$ 矩阵中，存在矩阵$\mathbf{A}$ 和右端项$\mathbf{b}$ ，使得相应的 GMRES 残差范数 $\|\mathbf{r}^{(k)}\|$ 对于 $k = 0, 1, \ldots, N-1$ 等于任意给定的递增正数列 [22]。

因此，为了将 $\|p(\mathbf{A})\|$ 的估计与标量逼近理论问题联系起来，必须考虑特征值以外的某个集合。若开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 满足以下条件，则称其为$\mathbf{A}$ 的 K-谱集：对 Ω 上解析且连续延拓至边界 $\partial\Omega$ 的所有函数 f ，

$$\|f(\mathbf{A})\| \leq K \|f\|_\Omega.$$

这里 $\|f\|_\Omega := \sup_{z\in\Omega} |f(z)|$。为方便起见，我们将 $C(\Omega, \mathbf{A})$记作更小的 st 值 K ，使得 Ω 是$\mathbf{A}$的 K-谱集；即

$$C(\Omega, \mathbf{A}) := \sup\{\|f(\mathbf{A})\|/\|f\|_\Omega : f \text{ analytic on } \Omega \text{ and continuous on } \partial\Omega\}.$$

因此，对于任意集合 Ω 和矩阵$\mathbf{A}$，

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq C(\Omega, \mathbf{A}) \min_{\substack{\deg(p)\leq k \\ p(0)=1}} \|p\|_\Omega. \tag{1.2}$$

此外，注意到最大模原理意味着

$$C(\Omega', \mathbf{A}) \leq C(\Omega, \mathbf{A}), \tag{1.3}$$

如果 $\Omega \subset \Omega'$。

Ω 的一个常见选择是数值域

$$W(\mathbf{A}) := \{\mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{v} : \|\mathbf{v}\| = 1\}$$

据猜想，对于任意矩阵 $\mathbf{A}$ [12]， $C(W(\mathbf{A}), \mathbf{A}) \leq 2$。或者，我们可以将 Ω 选为 ϵ-伪谱

$$\Lambda_\epsilon(\mathbf{A}) := \{z \in \mathbb{C} : \|R(z, \mathbf{A})\| \geq \epsilon^{-1}\}$$

其中， $R(z,\mathbf{A}) := (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 是预解式。对于任意 $\epsilon > 0$，利用以下事实：$\|R(z, \mathbf{A})\| = \epsilon^{-1}$ ，其中 $z \in \partial\Lambda_\epsilon$，

$$\|f(\mathbf{A})\| = \left\| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Lambda_\epsilon} f(z) R(z, \mathbf{A}) \mathrm{d}z \right\| \leq \frac{\mathrm{len}(\partial\Lambda_\epsilon(\mathbf{A}))}{2\pi\epsilon} \|f\|_{\Lambda_\epsilon}. \tag{1.4}$$

也就是说， Λ_ϵ 是$\mathbf{A}$的 $\mathrm{len}(\partial\Lambda_\epsilon(\mathbf{A}))/(2\pi\epsilon)$-谱集。

伪谱和数值域都广泛用于研究非正规矩阵 [34]。对于正规矩阵， $\Lambda_\epsilon(\mathbf{A})$由以特征值为中心、半径为 [34]的圆盘的并集构成；

但对于非正规矩阵， $\Lambda_\epsilon(\mathbf{A})$可能显著更大。因此， $\Lambda_\epsilon(\mathbf{A})$的大小可以视为$\mathbf{A}$非正规程度的一种度量。同样，正规矩阵的数值域就是特征值的凸包，而非正规矩阵的数值域则可能显著更大。

在本文余下部分，我们将考虑对涉及经缩放和平移的 Ginibre 矩阵的方程组应用 GMRES。本文主要是一篇综述性文章，旨在进一步凸显数学若干领域之间的联系，包括数值线性代数、矩阵分析和随机矩阵理论。显然，这些领域之间的思想交流潜力巨大，因此我们希望本文能进一步推动这一进程。因此，尽管我们所陈述的许多结论未必会令相关领域的专家感到意外，但我们相信不同学科之间的联系对广大读者都具有吸引力。我们的证明在很大程度上借助了文献中的技术成果，因为我们的目标是从较高层面审视相关主题。

2. 预备知识。本节将介绍一些基本符号，并回顾有关随机变量收敛的一些标准定义和结果。

2.1. 记号。我们用 $\mathcal{D}(c,\ r)$ 表示以 c 为中心、半径为 r 的闭圆盘，用 $\mathcal{A}(\tilde{r},\ r)$ 表示以原点为中心、内半径为 $\tilde{r}$ 、外半径为 r 的闭环域。

集合 X 和 Y 之间的豪斯多夫距离记为 $d_H(X,\ Y)$，定义如下：

$$d_H(X,Y)=\max\left\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}|x-y|,\ \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}|x-y|\right\}.$$

本文中， X 或 Y 总有一个是闭圆盘，此时我们常用下面的引理：

LEMMA 2.1. 设 $S\subset\mathbb{C}$ 是复平面中的一个闭子集，且 $r>0$。假设对于某个 $\epsilon>0$, $\mathcal{D}(0,\ r-\epsilon)\subseteq S\subseteq\mathcal{D}(0,\ r+\epsilon)$。那么，

$$d_H(S,\mathcal{D}(0,r))<\epsilon.$$

此外，如果 S 是凸集，那么逆命题也成立。

2.2. 随机变量的收敛。若序列 $X_1,\ X_2,\ \ldots$ 依概率收敛到随机变量 X ，则对所有 $\epsilon>0$,

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\Big[|X_N-X|<\epsilon\Big]=1.$$

或者，若满足以下条件，则称该序列 X 几乎必然收敛：

$$\mathbb{P}\Big[\lim_{N\to\infty}X_N=X\Big]=1.$$

我们分别用以下符号表示依概率收敛和几乎必然收敛：

$$X_N\xrightarrow[N\to\infty]{\text{prob.}}X\qquad\text{and}\qquad X_N\xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}}X.$$

几乎必然收敛等价于满足以下条件：对于所有 $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{1}[|X_N - X| < \epsilon] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1. \tag{2.1}$$

这里 $\mathbb{1}[\text{为真}] = 1$，而 $\mathbb{1}[\text{为假}] = 0$。如果 A_N 和 B_N 是事件序列，我们还有

$$\mathbb{1}[A_N] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{1}[B_N] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1, \qquad \text{if } A_N \subset B_N. \tag{2.2}$$

对于固定的 $c \in \mathbb{R}$，记

$$X_N \lesssim c \text{ almost surely as } N \to \infty$$

如果对所有 $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{1}[X_N < c + \epsilon] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1.$$

3. 随机系统上的 GMRES。令 $\mathsf{G}_N = \frac{1}{\sqrt{2N}}(\mathsf{X}_N + \mathrm{i}\mathsf{Y}_N)$，其中 X_N和 Y_N 是相互独立的 $N \times N$ 矩阵，其元素为独立同分布的实标准高斯元素。[1] 矩阵 G_N 的元素为独立同分布的标准复正态元素，称为（复）Ginibre 矩阵。我们的主要目标是分析将 GMRES 算法应用于形如 $(\mathsf{I}+\sigma\mathsf{G}_N)\mathsf{x} = \mathsf{b}$ 的线性系统并执行 k 步后所对应的残差范数 $\|\mathsf{r}_N^{(k)}\|$，其中 $\sigma \in (0, 1)$ 是某个固定常数。对于满足矩条件的非高斯元素，也可预期类似结果成立；即普适性。

在第 4 节中，我们考虑$\mathbf{b}$ 独立于$\mathbf{A}$的情形。在这种情况下，我们可以描述 Arnoldi 算法的精确分布参数化，而 GMRES 正是基于该算法。由此可以刻画残差范数：

THEOREM 3.1. 设$\mathbf{G}_N$为一个 $N\times N$ 复 *Ginibre* 矩阵。则对于 $\sigma \in (0,\ 1)$和$\mathbf{b}_N$ 独立于$\mathbf{G}_N$的情形，线性系统$(\mathbf{I} + \sigma\mathbf{G}_N)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的第 k 步 *GMRES* 残差范数 $\|\mathbf{r}_N^{(k)}\|$ 满足

$$\frac{\|\mathbf{r}_N^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}_N\|} \xrightarrow[N\to\infty]{\text{prob.}} \left(\frac{1-\sigma^2}{1-\sigma^{2+2k}}\right)^{1/2} \sigma^k.$$

如果$\mathbf{b}$ 允许依赖于$\mathbf{G}_N$，那么不能期待该估计成立。因此，我们转而研究(1.2)，旨在刻画 K-谱集$\mathbf{G}_N$（从而也刻画$\mathbf{I} + \sigma\mathbf{G}_N$）。在第 5 节中，我们利用现有理论刻画$\epsilon$-伪谱$\mathbf{G}_N$:

THEOREM 3.2. 设$\mathbf{G}_N$ 是一个大小为 $N \times N$ 的复 *Ginibre* 矩阵。那么，对于任意 $\epsilon > 0$,

$$d_H\big(\Lambda_\epsilon(\mathbf{G}_N), \mathcal{D}(0, \mathfrak{e}^{-1}(\epsilon^2))\big) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 0.$$

[1]尽管我们所处理的矩阵大小会变化（因为 N 是可变的），但我们假设始终在同一个概率空间上工作，并且有一个定义在该概率空间上的随机变量半无限数组。然后，通过取这个无限数组的一个主子块来构造一个 $N \times N$ 矩阵。

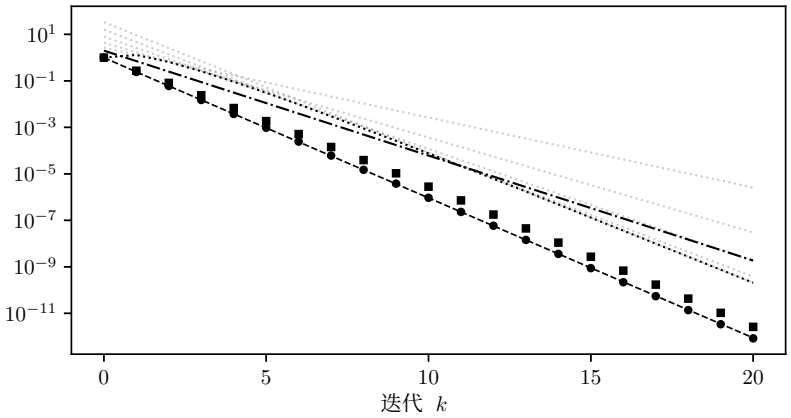


图 1：当 b 的选取独立于或依赖于 G_N 时，线性方程组 $(I + \sigma G_N)x = b$ 上 GMRES 的收敛性，其中 b 分别独立于和依赖于 G_N 选取。当 b 独立于 G_N 选取时，GMRES 的残差范数 $\|r_k\|$（圆圈）由定理 3.1（虚线）描述。相反，如果允许 b 依赖于 G_N，则 GMRES 的残差范数 $\|r_k\|$（方块）不一定由定理 3.1 描述。然而，基于伪谱（点线）和数值域（点划线）的定理 3.4 中的界仍然适用。在该实验中，$N = 1500$ 和 $\sigma = 1/4$。

这里 $\mathfrak{e}: [1,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个确定性的递增函数，满足 $\mathfrak{e}(1) = 0$，其定义为

$$\mathfrak{e}(z) := \frac{8d^2 - (9-8d)^{3/2} - 36d + 27}{8(1-d)}, \qquad d := 1 - |z|^2 \tag{3.1}$$

以及 $\mathfrak{e}^{-1}: [0,\infty) \to [1,\infty)$ 是 $\mathfrak{e}$ 的逆。

当N 较大时，$\mathbf{G}$的数值域也近似呈圆形。具体而言，已知 [10]

$$d_H(W(\mathbf{G}_N), \mathcal{D}(0,\sqrt{2})) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 0.$$

在第 6 节中，我们结合已有的关于数值域上矩阵函数增长的理论，利用这一事实证明，随着 $N \to \infty$，Ginibre 矩阵的数值域几乎必然是 2-谱集。更准确地说：

THEOREM 3.3. 设$\mathbf{G}_N$ 是一个大小为 $N \times N$ 的复 *Ginibre* 矩阵。那么，

$$C(W(\mathbf{G}_N), \mathbf{G}_N) \lesssim 2$$

当 $N \to \infty$时几乎必然成立。

由于当 N 较大时，数值域和伪谱都近乎圆形，我们希望得到一个以 $\min\{\|p\|_{\mathcal{D}(1,r)} : \deg(p) \le k,\ p(0) = 1\}$ 表示的界。这是一个可以精确求解的初等问题。事实上，在圆盘$\mathcal{D}(1, r)$ 上，次数为 k 的首一多项式的最小无穷范数为 $(z-1)^k$，因此我们只需对 $(z-1)^k$ 重新缩放，使其在原点处取值为 1，即可得到所需的多项式；

也就是说，极小化多项式为 $p(x) = (z-1)^k/(-1)^k = (1-z)^k$。由此可得关系式

$$\min_{\substack{\deg(p)\le k\\ p(0)=1}} \|p\|_{\mathcal{D}(1,r)} = r^k. \tag{3.2}$$

将这些结果与上述结果结合起来，我们可以证明以下界。

THEOREM 3.4. 设$\mathbf{G}_N$是一个 $N\times N$ 复 *Ginibre* 矩阵。那么，对于 $\sigma\in(0,1)$且$\mathbf{b}$ 可能依赖于$\mathbf{G}_N$的情形，第 k 步 *GMRES* 残差范数 $\|\mathbf{r}_N^{(k)}\|$ 满足以下线性系统$(\mathbf{I}+\sigma\mathbf{G}_N)\mathbf{x} = \mathbf{b}$，

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} \lesssim \min_{\eta>1} \eta\mathfrak{e}(\eta)^{-1/2}(\sigma\eta)^k \qquad and \qquad \frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} \lesssim 2(\sqrt{2}\sigma)^k$$

当 $N\to\infty$时，几乎必然成立。

图 1 给出了一个数值示例，其中 $N = 1500$ 且 $\sigma = 1/4$。正如预期，当 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{G}_N$ 独立时，收敛由定理 3.1 决定。对随机矩阵 $\mathbf{I}+\sigma\mathbf{G}_N$进行抽样后，我们尝试寻找一个能增大 $\|\mathbf{r}^{(k)}\|$值的 $\mathbf{b}$。在给定迭代步上最大化残差范数是一个困难的问题 [20]，，因此，我们不针对每个 k寻找最坏情形的 $\mathbf{b}$，而是直接计算使 $\|p(\mathbf{I}+\sigma\mathbf{G}_N)\mathbf{b}\|/\|\mathbf{b}\|$ 最大化的 $\mathbf{b}$，其中 $p = (z-1)^{10}$。这似乎足以使其偏离定理 3.1 中的收敛速率。即便如此，定理 3.4 中的界仍然成立。

4. 具有独立右端项的 GMRES 的极限行为。我们首先研究 $\mathbf{b}$ 与$\mathbf{G}_N$相互独立的情形。人们观察到，将许多算法应用于高维随机矩阵时，其行为基本上是确定性的 [15, 31]。这一点已针对一系列线性系统迭代方法得到严格证明，包括共轭梯度法和 MINRES[14, 16, 30] ，以及梯度下降和随机梯度下降 [27–29]。文献 [15] 中给出了一些 GMRES 算法在情形 $\sigma = 1$ 下的数值实验，其中可以看到非确定性行为（另见 [38]）。

众所周知，从矩阵元素的联合密度也可以看出，Ginibre 矩阵在酉共轭下保持不变。也就是说，对于任意固定的酉矩阵$\mathbf{Q}$，都有$\mathbf{Q}\mathbf{G}_N\mathbf{Q}^*$ 分布相同$=\mathbf{G}_N$。因此，不失一般性，我们可以假设$\mathbf{b}/\|\mathbf{b}\| = \mathbf{e}_1 := [1,0,\dots,0]^\mathsf{T}$ 通过对$\mathbf{b}$应用满足$\mathbf{Q}\mathbf{b} = \|\mathbf{b}\|\mathbf{e}_1$ 的酉变换$\mathbf{Q}$，并考虑涉及$\mathbf{I}+\sigma\mathbf{Q}\mathbf{G}_N\mathbf{Q}^*$ 和 $\|\mathbf{b}\|\mathbf{e}_1$的系统。

现在我们构造一个酉矩阵 $\mathbf{V}$，使得 $\mathbf{V}(\mathbf{I}+\sigma\mathbf{G}_N)\mathbf{V}^*$ 为上赫 Hessenberg 矩阵，且 $\mathbf{V}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$。将 GMRES 应用于线性系统 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 并迭代 k 次所得的残差范数，与将 GMRES 应用于 $\mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{V}^*\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{b}$ 并迭代 k 次所得的残差范数相同，其中 $\mathbf{V}$ 可以是任意酉矩阵（即使 $\mathbf{V}$ 依赖于 $\mathbf{A}$）。事实上，利用 2-范数的酉不变性，

$$\|p(\mathbf{A})\mathbf{b}\| = \|p(\mathbf{A})\mathbf{V}^*\mathbf{V}\mathbf{b}\| = \|\mathbf{V}p(\mathbf{A})\mathbf{V}^*\mathbf{V}\mathbf{b}\| = \|p(\mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{V}^*)\mathbf{V}\mathbf{b}\|.$$

该方法通过构造合适的Householder反射子来实现，其思路与针对其他矩阵系综的方法类似 [18, 32, 35]。为方便起见，将$\mathbf{G}_N$ 划分为

$$\mathbf{G}_N = \frac{1}{\sqrt{2N}}\begin{bmatrix} g & \mathbf{y}^\mathsf{T} \\ \mathbf{x} & \mathbf{G} \end{bmatrix}.$$

现在，在以概率 1 发生的事件 $\|\mathbf{v}\| \neq 0$为条件时，将$\mathbf{U}$ 定义为Householder反射变换

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}, \qquad \mathbf{v} = \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{x}.$$

于是 $\mathbf{U}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ 且

$$\mathbf{U}\mathbf{G}_N\mathbf{U}^* = \frac{1}{\sqrt{2N}} \begin{bmatrix} g & \mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{F}^* \\ \mathbf{F}\mathbf{x} & \mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{F}^* \end{bmatrix}.$$

根据构造，$\mathbf{F}\mathbf{x} = [\|\mathbf{x}\|, 0, \ldots, 0]^{\mathsf{T}}$。此外，由于$\mathbf{x}$ 各元素的实部和虚部均为独立同分布的标准正态随机变量，

$$\|\mathbf{x}\| \overset{\text{dist.}}{=} \chi(2(N-1))$$

其中 $\chi(j)$ 是自由度为 j 的卡方分布。接下来注意，$\mathbf{y}$ 和$\mathbf{G}$与$\mathbf{x}$ 相互独立，因此也与$\mathbf{F}$相互独立。于是，根据高斯向量的酉不变性，$\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{F}^* \overset{\text{分布。}}{=} \mathbf{y}^{\mathsf{T}}$；又根据高斯矩阵在酉共轭下的不变性，$\mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{F}^* \overset{\text{分布。}}{=} \mathbf{G}$。

现在可以将这一过程应用于子矩阵$\mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{F}^*$。因此，归纳可得（以概率 1）存在酉矩阵$\mathbf{V}$，使得$\mathbf{V}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ 且

$$\mathbf{V}\mathbf{G}_N\mathbf{V}^* \overset{\text{dist.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2N}} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,2) & \cdots & \cdots & \cdots & \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,2) \\ \chi(2(N-1)) & \ddots & & & \vdots \\ & \chi(2(N-2)) & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \chi(2(1)) & \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,2) \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

这里 $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 2)$ 是一个 co 复高斯分布，均值为零，方差为 2。

用 H_N 表示式 (4.1) 中的矩阵，并令 $\mathrm{A}_N := \mathrm{I} + \sigma\mathrm{H}_N$，其中 $\sigma \in (0, 1)$。那么，系统 $\mathrm{A}_N\mathrm{x} = \|\mathrm{b}\|\mathrm{e}_1$ 在第 k 步的 GMRES 残差，与系统 $(\mathrm{I} + \sigma\mathrm{G}_N)\mathrm{x} = \mathrm{b}$ 在第 k步的 GMRES 残差具有相同的分布。

系统 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的残差范数 $\|\mathbf{r}^{(k)}\|$ 可写为

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|^2}{\|\mathbf{b}\|^2} = \frac{1}{1 + \|([\widetilde{\mathbf{A}}]_{2:k+1,:k})^{-*}([\widetilde{\mathbf{A}}]_{1,:})^*\|^2} \tag{4.2}$$

其中，$\mathbf{A}$ 是对 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{b}$ 运行 k 次 Arnoldi 算法后得到的 $(k+1) \times k$ 上赫~~Hessenberg 矩阵，$-*$ 表示逆共轭转置 [25, 定理 5.1]。众所周知，对上赫Hessenberg 矩阵和第一个单位向量应用 Arnoldi 算法，会重新得到相同的上-Hessenberg 矩阵。因此，由于 $\mathbf{A}_N$ 是上赫 Hessenberg 矩阵，$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_N]_{:k+1,:k}$。

保持 k 不变后，我们将使用 (4.2) 来分析 $N \to \infty$ 极限下的 GMRES 残差范数。直接计算可得

$$[\mathbf{A}_N]_{:k+1,:k} \xrightarrow[N\to\infty]{\text{prob.}} \mathbf{I} + \sigma \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \sigma & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ & & \sigma \end{bmatrix} =: \mathbf{A}_\infty.$$

现在注意到 $[\mathbf{A}_\infty]_{1,:} = \mathbf{e}_1$ 因此，根据约当块的基本性质，

$$([\mathbf{A}_\infty]_{2:k+1,:k})^{-*}\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \sigma & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \sigma \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ -\sigma^{-2} \\ \sigma^{-3} \\ \vdots \\ (-1)^{k-1}\sigma^{-k} \end{bmatrix}.$$

因此，我们有

$$1 + \|([\widetilde{\mathbf{A}}_\infty]_{2:k+1,:k})^{-*}([\widetilde{\mathbf{A}}_\infty]_{1,:})^{\mathsf{T}}\|^2 = 1 + \sum_{i=1}^{k} \sigma^{-2i} = \left(\frac{1-\sigma^{2+2k}}{1-\sigma^2}\right)\sigma^{-2k}.$$

因此，利用 (4.2)以及矩阵逆在任意可逆矩阵邻域内的连续性，可得：

THEOREM 3.1. 设 $\mathbf{G}_N$ 为一个 $N\times N$ 复 *Ginibre* 矩阵。那么，对于 $\sigma \in (0,1)$ 且 $\mathbf{b}_N$ 与 $\mathbf{G}_N$ 相互独立的情形，线性系统 $(\mathbf{I}+\sigma\mathbf{G}_N)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的第 k 步 *GMRES* 残差范数 $\|\mathbf{r}_N^{(k)}\|$ 满足

$$\frac{\|\mathbf{r}_N^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}_N\|} \xrightarrow[N\to\infty]{\text{prob.}} \left(\frac{1-\sigma^2}{1-\sigma^{2+2k}}\right)^{1/2}\sigma^k.$$

我们指出，研究 $\|\mathbf{r}^{(k)}\|$的波动将会很有意思，可以通过刻画其渐近分布，或推导依概率收敛速率的定量界来实现。对于相关的共轭梯度法和 MINRES 算法，这方面的研究已经完成 [14, 16, 30]。

5. Ginibre 矩阵的预解式范数与伪谱。 上一节的分析依赖于 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{G}_N$ 相互独立这一事实。若 $\mathbf{b}$ 可以依赖于 $\mathbf{G}_N$，则定理 3.1 中的估计未必成立。事实上，在 图 1中，我们展示了一个估计远不准确的例子。因此，我们转而研究 (1.2)。我们首先通过给出预解式范数的界来研究 Ginibre 矩阵的伪谱。关于随机矩阵伪谱的精美图片和高层次讨论，参见 [34, 第 35]章。

对于 r, $\tilde{r}$ 且满足 $r \geq \tilde{r} \geq 1$时，回忆一下， $\mathcal{A}(\tilde{r}, r)$ 是内半径为 $\tilde{r}$ 、外半径为 r 的闭环域。我们的首要目标是证明预解式在 $\mathcal{A}(\tilde{r}, r)$ 上有界：

LEMMA 5.1. 设 $\mathbf{G}_N$ 为 $N\times N$ 复 *Ginibre* 矩阵。则对于任意 r、$\tilde{r}$ 满足 $r \geq \tilde{r} \geq 1$, 对所有 $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{1}\left[\forall z \in \mathcal{A}(\tilde{r}, r):\ \mathfrak{e}(r)^{-1/2} - \epsilon < \|R(z, \mathbf{G}_N)\| < \mathfrak{e}(\tilde{r})^{-1/2} + \epsilon\right] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1.$$

为此，注意到对于任意 z,

$$\|R(z,\mathbf{G}_N)\| = \lambda_{\min}(\mathbf{Y}_N^z)^{-1/2}, \qquad \text{where} \qquad \mathbf{Y}_N^z := (z\mathbf{I}-\mathbf{G}_N)^*(z\mathbf{I}-\mathbf{G}_N).$$

研究 $\mathbf{Y}_N^z$ 的特征值是研究预解式 nt 范数的一种常见方法，因为 $\mathbf{Y}_N^z$ 是厄米矩阵，因此可能更易于分析。

令 $\rho_N^z(t)$ 为 $\mathbf{Y}_N^z$ 的经验谱测度；即

$$\rho_N^z(t) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta(t - \lambda_i(\mathbf{Y}_N^z))$$

其中 $\delta(t)$ 是以零为中心的狄拉克 delta 分布，且 $\{\lambda_i(\mathbf{Y}_N^z)\}_{i=1}^N$ 是 $\mathbf{Y}_N^z$的特征值。在 $N\to\infty$极限下， $\rho_N^z(t)$ 几乎必然依分布收敛到确定性的极限密度 $\rho^z(t)$。具体而言，[17]定理 [17, 1.1] 表明，相应的斯蒂尔切斯变换

$$m^z(w) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho^z(t)}{w-t}\mathrm{d}t$$

满足一个由信息矩阵和噪声矩阵的性质决定的积分方程。对于平移 Ginibre 矩阵，斯蒂尔切斯变换的方程可化简为一个代数关系

$$\frac{1}{m^z(w)} - \frac{1}{1+|z|^2 m^z(w)} + (1+|z|^2 m^z(w))w = 0,$$

其中要求 $\mathrm{Im}(m^z(w)) > 0$ 当 $\mathrm{Im}(w) > 0$ [9,时成立，见方程 9]。根据这个表达式，可以直接求出 $\rho^z(t)$ 的支集。特别地，对于 z ，当$|z|>1$时，如方程 18a [9, 所示， $\rho^z(t)$ 的支集为 $[\mathfrak{e}(z)\ \mathfrak{f}(z)]$ ，其中

$$\mathfrak{e}(z),\mathfrak{f}(z) := \frac{8d^2 \pm (9-8d)^{3/2} - 36d + 27}{8(1-d)}, \qquad d := 1-|z|^2. \tag{5.1}$$

对于 $|z|>1$，极限密度 $\rho^z(t)$ 在边缘 $\mathfrak{e}(z)$、$\mathfrak{f}(z)$ 处呈平方根行为，见方程 18b]。这意味着 $\rho^z(t)$ 在 $\mathfrak{e}(z)$ 的右侧紧邻处非负，因此，对所有 $\epsilon>0$， $\mathbb{1}[\lambda_{\min}(\mathbf{Y}_N^z) < \mathfrak{e}(z)+\epsilon] \to 1$ 几乎必然成立，当 $N\to\infty$。

众所周知，信息加噪声矩阵的特征值几乎必然不会落在极限谱密度的支集之外 [1, 36]。特别地，对于任意$\epsilon>0$,

$$\mathbb{1}\left[\lambda_{\min}(\mathbf{Y}_N^z) > \mathfrak{e}(z)-\epsilon\right] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1.$$

因此，结合前述结果，并利用 $\mathfrak{e}(z)$ 关于 $|z|$ 是递增函数这一性质，对于每个 $z\in\mathcal{A}(r,\ \tilde{r})$, 对所有 $\epsilon>0$,

$$\mathbb{1}\left[\mathfrak{e}(r)^{-1/2} - \epsilon < \|R(z,\mathbf{G}_N)\| < \mathfrak{e}(\tilde{r})^{-1/2} + \epsilon\right] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1. \tag{5.2}$$

我们通过数值计算考察了 $\|R(z、\mathbf{G}_N)\|$ 与 $|z|$ 之间的关系，见 图 2。

现在，我们将把 (5.2) 推广为对所有 $z\in\mathcal{A}(r,\tilde{r})$ 同时成立；也就是说，证明引理 5.1。我们的基本思路是构造一个有限集 $\mathcal{N}_\epsilon(r,\tilde{r}) \subset \mathcal{A}(r,\tilde{r})$，使得对于任意点 $\tilde{z}\in\mathcal{A}(r,\tilde{r})$，都存在一个点 $z\in\mathcal{N}_\epsilon(\tilde{r},r)$，使 $\|R(z,\mathbf{G}_N)\|$有界，且 $|z-\tilde{z}|$ 足够小，从而 $\|R(\tilde{z},\mathbf{G}_N)\|$ 与$\|R(z,\mathbf{G}_N)\|$足够接近。为此，令 $e=\mathfrak{e}(r)^{-1/2}+0.1$, $f=r+0.1$, 以及 $g=2.1$。于是，对于每个 $z\in\mathcal{A}(r,\tilde{r})$,

$$\mathbb{1}\left[\|R(z,\mathbf{G}_N)\| < e,\ |z|<f,\ \|\mathbf{G}_N\|<g\right] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1. \tag{5.3}$$

这里我们用到了上述结果以及众所周知的事实：当 $N\to\infty$ [21]时， $\|\mathbf{G}_N\| \lesssim 2$ 几乎必然成立。

固定 $\epsilon>0$，并利用事后判断，定义 $h:=\min\{1,(4e^2(f+g+1))^{-1}\}$和 $L:=3e^3(f+g+1)$。令 $\mathcal{N}_\epsilon(r,\ \tilde{r})\subset\mathcal{A}(\tilde{r},\ r)$ 为一个有限点集，使得 $\mathcal{A}(r,\ \tilde{r})$ 中任意其他点到 $\mathcal{N}_\epsilon(r,\ \tilde{r})$ 中某一点的距离都不超过 $\min\{h/2,\epsilon/(2L)\}$ 。这是可能的

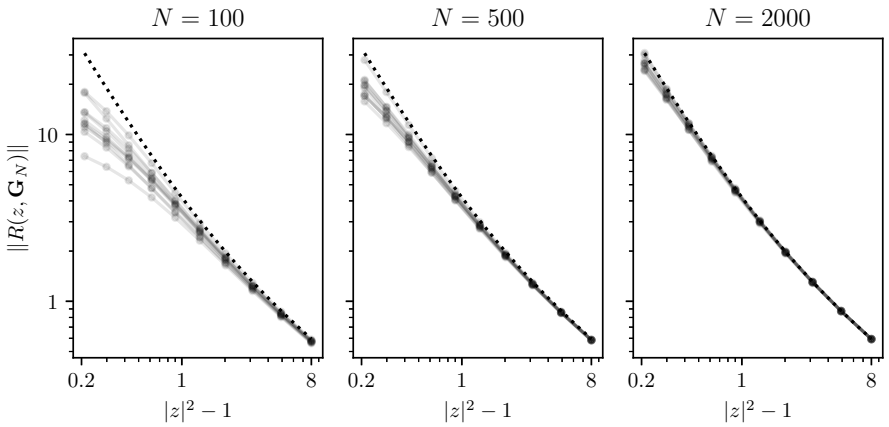


图 2： $\|R(z、\mathbf{G}_N)\|$ 与 $|z|^2 - 1$ 之间的关系，基于 $\mathbf{G}_N$ 的 10 个样本。点虚线表示 $\mathfrak{e}(z)^{1/2}$。此处我们取实轴上的 z，尽管由于 $\mathbf{G}_N$ 的旋转对称性，预计对任意 z 都能得到相同结果。注意，随着 $N \to \infty$ 增大，估计 $\mathfrak{e}(z)^{1/2}$ 会变得更加准确。

因为 $\mathcal{A}(r, \tilde{r})$ 是紧集，且 $\min\{h/2, \epsilon/(2L)\} > 0$。然后，由于 $\mathcal{N}_\epsilon(r, \tilde{r})$ 包含有限个点，(5.2) 表明

$$\mathbb{1}\left[\forall z \in \mathcal{N}_\epsilon(r,\tilde{r}) : \mathfrak{e}(\tilde{r})^{-1/2} - \frac{\epsilon}{2} < \|R(z,\mathbf{G}_N)\| < \mathfrak{e}(r)^{-1/2} + \frac{\epsilon}{2}\right] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1 \tag{5.4}$$

且(5.3) 意味着

$$\mathbb{1}\left[\forall z \in \mathcal{N}_\epsilon(r,\tilde{r}) : \|R(z,\mathbf{G}_N)\| < e,\ |z| < f,\ \|\mathbf{G}_N\| < g\right] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1. \tag{5.5}$$

设 $\tilde{z} \in \mathcal{A}(r,\tilde{r})$。根据构造，存在 $z \in \mathcal{N}_\epsilon(r,\tilde{r})$，使得 $|z - \tilde{z}| \le \min\{h/2, \epsilon/(2L)\}$。在以下事件上取条件：$\{\forall z \in \mathcal{N}_\epsilon(r,\tilde{r}) : \|R(z,\mathbf{G}_N)\| < e,\ |z| < f,\ \|\mathbf{G}_N\| < g\}$。那么，得益于我们对 h 和 L 的出色选择，我们可以利用预解式范数的基本性质（见第 7.2 小节）证明

$$\big|\|R(z,\mathbf{G}_N)\| - \|R(\tilde{z},\mathbf{G}_N)\|\big| \le L|z-\tilde{z}| < \epsilon/2$$

结合 (5.4)，可得

$$\mathfrak{e}(\tilde{r})^{-1/2} + \epsilon < \|R(\tilde{z},\mathbf{G}_N)\| < \mathfrak{e}(r)^{-1/2} + \epsilon.$$

应用 (2.2) 可得 引理 5.1。

5.1. 伪谱。引理 5.1 给出了 $\mathbf{A}$ 的 ϵ-伪谱的一个界。回忆一下 $\mathfrak{e} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ 随 $\mathfrak{e}(1) = 0$ 递增，并通过 $\epsilon = \mathfrak{e}(r)^{-1/2}$ 将 $\epsilon > 0$ 与 $r > 1$ 联系起来。于是，对于所有 $\epsilon > 0\,(r > 1)$ 和所有 $\tilde{\epsilon} > 0$，利用引理 5.1 以及 $\mathbb{1}[\forall z \in \mathcal{D}(0,1) : \|R(z,\mathbf{G}_N)\| > T]$ 几乎必然 $\xrightarrow[N\to\infty]{} 1$ 对任意 $T > 0$ 成立这一事实，我们有

$$\mathbb{1}\left[\forall z \in \mathcal{D}(0,r) : \|R(z,\mathbf{G}_N)\| > \mathfrak{e}(r)^{-1/2} - \tilde{\epsilon}\right] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1 \tag{5.6}$$

$$\mathbb{1}\left[\forall z \in \mathcal{A}(r,\infty) : \|R(z,\mathbf{G}_N)\| < \mathfrak{e}(r)^{-1/2} + \tilde{\epsilon}\right] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1. \tag{5.7}$$

我们将利用这一点证明，当 N 较大时，$\mathbf{G}_N$ 的 ϵ-伪谱靠近 $\mathcal{D}(0,r)$。固定 $\tilde{\epsilon}>0$，并对以下事件进行条件化：$\{\forall z\in\mathcal{D}(0,r):\|R(z,\mathbf{G}_N)\|>\epsilon-\tilde{\epsilon}\}$ 和 $\{\forall z\in\mathcal{D}(r,\infty):\|R(z,\mathbf{G}_N)\|<\epsilon+\tilde{\epsilon}\}$。于是

$$\mathcal{D}(0,r-\tilde{\epsilon})\subset\Lambda_\epsilon(\mathbf{G}_N)\subset\mathcal{D}(0,r+\tilde{\epsilon}).$$

因此，根据 引理 2.1 可得

$$d_H(\Lambda_\epsilon(\mathbf{G}_N),\mathcal{D}(0,r))<\tilde{\epsilon}.$$

利用 (2.2) 因此可得：

THEOREM 3.2. 设 $\mathbf{G}_N$ 是一个大小为 $N\times N$ 的复 *Ginibre* 矩阵。那么，对于任意 $\epsilon>0$,

$$d_H\big(\Lambda_\epsilon(\mathbf{G}_N)\ \mathcal{D}(0,\mathfrak{e}^{-\frac{1}{}(\epsilon^2))}\big)\ \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a .s.}}0.$$

请注意，该结果针对固定的 ϵ-伪谱（即 $|z|>1$ 固定）。从随机矩阵理论的角度来看，研究其他极限更有意义。在 $|z|<1$ 的情况下，关于 $\mathbf{Y}_N^z$ 的特征值界被用于圆律的证明中，而 $|z|\le 1+CN^{1/2}$ 的情况是 [9]的主要研究重点。其他研究则直接关注伪谱。例如， [5] 研究了在 ϵ 取决于 N的 $\epsilon\to 0$ 极限下 Λ_ϵ 的体积。

6. Ginibre 矩阵的数值域与 Crouzeix 猜想。现在我们将注意力转向数值域。对于任意矩阵 A，其数值域 W(A) 是凸集。不难证明，Re(W(A)) $=W$(He(A))，其中 He(A) := (A $+$A*)/2 是 A 的厄米部分。 W(He(A)) 最右侧点的实部恰好是 He(A) 的最大特征值。因此，我们可以得到数值域的一条切线： $\lambda_{\max}$(He(A)) $+t$i， $t\in(-\infty,\infty)$。现在注意，exp(iθ)W(A) $=W$(exp(iθ)A)；也就是说，数值域在复平面的旋转下保持不变。因此，将上述过程应用于 exp(iθ)A，而不是 A，就可以计算出数值域的一组切线。由于数值域是凸集，该过程将构造出一个包围数值域的多边形；随着对更多 θ 值进行计算，该多边形将收敛于数值域。这是计算数值域边界的标准技术（例如参见 [24]），我们利用该技术在图 3 中绘制了若干 G$_N$实例的数值域。

该技术可以对 Ginibre 矩阵进行解析处理 [10]。为此， s
注意到

$$\mathrm{He}(\mathbf{G}_N)=\frac{\mathbf{G}_N+\mathbf{G}_N^*}{2}$$

是一个缩放后的高斯酉系综（GUE）矩阵。GUE矩阵的特征值已得到深入研究；当缩放至对角线元素的方差为$1/N$时，其极限分布是在 $[-2,2]$上的半圆。事实上，这就是著名的Wigner半圆律 [37] ，可以说它开创了如今所谓的随机矩阵理论。He($\mathbf{G}_N$) 的对角线元素方差为 $1/(2N)$，因此考虑到这一差异，我们得到 [2]

$$\|\mathrm{He}(\mathbf{G}_N)\|\xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}}\sqrt{2}. \tag{6.1}$$

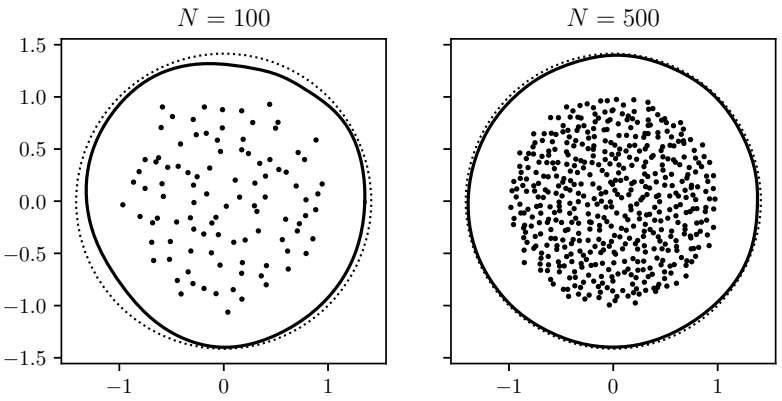


图 3： $\mathbf{G}_N$ 的数值域（实线曲线内部）和特征值（点）。圆盘 $\mathcal{D}(0, \sqrt{2})$ 的边界以点线圆表示。注意，当 $N \to \infty$ 时，数值域趋近于 $\mathcal{D}(0, \sqrt{2})$。

接下来将这一事实应用于旋转后的矩阵 $\exp(\mathrm{i}\theta)\mathbf{G}_N$，$\theta \in [0, 2\pi)$。由于 $\exp(\mathrm{i}\theta)\mathbf{G}_N \overset{\text{依分布}}{=} \mathbf{G}_N$，因此，对于所有固定的 (6.1)，$\theta$，类似于我们上文所用的覆盖论证 [10, 定理 4。1] 可将结论从固定的 θ 推广为同时对所有 $\theta \in [0, 2\pi$都成立。由此可得，正如预期，$\mathbf{G}_N$ 的数值域几乎必然收敛到以原点为中心、半径为 $\sqrt{2}$ 的圆盘，当 $N \to \infty$ [10, 定理 4。1]。具体而言，

$$d_H(W(\mathbf{G}_N), \mathcal{D}(0, \sqrt{2})) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 0. \tag{6.2}$$

矩阵分析中的一个未解问题是确定最小值 K，使得对每个矩阵 $\mathbf{A}$，$W(\mathbf{A})$ 都是一个 K-谱集。Crouzeix 猜想认为这个最小值是 2 [3,11]。已知对于任意 $\mathbf{A}$ [13]，，数值域都是一个 $(1+\sqrt{2})$-谱集；在实际应用中，这个界与猜想值 2 相比并不差多少。即便如此，确定哪些矩阵类可以改进该值 $(1+\sqrt{2})$，仍是一个活跃的研究领域。本节通过为大型 Ginibre 矩阵建立一个版本的 Crouzeix 猜想，进一步拓展了这些结果。

若某个矩阵的数值域是圆形的，则该数值域是这个矩阵的一个 2-谱集 [6, 26]。我们将证明这一结论的一个扰动版本，该版本适用于 $\mathbf{G}_N$的数值域；也就是说，近圆数值域几乎是 2-谱集。我们的阐述遵循 [6] 的论述，而该论述本身基于 [13]。一个有趣的问题是，$W(\mathbf{G}_N)$ 的数值域是否几乎是 K**的谱集** $\mathbf{G}_N$，对任意 $K < 2$是否都成立。我们进行了数值实验，结果表明 $\mathbf{G}_N$ 的数值域可能几乎是一个$\sqrt{2}$-谱集。附录 A对此有进一步讨论。

设 Ω 为一个具有光滑边界的区域，矩阵 $\mathbf{A}$ 的谱位于其内部。则对于任意在 Ω 上解析且连续于

边界上的函数,

$$f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} f(\sigma) R(\sigma, \mathbf{A}) \mathrm{d}\sigma,$$

其中 $R(\sigma, \mathbf{A}) := (\sigma \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 是预解式。现在定义

$$g(\mathbf{A}) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \overline{f(\sigma)} R(\sigma, \mathbf{A}) \mathrm{d}\sigma$$

并考虑矩阵

$$f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A})^* = \int_0^L \mu(s, \mathbf{A}) f(\sigma(s)) \mathrm{d}s$$

其中

$$\mu(s, \mathbf{A}) := \left[\frac{\sigma'(s)}{2\pi \mathrm{i}} R(\sigma(s), \mathbf{A})\right] + \left[\frac{\sigma'(s)}{2\pi \mathrm{i}} R(\sigma(s), \mathbf{A})\right]^*.$$

这里，我们用 $s \in [0, L]$ 对 $\partial\Omega$ 进行参数化，其中 $\sigma\colon [0, L] \to \partial\Omega$ 给出了从参数化到边界的映射。

当 $\Omega = W(\mathbf{A})$ 时，可以证明 $\|f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A})^*\| \leq 2$ 由此可得常数 $K = 1 + \sqrt{2}$。文献 [6] 的目标之一是考察数值域以外的 Ω，例如数值域内部的一个集合。在这种情况下，$\mu(s, \mathbf{A})$ 可能不是半正定矩阵，因此作者引入了必为半正定矩阵的矩阵

$$\mu(s, \mathbf{A}) - \lambda_{\min}(\mu(s, \mathbf{A}))\mathbf{I}.$$

由此，他们证明了 [6, 引理 2：1] 即

$$\|f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A})^* + \gamma \mathbf{I}\| \leq 2 + \delta \tag{6.3}$$

其中

$$\gamma := -\int_0^L \lambda_{\min}(\mu(s, \mathbf{A})) f(\sigma(s)) \mathrm{d}s \qquad \text{and} \qquad \delta := -\int_0^L \lambda_{\min}(\mu(s, \mathbf{A})) \mathrm{d}s.$$

注意，若 σ 取正向定向，则 $\sigma'(s)/\mathrm{i}$ 是 $\partial\Omega$ 在 $\sigma(s)$ 处的外法向量。因此，假设 Ω 是凸集，若我们将 μ 视为标量函数，则集合

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus \{\sigma(s)\} : \mu(s, z) > 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{\sigma(s)\} : \mathrm{Re}((\sigma'(s)/\mathrm{i})/(\sigma(s) - z) > 0\}$$

是包含 Ω 且与 $\partial\Omega$ 在 $\sigma(s)$ 处相切的开半平面。接下来，注意到 t

$$\lambda_{\min}(\mu(s, \mathbf{A})) = \min_{\|\mathbf{v}\|=1} \mathbf{v}^* \mu(s, \mathbf{A}) \mathbf{v} = \min_{\|\mathbf{v}\|=1} \mathrm{Re}\left[\frac{\sigma'(s)}{\pi \mathrm{i}} \mathbf{v}^* R(\sigma(s), \mathbf{A}) \mathbf{v}\right].$$

因此，我们看到，δ 的符号取决于 Ω 与数值域[6]的相对位置。具体而言，若 $\Omega = W(\mathbf{A})$，则 $\delta = 0$；若 $\Omega \subsetneq \mathrm{int}(W(\mathbf{A}))$，则 $\delta > 0$；若 $\Omega \supsetneq \mathrm{cl}(W(\mathbf{A}))$，则 $\delta < 0$。

6.1. 近圆数值域。对于任意矩阵 $N \times N$ A，都存在一个函数 f，使其达到比值 $C(W(\mathbf{A}), \mathbf{A})$。不失一般性，假设$\|f\|_{W(\mathbf{A})}= 1$。已知该函数具有如下形式：$f = B \circ \phi$，其中 B 是次数至多为 $N-1$ 的有限 Blaschke 乘积，而 ϕ 是从值域到单位圆盘的任意共形映射。设 B 是所有次数至多为 $N-1$的 Blaschke 乘积中，使 $\|(B\circ\phi)(\mathbf{A})\|$ 达到最大值的那个 Blaschke 乘积。那么，若 $\|(B \circ \phi)(\mathbf{A})\| > 1$，则 $\mathbf{u}_1^*\mathbf{v}_1 = 0$，其中 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{v}_1$ 是 $(B \circ \phi)(\mathbf{A})$ 对应于最大奇异值的左、右奇异向量。

设 Ω 为任意一个包含数值域的圆盘 $\mathcal{D}(c,\ r)$。对于 $z \in \Omega$，若 f 在 Ω 的某个邻域内解析，则不难证明

$$g(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \overline{f(\sigma)}(\sigma - z)^{-1} \mathrm{d}\sigma = \overline{f(c)}.$$

设 $f = B\circ\phi$，其中 $\phi(z) = z/r$，且 B 使 $\|(B\circ\phi)(\mathbf{A})\|$ 取最大值。那么，如果 $\|(B\circ\phi)(\mathbf{A})\| >1$,

$$\mathbf{u}_1^*(f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A})^* + \gamma\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1^* f(\mathbf{A})\mathbf{v}_1 = \|f(\mathbf{A})\|.$$

这与 (6.3) 及这一事实 $W(\mathbf{A}) \subseteq \Omega$ 结合起来可得

$$\|f(\mathbf{A})\| \le \max\{1, 2 + \delta\} \le 2.$$

˜现在，设 Ω 为数值域内任意一个圆盘 $\mathcal{D}(c,\ \tilde{r})$。定义 $\sigma(s) := c + r\exp(\mathrm{i}s/r)$ 和 $\tilde{\sigma}(\tilde{s}) := c + \tilde{r}\exp(\mathrm{i}\tilde{s}/\tilde{r})$，其中 $s \in [0, 2\pi r]$ 和 $\tilde{s} \in [0, 2\pi\tilde{r}]$。我们取 $\tilde{s} = (\tilde{r}/r)s$。于是

$$|\sigma(s) - \tilde{\sigma}(\tilde{s})| = r - \tilde{r} \qquad \text{and} \qquad \sigma'(s) = \tilde{\sigma}'(\tilde{s}) = \mathrm{i}\exp(\mathrm{i}s/r).$$

˜将 $\tilde{\mu}$ 和 δ 分别定义为与 μ 和 δ类似的量。于是，上述论证表明，只要A 的特征值都包含在 Ω 内，那么 Ω 就是A的一个 $\max\{1, 2+\delta\}$-谱集 ˜。我们的目标是用一个依赖于 $r - \tilde{r}$的量来界定 $|\delta|$。

注意，$\lambda_{\min}(\mu(s, \mathbf{A}))$ 为正，而 $\lambda_{\min}(\tilde{\mu}(\tilde{s},\mathbf{A}))$ 为负。因此，利用标准的特征值扰动界，我们得到

$$|\lambda_{\min}(\tilde{\mu}(\tilde{s}, \mathbf{A}))| \le |\lambda_{\min}(\mu(s, \mathbf{A})) - \lambda_{\min}(\tilde{\mu}(\tilde{s}, \mathbf{A}))| \le \|\mu(s, \mathbf{A}) - \tilde{\mu}(\tilde{s}, \mathbf{A})\|.$$

现在，根据定义，

$$\mu(s, \mathbf{A}) - \tilde{\mu}(\tilde{s}, \mathbf{A}) = 2\,\mathrm{He}\left[\frac{\sigma'(s)}{2\pi\mathrm{i}} R(\sigma(s), \mathbf{A}) - \frac{\tilde{\sigma}'(\tilde{s})}{2\pi\mathrm{i}} R(\tilde{\sigma}(\tilde{s}), \mathbf{A})\right].$$

因此，利用第一预解式恒等式，并为简洁起见省略 $\sigma(s)$ 和$\tilde{\sigma}(\tilde{s})$ 对 s 和 $\tilde{s}$ 的依赖，

$$\begin{aligned}\frac{\sigma'}{2\pi\mathrm{i}} R(\sigma, \mathbf{A}) - \frac{\tilde{\sigma}'}{2\pi\mathrm{i}} R(\tilde{\sigma}, \mathbf{A}) &= \frac{\sigma'}{2\pi\mathrm{i}} R(\sigma, \mathbf{A}) - \frac{\sigma'}{2\pi\mathrm{i}} R(\tilde{\sigma}, \mathbf{A}) + \frac{\sigma' - \tilde{\sigma}'}{2\pi\mathrm{i}} R(\tilde{\sigma}, \mathbf{A}) \\ &= -\frac{\sigma'}{2\pi\mathrm{i}}(\sigma - \tilde{\sigma}) R(\sigma, \mathbf{A}) R(\tilde{\sigma}, \mathbf{A}) + 0.\end{aligned}$$

因此，利用 $\|\mathrm{He}(\mathbf{B})\| \le \|\mathbf{B}\|$ 和 $|\sigma'(s)| = 1$,

$$|\lambda_{\min}(\tilde{\mu}(\tilde{s}, \mathbf{A}))| \le \frac{r - \tilde{r}}{\pi} \|R(\sigma, \mathbf{A})\| \|R(\tilde{\sigma}, \mathbf{A})\|,$$

因此，只要对所有 $z \in \partial\Omega \cup \partial\Omega$，均有 $\|R(z,\mathbf{A})\| \le \Delta$，

$$|\tilde{\delta}| \le \int_0^{2\pi} |\lambda_{\min}(\tilde{\mu}(s,\mathbf{A}))| \mathrm{d}s \le 2(r-\tilde{r})\Delta^2. \tag{6.4}$$

假设 $|r-\tilde{r}|$ 相对于 Δ^2 较小，这意味着 $\tilde{\Omega}$，因此 $W(\mathbf{A})$ 是某个 $|\delta|$ 足够小时的 $(2+\delta)$-谱集。

对于 Ginibre 矩阵的情形，对任意 $\eta \in (0, \sqrt{2}-1.1)$，我们可以取 $r = \sqrt{2}+\eta$ 和 $\tilde{r} = \sqrt{2}-\eta$。由 (6.2) 和 引理 2.1 可知，对所有 $\eta \in (0,\sqrt{2})$，

$$\mathbb{1}\left[\tilde{\Omega} \subset W(\mathbf{G}_N) \subset \Omega\right] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1.$$

此外，$\mathbf{G}_N$ 的所有特征值都包含于圆盘 $\mathcal{D}(0,1.1) \subset \Omega$ 中，并且当 $N \to \infty$ 时几乎必然成立。由于 $|r-\tilde{r}| = 2\eta$，由 引理 5.1可知，只要 $\eta < \sqrt{2}-1.1$，取 $\Delta = \mathfrak{e}(1.1)^{-1/2}$ 即可。因此，对于任意 $\epsilon > 0$，$\tilde{\Omega}$ 是 $2+\epsilon$-谱集，且对 $\mathbf{G}_N$，当 $N \to \infty$ 时几乎必然成立。最大模原理随后推出：

THEOREM 3.3. 设 $\mathbf{G}_N$ 为一个大小为 $N \times N$ 的复 *Ginibre* 矩阵。那么，

$$C(W(\mathbf{G}_N), \mathbf{G}_N) \lesssim 2$$

当 $N \to \infty$ 时几乎必然成立。

7. 延后证明。

7.1. 主要界的证明。

THEOREM 3.4. 设 $\mathbf{G}_N$ 为一个 $N \times N$ 复 *Ginibre* 矩阵。那么，对于 $\sigma \in (0,\ 1)$ 以及可能依赖于 $\mathbf{G}_N$ 的 $\mathbf{b}$，线性系统 $(\mathbf{I} + \sigma\mathbf{G}_N)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的第 k 步 *GMRES* 残差范数 $\|\mathbf{r}_N^{(k)}\|$ 满足，

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} \lesssim \min_{\eta>1} \eta\mathfrak{e}(\eta)^{-1/2}(\sigma\eta)^k \qquad \textit{and} \qquad \frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} \lesssim 2(\sqrt{2}\sigma)^k$$

当 $N \to \infty$ 时几乎必然成立。

证明。在这两种情况下，我们都会用到这样一个事实：如果 Ω 是 $\mathbf{G}_N$ 的 K-谱集，$1+\sigma$ 那么 Ω 就是$\mathbf{I} + \sigma\mathbf{G}_N$ 的 K-谱集。

固定 $\eta > 1$。几乎必然，$\mathbf{G}_N$的特征值包含于 $\mathcal{D}(0,(\eta+1)/2) \subset \mathcal{D}(0,\eta)$，因为 $N \to \infty$ [33]（这也可由 定理 3.2 推出，只需 ϵ 足够小）。在给定 $\mathbf{G}_N$ 的特征值包含于 $\mathcal{D}(0,\eta)$的条件下，

$$\|f(\mathbf{G}_N)\| = \left\| \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial\mathcal{D}(0,\eta)} f(z) R(z,\mathbf{G}_N) \mathrm{d}z \right\| \le \frac{2\pi\eta}{2\pi} \|f\|_{\mathcal{D}(0,\eta)} \sup_{z\in\partial\mathcal{D}(0,\eta)} \|R(z,\mathbf{G}_N)\|.$$

定理 3.2 意味着，对于任意 $\epsilon > 0$，

$$\mathbb{1}\Big[\sup_{z\in\partial\mathcal{D}(0,\eta)} \|R(z,\mathbf{G}_N)\| < \mathfrak{e}(\eta)^{-1/2} + \epsilon \Big] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1.$$

因此

$$\mathbb{1}\Big[\mathcal{D}(0,\eta) \text{ is a } \eta(\mathfrak{e}(\eta)^{-1/2}+\epsilon)\text{-spectral set for } \mathbf{G}_N\Big] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} 1.$$

由于这对任意 $\eta > 1$都成立，我们可以取 η 作为使 $\eta\mathfrak{e}(\eta)^{-1/2}(\sigma\eta)^k$最小的值。应用 (1.2) 和 (3.2) 即可证明该命题的第一部分。

接下来请注意，在定理 3.3的证明中，我们实际上证明了，对于任意$\eta > 0$ 和 $\epsilon > 0$， $\mathcal{D}(0,\ \sqrt{2}-\eta)$ 是一个$2+\epsilon$-谱集，对于$\mathbf{G}_N$，当 $N \to \infty$时几乎必然成立。这意味着对于任意 $\epsilon > 0$， $\mathcal{D}(0,\ \sqrt{2})$ 是一个$2+\epsilon$-谱集，对于$\mathbf{G}_N$，当 $N \to \infty$时几乎必然成立，见（1.3）。应用(1.2) 和(3.2) 即可证明该命题的第二部分。 □

7.2. 预解式范数界的证明。在证明引理 5.1 时，我们用到了以下结果：

LEMMA 7.1. 固定 $z \in \mathbb{C}$并假设 $\|R(z,\ \mathbf{G})\| < e$、 $|z| < f$以及 $\|\mathbf{G}\| < g$。令$h := \min\{1,(4e^2(f+g+1))^{-1}\}$。那么对于所有满足 $|z-\tilde{z}| < h$的 $\tilde{z}$

$$|\|R(z,\mathbf{G})\| - \|R(\tilde{z},\mathbf{G})\|| < L|z-\tilde{z}|.$$

其中 $L := 3e^3(f+g+1)$。

证明。 定义 $\mathbf{Y}^z := (z-\mathbf{G})^*(z-\mathbf{G})$ 和 $\mathbf{Y}^{\tilde{z}} := (\tilde{z}-\mathbf{G})^*(\tilde{z}-\mathbf{G})$。根据标准的特征值界，我们有

$$|\lambda_{\min}(\mathbf{Y}^z) - \lambda_{\min}(\mathbf{Y}^{\tilde{z}})| \le \|\mathbf{Y}^z - \mathbf{Y}^{\tilde{z}}\|.$$

由于 $|z| < f$且 $|z-\tilde{z}| < 1$，因此 $|\tilde{z}| < |z| + |z-\tilde{z}| < f+1$，所以对 $x \mapsto x^2$ 的导数进行界定可得

$$\left||z|^2 - |\tilde{z}|^2\right| \le 2\max\{|z|,|\tilde{z}|\}|z-\tilde{z}| \le 2(f+1)|z-\tilde{z}|.$$

因此，利用 $\mathbf{Y}^z$ 和 $\mathbf{Y}^{\tilde{z}}$ 的定义，以及假设 $\|\mathbf{G}\| < g$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Y}^z - \mathbf{Y}^{\tilde{z}}\| &= \||z|^2\mathbf{I} - |\tilde{z}|^2\mathbf{I} - (z-\tilde{z})\mathbf{G}^* - (\overline{z-\tilde{z}})\mathbf{G}\| \\ &\le \left||z|^2 - |\tilde{z}|^2\right| + 2|z-\tilde{z}|\|\mathbf{G}\| \\ &\le 2(f+g+1)|z-\tilde{z}|.\end{aligned}$$

接下来，注意到 $\|\mathbf{R}(z,\mathbf{G})\| < e$ 意味着 $\lambda_{\min}(\mathbf{Y}^z) > e^{-2}$，因此利用 $|z-\tilde{z}| < h \le (4e^2(f+g+1))^{-1}$,

$$\lambda_{\min}(\mathbf{Y}^{\tilde{z}}) > e^{-2} - 2(f+g+1)h > e^{-2}/2.$$

接下来，注意到对 $x \mapsto x^{-1/2}$ 的导数进行界定可得，对于任意 $x,\ y > 0$,

$$|x^{-1/2} - y^{-1/2}| \le \frac{1}{2}\min\{x,y\}^{-3/2}|x-y|.$$

因此,

$$|\lambda_{\min}(\mathbf{Y}^z)^{-1/2} - \lambda_{\min}(\mathbf{Y}^{\tilde{z}})^{-1/2}| < \frac{1}{2}(e^{-2}/2)^{-3/2}(2(f+g+1))|z-\tilde{z}|$$

根据 L 的定义以及 $2^{3/2} < 3$ 这一事实，即可得出该结论。 □

7.3. 其他证明。

引理 2.1 的证明。假设 $\mathcal{D}(0,r-\epsilon) \subseteq S \subseteq \mathcal{D}(0,r+\epsilon)$。令 $x \in \mathcal{D}(0,r)$。于是 x距 $\mathcal{D}(0,r-\epsilon)$ 中某一点不超过 ϵ，因此距 S也不超过 ϵ。现在，令 $x \in S$。于是$|x| \le r+\epsilon$，所以 x距 $\mathcal{D}(0,r)$ 中某一点不超过 ϵ。

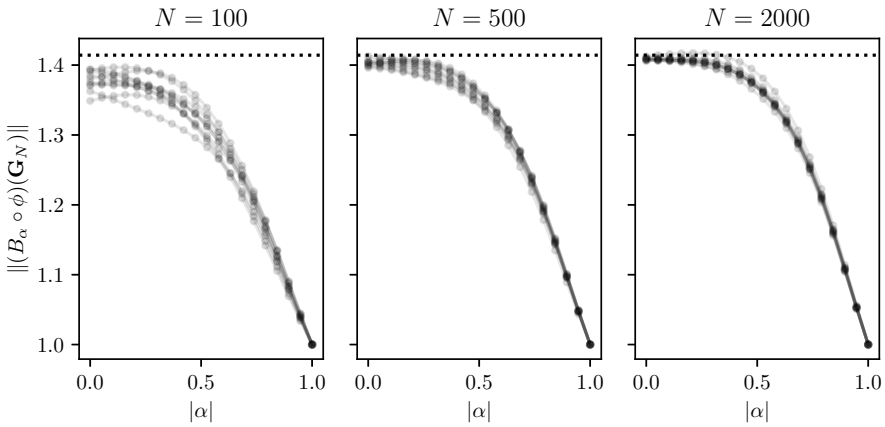


图 4： $\|(B_\alpha \circ \phi)(\mathbf{G}_N)\|$ 与 α 之间的关系，针对 $\mathbf{G}_N$ 在$\phi(z) = z/\sqrt{2}$时的 10 个样本。虚线位于 $\sqrt{2}$。这里我们取 α 位于实轴上，尽管由于 $\mathbf{G}_N$的旋转对称性，预计对任意 $|\alpha| < 1$ 也会得到相同结果。

显然 $S \subseteq \mathcal{D}(0, r+\epsilon)$。现在假设 S是凸的，且 $d_H(S, \mathcal{D}(0,r)) < \epsilon$。令 $x \in \mathcal{D}(0, r-\epsilon)$。令 y为 S边界上与 x 辐角相同的点，并为导出矛盾，假设 $|y| < |x|$。令 z 为 $\mathcal{D}(0,r)$边界上的点，使得 y 与 z 之间的线段垂直于一条经过 y 但不经过 S中其他点的直线。现在注意，这条直线将 z与 S 分隔开，因此 S 中的所有点距 z至少为 $|z-y| > \epsilon$，这与假设 $d_H(S, \mathcal{D}(0,r)) < \epsilon$矛盾。因此，我们得到 $|y| \geq |x|$，这意味着 $\mathcal{D}(0, r-\epsilon) \subset S$。

□

(2.2) 的证明。假设 $A_N \subset B_N$ 且 $\mathbb{1}[A_N]$ 当$N \to \infty$时几乎必然收敛于 1。则，对所有 N 以及所有 $\omega \in \Omega$，$\omega \in A_N \implies \omega \in B_N$ 因此

$$\mathbb{1}[A_N](\omega) = 1 \quad \implies \quad \mathbb{1}[B_N](\omega) = 1, \qquad \forall N, \omega.$$

因此，由于对于任意事件 C，$\mathbb{1}[C](\omega)$非零即一，

$$\mathbb{P}\left[\lim_{N\to\infty} \mathbb{1}[B_N] = 1\right] \geq \mathbb{P}\left[\lim_{N\to\infty} \mathbb{1}[A_N] = 1\right] = 1,$$

因此 $\mathbb{1}[B_N] \xrightarrow[N\to\infty]{\text{几乎必然}} 1$。

□

附录 A. 大型 Ginibre 矩阵的值域是否是一个 $\sqrt{2}$-谱集？ 如上所述，实现比值$C(W(\mathbf{A}), \mathbf{A})$的函数 f 具有如下形式：$f = B \circ \phi$，其中 B是次数至多为 $N-1$ 的有限布拉施克乘积 $B(z) = \exp(i\theta) \prod_{i=1}^{N-1} (z-\alpha_i)/(1-\alpha_i z)$，而 ϕ 是从值域到单位圆盘的任意共形映射。这里我们假设 $|\alpha_i| \leq 1$，以允许次数小于 $N-1$的乘积。此前关于 Crouzeix 猜想的研究中曾使用数值代码来搜索极值布拉施克乘积 [4]。

对于大型 Ginibre 矩阵，$W(\mathbf{G}_N) \approx \mathcal{D}(0, \sqrt{2})$。因此，我们预期$C(W(\mathbf{G}_N), \mathbf{G}_N) \approx C(\mathcal{D}(0, \sqrt{2}), \mathbf{G}_N)$。为了近似计算 $C(\mathcal{D}(0,\sqrt{2}), \mathbf{G}_N)$，我们首先使用 $\phi(z) = z/\sqrt{2}$ 将问题近似缩放到单位圆盘上，然后应用一种

黑箱数值优化器，尝试寻找使布拉施克乘积 $\|(B\circ\phi)(\mathbf{G}_N)\|$达到最大值的根 $\{\alpha_i\}$ 。我们观察到，计算得到的 B在数值上 接近一次布拉施克乘积。也就是说，如果允许使用更高次数的乘积，我们会发现，除一个以外，所有 $\{\alpha_i\}$ 的模都极其接近 1，且对所得乘积的范数贡献很小。

因此，在 $N\to\infty$ 极限下，我们或许可以预期 $f_- = B_\alpha\circ\phi$ 其中 $B_\alpha(z) = (z-\alpha)/(1-\overline{\alpha}z)$，其中 α 和 $\phi(z) = z/\sqrt{2}$取某个值。在图 4 中，我们考察 $\|(B_\alpha\circ\phi)(\mathbf{G}_N)\|$与 α之间的关系，其中 $\phi(z) = z/\sqrt{2}$。我们观察到，该量似乎集中在某条曲线附近，此曲线以 $\sqrt{2}$ 为上界，并在 $\alpha = 0$处达到最大值。在 $\alpha = 0$情形下，我们有 $(B_0\circ\phi)(\mathbf{G}_N) = \mathbf{G}_N/\sqrt{2}$，因此$\|(B_0\circ\phi)(\mathbf{G}_N)\|$几乎必然成立$\xrightarrow[N\to\infty]{}\sqrt{2}$。

参考文献

[1] Z. Bai and J. W. Silverstein, *No eigenvalues outside the support of the limiting spectral distribution of information-plus-noise type matrices*, 随机矩阵：理论与应用，01（2012），第 1150004 页。

[2] Z. D. Bai and Y. Q. Yin, *Convergence to the semicircle law*, 《概率年刊》，16（1988）。

[3] K. Bickel, P. Gorkin, A. Greenbaum, T. Ransford, F. L. Schwenninger, and E. Wegert, *Crouzeix's conjecture and related problems*, 《计算方法与函数理论》，20（2020），第 701–728 页。[4] , *Crouzeix's conjecture and related problems*, 《计算方法与函数理论》，20（2020），第 701–728 页。

[5] P. Bourgade and G. Dubach, *The distribution of overlaps between eigenvectors of Ginibre matrices* 177 2019 397 464 , 《概率论及其相关领域》，（），第 – 页。[6] T. Caldwell, A. Greenbaum, and K. Li, *Some extensions of the Crouzeix–Palencia result*, 《SIAM 矩阵分析与应用杂志》，39（2018），第 769–780 页。[7] E. Carson, J. Liesen, and Z. Strakoš, *70 years of Krylov subspace methods: The journey continues* 2022 , 。

[8] J. T. Chalker and B. Mehlig, *Eigenvector statistics in non-Hermitian random matrix ensembles* 81 1998 3367 3370 , 《物理评论快报》，（），第 – 页。[9] G. Cipolloni, L. Erdős, and D. Schröder, *Optimal lower bound on the least singular value of the shifted Ginibre ensemble* 1 2020 101 , 《概率与数学物理》，（），第 –146 页。[10] B. Collins, P. Gawron, A. E. Litvak, and K. Życzkowski, *Numerical range for random matrices* 418 2014 516 533 , 《数学分析与应用杂志》，（），第 – 页。[11] M. Crouzeix, *Bounds for analytical functions of matrices*, 《积分方程与算子理论》，48（2004），第 461–477 页。[12] , *Numerical range and functional calculus in hilbert space*, 《泛函分析杂志》，244（2007），第 668–690 页。[13] M. Crouzeix and C. Palencia, *The numerical range is a* $(1+\sqrt{2})$ *-spectral set*, 《SIAM 矩阵分析与应用杂志》，38（2017），第 649–655 页。

[14] P. Deift and T. Trogdon, *The conjugate gradient algorithm on well-conditioned Wishart matrices is almost deterministic* 79 2020 125 , 《应用数学季刊》，（），第 –161 页。[15] P. A. Deift, G. Menon, S. Olver, and T. Trogdon, *Universality in numerical computations with random data* 111 2014 14973 , 《美国国家科学院院刊》，（），第 –14978 页。[16] X. Ding and T. Trogdon, *The conjugate gradient algorithm on a general class of spiked covariance matrices* 2021 , 。

[17] R. B. Dozier and J. W. Silverstein, *On the empirical distribution of eigenvalues of large dimensional information-plus-noise-type matrices*, 《多元分析杂志》，98（2007），第 678–694 页。

[18] I. Dumitriu and A. Edelman, *Matrix models for beta ensembles*, 《数学物理杂志》，43（2002），第 5830–5847 页。[19] A. Edelman and N. R. Rao, *Random matrix theory*, 《数值学报》，14（2005），第 233–297 页。[20] V. Faber, J. Liesen, and P. Tichý, *Properties of worst-case GMRES*, 《SIAM 杂志》

矩阵分析与应用，34（2013），第 1500–1519 页。[21] S. Geman,
A limit theorem for the norm of random matrices，《概率年刊》，8（1980）。[22] A. Greenbaum, V. Pták, and Z. Strakoš, *Any nonincreasing convergence curve is possible for GMRES* 17 1996 465 469 ，《SIAM 矩阵分析与应用杂志》，（），第 – 页。[23] A. Greenbaum and L. N. Trefethen, *GMRES/CR and Arnoldi/Lanczos as matrix approximation problems* 15 1994 359 368 ，《SIAM 科学计算杂志》，（），第 – 页。[24] C. R. Johnson,
Numerical determination of the field of values of a general complex matrix，《SIAM 数值分析杂志》，15（1978），第 595–602 页。[25] G. Meurant, *On the residual norm in FOM and GMRES*，《SIAM 矩阵分析与应用杂志》，32（2011），第 394–411 页。[26] K. Okubo and T. Ando,
Constants related to operators of class c_ρ，《数学手稿》，16（1975），第 385–394 页。[27] C. Paquette, K. Lee, F. Pedregosa, and E. Paquette, *Sgd in the large: Average-caseanalysis, asymptotics, and stepsize criticality*，载于第三十四届学习理论会议论文集，M. Belkin 和 S. Kpotufe 编，《机器学习研究论文集》第 134 卷，PMLR，2021 年 8 月 15–19 日，第 3548–3626 页。[28] C. Paquette and E. Paquette, *Dynamics of stochastic momentum methods on large-scale, quadratic models* 2021 ，。
[29] C. Paquette, B. van Merriënboer, E. Paquette, and F. Pedregosa, *Halting time is predictable for large models: A universality property and average-case analysis*，《计算数学基础》，（2022）。
[30] E. Paquette and T. Trogdon, *Universality for the conjugate gradient and minres algorithms on sample covariance matrices* 2020 ，。

[31] C. W. Pfrang, P. Deift, and G. Menon, *How long does it take to compute the eigenvalues of a random symmetric matrix*，随机矩阵理论、相互作用粒子系统与《可积系统》，《数学科学研究所出版物》，65（2013），第 411–442 页。[32] J. W. Silverstein,
The smallest eigenvalue of a large dimensional Wishart matrix，《概率年刊》，13（1985）。[33] T. Tao, *Outliers in the spectrum of iid matrices with bounded rank perturbations*，《概率论及其相关领域》，155（2011），第 231–263 页。[34] L. N. Trefethen and M. Embree, *Spectra and pseudospectra: the behavior of nonnormal matrices and operators* 2005 ，普林斯顿大学出版社，。[35] H. F. Trotter, *Eigenvalue distributions of large Hermitian matrices; Wigner's semi-circle law and a theorem of Kac, Murdock, and Szegö*，《数学进展》，54（1984），第 67–82 页。
[36] P. Vallet, P. Loubaton, and X. Mestre, *Improved subspace estimation for multivariate observations of high dimension: The deterministic signals case*，《IEEE 信息论汇刊》，58（2012），第 1043–1068 页。[37] E. P. Wigner, *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices*，《数学年刊》，67（1958），第 325 页。[38] Y. Zhang and T. Trogdon,
A probabilistic analysis of the Neumann series iteration，明尼苏达大学生数学杂志，7（2022）。