arXiv:2303.02046v1 [math.AP] 3 Mar 2023

拟凸 Lipschitz 域中狄利克雷特征函数的节点集

朱九一 和 诸葛锦平

Abstract. 我们将拟凸 Lipschitz 域这一类引入椭圆算子的边界唯一延拓研究中，该类同时涵盖 C^1 和凸域。特别地，我们证明了有界拟凸 Lipschitz 域中一般椭圆方程的狄利克雷特征函数的节点集大小的上界。即便对于凸域中的拉普拉斯算子，我们的结果也是新的。

1. Introduction

1.1. **研究动机**。 在椭圆方程的边界唯一延拓研究中，有两个重要问题。第一个问题源于 L. Bers 的一个猜想。考虑上半空间 $u \in C^1(\mathbb{R}^d_+)$ 中的调和函数 $\mathbb{R}^d_+$。若 $u = \partial_d u = 0$ 在子集 $U \subset \partial\mathbb{R}^d_+$ 上成立，且该子集具有正的曲面测度，这是否意味着 u 在 $\mathbb{R}^d_+$中恒等于零? 在二维情形下，借助复分析工具，这一猜想成立。然而，对于 $d \geq 3$，Bourgain-Wolff [4]在C^{1}类中构造了一个引人注目的反例，$^{\alpha}$（$\mathbb{R}^d_+$）（其中 U 不含任何开子集）。鉴于这一猜想不成立，Lin [18]提出了一个变体：

> 设 u 是在 *Lipschitz* 域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 中的有界调和函数。假设 u 在一个相对开集 $U \subset \partial\Omega$ 上为零，且 ∇u 在 U 的一个具有正曲面测度的子集上为零。则 $u = 0$ 在 Ω 中。

上述完整猜想在一般的 Lipschitz 域中对于 $d \geq 3$ 仍未解决。不过，人们已付出诸多努力，旨在降低 $\partial\Omega$ 的几何条件，并获得关于 $\partial\Omega$ 上奇异集的定量估计。 [18], Lin 证明了该猜想对 $C^{1,1}$ 域成立，并表明奇异集的豪斯多夫维数至多为 $d-2$。Adolfsson-Escauriaza [1], 将这一结果推广到了 $C^{1,\alpha}$ 域，Kukavica-Nystr¨om 则将其推广到了 C^1-Dini 域

日期：2023年3月6日。2010年 数学主题分类。35A02,35P05, 35J15.1

[16]。最近，Tolsa 在 [24] 证明了上述猜想对 C^1 域成立（或对常数较小的 Lipschitz 域成立）。Kenig-Zhao 在 [14] 针对 C^1-Dini 域，得到了关于奇异集的 $(d-2)$ 维豪斯多夫测度的更精细定量估计。他们还表明，要使奇异集具有有限的 $(d-2)$ 维豪斯多夫测度，C^1-Dini 型条件是最优的 [15]。另一方面，Adolfsson-Escauriaza-Kenig [2] 证明了该猜想对任意凸域成立。最近，Mccurdy[22] 在任意凸域中得到了更精细的定量结果。

第二个问题是对正则性较低时边界附近节点集的定量估计。这尤其与流形上的 Yau 猜想有关，该猜想表述如下：

设 (M,g) 是一个 d 维光滑紧致黎曼流形，且φ_λ 是对应于特征值 $\lambda>0$ 的 $-\Delta_g$ 特征函数，即$-\Delta_g\varphi_\lambda=\lambda\varphi_\lambda$。设 $Z(\varphi_\lambda)=\{x\in M|\varphi_\lambda(x)=0\}$ 是 φ_λ 的节点集。那么$c\sqrt{\lambda}\le\mathcal{H}^{d-1}(Z(\varphi_\lambda))\le C\sqrt{\lambda}$，其中 $\mathcal{H}^{d-1}$ 表示$(d-1)$维豪斯多夫测度。

在 Yau 猜想中，若 M 是带边界的紧致黎曼流形，则度量（或椭圆方程系数）的正则性以及边界都起着至关重要的作用。Donnelly-Fefferman 首先证明了实解析度量 [6] 和实解析边界 [7]情形下的 Yau 猜想。另请参见 Lin 和第一作者 [17]关于解析域上各种特征函数的节点集精确上界的结果。对于无边界的光滑流形，Logunov 出色地证明了精确下界 [20]（因此，即使有边界，下界也已得到完全解决）以及多项式上界 [19]。正如第一作者在 [25]中提到的，$\mathbb{R}^d$ 中的有界光滑域上，对于满足各种边界条件的拉普拉斯特征函数，也可得到多项式上界。最近，Logunov-Malinnikava-Nadirashvili-Nazarov [21]得到了C^1 域（或常数较小的 Lipschitz 域）上满足狄利克雷边界条件的拉普拉斯特征函数的精确上界。随后 Gallegos [9]将该结果推广到了 C^1 域上具有 Lipschitz 系数的一般二阶椭圆算子。

比较上述两类问题可知，Lin 的边界唯一性猜想在 C^1 和凸域中均成立，而节点集的定量估计目前仅在 C^1 域中得到证明。因此，自然会问：能否在任意凸域中获得节点集的定量估计？本文的主要贡献是

将拟凸 Lipschitz 域引入边界唯一延拓的研究。拟凸 Lipschitz 域是一类自然的 Lipschitz 域，既包含 C^1，也包含凸域；Jia-Li-Wang 首次引入了这一概念 [10]，用于研究全局 Carldr´on-Zygmund 估计。本文第二作者曾利用这一概念研究双调和方程的弱最大值原理 [26]。我们强调，拟凸 Lipschitz 域不一定是凸域，也不一定是 C^1。事实上，我们可以构造一条处处不凸、也不 C^1的拟凸 Lipschitz 曲线；见附录A.1。本文针对一般二阶椭圆方程，在拟凸 Lipschitz 域这一新框架下，得到了节点集的定量估计；这尤其将 C^1 域 [21, 9]中第二个问题的已有结果作为特例涵盖在内。此外，即使对于凸域中的拉普拉斯算子，我们的结果也是新的（且是尖锐的）。

1.2. **假设与主要结果。** 考虑形如 $\mathcal{L} = -\nabla \cdot A\nabla$ 的二阶椭圆算子。如果在 D 中，函数 $u \in H^1(D)$ 满足 $\mathcal{L}(u) = 0$ D，则称其为 A-调和函数。本文中，我们始终假设系数矩阵 A 满足以下标准假设：

- 椭圆性条件：存在 $\Lambda \geq 1$，使得对于任意 $x \in \Omega$，都有 $\Lambda^{-1} I \leq A(x) \leq \Lambda I$。
- 对称性： $A^T = A$。
- Lipschitz连续性：存在 $\gamma \geq 0$，使得对于每个 x， $y \in \Omega$，都有 $|A(x) - A(y)| \leq \gamma |x - y|$。

若希望得到节点集的精确上界估计，则还需要额外假设系数是实解析的；详见6.2 中的详细说明。

接下来，我们介绍关于区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 的假设。若存在 $r_0 > 0$，使得对于每个 $x_0 \in \partial\Omega$，边界片 $\partial\Omega \cap B_{r_0}(x_0)$ 在经过刚性变换后都可以表示为 Lipschitz 图 $x_d = \phi(x')$，并且 $B_{r_0}(x_0) \cap \Omega = B_r(x_0) \cap \{x = (x', x_d) : x_d > \phi(x')\}$，则称区域 Ω 是 Lipschitz 的。此外，这些图的 Lipschitz 常数均由某个常数 L 统一界定。需要指出的是，最优 Lipschitz 常数L 可能取决于 r_0。例如，对于 C^1 区域，如果取 $r_0 \to 0$，Lipschitz 常数可以任意小。然而，对于一般的 Lipschitz 域（包括凸域），Lipschitz 常数可能始终较大，且与 r_0 无关。

在本文中，我们将 $\omega(\rho):(0,\infty)\to[0,\infty)$ 称为拟凸模量，它是一个连续的非递减函数，满足 $\lim_{\rho\to 0}\omega(\rho)=0$。

定义 1.1。 如果 Lipschitz 域 Ω 满足以下性质，则称其为拟凸：存在一个拟凸模量 $\omega(\rho)$ 和 $r_0>0$，使得对于每个点 $x_0\in\partial\Omega$，都可以平移并旋转该区域，使 x_0 平移到 0，并且 Ω 的局部图像 $\partial\Omega$，$x_d=\phi(x')$ 满足 $\phi(0)=0$，且

$$\phi(x')\geq -|x'|\omega(|x'|),\quad \text{for all } x' \text{ with } |x'|<r_0. \tag{1.1}$$

拟凸域的另一种等价定义如下：对于每个 $x_0\in\partial\Omega$ 和 $r<r_0$，存在一个单位向量 n（若 x_0 处存在外法向量，则该单位向量与之重合），使得

$$\Omega\cap B_r(x_0)\subset\{y:(y-x_0)\cdot n\leq r\omega(r)\}.$$

引理 2.3 证明，拟凸 Lipschitz 域局部近似凸。特别地，如果 Ω 是凸的，则 $\omega(r)=0$。如果 Ω 是 C^1 域，则应将 (1.1) 加强为一个双侧条件

$$|x'|\omega(|x'|)\geq\phi(x')\geq -|x'|\omega(|x'|),$$

这显然蕴含局部平坦性。另一方面，若 $\omega(\rho)\leq C\rho$，则定义 1.1 中的拟凸 Lipschitz 域满足一致外球条件（在一些文献中称为半凸区域，例如 [23]）。

以下是本文的主要结果。

定理 1.2。 设 Ω 是一个有界拟凸 *Lipschitz* 域，且 A 满足标准假设。设 φ_λ 是 $\mathcal{L}=-\nabla\cdot A\nabla$ 的一个狄利克雷特征函数，对应于特征值 λ，即 $\mathcal{L}(\varphi_\lambda)=\lambda\varphi_\lambda$ 于 Ω 中，且 $\varphi_\lambda\in H_0^1(\Omega)$。那么存在一个仅依赖于 d 的 $\alpha\geq 1/2$，使得

$$\mathcal{H}^{d-1}(Z(\varphi_\lambda))\leq C\lambda^\alpha, \tag{1.2}$$

其中 C 仅依赖于 A 和 Ω。此外，若 A 是实解析的，则(1.2) 以最优指数 $\alpha=1/2$成立。

定理1.2的证明依赖于 Donnelly-Fefferman 关于实解析系数的内部结果[6] 以及 Logunov 关于 Lipschitz 系数的结果 [19]。我们沿用近期在以下文献中提出的思路 [21]，这些思路利用倍增指标的几乎单调性，并将问题化约为估计具有受控倍增指标的 A-调和函数的节点集。为此，我们证明了

拟凸域中倍增指标的几乎单调性。目前没有明显证据表明这一性质可以推广到更一般的区域。我们证明中的主要创新之处在于：(1) 揭示凸域的一种几何性质，即其存在（定量意义下的）近乎平坦区域，并利用这一性质在凸边界附近找到 A-调和函数的大块非零部分；(2) 在 Lipschitz 域中发展一种通用的边界扰动论证，使我们能够从凸边界推广到拟凸边界。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍凸域和拟凸域的一些有用几何性质。第 3 节证明拟凸域中倍增指标的几乎单调性。第 4 节证明任意 Lipschitz 域中的定量柯西唯一性，并给出一个关于最大倍增指标大幅下降的边界层引理。第 5 节提出一种边界扰动论证，用于寻找 A调和函数的非零部分。第 6 节估计节点集并证明主定理。最后，附录A中证明了一些相关结果和有用引理。

致谢。第一作者的研究部分受到 NSF DMS- 2154506 项目资助。第二作者受到国家自然科学基金委员会和 AMSS- CAS 项目资助。

2. Convex and quasiconvex domains

2.1. **凸函数的近乎平坦区域**。本小节将说明，凸边界在每个尺度上都有（定量意义下的）近乎平坦区域。通过刚性变换，只需考虑一个定义在 ϕ上的一般凸函数 $Q_1 = (-\frac{1}{2}, 1_2)^d \subset \mathbb{R}^d$，其 Lipschitz 特征有界且 $\phi(0) = 0$。文献 [8] 已证明，若 $\bar{\phi}$ 是凸函数，则 $\nabla^2\phi$ 是矩阵值非负拉东测度。特别地，对每个 j， $\partial_j^2\phi$ 是标量非负拉东测度。这一性质是凸函数存在近乎平坦区域的根本原因。不过，本小节的结果将以初等方法证明，不使用测度论。我们先从光滑凸函数开始。

引理2.1. 设 ϕ 是 Q_1 上一个光滑凸函数，其 *Lipschitz* 常数不超过 L。对于任意 $r \in (0, 1/2)$，存在一点 $y \in Q_{1/2}$，使得对每个 j,

$$\int_{-r}^{r} \partial_j^2\phi(y + te_j)dt \le Cr, \tag{2.1}$$

其中 C 仅取决于 d 和 L。

证明。在证明中，我们将确保常数 C 与 ϕ的光滑性无关。由于 ϕ 是凸的，我们知道每个 $\partial_j^2\phi(x)$ 都是 Q_1 上的非负标量函数，并且

$$\sum_{j=1}^{d}\int_{Q_1}\partial_j^2\phi(x)dx \le 2dL.$$

最后一个不等式由微积分基本定理以及 $|\nabla\phi| \le L$这一事实得出。现在考虑函数

$$\psi(x) = \int_{-r}^{r}\sum_{j=1}^{d}\partial_j^2\phi(x+te_j)dt.$$

根据 Fubini定理以及 $\partial_j^2\phi$的非负性，

$$\begin{aligned}\int_{Q_{1/2}}\psi(x)dx &= \int_{-r}^{r}\sum_{j=1}^{d}\int_{Q_{1/2}}\partial_j^2\phi(x+te_j)dxdt\\ &\le 2r\sum_{j=1}^{d}\int_{Q_1}\partial_j^2\phi(x)dx \le 4dLr.\end{aligned}$$

由于 ψ的连续性，这意味着存在某个 $y \in Q_{1/2}$ 使得

$$\psi(y) \le Cr.$$

根据 ψ的定义，这就得到了所需的结果。 □

设 $x_d = \phi(x')$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个凸图像（定义在 $\mathbb{R}^{d-1}$ 上的函数）。对于图像上的任意一点 $(x_0', \phi(x_0'))$，若仿射函数 $x_d = P(x')$ 满足 $P(x_0') = \phi(x_0')$ 且对所有 x' 都有 $\phi(x') \ge P(x')$，则称其为 ϕ 在 x_0' 处的支撑平面。注意，如果$\nabla\phi(x_0')$ 存在，那么支撑平面是唯一的，并且 $\nabla\phi(x_0') = \nabla P$。

引理2.2（近乎平坦区域的存在性，定量版本）。设 $x_d = \phi(x')$ 是 Q_1 上的凸函数，其 *Lipschitz* 常数为 L。存在 $C = C(d, L) > 0$，使得对于每个 $r \in (0, 1/2)$，我们都能找到一点 $x_0' \in Q_{1/2}$及其支撑平面 P，使得

$$\sup_{|x'-x_0'|<r}|\phi(x') - P(x')| \le Cr^2. \tag{2.2}$$

证明。暂且假设 ϕ 是光滑函数，且其 Lipschitz 常数为 L。首先，根据引理 2.1，我们可以找到一点 x_0'，使得（2.1）在 $y = x_0'$下成立。设 P 为 ϕ 在 x_0' 处的支撑平面。注意到 $\nabla^2 P = 0$。这意味着

$$\sup_{t\in(-r,r)} |\partial_j \phi(x_0' + te_j) - \partial_j P| \le Cr. \tag{2.3}$$

事实上，由于 ϕ 是光滑的，因此 $\partial_j \phi(x_0') = \partial_j P$。注意，$\phi(x_0' + se_j)$是 s 中的一维凸函数，而 $x_d = P(x_0' + se_j)$是 $s = 0$处的支撑线。观察可知，$\partial_j \phi(x_0' + se_j)$在 s上单调不减。根据支撑线的定义（含义不言自明），容易看出，对于每个 $s > 0$，$\partial_j \phi(x_0' - se_j) \le \partial_j P \le \partial_j \phi(x_0' + se_j)$。现在，对于任意满足$-r < -t < t < r$的 $t > 0$，由引理2.1,

$$\partial_j \phi(x_0' + te_j) - \partial_j \phi(x_0' - te_j) = \int_{-t}^{t} \partial_j^2 \phi(x_0' + se_j) ds \le Cr.$$

因此,

$$|\partial_j \phi(x_0' \pm te_j) - \partial_j P| \le \partial_j \phi(x_0' + te_j) - \partial_j \phi(x_0' - te_j) \le Cr.$$

这正是（2.3）。

在2.3）上 t 再次积分，可得

$$\sup_{t\in(-r,r)} |\phi(x_0' + te_j) - P(x_0' + te_j)| \le Cr^2. \tag{2.4}$$

由 $\phi - P$的凸性以及事实 $\phi \ge P$，对于任意满足$|t|_1 := \sum_{j=1}^{d-1} |t_j| < r$的 $t_j \in (-r,\ -r)$，我们有

$$\begin{aligned} 0 &\le \phi(x_0' + \sum_{j=1}^{d-1} t_j e_j) - P(x_0' + \sum_{j=1}^{d-1} t_j e_j) \\ &\le \sum_{j=1}^{d-1} \frac{|t_j|}{|t|_1} \big(\phi(x_0' + \mathrm{sgn}(t_j)|t|_1 e_j) - P(x_0' + \mathrm{sgn}(t_j)|t|_1 e_j)\big) \\ &\le \sum_{j=1}^{d-1} \frac{|t_j|}{|t|_1} Cr^2 = Cr^2, \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{sgn}(a) = a/|a|$ 是符号函数（其中 $\mathrm{sgn}(0) = 0$），并且我们在第三个不等式中使用了 (2.4)。这意味着所需结果成立，但半径 cr可能需要取更小的值。不过，通过将初始半径调整为 $c^{-1}r$，即可解决这一问题。

最后，我们需要从光滑凸函数过渡到任意凸函数。对于任意给定的 Lipschitz 常数为 L 的凸函数 ϕ，众所周知，我们可以找到一列光滑凸函数 $\{\phi_k : k \ge 1\}$,

它们具有相同的 Lipschitz 常数，并一致收敛到给定的凸函数 ϕ，当 $k \to \infty$ 时。同时，我们可以找到一列 $x'_k \in Q_{1/2}$ 及其支撑平面 P_k，满足（2.2），即对于每个 $k \geq 1$,

$$\sup_{|x'-x'_k|<r} |\phi_k(x') - P_k(x')| \leq Cr^2, \tag{2.5}$$

其中 C 仅取决于 d 和 L。由于 $Q_{1/2}$ 的紧致性以及支撑平面的集合（因为 $|\nabla P_k| \leq L$），我们可以找到 x'_k 和P_k 的子列，使得 $x'_k \to x'_0 \in Q_{1/2}$ 并且 P_k 一致收敛到平面 P_0，事实证明，该平面是 ϕ在 x'_0处的一个支撑平面。因此，在 (2.5) 中取极限，可得一般凸函数的 (2.2)。□

2.2. **拟凸域**。以下引理表明，在所有足够小的尺度下，拟凸 Lipschitz 域在局部都可以用凸域很好地逼近。

引理 2.3。设 Ω 是由定义*1.1*给出的拟凸域。令$x \in \partial\Omega$ 和 $r < r_0/2$。令 $V_r(x)$ 为 $B_{r,+}(x) = B_r(x) \cap \Omega$的凸包。则

$$\operatorname{dist}(\partial B_{r,+}(x), \partial V_r(x)) \leq 2r\omega(2r).$$

证明。设 $y \in \partial B_{r,+}(x)$。若 $y \in \partial B_r(x) \cap \Omega$，则 $y \in \partial V_r(x)$ 是显然的。假设 $y \in \partial\Omega \cap B_r(x)$。由于 Ω 是拟凸的，根据定义，我们可以找到一个向量 n（若外法向量存在，则与之重合），使得 $B_{2r}(y) \cap \Omega$ 完全包含在凸域中

$$\widetilde{V}_{2r}(y) = \{z : (y-z) \cdot n > -2r\omega(2r)\} \cap B_{2r}(y).$$

这意味着 $\operatorname{dist}(y, \partial V_{2r}(y)) \leq 2r\omega(2r)$。此外，注意到 $y \in V_r(x)$ 和 $V_r(x) \subset V_{2r}(y)$。这是因为 $V_{2r}(y)$ 是一个包含 $B_{r,+}(x)$ 的凸集，而凸包 $V_r(x)$ 是包含 $B_{r,+}(x)$ 的最小凸集。因此，

$$\operatorname{dist}(y, \partial V_r(x)) \leq \operatorname{dist}(y, \partial \widetilde{V}_{2r}(y)) \leq 2r\omega(2r),$$

如所需。 □

3. Almost monotonicity of doubling index

本节将证明，对于拟凸 Lipschitz 域和变系数，倍增指标具有几乎单调性。我们先介绍两个重要事实。

事实 1： 仿射变换（线性变换和平移的组合）不会改变区域的拟凸性（或凸性）（在 $\omega(r)$ 上至多相差一个常数）。

事实 2： 当 $r < 1$ 足够小时进行重标度 $x \to rx$，会使 ω 以及 A 的 Lipschitz 常数变小。这是因为 $\omega(r\cdot) \to 0$，并且 $\|\nabla(A(r\cdot))\|_{L^\infty} = r\|\nabla A\|_{L^\infty} \to 0$ 当 $r \to 0$ 时也会如此。这个事实对我们至关重要，因为稍后我们将假设 $\omega_0 = \omega(1)$和 $\gamma_0 \simeq \|\nabla A\|_{L^\infty}$ 都足够小。注意，对于凸区域，$\omega_0 = 0$；对于常系数，$\gamma_0 = 0$。

3.1. 频率函数与三球不等式。 设 Ω 是一个 Lipschitz 域，并且 A 满足标准假设。在本小节中，我们进一步假设（经过仿射变换后）$0 \in \Omega$ 和 $A(0) = I$。注意，在这一归一化下，Ω 和 A 的常数会发生变化。特别地，新的拟凸模量 $\tilde{\omega}(r)$ 将满足 $\tilde{\omega}(r) \le \Lambda\omega(\Lambda^{\frac{1}{2}} r)$，这在差一个常数的意义下是~~无害~~的。同样，$\tilde{\gamma} \le \Lambda\gamma$ 和 $L \le \Lambda L$。

令 $R > 0$ 和 u 为 A-调和函数，定义在 $B_{R,+} = B_R(0) \cap \Omega$ 中，并满足狄利克雷边界条件 $u = 0$ 于 $B_R(0) \cap \partial\Omega$ 上。定义

$$\mu(x) = \frac{x \cdot A(x)x}{|x|^2} \quad \text{and} \quad H(r) = \int_{\partial B_r(0)\cap\Omega} \mu u^2 d\sigma.$$

定义

$$D(r) = \int_{B_{r,+}} A\nabla u \cdot \nabla u.$$

将以 0 为中心的 u 的频率函数定义为

$$\mathcal{N}_u(0, r) = \frac{rD(r)}{H(r)}. \tag{3.1}$$

下面的单调性是标准结果。为方便读者，我们在附录 A.2中给出证明。

命题 3.1。 在上述假设下，若进一步有，

$$n(x) \cdot A(x)x \ge 0, \quad \textit{for almost every } x \in B_R(0) \cap \partial\Omega, \tag{3.2}$$

则存在 $C = C(\Lambda, d) > 0$，使得 $e^{C\gamma r}\mathcal{N}_u(0, r)$ 在$(0, R)$上单调不减。

我们称$B_{R,+}$是 A-关于 0 星形的，如果满足（3.2）。在证明命题3.1 时，需要对 $\partial\Omega$ 作出这一额外的几何假设，之后将予以去除。

$H(r)$ 与频率函数之间的关系可由下式看出

$$|\frac{H'(r)}{H(r)} - \frac{d-1}{r} - \frac{2}{r}\mathcal{N}_u(0,r)| \le C\gamma. \tag{3.3}$$

该估计的证明包含在命题 3.1 的证明中；参见（A.7）。对 $r \in (r_1, r_2)$ 上的（

$$\Big|\log\frac{H(r_2)}{H(r_1)} - (d-1)\log\frac{r_2}{r_1} - 2\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathcal{N}_u(0,r)}{r}dr\Big| \le C\gamma r_2. \tag{3.4}$$

利用命题 3.1，$\mathcal{N}_u(0, r) \le e^{C\gamma r_2}\mathcal{N}_u(0, r_2) \le e^{C\gamma r_3}\mathcal{N}_u(0, s)$，对任意 $r_1 <r < r_2 < s < r_3$。因此，对任意 $r_1 < r_2 < r_3 < r_0$，由（3.4）可得

$$\log\frac{H(r_2)}{H(r_1)} \le \beta\log\frac{H(r_3)}{H(r_2)} + (d-1)\log\frac{r_2^{1+\beta}}{r_1 r_3^{\beta}} + C\gamma r_3,$$

其中 $\beta = e^{C\gamma r_3\frac{\log(r_2/r_1)}{\log(r_3/r_2)}}$。然后

$$H(r_2) \le \exp\Big((d-1)\log\frac{r_2^{1+\beta}}{r_1 r_3^{\beta}} + C\gamma r_3\Big)H(r_3)^{\frac{\beta}{1+\beta}}H(r_1)^{\frac{1}{1+\beta}}.$$

这是一个三球面不等式。我们希望将其转化为三球不等式。下面的论证大致上应该是标准的。将上述不等式中的 r_j 替换为 tr_j 和 $t \in (0,1)$，然后对 (0,1) 上的t 积分，得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 H(tr_2)dt \\
&\le \exp\Big((d-1)\log\frac{r_2^{1+\beta}}{r_1 r_3^{\beta}} + C\gamma r_3\Big)\int_0^1 H(tr_3)^{\frac{\beta}{1+\beta}}H(tr_1)^{\frac{1}{1+\beta}}dt \\
&\le \exp\Big((d-1)\log\frac{r_2^{1+\beta}}{r_1 r_3^{\beta}} + C\gamma r_3\Big)\Big(\int_0^1 H(tr_3)dt\Big)^{\frac{\beta}{1+\beta}}\Big(\int_0^1 H(tr_1)dt\Big)^{\frac{1}{1+\beta}},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中我们还使用了 H¨older 不等式。注意到

$$\int_{B_{r,+}}\mu u^2 = \int_0^r H(s)ds = r\int_0^1 H(tr)dt.$$

由（3.5）可得

$$\log\frac{\int_{B_{r_2,+}}\mu u^2}{\int_{B_{r_1,+}}\mu u^2} \le \beta\log\frac{\int_{B_{r_3,+}}\mu u^2}{\int_{B_{r_2,+}}\mu u^2} + d\log\frac{r_2^{1+\beta}}{r_3^{\beta}r_1} + C\gamma r_3. \tag{3.6}$$

右侧最后两项会很小，只要 γ 或 r_0 足够小，且 r_2/r_1 充分接近 r_3/r_2。

3.2. **非单位矩阵**。 本小节旨在去掉假设 $A(0) = I$，以便在任意点定义倍增指标。现在假设 $A(0) \neq I$。由于 $A(0)$ 是对称正定的，我们可以写成$A(0) = \mathcal{O}D\mathcal{O}^T$，其中 $\mathcal{O}$ 是一个（常数）正交矩阵， D 是一个（常数）对角矩阵，其元素包含在 $[\Lambda^{-1}, \Lambda]$ 中。令 $S = \mathcal{O}D^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}^T$。因此 $A(0) = S^2$ （或者形式上写作 $S = A^{\frac{1}{2}}(0)$），且 S 也是对称的。设 u 在A-调和于 $B_R(0) \cap \Omega$ 中。接着，我们可以通过变量替换 $x \to Sx$将矩阵 A 归一化，使得$A(0) = I$。具体而言，令

$$\tilde{u}(x) = u(Sx) \quad \text{and} \quad \tilde{A}(x) = S^{-1}A(Sx)S^{-1}.$$

那么， $\tilde{u}$ 在 $S^{-1}(B_R \cap \Omega) = S^{-1}(B_R) \cap S^{-1}(\Omega)$中是 $\tilde{A}$-调和的。显然，现在$\tilde{A}(0) = I$。注意， $S^{-1}(B_R \cap \partial\Omega)$上的 A-星形条件 $\tilde{n}(x) \cdot \tilde{A}(x)x \geq 0$ 等价于

$$n(x) \cdot A(x)A^{-1}(0)x \geq 0, \quad \text{on } B_R \cap \partial\Omega. \tag{3.7}$$

如果3.2） $A(0) = I$，则该条件与（一致，并且在线性变换下保持不变。

设$\tilde{\Omega} = S^{-1}(\Omega)$。我们希望找到变量替换下倍增指标的恰当形式。根据与 A对应的权函数 $\tilde{\mu}$ 的定义以及变量替换 $y = Sx$,

$$\begin{aligned}\int_{B_r(0)\cap\tilde{\Omega}} \tilde{\mu}\tilde{u}^2 &= \int_{B_r(0)\cap\tilde{\Omega}} \frac{x \cdot S^{-1}A(Sx)S^{-1}x}{|x|^2}(u(Sx))^2 dx \\ &= |\det A(0)|^{-\frac{1}{2}} \int_{A^{\frac{1}{2}}(0)(B_r(0))\cap\Omega} \frac{y \cdot A(0)^{-1}A(y)A(0)^{-1}y}{y \cdot A(0)^{-1}y} u(y)^2 dy.\end{aligned}$$

因此，考虑平移后，我们定义

$$\mu(x_0, y) = \frac{(y - x_0) \cdot A(x_0)^{-1}A(y)A(x_0)^{-1}(y - x_0)}{(y - x_0) \cdot A(x_0)^{-1}(y - x_0)},$$

$$E(x_0, r) = x_0 + A^{\frac{1}{2}}(x_0)(B_r(0)), \tag{3.8}$$

and

$$J_u(x_0, r) = |\det A(x_0)|^{-\frac{1}{2}} \int_{E(x_0,r)\cap\Omega} \mu(x_0, y)u(y)^2 dy. \tag{3.9}$$

注意，对于任意 x_0， $\Lambda^d \geq \det A(x_0) \geq \Lambda^{-d}$，且 $J_u(x_0, r)$关于r是非递减的。我们指出， $J_u(x_0, r)$在仿射变换下不变，是定义倍增指标时加权 L^2 范数的恰当形式。

在下一个引理中，我们证明 $J_u(x_0, r)$ 对x_0 和 r的连续依赖。这将在我们把倍增指标的中心从一个点移到附近的另一个点时发挥作用。

引理 3.2. 存在 $C = C(\Lambda, d) > 0$，使得若 $\theta = |x_0 - x_1| < r/C$，则

$$(1 - C\gamma\theta)J_u(x_1, r - C\theta) \le J_u(x_0, r) \le (1 + C\gamma\theta)J_u(x_1, r + C\theta). \tag{3.10}$$

证明。该证明由 $\mu(x_0, y)$和 $A^{\frac{1}{2}}(x_0)$关于 x_0的Lipschitz连续性得出。注意

$$\mu(x_0, y) = 1 + \frac{(y - x_0) \cdot A(x_0)^{-1}(A(y) - A(x_0))A(x_0)^{-1}(y - x_0)}{(y - x_0) \cdot A(x_0)^{-1}(y - x_0)}.$$

然后固定 y，可以证明 $|\nabla_{x_0}\mu(x_0, y)| \le C\gamma$. 因此，

$$|\mu(x_0, y) - \mu(x_1, y)| \le C\gamma\theta\mu(x_1, y),$$

由此得到

$$\mu(x_0, y) \le (1 + C\gamma\theta)\mu(x_1, y), \tag{3.11}$$

条件是 θ 足够小，使得 $C\gamma\theta < 1/2$。

另一方面，根据幂级数，A 的唯一平方根可写为

$$A^{\frac{1}{2}}(x_0) = \Lambda^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n \left(I - \Lambda^{-1}A(x_0)\right)^n, \tag{3.12}$$

其中 $\binom{1/2}{n}$ 是泰勒级数（$(1 + X)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} X^n$）中的二项式系数。幂级数（3.12）根据 Gelfand公式收敛，因为 $I - \Lambda^{-1}A$（x_0）的所有特征值均包含于 $[0, 1 - \Lambda^{-2}]$中。对 x_0求导可得，$|\nabla A^{\frac{1}{2}}| \le C|\nabla A| \le C\gamma$，其中$C$ 仅取决于 d 和 Λ。如有必要，通过将 γ 取得足够小，我们有

$$E(x_0, r) \subset E(x_1, r(1 + C_0\gamma\theta) + C_1\theta) \subset E(x_1, r + C\theta). \tag{3.13}$$

此外，

$$|\det A(x_0)^{\frac{1}{2}} - \det A(x_1)^{\frac{1}{2}}| \le C\gamma\theta \le C\gamma\theta \det A(x_1)^{\frac{1}{2}}.$$

这意味着

$$\det A(x_0)^{\frac{1}{2}} \le (1 + C\gamma\theta) \det A(x_1)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.14}$$

由（3.11）、（3.13）和（3.14）可得

$$\begin{aligned} J_u(x_0, r) &= |\det A(x_0)|^{-\frac{1}{2}} \int_{E(x_0, r) \cap \Omega} \mu(x_0, y)u(y)^2 dy \\ &\le (1 + C\gamma\theta)^2 |\det A(x_1)|^{-\frac{1}{2}} \int_{E(x_1, r + C\theta) \cap \Omega} \mu(x_1, y)u(y)^2 dy \\ &\le (1 + C\gamma\theta)J_u(x_1, r + C\theta). \end{aligned}$$

这证明了（3.10）的一边，而另一边则由不等式的对称性得出。□

3.3. **去除 A-星形条件。** 在证明频率函数的单调性时，我们要求边界上满足 A-星形条件（3.7），而非拟凸性。要去除这一几何条件，经典做法是引入非线性变量变换，参见 [1] 或 [14] 例如。不过，本文将采用一种不同的方法，其中区域的拟凸性将发挥关键作用。我们方法的核心思想是：如果 $\Omega \cap B_r$ 接近凸集，那么只要将中心从边界移至一个仍相对靠近边界的内部点，就可以恢复 A-星形条件。这使我们能够证明频率函数的几乎单调性公式，且误差较小。

经过刚性变换，我们不妨设 $0 \in \partial\Omega$，且 $B_r(0) \cap \partial\Omega$ 的局部图像由 $x_d = \phi(x')$ 给出，使得 $B_r(0) \cap \Omega = B_r(0) \cap \{x_d > \phi(x')\}$，其在 0 处的支撑平面为 $x_d = 0$。

引理 3.3. 存在 $C = C(L, \Lambda) > 0$，使得若 r_0 满足 $C(\omega(2r_0) + \gamma r_0) \leq 1$，则对每个 $r \in (0, r_0)$，$\Omega \cap B_r(x_1)$ 相对于其中心 $x_1 = C(r\omega(2r) + \gamma r^2)e_d$ 是 A-星形的，即，

$$n(x) \cdot A(x)A^{-1}(x_1)(x - x_1) \geq 0, \quad \text{for almost every } x \in \partial\Omega \cap B_r(x_1). \tag{3.15}$$

证明。考虑一点 $x_0 \in \partial\Omega \cap B_{2r}(0)$，其法向量 $n = n(x_0)$ 存在。根据拟凸性的定义，x_0 处的支撑平面可写为 $x_d = P(x')$，其向下法向方向为 n。向量 x_0 在支撑平面上的投影长度为 $t = |(I - n \otimes n)x_0| \leq |x_0|$。根据以 x_0 为中心的拟凸性定义（至多相差一个旋转），我们有

$$(x_0 - 0) \cdot n \geq -t\omega(t). \tag{3.16}$$

现在，我们希望找到 $k = k(r) > 0$（与 x_0 无关），使得 $x_1 = ke_d$ 并且

$$n \cdot A(x_0)A^{-1}(x_1)(x_0 - x_1) \geq 0. \tag{3.17}$$

事实上，利用（3.16），$A(x_1)A^{-1}(x_1) = I$ 和 $|A(x_0) - A(x_1)| \leq \gamma|x_0 - x_1|$，可得

$$\begin{aligned} n \cdot A(x_0)A^{-1}(x_1)(x_0 - x_1) &\geq n \cdot (x_0 - x_1) - \gamma\Lambda|x_0 - x_1|^2 \\ &\geq -t\omega(t) - kn_d - \gamma\Lambda(|x_0| + k)^2 \end{aligned} \tag{3.18}$$

由于 $t \le |x_0| < 2r$ 且 $n_d = \frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla P|^2}} \le \frac{-1}{\sqrt{1+L^2}} \le \frac{-1}{1+L}$，其中 $L \ge |\nabla P|$ 是 $\partial\Omega \cap B_{r_0}(0)$ 的 Lipschitz 常数，我们得到

$$n \cdot A(x_0)A^{-1}(x_1)(x_0 - x_1) \ge \frac{k}{1+L} - 2r\omega(2r) - \gamma\Lambda(2r+k)^2. \tag{3.19}$$

我们希望 $B_r(x_1)$ 包含边界的一部分，包括原点，这意味着 $k \le r$。注意，(3.18) 的右端与 $x_0 \in \partial\Omega \cap B_{2r}(0)$ 无关。现在，取

$$k = 9\Lambda(1+L)(r\omega(2r) + \gamma r^2),$$

对于$B_{2r}(0) \cap \partial\Omega$上的几乎每一点，我们从(3.19)得到所需的结果(3.17)。因此，在引理的陈述中取 $C = 9\Lambda(1+L)$ 和 $x_1 = C(r\omega(2r) + \gamma r^2)e_d$。最后，只需确保 $k \le r$ 和$B_r(x_1) \cap \partial\Omega \subset B_{2r}(0) \cap \partial\Omega$。显然，只要 r_0 足够小，使得 $C(\omega(2r_0) + \gamma r_0) \le 1$，就满足这一条件。□

由 $r > 0$ 和 x_1 （定义见引理3.3，并由式（3.6），若 $r_1 < r_2 < r_3 < r < r_0$,

$$\log \frac{J_u(x_1, r_2)}{J_u(x_1, r_1)} \le \beta \log \frac{J_u(x_1, r_3)}{J_u(x_1, r_2)} + d \log \frac{r_2^{1+\beta}}{r_3^{\beta} r_1} + C\gamma r_3. \tag{3.20}$$

现在，我们希望得到以 0 为中心的倍增指标单调性公式。由引理3.2，对任意 $s < r/2$ 和 $s > \theta$（r）：$= C$（$r\omega$（$2r$）$+\gamma r^2$），

$$(1-\theta(r))J_u(0, s-\theta(r)) \le J_u(x_1, s) \le (1+\theta(r))J_u(0, s+\theta(r)). \tag{3.21}$$

结合式（3.20）和（3.21），可得

$$\log \frac{J_u(0, r_2-\theta)}{J_u(0, r_1+\theta)} \le \beta \log \frac{J_u(0, r_3+\theta)}{J_u(0, r_2-\theta)} + (1+\beta)\log\frac{1+\theta}{1-\theta} + d\log\frac{r_2^{1+\beta}}{r_3^{\beta} r_1} + C\gamma r_3.$$

不妨设 $\theta = \theta(r) < \frac{r}{20}$。令

$$r_1 = \frac{1}{8}r - \theta, \quad r_2 = \frac{1}{4}r + \theta, \quad r_3 = \frac{1}{2}r - \theta.$$

由此可得 $|\beta - 1| \le C(\gamma r + \theta/r) \le C(r + \omega(2r))$，并且

$$(1+\beta)\log\frac{1+\theta}{1-\theta} + d\log\frac{r_2^{1+\beta}}{r_3^{\beta} r_1} + C\gamma r_3 \le C(r + \omega(2r)).$$

因此，我们得到

$$\log \frac{J_u(0,\frac{r}{4})}{J_u(0,\frac{r}{8})} \le (1+C(\gamma r+\omega(2r)))\log \frac{J_u(0,\frac{r}{2})}{J_u(0,\frac{r}{4})} + C(\gamma r+\omega(2r)).$$

定义倍增指标为

$$N_u(x_0,r) = \log \frac{J_u(x_0,2r)}{J_u(x_0,r)}.$$

于是我们有

引理 3.4. 设 $x_0 \in \Omega$。则存在 $C = C(\Lambda, L) > 0$ 以及 $r_0 = r_0(\Lambda, L, \gamma, \omega) > 0$（如引理 3.3 中所述），使得对于 $r < r_0$

$$N_u(x_0,r) \le (1+C(\gamma r+\omega(16r)))N_u(x_0,2r) + C(\gamma r+\omega(16r)). \tag{3.22}$$

注 3.5. 对于任意 $\varepsilon > 0$，如果 r 足够小（仅依赖于 Λ, γ, L和 ω），那么

$$N_u(x_0,r) \le (1+\varepsilon)N_u(x_0,2r) + \varepsilon.$$

或者等价地，

$$N_u(x_0,r) + 1 \le (1+\varepsilon)(N_u(x_0,2r)+1).$$

这是倍增指标几乎单调性的一个实用形式。

注3.6。事实上，如果对区域或系数提出更强的假设，本节中的论证可以得到更强的估计。例如，如果 $\omega(r)$ 满足 Dini 型条件，则可以证明

$$\sup_{0<s<r} N_u(x_0,s) \le C(N_u(x_0,r)+1).$$

如果 Ω 是凸的（即 $\omega(r) = 0$）或 $C^{1,1}$（即 $\omega(r) \le Cr$），则可以证明

$$\sup_{0<s<r} N_u(x_0,s) \le (1+C\gamma r)N_u(x_0,r) + C\gamma r.$$

如果 A 是常数（即 $\gamma = 0$）且 Ω 是凸的，那么上述不等式就恢复了凸域上调和函数的精确倍增不等式，即 $N(x_0, r)$ 关于 r 单调不减。

4. Drop of maximal doubling index

本节的主要结果是引理4.2。

4.1. **定量柯西唯一性**。 我们首先介绍 Lipschitz 域上的定量柯西唯一性。文献 [3], 证明了 Lipschitz 边界上的另一种柯西唯一性，但遗憾的是，这一结果不适用于我们的目的，因为我们没有关于边界上切向导数的估计，而我们的估计是 L^∞型的。

我们简要回顾 Lipschitz 区域上椭圆方程的正则性理论；参见 [11, 13] 及其中的参考文献。假设 A 是 H¨older 连续的，并且 u 是 $\Omega \cap B_2$ 中的 A-调和函数，且其迹意义下的 $u|_{\partial\Omega\cap B_2} \in H^1(\partial\Omega \cap B_2)$。则非切向极大函数 $(\nabla u)^*|_{\partial\Omega\cap B_1} \in L^2(\partial\Omega \cap B_1)$。特别地，这意味着对几乎处处的 $x \in \partial\Omega \cap B_1$，当 $\Omega \ni y \to x$ 非切向趋近时，$\nabla u(y) \to \nabla u(x)$。因此，$\frac{\partial u}{\partial \nu} = n \cdot A\nabla u$几乎处处存在。这一事实将为下面的引理及其证明提供依据。

引理 4.1. 设 Ω 为一个 *Lipschitz* 域，且 $0 \in \partial\Omega$。存在 $0 < \tau = \tau(d, L, A) < 1$，使得若 u 是 A-调和函数，定义在 $B_{1,+}$ 且满足$\|u\|_{L^2(B_{1,+})} = 1$，并且 $|u| + |n \cdot A\nabla u| \le \varepsilon \le 1$ 在 $B_1 \cap \partial\Omega$上成立，则

$$\|u\|_{L^\infty(B_{1/2,+})} \le C\varepsilon^\tau,$$

其中 C 仅依赖于 d、L 和 A。

证明. 证明思路受 [21] 启发。我们首先将 Lipschitz 系数矩阵 A 从 $B_{1,+}$ 延拓到 B_1，仍记为 A，使其继续满足 $B_{1,+}$中的相同假设。由于 B_1 是一个光滑域，我们可以在 B_1 中构造格林函数，使得 $\mathcal{L}(G(x,\cdot)) = \delta_x$，且 $G(x,\cdot) = 0$ 在 ∂B_1上成立。众所周知（例如参见 [12]），$G(x,y)$ 满足（对 $d \ge 3$）

$$|G(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^{d-2}}, \tag{4.1}$$

and

$$|\nabla_y G(x,y)| \le \min\left\{\frac{C}{|x-y|^{d-1}}, \frac{C\operatorname{dist}(x,\partial B_1)}{|x-y|^d}\right\}. \tag{4.2}$$

对于 $d = 2$，(4.1) 应替换为 $|G(x,\ y)| \le C(1 + \ln|x-y|)$。

设 $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap B_1$ 和 $\Gamma_2 = \partial B_1 \cap \Omega$。现在，对于 A-调和函数 u，在 $B_{1,+}$ 中，根据格林公式，对于 $x \in B_{1,+}$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial B_{1,+}} \left\{ u\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\cdot) - G(x,\cdot)\frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_1} \left\{ u\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\cdot) - G(x,\cdot)\frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} d\sigma + \int_{\Gamma_2} \left\{ u\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\cdot) - G(x,\cdot)\frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} d\sigma \\ &=: u_1(x) + u_2(x). \end{aligned}$$

注意到，上述计算对于 $x \in B_{1,-} = B_1 \setminus \overline{B_{1,+}}$ 以及 $u(x) = 0$ 在 $x \in B_{1,-}$ 时也成立。此外，u_1 在 $B_1 \setminus \Gamma_1$ 中是 A-调和的，并且在 Γ_1 处有跳跃（这是层势理论中的一个众所周知的事实）；而 u_2 在整个 B_1 中是 A-调和的。

现在我们分别估计 u_1 和 u_2。对于满足 $x \in B_1 \setminus \Gamma_1$ 的 $u_1(x)$，根据假设

$$|u_1(x)| \le \varepsilon \int_{\Gamma_1} |G(x,y)| + |\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)| d\sigma_y.$$

由（4.1）和（4.2）的第一部分可得

$$\int_{\Gamma_1} |G(x,y)| d\sigma_y \le C, \quad \text{and} \quad \int_{\Gamma_1} |\nabla_y G(x,y)| d\sigma_y \le C(1 + |\ln \delta(x)|),$$

其中 $\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma_1)$。因此，我们得到

$$|u_1(x)| \le C\varepsilon(1 + |\ln \delta(x)|), \quad \text{for any } x \in B_1 \setminus \Gamma_1,$$

这就得到

$$\|u_1\|_{L^2(B_{1,\pm})} \le C\varepsilon, \tag{4.3}$$

其中 $B_{1,-} = B_1 \setminus \overline{B_{1,+}}$。

对于 u_2，由于 $u = u_1 + u_2 = 0$ 属于 $B_{1,-}$，我们有

$$\|u_2\|_{L^2(B_{1,-})} \le C\varepsilon, \quad \text{and} \quad \|u_2\|_{L^2(B_{1,+})} \le \|u\|_{L^2(B_{1,+})} + C\varepsilon.$$

回顾一下，u_2 在 B_1 中是 A-调和的。根据 B_1 中的三球不等式，存在 τ 使得

$$\begin{aligned} \|u_2\|_{L^2(B_{3/4})} &\le C\|u_2\|^{\tau}_{L^2(B_{1/2,-})} \|u_2\|^{1-\tau}_{L^2(B_1)} \\ &\le C\varepsilon^{\tau}(\|u\|^{1-\tau}_{L^2(B_{1,+})} + \varepsilon^{1-\tau}) \\ &\le C\varepsilon + C\varepsilon^{\tau}\|u\|^{1-\tau}_{L^2(B_{1,+})}. \end{aligned}$$

结合（4.3）和 $\|u\|_{L^2(B_{1,+})} = 1$，我们得到

$$\|u\|_{L^2(B_{3/4,+})} \le C\varepsilon^{\tau}.$$

最后，De Giorgi-Nash 估计推出了所需的估计。 □

4.2. 区域分解。设 $L \geq 0$ 为与 Lipschitz 域 Ω 相关联的 Lipschitz 常数。定义一个标准矩形长方体为$Q_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{d-1} \times \{\sqrt{d-1}(1+L)[-1,1)\}$。在本文中，所考虑的所有长方体都是 Q_0的平移和缩放版本。令 $\pi(Q)$ 为 Q 在 $\mathbb{R}^{d-1}$上的垂直投影。例如， $\pi(Q_0) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{d-1}$。记 Q_0 和 $\pi(Q_0)$ 的边长分别为 $s(Q_0) = s(\pi(Q_0)) = 1$。

设 $0 \in \partial\Omega$，且 Q 为一个以 0 为中心的长方体。假设 $\partial\Omega \cap Q$ 由局部图像 $x_d = \phi(x')$ 给出，其中 $x' \in Q' = \pi(Q)$。根据我们的假设，$|\nabla\phi| \leq L$ 在 Q'中。令 $k \geq 3$。我们将 Q' 划分为 $2^{k(d-1)}$ 个边长为 $s(q') = 2^{-k}s(Q')$ 的相等小立方体$\{q'\}$ 。对于如上所述的每个小立方体 q' ，我们进一步用至多 $2^k + 1$ 个互不相交且与 Q_0相似的长方体 $\{q\}$ 覆盖 $\pi^{-1}(q') \cap Q$ ，使得 $s(q) = s(q')$，并且其中一个长方体以 $\partial\Omega \cap Q$为中心。令 $\mathcal{B}_k(Q)$ 为以 $\partial\Omega \cap Q$ 为中心的边界长方体 q 的集合，令 $\mathcal{I}_k(Q)$ 为与 $\Omega \cap Q$ 相交的内部长方体。显然， $\mathcal{B}_k(Q)$ 中恰有$2^{k(d-1)}$ 个边界长方体。示意见图1。

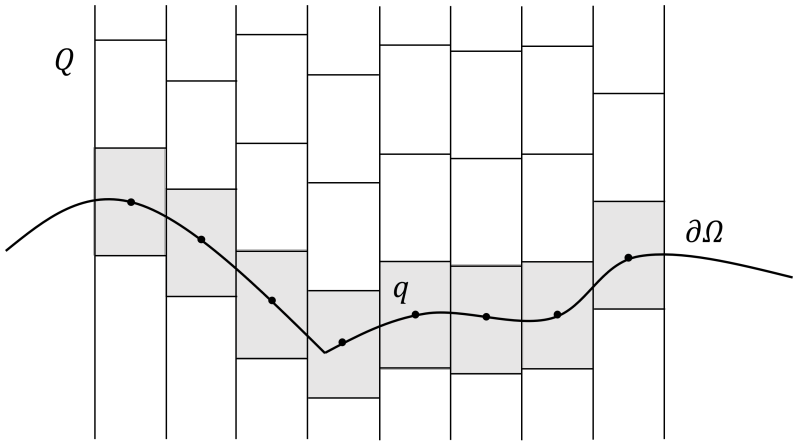


FIGURE 1. 标准区域分解

关于上述分解，有一个简单的事实：

$$\min_{q \in \mathcal{I}_k(Q)} \operatorname{dist}(q, Q \cap \partial\Omega) \geq \frac{1}{2}\sqrt{d-1} \cdot s(q).$$

这意味着，宽度为 $\frac{1}{2}\sqrt{d-1} \cdot s(q)$ 的 $Q \cap \partial\Omega$ 薄边界层完全包含于$\overline{\cup_{q \in \mathcal{B}_k}}(Q)$ q 中。

4.3. **一个边界层引理。** 设 Q 是一个以 Ω 中某点为中心的长方体。记 $\ell(Q)$ 为 Q 的直径（即对角线的长度）。注意，如果x_Q 是 Q的中心，那么 $2Q \subset B_{\ell(Q)}(x_Q)$。如 [21], 中所定义的，我们将 u 在 Q 中的最大倍增指标定义为

$$N_u^*(Q) = \sup_{x\in Q\cap\overline{\Omega}, \ell(Q)/2\le r\le \ell(Q)} N_u(x,r).$$

下面是本节的关键引理，它表明向下缩小到某些较小的边界长方体时，最大倍增指标会下降。

引理 *4.2.* 设 Ω 是一个 *Lipschitz* 域，其在 $0\in\partial\Omega$ 附近的局部边界由 $x_d = \phi(x')$ 给出，如第 *4.2* 节及 $|\nabla\phi|\le L$ 所述。存在 $k_0\ge 5$ 和 $N_0\ge 1$，使得对于任意整数 $k\ge k_0$，都存在 $\gamma_0>0$ 和 $\omega_0>0$（二者仅依赖于 k、d 和 L），使下述结论成立。设$\frac{1}{2}I\le A\le 2I$, $|\nabla A|\le\gamma_0$, $\omega(1)\le\omega_0$且 u 是 B_1 中的一个 A-调和函数，$+$满足 $u=0$ 在 $B_1\cap\partial\Omega$ 上。令 $Q\subset B_{1/64}$ 为一个以 $\partial\Omega$ 为中心的边界长方体。若 $N_u^*(Q) > N_0$，则存在 $q\in\mathcal{B}_k(Q)$，使得 $N_u^*(q)\le\frac{1}{2}N_u^*(Q)$。

证明。令 $\ell_Q=\ell(Q)$和 x_Q 为 Q 在 $\partial\Omega$ 上的中心。给定 $k\ge 5$，令$\mathcal{B}_k(Q$为第 Q 节中 4.2所述的标准分解中的边界长方体集合。则 $\ell_q := \ell(q) = 2^{-k}\ell_Q$。设 $N = N_u^*(Q)$ 且 $M^2 = J_u(x_Q,\ \ell_Q)$。

我们用反证法证明。假设对于任意 $q\in\mathcal{B}_k(Q)$，都有 $N_u^*(q) > N/2$。这意味着，对于任意 $q\in\mathcal{B}_k(Q)$，存在 $x_q\in q$ 和 $r_q\in[\ell_q/2,\ell_q]$ 使得$N_u(x_q,r_q) > N/2$。对于给定的 k，我们可以令 $\varepsilon=\varepsilon(k)$ 足够小，使得 $(1+\varepsilon)^k\le 2$。根据引理 3.4 和注 3.5 中的几乎单调性，对于这样的$\varepsilon>0$，令 γ_0 和 ω_0 足够小后，对所有 $1\le j\le k$,

$$N_u(x_q,r_q)+1\le(1+\varepsilon)^j(N_u(x_q,2^jr_q)+1)\le 2(N_u(x_q,2^jr_q)+1).$$

因此,

$$N_u(x_q,2^jr_q) > \frac{N-2}{4},\quad \text{for } 1\le j\le k.$$

因此,

$$\begin{aligned} J_u(x_q,4\ell_q)\le J_u(x_q,8r_q) &= J_u(x_q,2^{k-1}r_q)\exp\Big(-\sum_{j=3}^{k-2}N_u(x_q,2^jr_q)\Big)\\ &\le J_u(x_q,\ell_Q/2)e^{-(N-2)(k-4)/4}\\ &\le 2M^2e^{-(N-2)(k-4)/4}, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式由引理3.2推出。根据(J_u 在(3.9)和(3.8)中的定义，以及我们的假设$\frac{1}{2}I \le A \le 2I$，我们有

$$\int_{B_{2\ell_q,+}(x_q)} u^2 \le CM^2 e^{-Nk/5}, \quad \text{for each } q \in \mathcal{B}_k(Q), \tag{4.4}$$

其中我们选取了足够大的 k_0， N_0，使得对于所有$k \ge k_0$， $N \ge N_0$，均有 $(N-2)(k-4)/4 \ge Nk/5$。

现在，令 $\Gamma = Q \cap \partial\Omega = \{x = (x', x_d) : x' \in \pi(Q),\ x_d = \phi(x')\}$。(4.4)则可推出

$$\sup_{y\in\Gamma} \sup_{B_{\ell_q}(y)} |u| \le CM\ell_q^{-d/2} e^{-Nk/10}. \tag{4.5}$$

定义 $\Gamma_1 = \Gamma + \frac{1}{2}\ell_q e_d = \{x = (x', x_d) : x' \in \pi(Q),\ x_d = \phi(x') + \frac{1}{2}\ell_q\}$。注意，从 Γ_1 到 $\partial\Omega$ 的距离与 ℓ_q相当。由内部梯度估计和（4.5），可得

$$\sup_{\Gamma_1} |u| + \ell_q \sup_{\Gamma_1} |\nabla u| \le CM\ell_q^{-d/2} e^{-Nk/10}. \tag{4.6}$$

令 $\hat{x}_Q = x_Q + \frac{1}{2}\ell_q e_d \in \Gamma_1$和 $\hat{B}_{r,+}(\hat{x}_Q) = B_{r,+}(x_Q) + \frac{1}{2}\ell_q e_d = \{x = (x', x_d) : |x - \hat{x}_Q| < r,\ 且\ x_d > \phi(x') + \frac{1}{2}\ell_q\}$。因此，在 $\hat{B}_{s(Q)/2}$ 中对具有 Lipschitz 边界 Γ_1 的 $_+(\hat{x}_Q)$ 应用引理 4.1，由（4.6）可得

$$\sup_{\hat{B}_{s(Q)/4,+}(\hat{x}_Q)} |u| \le CMs(Q)^{-d/2} 2^{\tau kd/2 + k} e^{-\tau Nk/10}, \tag{4.7}$$

其中我们还用到了这一事实： $s(Q) = C(d, L)2^k \ell_q$。再次结合（4.5），由（4.7）可得

$$J_u(x_Q, s(Q)/8) \le C \int_{B_{s(Q)/4,+}(x_Q)} u^2 \le CM^2 2^{\tau kd + 2k} e^{-\tau Nk/5}. \tag{4.8}$$

最后，我们通过一系列倍增不等式将 $J_u(x_Q, s(Q)/8)$ 与 $J_u(x_Q, \ell_Q)$ 联系起来。令 m 为满足 $2^m s(Q)/8 > \ell_Q$ 的最小整数。注意， m 仅取决于 d 和 L。根据倍增指标的几乎单调性，对于 $1 \le j \le m$,

$$N_u(x_Q, 2^{-j}\ell_Q) \le 2N_u(x_Q, \ell_Q) \le 2N.$$

Thus

$$\begin{aligned} J_u(x_Q, s(Q)/8) &\ge J_u(x_Q, 2^{-m}\ell_Q) \\ &= J_u(x_Q, \ell_Q) \exp\Big(-\sum_{j=1}^{m} N_u(x_Q, 2^{-j}\ell_Q)\Big) \\ &\ge M^2 e^{-2mN}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

比较（4.8）和（4.9），可得

$$(\frac{1}{5}-\frac{2m}{k})N \le \frac{C}{k}+(\tau d+1)\log 2.$$

显然，当 $k \ge k_0$ 和 $N \ge N_0$ 足够大时，若 k_0 且 N_0，便会产生矛盾。注意，k_0 和 N_0 仅取决于 d 和 L。□

注4.3. 在引理 4.2 及本文后续的若干引理中，我们假设 $\frac{1}{2}I \le A \le 2I$。这一假设仅为技术上的便利，并且可以通过在 $0 \in \partial\Omega$ 的邻域内进行线性变换来实现。

5. Absence of nodal points

本节将建立更多边界层引理，说明当最大倍增指标较小时，边界上相当大一部分附近不存在零点。本节的关键在于凸域存在平坦区域。

对于 Ω 中的一点 y，记 $\delta(y)$ 为 y 到 $\partial\Omega$ 的距离。下面的边界层引理排除了零点在任意 Lipschitz 边界附近聚集的可能性。

引理 5.1. 设 Ω 是一个 *Lipschitz* 域（其 *Lipschitz* 常数为 L，且 $\ell = \frac{1}{1+L}$），并且 $0 \in \partial\Omega$。设 u 在 $B_{2,+} = \Omega \cap B_2$ 内是 A-调和的，且在 $\partial\Omega \cap B_2$上满足 $u = 0$。假设对于任意以 $B_{2,+}$ 为中心、满足 $2B_+ \subset B_{2,+}$ 且直径为 $\mathrm{diam}(B) \ge \frac{\ell}{100}$ 的对象，—

$$\frac{\int_{2B_+} u^2}{\int_{B_+} u^2} \le M. \tag{5.1}$$

假设 u 在 $B_{1/16,+} = \Omega \cap B_{1/16}$中有零点。那么 u 在 $B_{1/4,+} \cap \{\delta(y) > \rho\}$中至少有一个零点，其中 ρ 是仅依赖于 A、M和 L 的正常数。

证明。 设 $\int_{B_{1/2,+}} |u|^2 = 1$。令 $\rho \in (0, \ell/100)$。假设 u 在 $B_{1/4,+} \cap \{\delta(y) > \rho\}$中没有零点。不失一般性，假设 $u > 0$ 在 $B_{1/4,+} \cap \{\delta(y) > \rho\}$ 内（否则，将 u 替换为 $-u$）。我们证明，若 ρ 足够小，则 u 在 $B_{1/16,+}$中没有零点，这就导出了矛盾。

根据局部 L^∞ 估计，我们知道 $|u| \le C_0$ 在$B_{1/4,\ +}$。设 z_0 是$\partial B_{1/8,\ +} \cap \Omega$上的一点，且 $\delta(z_0) \ge \frac{\ell}{16}$（这种$z_0$的存在性可由一个简单的几何观察得到）。根据我们的假设，$u > 0$ 在$B_{1/4,\ +} \cap \{\delta(y) >$

$\rho\}$ 以及事实 $B_{\ell/32}(z_0)\subset B_{1/4,\,+}\cap\{\delta(y)\ >\ \rho\}$，我们可以应用Hanack不等式，得到

$$\inf_{y\in B_{\ell/64}(z_0)} u(y)\geq c\left(\fint_{B_{\ell/32}(z_0)} u^2\right)^{1/2}\geq c_M,$$

其中最后一个不等式由（5.1）以及我们的假设 $\int_{B_{1/2,\,+}}|u|^2=1$ 得出。注意，$B_{\ell/64}(z_0)\cap B_{1/8,\,+}$包含一个表面球，其$\partial B_{1/8,\,+}\cap\Omega$的正测度大于 $c=c(d,\ L)>0$。

现在我们构造一个屏障函数 v，使其在 $B_{1/8,\,+}$ 中满足 v 是 A-调和的，在 $B_{1/8,\,+}$, $v=c_M$ 上满足 $\partial B_{1/8,\,+}\cap B_{\ell/64}(z_0)$，在 $v=-C_0$ 。$_+\cap\{0<\delta(y)\ <\rho\}$ 上满足 $v=0$，并在 $\partial B_{1/8,\,+}$的其他部分满足相应条件。由最大值原理可知，$u\geq v$在 $B_{1/8,\,+}$。我们证明，当 ρ 足够小时，$v>0$ 在 $B_{1/16,\,+}\subset B_{1/8,\,+}$。

注意，$B_{1/8,\,+}$ 是一个 Lipschitz 域。利用椭圆测度 ω_A^x，我们可以将 v 表示为

$$v(x)=c_Mv_1(x)-C_0v_2(x)\quad\text{for } x\in B_{1/8,+},$$

其中 $v_1(x)=\omega_A^x(\partial B_{1/8,+}\cap B_{\ell/64}(z_0))$，且 $v_2(x)=\omega_A^x(\partial B_{1/8,+}\cap\{0<\delta(y)\ <\rho\})$。关于椭圆测度的定义及其性质，我们参见 [11]。注意，v_1、v_2 均为正的 A-调和函数。令 z_1 为 $B_{1/8}$的一个内部点，$+$ 满足 dist$(z_1,\partial B_{1/8,+})\ \geq\ \ell/100$。则由 A-调和测度的估计（必要时使用 Harnack 不等式），

$$v_1(z_1)=\omega_A^{z_1}(\partial B_{1/8,+}\cap B_{\ell/64}(z_0))\geq c_1,$$

其中 c_1 为某个正常数，仅依赖于 d 和 L；参见 [11, 引理 1.3。2]另一方面，非切向极大函数 $(v_2)^*$ 的 L^2 估计（例如，参见 [13, 定理 1。1]，其中 $\varepsilon=1$）蕴含

$$\begin{aligned}\|v_2\|_{L^2(B_{1/8,+})}&\leq C\|(v_2)^*\|_{L^2(\partial B_{1/8,+})}\leq C\|v_2\|_{L^2(\partial B_{1/8,+})}\\&=C|\partial B_{1/8,+}\cap\{0<\delta(y)<\rho\}|^{\frac12}\leq C_1\rho^{\frac12},\end{aligned}$$

其中 C_1 仅取决于 d 和 L。由局部 L^∞ 估计可知，$0<v_2(z_1)\leq C_2\rho^{\frac12}$。于是，根据正解的比较原理（参见例如 [11, 引理 1.3.7]），可得

$$\frac{v_2(x)}{v_1(x)}\leq C_3\frac{v_2(z_1)}{v_1(z_1)}\leq\frac{C_2C_3\rho^{\frac12}}{c_1}\quad\text{for all } x\in B_{1/16,+}.$$

现在，如果 ρ 充分小（取决于 A, M 和 L），使得

$$c_M - \frac{C_0 C_2 C_3 \rho^{\frac{1}{2}}}{c_1} > 0,$$

则 $v = c_M v_1 - C_0 v_2 > 0$ 属于 $B_{1/16,\ +}$。这意味着 $u > 0$ 属于 $B_{1/16,\ +}$，与假设 u 在 $B_{1/16,\ +}$中有零点相矛盾。□

引理 5.2. 设 Ω 为凸域（其 *Lipschitz* 常数为 L），且 $0 \in \partial\Omega$。假设 $\frac{1}{2}I \le A \le 2I$。设 u 在 $B_{1,\ +}$ 中为 A-调和函数，且 $u = 0$ 在 $\partial\Omega \cap B_1$上。假设

$$N_u(0, \frac{1}{4}) \le N. \tag{5.2}$$

那么存在 $\gamma_0 = \gamma_0(d, L) > 0, \mu = \mu(d, L, N) > 0$, $\alpha = \alpha(L) \ge 1$ 以及 $z \in \partial\Omega \cap B_{1/80}$，使得若 $|\nabla A| \le \gamma_0$，则

$$|u(x)| \ge c\delta(x)^\alpha \|u\|_{L^2(B_{1/4,+})}, \quad \text{for all } x \in B_{\mu,+}(z),$$

其中 c 仅取决于 d、L 和 N。

证明。回顾一下，对于凸域，$\omega = 0$。由引理 3.4，可知当 γ_0 足够小时，几乎单调性公式（3.22）对 $r_0 = 1$ 成立。通过迭代可推出，对于整数 $0 \le k \le 10$

$$N_u(0, 2^{-k-2}) \le N_1,$$

其中 N_1 取决于 N。通过标准论证，这进一步意味着

$$N_u(x, r) \le N_2,$$

对于所有 $x \in B_{1/100,\ +}$ 以及 $r \in (0,\ 1/25)$，这等价于

$$\frac{J_u(x, 2r)}{J_u(x, r)} \le e^{N_2}.$$

根据 J_u的定义，如果 $\frac{1}{2}I \le A \le 2I$，则有 $B_{t/2}(x) \subset E(x,\ t) \subset B_{2t}(x)$。因此，对于任意 $x \in B_{1/100,\ +}$ 以及 $t \in (0,\ 1/50)$

$$\frac{\int_{B_{2t}(x)} u^2}{\int_{B_t(x)} u^2} \le C \frac{J_u(x, 4t)}{J_u(x, 2t)} \frac{J_u(x, 2t)}{J_u(x, t)} \frac{J_u(x, t)}{J_u(x, t/2)} \le C e^{3N_2}. \tag{5.3}$$

令 $r \in (0,\ 1/1000)$（稍后确定）。根据引理 2.2，我们可以找到一个边界点 $z_r \in \partial\Omega \cap B_{1/100}$，使得 $\partial\Omega \cap B_r(z_r)$ 到其在 z_r 处的支撑平面 $x_d = P(x')$ 的距离至多为 Cr^2。需要特别指出的是，C 与 r无关。

设 $D_r(z_r) = B_r(z_r) \cap \{x_d > P(x')\}$ 和 $B_{r,\ +}(z_r) = \Omega \cap B_r(z_r)$。注意，$D_r(z_r)$ 和 $B_{r,\ +}(z_r)$ 均为凸，$B_{r,\ +}(z_r) \subset D_r(z_r)$ 和 $D_r(z_r) \setminus B_{r,\ +}(z_r)$

是一个薄区域。设 v 为 A-调和函数，其定义于 $D_r(z_r)$，且满足 $v = u$在 $\{\partial B_{r,+}(z_r) = \partial D_r(z_r)\}$ 以及 $v = 0$ 在 $\partial D_r(z_r)\setminus \partial B_{r,+}(z_r)$。

不妨设 $r^{-d/2}\|u\|_{L^2(B_{2r,+}(z_r))} = 1$。凸域 B_{2r} 中的梯度估计 $_+(z_r)$ 蕴含 $\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{r,+}(z_r))} \le C_1 r^{-1}$。这可通过标准的屏障论证得到；相关结果见引理 A.1 或 [5,定理 1.4] 因此，对于任意 $x \in B_r$，$|u(x)| \le C_1\delta(x)r^{-1}$ $_+(z_r)$。令 $\delta(x)$ 表示 x 到支撑平面 $x_d = P(x')$ 的距离。于是，引理 A.5 蕴含，在 D_r 中 $|v(x)| \le C_2\tilde{\delta}(x)r^{-1}$ $_+(z_r)$。注意，对于 $x \in \partial\Omega \cap B_r(z_r)$，$\tilde{\delta}(x) \le Cr^2$，从而 $|v(x)| \le C_3 r$。现在，比较 u 和 v，我们得到

$$\|u - v\|_{L^\infty(B_{r,+}(z_r))} \le C_3 r. \tag{5.4}$$

由于$r^{-d/2}\|u\|_{L^2(B_{2r,+}(z_r))} = 1$，根据(5.3)，存在 $M > 1$，其依赖于 N，使得

$$r^{-d/2}J_u(z_r, r/4) \ge M^{-1}.$$

因此，

$$r^{-d/2}J_v(z_r, r/4) \ge \frac{1}{2}M^{-1} - C_3 r^2.$$

取 r充分小，使得 $\frac{1}{2}M^{-1} - C_3r^2 \ge \frac{1}{4}M^{-1}$。因此，

$$N_v(z_r, r/4) = \log\frac{J_v(z_r, r/2)}{J_v(z_r, r/4)} \le N_3, \tag{5.5}$$

其中 N_3 依赖于 N。注意，应用倍增指标的几乎单调性，我们有 $N_v(z_r, r/2^k) \le CN_3$，至少当 $2 \le k \le 10$ 时成立。

由于$D_{r,+}(z_r)$在支撑平面上具有平坦边界，引理A.4 证明了存在 $t_0 > 0$（仅依赖于 N 和 A）以及$w \in \partial D_{r,+}(z_r)\cap B_{r/16}(z_r)$，使得 v 在 $B_{t_0r}(w) \cap D_{r,+}(z_r)$中不变号。此外，对每个 $x \in B_{t_0r}(w) \cap D_{r,+}(z_r)$，

$$|v(x)| \ge c_N\tilde{\delta}(x)r^{-1}\|v\|_{L^\infty(D_{r/2,+}(z_r))} \ge c_N\tilde{\delta}(x)r^{-1}.$$

根据（5.4），对于任意 $x \in B_{t_0r}(w) \cap B_{r,+}(z_r)$，

$$|u(x)| \ge c_N\tilde{\delta}(x)r^{-1} - C_3 r.$$

因此，如果 $\tilde{\delta}(x) > C_3c_N^{-1}r^2$，则 $u(x)$ 没有零点。由于 $\delta(x) \le \tilde{\delta}(x)$。因此，如果 $\delta(x) > C_3c_N^{-1}r^2$ 且 $x \in B_{t_0r}(w)\cap B_{r,+}(z_r)$，则 $u(x)$ 没有零点。

接下来，由于 $D_{r,+}(z_r)$ 的平坦边界与 $\partial\Omega \cap B_r(z_r)$ 之间的距离有界于 Cr^2，我们可以找到一点 $w' \in \partial\Omega \cap B_r(z_r)$，使得$|w - w'| \le Cr^2$。因此，若 $r < \frac{1}{2}C^{-1}t_0$，则 $B_{\frac{1}{2}t_0r,+}(w') = B_{\frac{1}{2}t_0r}(w') \cap \Omega \subset B_{t_0r}(w) \cap D_{r,+}(z_r)$。因此，$u$在 $B_{\frac{1}{2}t_0r}(w') \cap \{\delta(x) >$中没有零点

$C_3c_N^{-1}r^2\}$。由此，(5.3) 和引理 5.1 (经重标度后)，存在一个常数 $\rho>0$ 使得，若

$$C_3c_N^{-1}r^2<\rho\frac{1}{2}t_0r,$$

于是 u 在 $B_{\frac{1}{2}t_0r,+}(w')$ 中没有零点。当然，只要取

$$r=r_0:=\min\{\frac{1}{3}C^{-1}t_0,\frac{1}{3}\rho t_0c_NC_3^{-1}\}.$$

注意，当我们取不同的 r 时，点 z_r 以及 w 和 w' 也会随之变化。但是，与前面的论证一样，如果固定 r_0 如上所述，我们可以找到一个特定的 $z=w'\in\partial\Omega\cap B_{1/80}$，使得 u 在 $B_{\frac{1}{2}t_0r_0,+}(z)$ 中没有零点。 -

最后，令 $4\mu=\frac{1}{2}t_0r_0$。由 Harnack 不等式和倍增不等式（根据 μ有限次应用），我们可以找到 $x_1\in B_{3\mu,+}(z)$，使其远离边界，并满足 $|u(x_1)|\geq c\|u\|_{L^2(B_{1/4,+})}$ 其中$c=c(d,A,L,N)>0$。在向内锥中再次应用 Harnack 不等式（见引理A.3）可得

$$|u(x)|\geq c\delta(x)^\alpha u(x_1)\geq c\delta(x)^\alpha\|u\|_{L^2(B_{1/4,+})},$$

对所有 $x\in B_{\mu,+}(z)$，其中 α 仅依赖于 L。证明至此完成。 □

利用类似的论证，我们可以将同一结论从凸域推广到拟凸域。其思路是，在边界上的每一点以及每个足够小的尺度下，都用凸域逼近拟凸域。引理 5.1 在此论证中同样会发挥作用。

引理 5.3. 设 Ω 是拟凸 *Lipschitz* 域，且 $0\in\partial\Omega$。此外，$\partial\Omega\cap B_{32}(0)$ 可表示为常数为 L 的 *Lipschitz* 图。假设$\frac{1}{2}I\leq A\leq 2I$。设 u在 $B_{16,+}=\Omega\cap B_{16}$中是 A-调和的，且在 $\partial\Omega\cap B_{16}$上满足 $u=0$。假设

$$N_u(0,\frac{1}{2})\leq N. \tag{5.6}$$

那么，存在仅依赖于 N、L 和 d的 $\omega_0>0$、$\gamma_0>0$、$\theta>0$，使得若 $\omega(32)\leq\omega_0$且 $|\nabla A|\leq\gamma_0$，则对于某个 $y\in\partial\Omega\cap B_{1/8}$，$|u|>0$在 $B_{\theta,+}(y)$ 中。

证明。 假设 $J_u(0,4)=1$。设 V为 $B_{1,+}=B_1\cap\Omega$ 的凸包。根据引理 2.3,

$$\operatorname{dist}(\partial B_{1,+},V)\leq\omega(2)\leq\omega_0. \tag{5.7}$$

令 $\tilde{u}$ 为 A-调和函数，定义于 V且满足 $\tilde{u}=u$ 在 $\partial V\cap\Omega$ 上，以及 $\tilde{u}=0$ 在 $\partial V\cap\Omega^c$上。由（5.7）、最大值原理和 H¨older 连续性可知 $\tilde{u}$ （即,

De Giorgi-Nash 估计），

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(B_{1,+})} &\le \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\partial\Omega\cap B_1)}\\ &\le C\omega_0^\sigma \|\tilde{u}\|_{L^\infty(V)}\\ &\le C\omega_0^\sigma \|u\|_{L^\infty(\Omega\cap\partial B_1)}\\ &\le C\omega_0^\sigma J_u(0,4)^{1/2} \le C\omega_0^\sigma.\end{aligned}$$

因此，若 ω_0 充分小（取决于 N），则有

$$N_{\tilde{u}}(0,\frac{1}{4}) \le N_1,$$

其中 N_1 仅取决于 N （事实上，类似于（5.5）的证明，可以证明 $N_1 \le 2N+3$）。由引理3.2，若 ω_0 充分小，则在 $\partial V \cap B_{1/16}$ 上存在 x_0，使得 $|x_0| \le \omega_0$ 且

$$N_{\tilde{u}}(x_0,\frac{1}{8}) \le N_2,$$

其中 N_2 仅取决于 N。由引理5.2 可知，存在$\mu=\mu(d,L,N)$， $\alpha=\alpha(L)$及 $z\in\partial V\cap B_{1/40}$，使得

$$|\tilde{u}(x)| \ge c_N \tilde{\delta}(x)^\alpha, \quad \text{for all } x\in \tilde{B}_{\mu,+}(z),$$

其中 $\tilde{\delta}(x)=\operatorname{dist}(x,\partial V)$，且$\tilde{B}_{\mu,+}(z)=V\cap B_\mu(z)$。

因此，我们有

$$|u(x)| \ge c_N\tilde{\delta}^\alpha(x) - C_N\omega_0^\sigma.$$

因此 $|u(x)|>0$ 若 $\tilde{\delta}(x) > C_N\omega_0^{\sigma/\alpha}$。注意 $\delta(x)<\tilde{\delta}(x)$。设 ρ 为引理5.1 中对应于 $M=C_de^{72N+C_d}$的常数，其中 C_d 是一个仅依赖于 d 的绝对常数，并且 M 将说明如何确定。现在选取 ω_0充分小，使得 $C_N\omega_0^{\sigma/\alpha}<\frac{1}{2}\rho\mu$，于是

$$|u(x)|>0, \quad \text{if } x\in\tilde{B}_{\mu,+}(z) \text{ and } \delta(x)>\frac{1}{2}\rho\mu.$$

由（5.7），对于 $\omega_0<\frac{1}{4}\rho\mu$，存在某个 $y\in\partial\Omega\cap B_{1/40}$ 使得 $|y-z|\le\omega_0<\frac{1}{4}\rho\mu$。因此，$B_{\frac{1}{2}\mu,+}(y)\subset B_{\mu,+}(z)$。由此可得

$$|u(x)|>0 \quad \text{if } x\in B_{\frac{1}{2}\mu,+}(y) \text{ and } \delta(x)>\frac{1}{2}\rho\mu. \tag{5.8}$$

最后，固定 μ 和 ρ 后，我们说明如何确定 M，并应用引理5.1 得出结论。根据（5.6）以及一个标准论证（详见引理 A.6），我们有

$$\sup_{1/10<r\le 1/5} N_u(x,r) \le 12N+C_d, \quad \text{for all } x\in B_{1/40,+}(0), \tag{5.9}$$

其中 C_d 仅依赖于 d。令 $m = m(d, N, L)$ 为满足 $2^{-m} \le \mu\ell/100$的最小整数，其中 $\ell = \frac{1}{1+L}$。令 $\varepsilon = \varepsilon(d, N, L) > 0$ 为一个足够小的数，使得 $(1+\varepsilon)^m \le 2$。现在令 ω_0, γ_0 足够小，使得倍增指标的几乎单调性和（5.9）推出

$$\begin{aligned}\sup_{\mu\ell/1000<r\le 1/5} N_u(x,r) &\le \sup_{2^{-m}/10<r\le 1/5} N_u(x,r)\\ &\le (1+\varepsilon)^{m-1} \sup_{1/10<r\le 1/5} (N_u(x,r)+1)\\ &\le 24N + C_d.\end{aligned}$$

应用与（5.3）相同的论证，我们得到

$$\sup_{\mu\ell/500<r\le 1/10} \frac{\int_{B_{2r}(x)} u^2}{\int_{B_r(x)} u^2} \le C_d e^{72N+C_d} = M, \quad \text{for all } x \in B_{1/40,+}(0). \tag{5.10}$$

鉴于我们对 ρ（对应于 M）的选择，以及（5.8）和（5.10），我们可以应用引理 5.1，得出 $|u| > 0$属于 $B_{\frac{1}{8}\mu,\ +}$（y）。□

为结束本节，我们用长方体的术语重述上述引理。

引理 *5.4*。设 Ω 是一个拟凸 *Lipschitz* 域，其在 $0 \in \partial\Omega$ 附近的局部边界由 $x_d = \phi(x')$ 给出，如第 *4.2* 节和 $|\nabla\phi| \le L$ 中所述。设 $N > 0$。存在 $k_0 \ge 5$、$\gamma_0 > 0$ 和 $\omega_0 > 0$（取决于 N、d 和 L），使得以下结论成立。假设 $\frac{1}{2}I \le A \le 2I$、$|\nabla A| \le \gamma_0$、$\omega(1) \le \omega_0$ 且u 是 B_1 中的一个 A-调和函数，$+$ 在 $B_1 \cap \partial\Omega$ 上满足 $u = 0$。设 $Q \subset B_{1/64}$ 是一个以 $\partial\Omega$ 为中心的边界长方体，且 $N_u^*(Q) \le N$。那么对于任意 $k \ge k_0$，存在 $q \in \mathcal{B}_k(Q)$，使得 $Z(u) \cap q = \varnothing$。

6. Estimate of nodal sets

本节将结合引理 4.2 和引理5.4证明主定理。证明类似于 [21]。

6.1. 的节点集 A-调和函数。我们首先回顾解析或 Lipschitz 系数情形下节点集的内部估计。

引理 6.1。存在 $r_0 = r_0(A) > 0$，使得若 q 是一个长方体，且$s(q) < r_0$，并且 u 在 $(2d\Lambda)q$ 中是 A-调和函数，则

$$\mathcal{H}^{d-1}(Z(u) \cap q) \le C_0 N_u^*(q)^\beta s(q)^{d-1}, \tag{6.1}$$

其中，$\beta = 1$ 若 A 为实解析，且 $\beta > 1$ 若 A 为 *Lipschitz*。

注 6.2。对于上述引理中的 Lipschitz 系数情形，结论 (6.1) 可由 [19, 定理 6。1]得出。对于解析系数情形，该估计实质上已包含在 [6]中。下面简要概述在我们当前设定下的证明。令原点为 q的中心。由解析拟椭圆性可得

$$\frac{|\partial^\alpha u(0)|}{\alpha!} \le \left(\frac{C_1}{r}\right)^{|\alpha|} \|u\|_{L^\infty(B_r)}, \tag{6.2}$$

对所有 $r \in (0, r_0]$，其中 α 是多重指标，且 C_1 和 r_0 取决于 A的解析性。根据 $u(x)$关于 B_r的泰勒级数，我们可以将 u延拓为定义在 $\mathbb{B}_{c_1 r}$ 中的全纯函数: $= \{z \in \mathbb{C}^d : |z| < c_1 r\}$ 使得

$$\sup_{z \in \mathbb{B}_{c_1 r}} |u(z)| \le C_2 \|u\|_{L^\infty(B_r)}, \tag{6.3}$$

其中 $c_1 < 1$和 C_2 取决于 C_1。通过有限次应用内部倍增不等式，我们得到

$$\|u\|_{L^\infty(B_r)} \le e^{CN_u^*(q)} \|u\|_{L^\infty(B_{cr/2})}.$$

结合上述两个估计，我们得到

$$\sup_{z \in \mathbb{B}_{c_1 r}} |u(z)| \le e^{CN_u^*(q)} \|u\|_{L^\infty(B_{c_1 r/2})}. \tag{6.4}$$

因此，应用 [6, 命题 6.7]可得

$$\mathcal{H}^{d-1}(Z(u) \cap B_{c_2 r}) \le C_3 N_u^*(q) r^{d-1}, \tag{6.5}$$

其中 $c_2 < 1$ 是一个依赖于 C_1的常数。注意，(6.5) 对所有$r \le$ 最小值$\{r_0, s(q)\}$ 均成立。因此，将 (6.5) 应用于覆盖q的一组有限个球，我们得到实解析系数情形下的 (6.1)。

常数 C_0 在 (6.1) 中（取决于 C_1 在 (6.2) 中，而不取决于具体的 u）可以用 A的定量解析性来表示，例如泰勒级数的收敛半径。在后文应用引理 6.1时， q 可能是非常靠近边界的小长方体。为保证 (C_0 6.1) 中的常数 q 一致，我们需要控制系数在趋近边界时的解析性。一个简单的做法是假设 A 在 Ω 中解析；换句话说， A 在边界处也解析（ A 的泰勒级数在任意边界点的某个邻域内收敛）。因此，Ω 的紧致性保证了 (6.1) 中 C_0的统一有界性。不过，为简洁起见，本文将简单地称 A 为解析（或实解析）。

Define $N_u^{**}(Q) = N_u^*(Q) + 1$.

定理 6.3。设 u 在 $B \cap \Omega$ 中是 A-调和的，且在 $B \cap \partial\Omega$上为零。设 Q 为标准边界长方体，满足 $Q \subset \frac{1}{10}B$。那么存在$r_0 = r_0(A,\Omega) > 0$和 $C_0 = C_0(A, \Omega) > 0$，使得若 $s(Q) \le r_0$，

$$\mathcal{H}^{d-1}(Z(u) \cap Q) \le C_0 N_u^{**}(Q)^{\beta} s(Q)^{d-1}. \tag{6.6}$$

其中，如果 A 是实解析的，则 $\beta = 1$；如果 A 是 *Lipschitz* 的，则 $\beta > 1$。

证明。不失一般性，设 Q 的中心为 $0 \in \partial\Omega$。经过仿射变换，我们可以假设 $A(0) = I$，于是 Q 变为一个重标度后的长方体，该长方体包含于某个大小相当的标准长方体中，仍记为 Q。因此，只需在此情形下证明（6.6），其中 $s(Q) \le r_0$。

首先说明如何确定 r_0。设 N_0 和 k_0 由引理 4.2 给出，它们仅依赖于 A 和 Ω。另设引理 5.4 中的 $N = N_0$，并令k 取引理 4.2 和引理 5.4 中 k_0 的最大值。现在，令 γ_0和 ω_0 分别由引理 4.2 和引理 5.4 给出，取其中较小者。注意，所有这些参数仅依赖于 A 和 Ω。现在，我们可以进行重标度 $x \to x/r_1$，使得 $\frac{1}{2}I \le A \le 2I$、$|\nabla A| \le \gamma_0$ 位于 Q 中，并且 $\omega(32) \le \omega_0$ 位于B_1、$_+(0)$ 中，其中 $r_1 = Cr_0$ 和 $Q \subset B_{1/64}(0)$。注意，此时 r_0 仅依赖于A 和 Ω。因此，引理 4.2 和引理 5.4 均适用于 Q 及其所有边界子长方体。再次强调，由于（6.6）是尺度不变的，我们只需在这一重标度后的情形下证明（6.6）。

设 K 为一个紧集 $K \subset \Omega$。我们希望证明

$$\mathcal{H}^{d-1}(Z(u) \cap Q \cap K) \le C_0 N_u^{**}(Q)^{\beta} s(Q)^{d-1}, \tag{6.7}$$

对于某个常数 C_0，其独立于 K。显然，如果 Q 足够小，使得 $Q \cap K = \varnothing$，那么 $\mathcal{H}^{d-1}(Z(u) \cap Q \cap K) = 0$。我们通过归纳法，从小的边界长方体到大的边界长方体证明（6.7）。

令 $k \ge 1$ 为待定量。令（Q，$\mathcal{B}_k$，$\mathcal{I}_k$）为第 4.2节中的标准分解。假设对于每个小的边界长方体 $q \in \mathcal{B}_k$，

$$\mathcal{H}^{d-1}(Z(u) \cap q \cap K) \le C_0 N_u^{**}(q)^{\beta} s(q)^{d-1}.$$

注意，归纳法的基础情形 $q \cap K = \varnothing$ 是显然的。

现在考虑

$$\mathcal{H}^{d-1}(Z(u) \cap Q \cap K) \le \sum_{q \in \mathcal{I}_k} \mathcal{H}^{d-1}(Z(u) \cap q) + \sum_{q \in \mathcal{B}_k} \mathcal{H}^{d-1}(Z(u) \cap q \cap K).$$

根据引理 6.1,

$$\sum_{q\in\mathcal{I}_k}\mathcal{H}^{d-1}(Z(u)\cap q)\le C_1\sum_{q\in\mathcal{I}_k}N_u^{**}(q)^{\beta}s(q)^{d-1}\le C_kN_u^{**}(Q)^{\beta}s(Q)^{d-1}. \quad (6.8)$$

其中 $\beta=1$ 若 A 是实解析的，且 $\beta>1$ 若 A 是 Lipschitz 的。对于所有其他边界长方体 $q\in\mathcal{B}_k$，由备注 3.5

$$N_u^{**}(q)\le(1+\varepsilon)^kN_u^{**}(Q),$$

若 Q 足够小。结合引理 4.2 和引理 5.4（取 $N=N_0$），可知存在仅依赖于 d、L的 $k\ge1$，使得存在一个立方体 $q_0\in\mathcal{B}_k$，满足以下二者之一：$N_u^*(q_0)\le\frac12N_u^*(Q)$，或 $Z(u)\cap q_0=\varnothing$。不失一般性，假设 $N_0\ge10$。由于当 $N\ge N_0$时第一种情况成立，因此 $N_u^*(q_0)\le\frac12N_u^*(Q)$ 蕴含 $N_u^{**}(q_0)\le\frac23N_u^{**}(Q)$。回想一下，$\mathcal{B}_k$有 $2^{k(d-1)}$个子长方体。对每个边界子长方体应用归纳论证，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{q\in\mathcal{B}_k}\mathcal{H}^{d-1}(Z(u)\cap q\cap K)\\
&=\sum_{q\in\mathcal{B}_k,q\neq q_0}\mathcal{H}^{d-1}(Z(u)\cap q\cap K)+\mathcal{H}^{d-1}(Z(u)\cap q_0\cap K)\\
&\le\sum_{q\in\mathcal{B}_k,q\neq q_0}C_0N_u^{**}(q)^{\beta}s(q)^{d-1}+C_0(2/3)^{\beta}N_u^{**}(Q)^{\beta}s(q_0)^{d-1}\\
&\le\left\{\frac{2^{k(d-1)}-1}{2^{k(d-1)}}(1+\varepsilon)^{\beta k}+\frac{(2/3)^{\beta}}{2^{k(d-1)}}\right\}C_0N_u^{**}(Q)^{\beta}S(Q)^{d-1}.
\end{aligned}\quad (6.9)$$

由于 $\beta\ge1$ 和 $k\ge3$ 固定，我们选取足够小的 ε（这里需要使$r_0=r_0(A,\Omega)$ 足够小），并选取足够大的 C_0，使得

$$C_k+\left\{\frac{2^{k(d-1)}-1}{2^{k(d-1)}}(1+\varepsilon)^{\beta k}+\frac{(2/3)^{\beta}}{2^{k(d-1)}}\right\}C_0\le C_0.$$

注意，C_0 不依赖于紧集 K。因此，结合 (6.8) 和 (6.9)，可得 (6.7)，令 K 穷尽 $Q\cap\Omega$，即可推出 (6.6)。□

6.2. 狄利克雷特征函数。 设 Ω 是一个有界拟凸 Lipschitz 域。设 φ_λ 是对应于特征值 $\lambda>0$的狄利克雷特征函数，即，在 Ω 内有 $\mathcal{L}(\varphi_\lambda)=\lambda\varphi_\lambda$，且在 $\partial\Omega$ 上有 $\varphi_\lambda=0$。设

$$u_\lambda(x,t)=e^{t\sqrt{\lambda}}\varphi_\lambda(x).$$

~ ~那么，u_λ 在 $\Omega:=\Omega\times\mathbb{R}$中是 A-调和的，其中

$$\widetilde{A}(x,t)=\begin{bmatrix}A(x)&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

引理 6.4. 如果 *Lipschitz* Ω是拟凸的，那么Ω也是拟凸的。

证明。 首先注意到 $\partial\Omega = \partial\Omega \times \mathbb{R}$。设 $(x_0, t_0) \in \partial\Omega$。则 $x_0 \in \partial\Omega$。由于 Ω 是拟凸的，我们可以旋转区域 Ω，使得 $\partial\Omega$ 的局部图像由 Lipschitz 图 $x_d = \phi(x')$ 给出，其中 $\phi(x_0') = 0$ 并且对于 $|x' - x_0'| < r_0$，

$$\phi(x') \geq -|x' - x_0'|\omega(|x' - x_0'|).$$

显然， $\partial\Omega$ 的局部图像由 $x_d = \phi(x', t) := \phi(x')$ 给出。因此，对于任意$|(x', t) - (x_0', t_0)| < r_0$

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}(x', t) &\geq -|x' - x_0'|\omega(|x' - x_0'|) \\ &\geq -|(x', t) - (x_0', t_0)|\omega(|(x', t) - (x_0', t_0)|),\end{aligned}$$

根据定义，这表明 Ω 是拟凸的，且具有相同的拟凸模量。 □

下面的引理给出了 A-调和延拓 u_λ 的倍增指标界。

引理 6.5。 设 Ω是一个有界拟凸 *Lipschitz* 域。设 u_λ 为在 Ω 中的狄利克雷特征函数 φ_λ 的 A-调和延拓。存在$r_0 = r_0(A,\Omega) > 0$，使得若 $(x, t) \in$属于Ω 且 $0 < r < r_0$，则 $N_{\varphi_\lambda}((x, t)\ r) \leq C_r\sqrt{\lambda}$，其中 C_r 仅依赖于 r、A 和 Ω。

证明。 证明是标准的。对于 Lipschitz 域的情形，我们通过沿一串球应用三球不等式，参见 [21]；对于光滑域的情形，参见 [6, 7]。细节从略。 □

最后，我们证明定理1.2。

定理*1.2*的证明。 设 φ_λ 为对应于特征值 $\lambda > 0$的狄利克雷特征函数。设 $u_\lambda = e^{t\sqrt{\lambda}}\varphi_\lambda$ 为 $\widetilde{A}$在 φ_λ 于$\Omega = \Omega \times \mathbb{R}$中的 $Z(u_\lambda) = Z(\varphi_\lambda) \times \mathbb{R}$。因此，只需估计在 Ω u_λ 中的节点集 $\times [-1, 1] \subset \Omega$。

设 r_0 如定理 6.3 或引理6.5所述，取较小者。设 $\Omega_I = \{x \in \Omega : \delta(x) > cr_0\}$。则 $\Omega_I \times [-1, 1]$ 可由一列球 B_i 覆盖，且这些球的半径为 $cr_0/100$，并且 $10B_i \subset \Omega \times [-2, 2]$。注意，这些球的数量仅取决于 cr_0、d 以及 Ω。由引理6.1和引理6.5

$$\mathcal{H}^d(Z(u_\lambda) \cap \Omega_I \times [-1, 1]) \leq \sum_i \mathcal{H}^d(Z(u_\lambda) \cap B_i) \leq C\lambda^{\beta/2}.$$

另一方面，设 $\Omega_B = \Omega \setminus \Omega_I$。则 $\Omega_B \times [-1,1]$ 可由一族边界球 B'_k 覆盖，这些球的球心位于 $\partial\Omega \times [-1,1]$ 上，半径为 $10cr_0$。这些球的数量仅取决于 cr_0、d 以及 Ω。对于其中每个球 B'_k，$\backsim B'_k \cap \partial\Omega$ 可以经过旋转变换为局部图像，使得 B'_k 完全包含在一个长方体 Q_k 中，其中 $s(Q_k) \le r_0$。因此，定理6.3 和引理6.5 表明

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^d(Z(u_\lambda) \cap \Omega_B \times [-1,1]) &\le \sum_k \mathcal{H}^d(Z(u_\lambda) \cap Q_k) \\ &\le \sum_k CN^{**}(Q_k)^\beta s(Q_k)^d \\ &\le C(1+\lambda)^{\beta/2} \\ &\le C\lambda^{\beta/2}.\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{H}^d(Z(u_\lambda) \cap \Omega \times [-1,1]) \le C\lambda^{\beta/2}$. 这就得到了所需的$\mathcal{H}^{d-1}(Z(\varphi_\lambda))$估计。□

Appendix A.

A.1. 一条处处非凸或 C^1的拟凸Lipschitz曲线。我们构造一条位于 (0，1) 内的拟凸Lipschitz曲线，它既不是 C^1，也不在 (0，1) 的任何子区间上凸。首先，令 $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ 为 $[0,1]$ 中所有有理数构成的列表，并定义一个非负拉东测度

$$\mu = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}\delta_{q_k},$$

其中 δ_{q_k}是位于 q_k处的狄拉克测度。现在令 $f(t) = \mu((0, t))$。注意，f是有界非递减函数，且 $f(0) = 0$，$f(1) = 1$。此外，f在 (0，1) 的任何子区间上都不连续。令

$$\phi(x) = \int_0^x f(t)dt - x^2.$$

由于 $\int_0^x f(t)dt$ 是凸的，且 x^2 是 C^1，不难看出 $\phi(x)$ 是拟凸且 Lipschitz 的。

由于 f 在 (0，1) 的任意子区间内都不连续，因此显然，ϕ 在 (0，1) 的任意子区间内都不是 C^1。现在我们证明，ϕ 在 (0，1) 的任意子区间内都不是凸的。只需证明，ϕ'' 在 (0，1) 的任意子区间上都不是非负拉东测度。事实上，

$$\phi'' = -2 + \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}\delta_{q_k}.$$

将 (0，1) 划分为 2^j 个等长子区间，每个子区间的长度为 2^{-j}。对于任意这样的区间I，如果不存在 q_k 使得 $1 \le k \le j$ 在 I 中下降，那么

$$\phi''(I) \le -2|I| + \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{-k} \le -2^{-j} < 0.$$

换言之，至多有 j 个子区间（总共 2^j 个子区间）满足 $\phi''(I) \ge 0$。随着 j 趋于无穷，我们看到 ϕ'' 不可能在任何非空子区间上非负。

A.2. **命题 3.1 的证明**。 我们调整 [1], [18]中的论证，着重强调 Lipschitz 系数的作用。回顾一下，我们假设了 $A(0) = I$并定义了

$$\mu(x) = \frac{x \cdot A(x)x}{|x|^2}. \tag{A.1}$$

利用关于 A的标准假设，我们可以验证

$$|\nabla \mu| \le C\gamma \quad \text{and} \quad \Lambda^{-1} \le \mu(x) \le \Lambda. \tag{A.2}$$

我们选取 $w(x) = {}^{A}(\frac{x}{\mu}\frac{x}{x})()$ 并直接验证

$$\partial_j w_i(x) = \delta_{ij} + O(\gamma|x|).$$

对 $H(r)$关于 r求导，得到

$$H'(r) = \frac{d-1}{r}\int_{\partial B_r \cap \Omega} \mu u^2 \, d\sigma + 2 \int_{\partial B_r \cap \Omega} \mu u \frac{\partial u}{\partial r} \, d\sigma + \int_{\partial B_r \cap \Omega} \frac{\partial \mu}{\partial r} u^2 \, d\sigma, \tag{A.3}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{|x|} \cdot \nabla$。与 $\mathcal{L} = -\nabla \cdot (A\nabla)$ 相关的余法向导数定义为 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = n \cdot A\nabla u$，其中 n 是边界的外法向量。由于$\mathcal{L}(u)$ 在 $B_r \cap \Omega$ 中 $= 0$，且在 $B_r \cap \partial\Omega$ 上 $u = 0$，经分部积分可得

$$\int_{B_r \cap \Omega} A\nabla u \cdot \nabla u = \int_{\partial B_r \cap \Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma. \tag{A.4}$$

注意，在 $\partial B_r \cap \Omega$ 上，$n(x) = \frac{x}{|x|}$。令

$$\tau = A\frac{x}{|x|} - \mu\frac{x}{|x|}.$$

注意到，由于在 ∂B_r 上有 $\tau \cdot n = 0$，因此 τ 是 ∂B_r 上的切向量场。此外，利用在 $\partial B_r \cap \Omega$ 上的 $n = \frac{x}{|x|}$，我们可以将 $\tau = (\tau_i)$ 重写为

$$\tau_i = a_{ij}n_j - a_{ml}n_m n_l n_i = a_{ij}n_j n_m n_m - a_{ml}n_m n_l n_i.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\tau\cdot\nabla &= a_{ij}n_jn_mn_m\partial_i - a_{ml}n_mn_ln_i\partial_i\\ &= a_{ij}n_jn_mn_m\partial_i - a_{ij}n_in_jn_m\partial_m\\ &= a_{ij}n_jn_m(n_m\partial_i - n_i\partial_m),\end{aligned}\tag{A.5}$$

其中，在第二个等式中，我们交换了指标 m 和 i，以及 l 和 j。关键在于，$(n_m\partial_i - n_i\partial_m)$ 是 $\partial B_r\cap\Omega$ 上的切向导数，因此可以在边界上进行分部积分。由于 $u=0$ 在 $B_r\cap\partial\Omega$ 上，对其进行分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_r\cap\Omega}\nabla(u^2)\cdot\tau\,d\sigma &= \int_{\partial B_r\cap\Omega}a_{ij}n_jn_m(n_m\partial_i - n_i\partial_m)u^2d\sigma\\ &= -\int_{\partial B_r\cap\Omega}u^2(n_m\partial_i - n_i\partial_m)(a_{ij}n_jn_m)d\sigma\\ &= \int_{\partial B_r\cap\Omega}u^2(n_m\partial_i - n_i\partial_m)(n_in_m)d\sigma\\ &\quad -\int_{\partial B_r\cap\Omega}u^2(n_m\partial_i - n_i\partial_m)((a_{ij}-\delta_{ij})n_jn_m)d\sigma\\ &= O(\gamma)H(r),\end{aligned}\tag{A.6}$$

其中我们使用了 $A(0)=I$，以及 A 和 n 在光滑边界 $\partial B_r\cap\Omega$ 上的 Lipschitz 连续性，还有观察到的 $(n_m\partial_i - n_i\partial_m)(n_in_m)=0$。因此，由 (A.6) 可得

$$\begin{aligned}D(r)=\int_{\partial B_r\cap\Omega}u\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\sigma &= \int_{\partial B_r\cap\Omega}\mu u\frac{\partial u}{\partial r}\,d\sigma + \int_{\partial B_r\cap\Omega}u\nabla u\cdot\tau\,d\sigma\\ &= \int_{\partial B_r\cap\Omega}\mu u\frac{\partial u}{\partial r}\,d\sigma + \frac{1}{2}\int_{\partial B_r\cap\Omega}\nabla(u^2)\cdot\tau\,d\sigma\\ &= \int_{\partial B_r\cap\Omega}\mu u\frac{\partial u}{\partial r}\,d\sigma + O(\gamma)H(r).\end{aligned}$$

由 (A.3) 可知

$$H'(r)=\frac{d-1}{r}H(r)+2D(r)+O(\gamma)H(r).\tag{A.7}$$

接下来我们考虑 $D'(r)$。我们使用以下 Rellich-Necas 恒等式

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot(w(A\nabla u\cdot\nabla u))\\ &= 2\nabla\cdot((w\cdot\nabla u)A\nabla u) + (\nabla\cdot w)A\nabla u\cdot\nabla u\\ &\quad - 2\partial_iw_ka_{ij}\partial_ju\partial_ku - 2(w\cdot\nabla u)\nabla\cdot(A\nabla u) + w_k\partial_ka_{ij}\partial_iu\partial_ju.\end{aligned}\tag{A.8}$$

直接计算可得

$$w \cdot \frac{x}{|x|} = r \quad \text{and} \quad (w \cdot \nabla u) A \nabla u \cdot \frac{x}{|x|} = \frac{r}{\mu(x)} (\frac{\partial u}{\partial \nu})^2 \quad \text{for } x \in \partial B_r \cap \Omega. \tag{A.9}$$

在 $B_r \cap \partial\Omega$ 上，由于 $n = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$（若 $\nabla u \neq 0$），我们有

$$(w \cdot n) A \nabla u \cdot \nabla u = (w \cdot \nabla u) A \nabla u \cdot n = \frac{(Ax \cdot n)(An \cdot n)}{\mu(x)} |\nabla u|^2. \tag{A.10}$$

当 $\nabla u = 0$时，这个恒等式显然成立。对 Rellich-Necas 恒等式（A.8）积分，得到

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B_r \cap \Omega} A \nabla u \cdot \nabla u \\ &= \frac{1}{r} \int_{B_r \cap \partial\Omega} \frac{(Ax \cdot n)(An \cdot n)}{\eta_1(x)} (\frac{\partial u}{\partial n})^2 \, d\sigma + 2 \int_{\partial B_r \cap \Omega} \frac{1}{\mu} (\frac{\partial u}{\partial \nu})^2 \\ &\quad + \frac{d-2}{r} \int_{B_r \cap \Omega} A \nabla u \cdot \nabla u + O(\gamma) \int_{B_r \cap \Omega} A \nabla u \cdot \nabla u, \end{aligned} \tag{A.11}$$

其中我们用到了以下事实：$\nabla \cdot (A \nabla u) = 0$在 $B_r \cap \Omega$ 中几乎处处成立于 $B_r \cap \partial\Omega$ 上，以及 A 的 Lipschitz连续性。注意到

$$D'(r) = \int_{\partial B_r \cap \Omega} A \nabla u \cdot \nabla u. \tag{A.12}$$

利用假设 $Ax \cdot n \geq 0$ 在 $B_r \cap \partial\Omega$ 上以及（A.12），一方面，我们有

$$\frac{D'(r)}{D(r)} \geq \frac{d-2}{r} + \frac{2 \int_{\partial B_r \cap \Omega} \mu^{-1} (\frac{\partial u}{\partial \nu})^2 \, d\sigma}{\int_{B_r \cap \Omega} A \nabla u \cdot \nabla u} + O(\gamma). \tag{A.13}$$

另一方面，借助（A.7），我们得到

$$\frac{H'(r)}{H(r)} = \frac{d-1}{r} + \frac{2 \int_{B_r \cap \Omega} A \nabla u \cdot \nabla u \, d\sigma}{\int_{\partial B_r \cap \Omega} \mu(x) u^2 \, d\sigma} + O(\gamma). \tag{A.14}$$

现在我们可以证明频率函数的单调性。根据（A.13）、（A.14）、（A.4）以及（$\mathcal{N}_u(0, r)$）在（3.1）中的定义，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{N}_u'(0,r)}{\mathcal{N}_u(0,r)} &= \frac{1}{r} + \frac{D'(r)}{D(r)} - \frac{H'(r)}{H(r)} \\ &\geq \frac{2 \int_{\partial B_r \cap \Omega} \mu^{-1} (\frac{\partial u}{\partial \nu})^2 \, d\sigma}{\int_{\partial B_r \cap \Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma} - \frac{2 \int_{\partial B_r \cap \Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma}{\int_{\partial B_r \cap \Omega} \mu u^2 \, d\sigma} + O(\gamma) \\ &\geq -C\gamma, \end{aligned} \tag{A.15}$$

其中 $\mathcal{N}_u'(0,\ r) = \frac{d}{dr}\mathcal{N}_u(0,\ r)$，并且在最后一个不等式中用到了柯西-施瓦茨不等式。因此，$e^{C\gamma r}\mathcal{N}(0,\ r)$ 关于 r 单调不减。

A.3. **椭圆方程的一些有用结果**。

引理 A.1. 设 Ω 为凸域，且 $0 \in \partial\Omega$。假设 u 在 $B_{1,+} = B_1(0) \cap \Omega$ 内是A-调和的，且 $u = 0$ 在 $\partial\Omega \cap B_1(0)$上成立。那么

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{1/2,+})} \le C\|u\|_{L^2(B_{1,+})}.$$

证明。 不失一般性，假设 $x_d = 0$ 是 Ω 在 0 处的支撑平面。令 $D_{3/4,+} := B_1(0) \cap \{x_d > 0\}$。由 De Giorgi-Nash 估计，

$$K := \|u\|_{L^\infty(B_{3/4,+})} \le C\|u\|_{L^2(B_{1,+})}. \tag{A.16}$$

考虑一个正的屏障函数 v，它在 $D_{3/4,+}$ 内是 A-调和的，并且满足 $v = K$ 在 $\partial B_{3/4} \cap \{x_d > 0\}$ 上以及 $v = 0$ 在 $B_{3/4} \cap \{x_d = 0\}$上。我们证明，对于所有 $x \in D_{5/8,+} = B_{5/8} \cap \{x_d > 0\}$，都有$v(x) \le CKx_d$。这可由 v 在平坦边界上的梯度估计直接得出，即

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(D_{5/8,+})} \le C\|v\|_{L^\infty(D_{3/4,+})} \le CK.$$

这里我们需要 A 至少是 H¨older 连续的。

现在注意到，由于 $|u| \le v$ 在 $\partial B_{3/4,+}$成立，且满足比较原理，因此 $-v \le u \le v$ 在 $B_{3/4,+}$中成立。于是我们有

$$|u(x)| \le CKx_d, \quad \text{for all } x \in B_{5/8,+}.$$

特别地，对于任意满足 $x' = 0$的 $x = (x', x_d)$，我们有 $|u(x)| \le CK\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$。注意，这一论证实际上适用于 $B_{1/2,+}$ 中的任意点，因为任何内部点都可以通过一个垂直支撑平面与边界上最近的点相连。因此，我们得到

$$|u(x)| \le CK\operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \quad \text{for all } x \in B_{5/8,+}.$$

最后，对于任意 $x \in B_{1/2,+}$，令 $\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \le 1/8$（情形 $\delta(x) > 1/8$是平凡的）。由内部梯度估计

$$|\nabla u(x)| \le \frac{C}{\delta(x)}\|u\|_{L^\infty(B_{\delta(x)}(x))} \le \frac{C}{\delta(x)}CK\delta(x) \le CK.$$

这与（A.16）结合，即得所需估计。 □

引理 A.2. 设 $\beta > 0$ 和 $\mathcal{C} = \{x = (x', x_d) :\ 0 \le |x'| < \beta x_d$ 和 $x_d < 1\}$。设 u 是 $\mathcal{C}$中的正 A-调和函数。则存在 $\alpha = \alpha(\beta, \Lambda) > 0$，使得对任意 $0 < t < 1/2$

$$u(0, t) \ge t^\alpha u(0, 1/2).$$

证明。设 $t \in (0, 1/2)$，并假设 $u(0, 1/2) = 1$（不失一般性）。注意，$(0, t)$ 是 $\mathcal{C}$ 的内点，且 $\operatorname{dist}((0, t), \partial\mathcal{C}) \geq \frac{\beta t}{1+\beta}$。那么对于 $t \in [1/4, 1/2)$，$\operatorname{dist}((0, t), \partial\mathcal{C}) \geq \frac{\beta}{4(1+\beta)}$。利用半径为 $\frac{\beta}{8(1+\beta)}$ 的球构成的 Harnack 链，可以将 $(0, 1/2)$ 与任意点 $(0, t)$ 相连，其中 $1/4 \leq t < 1/2$。此类球的数量至多为 $N = N(\beta) \geq 1$。于是由 Harnack 不等式可得

$$u(0, t) \geq c^N u(0, 1/2) = c(\beta, \Lambda) > 0, \quad \text{for all } 1/4 \leq t < 1/2.$$

注意到 $c(\beta, \Lambda) < 1$。重复这一论证，我们可以得到，对于 $k \geq 1$，

$$u(0, t) \geq c^k(\beta, \Lambda), \quad \text{for all } 2^{-k} \leq t < 2^{-k+1}.$$

因此，对于所有 $t \in (0, 1/2)$，

$$u(0, t) \geq 2^{(\log_2 c(\beta,\Lambda))(-2\log_2 t)} = t^{-2\log_2(c(\beta,\Lambda))}.$$

这就得到了所需的估计，其中 $\alpha = -2\log_2(c(\beta, \Lambda)) > 0$。 □

引理 A.3. 设 Ω 是一个 *Lipschitz* 域，且 $0 \in \partial\Omega$。假设 $\partial\Omega \cap B_1(0)$ 由 *Lipschitz* 图 $x_d = \phi(x')$ 给出，并且 $B_{1,+} = \Omega \cap B_1(0) = B_1(0) \cap \{x = (x', x_d) : x_d > \phi(x')\}$。那么，存在 $\alpha, c > 0$（仅依赖于 Λ 和 ϕ 的 *Lipschitz* 常数），使得对 B_1^+ 中任意正的 A-调和函数 u，我们有

$$u(x) \geq c\delta(x)^\alpha u(0, 1/2), \quad \textit{for all } x \in B_{1/2,+}.$$

证明. 假设 $u(0, 1/2) = 1$。首先，根据 Harnack 不等式，对于所有 $x \in B_{7/8,+} \cap \{x = (x', x_d) : x_d > \phi(x') + 1/8\}$，我们有 $u(x) \geq c > 0$。因此，只需考虑任意一点 $x \in B_{1/2,+} \cap \{x = (x', x_d) : \phi(x') < x_d < \phi(x') + 1/8\}$。固定这样一个 $x = (x', x_d)$，并令 $x_0 = (x', \phi(x'))$。令

$$\mathcal{C}_{1/4}(x_0) = \{y = (y', y_d) : 0 \leq |y' - x'| < \beta(y_d - \phi(x')) \text{ and } y_d - \phi(x') < 1/4\},$$

其中 $\beta = \text{最小值}\{1, L^{-1}\}$ 和 L 是 ϕ的 Lipschitz 常数。注意，$\mathcal{C}_{1/4}(x_0)$ 是引理 A.2 中圆锥的缩放和平移版本，并且完全包含于 $B_{1,+}$中。另请注意，x 位于圆锥的垂直轴上 $\mathcal{C}_{1/4}(x_0)$。

令 $x_1 = (x', \phi(x') + 1/8)$。利用 $u(x_1) \geq c$ 并在$\mathcal{C}_{1/4}(x_0)$中应用引理 A.2，我们得到 $u(x) \geq c(x_d - \phi(x'))^\alpha = c|x - x_0|^\alpha \geq c\delta(x)^\alpha$，其中最后一个不等式由以下事实得出：$x$ 位于 $\mathcal{C}_{1/4}(x_0)$的垂直轴上，且该点到边界的距离与 $|x - x_0|$相当。证明至此完成。□

下面的引理将 [21, 引理 9] 从调和函数（通过反射证明）推广到 A-调和函数。我们指出，以下假设$\frac{1}{2}I \le A \le 2I$ 和 $|\nabla A| \le \gamma_0$ 纯粹是出于技术上的便利。

引理 A.4. 存在 $\gamma_0 = \gamma_0(d) > 0$，使得以下结论成立。若 $\frac{1}{2}I \le A \le 2I$, $|\nabla A| \le \gamma_0$ 和 u 是定义在 $B_{2,+} := B_2 \cap \{x_d > 0\}$ 上的连续 A-调和函数，在 $B_2 \cap \{x_d = 0\}$ 上为零且满足$N_u(0, 1/2) \le N$，则存在 $w \in B_{1/2} \cap \{x_d = 0\}$ 和 $t > 0, C > 0$，它们仅依赖于 N 和 A，使得 u 在$B_{t,+}(w)$内不变号。此外，对所有 $x \in B_{t,+}(w)$,

$$|u(x)| \ge C x_d J_u(0,1)^{1/2}.$$

证明. 经归一化，不妨设 $J_u(0,1) = 1$。若 $|\nabla A|$ 小于某个绝对常数 $\gamma_0 = \gamma_0(d) > 0$，则引理 3.4 推出 $N_u(0,r)$ 的几乎单调性。特别地，我们有 $N_u(0, 2^{-k}) \le 2N_u(0, 1/2) \le 2N$ 当 $k = 2, 3$. 因此,

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(B_{1/4,+})} \gtrsim J_u(0, \frac{1}{8}) &= J_u(0,1) \exp\big(-\sum_{k=1}^{3} N_u(0, 2^{-k})\big) \\ &\ge C e^{-5N}. \end{aligned}$$

另一方面，根据引理 4.1，我们有

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(B_{1/4,+})} &\le C\Big(\sup_{B_{1/2} \cap \{x_d = 0\}} |n \cdot A\nabla u|\Big)^{\tau} \|u\|^{1-\tau}_{L^2(B_{1/2,+})} \\ &\le C \sup_{B_{1/2} \cap \{x_d = 0\}} |\nabla u|^{\tau}. \end{aligned}$$

结合上述两个估计，我们知道存在 $w \in B_{1/2} \cap \{x_d = 0\}$，使得 $|\nabla u(w)| = |\partial_d u(w)| \ge C e^{-5N/2\tau}$。不失一般性，假设 $\partial_d u(w) > 0$。现在，利用这样一个事实：$u \in C^{1,\alpha}$ 在 $B_{3/4,+}$中，我们可知存在 $t > 0$（依赖于 N 和 A），使得对于所有 $x \in B_{t,+}(w)$，都有 $\partial_d u(x) \ge \frac{1}{2} C e^{-5N/2\tau}$。这意味着 u 在 $B_{t,+}(w)$中为正，并且根据微积分基本定理满足所需的估计。 □

引理 A.5. 假设 $\Lambda^{-1} I \le A \le \Lambda I$。存在 $\gamma_0 = \gamma_0(d, \Lambda) > 0$，使得下述结论成立。若 $|\nabla A| \le \gamma_0$，且 u 是定义在 $B_{1,+} := B_1(0) \cap \{x_d > 0\}$ 上的连续 A-调和函数，满足 $|u(x)| \le x_d$ 对所有$x \in \partial B_{1,+}$均成立，则对所有 $x \in B_{1,+}$，有 $|u(x)| \le 2x_d$。

证明. 考虑 $w = 2x_d - x_d^2$。显然， $w \geq u$ 在 $\partial B_{1,+}$ 上成立。我们验证，当 γ_0 足够小时，$\nabla \cdot (A\nabla w) \leq 0$。事实上，

$$\nabla \cdot (A\nabla w) = -2a_{dd} + \sum_{i=1}^{d} \partial_i a_{id}(2 - 2x_d) \leq -2\Lambda^{-1} + 2d\gamma_0.$$

因此，若 $\gamma_0 = 1/(\Lambda d)$，则有 $\nabla\cdot(A\nabla w) \leq 0$ 从而 $\nabla\cdot(A\nabla(w-u)) \leq 0$。根据弱最大值原理，

$$\inf_{B_{1,+}} (w - u) \geq \inf_{\partial B_{1,+}} (w - u) \geq 0.$$

因此， $u \leq w \leq 2x_d$ 属于$B_{1,\ +}$。类似地，可以证明 $u \geq -2x_d$ 属于$B_{1,\ +}$。证明至此结束。 □

引理 A.6. 设 Ω A 和 u 与引理 5.3 中相同。若 ω_0 和 γ_0 足够小，则对任意 $x \in B_{1/40,\ +}$，

$$\sup_{\frac{1}{10} < r \leq \frac{1}{5}} N_u(x, r) \leq 12N + C_d,$$

其中 $C_d > 0$ 是仅依赖于 d的绝对常数。

证明。 设 $\varepsilon > 0$足够小，使得 $(1+\varepsilon)^5 \leq 2$。根据假设 (5.6) 和引理 3.4，当 ω_0 和 γ_0 足够小时， $1 \leq k \leq 6$

$$N_u(0, 2^{-k}) + 1 \leq (1 + \varepsilon)^{k-1}(N_u(0, \frac{1}{2}) + 1) \leq 2(N + 1).$$

设 $x \in B_{1/40,+}$ 和 $1/10 < r \leq 1/5$。如果 γ_0 充分小，那么 $A(0)$与 $A(x)$ 之间的差也很小。因此，根据椭球 $E(x, r)$ 的定义，我们有 $E(0, 1/64) \subset E(x, 1/10) \subset E(x, 2/5) \subset E(0,1)$。由此可得

$$\begin{aligned} N_u(x, r) &\leq \log \frac{J_u(x, 2/5)}{J_u(x, 1/10)} \leq \log \frac{CJ_u(0, 1)}{J_u(0, 1/64)} \\ &= \log C + \sum_{k=1}^{6} N_u(0, 2^{-k}) \\ &\leq 12N + C_d, \end{aligned}$$

如所要求。 □

References

[1] V.Adolfsson 和 L. Escauriaza. $C^{1,\alpha}$ 域与边界唯一延拓。*Comm. Pure Appl. Math.*, 50(10):935–969, 1997年。

[2] V. Adolfsson、L. Escauriaza 和 C. Kenig。凸域与边界唯一延拓。Rev. Mat. Iberoamericana, 11(3):513–525, 1995年。[3] G. Alessandrini、L. Rondi、E. Rosset 和 S. Vessella。椭圆方程柯西问题的稳定性。Inverse Problems, 25(12):123004, 47, 2009年。[4] J. Bourgain 和 T. Wolff。关于维数≥ 3中调和函数梯度的一点注记。Colloq. Math., 60/61(1):253–260, 1990年。[5] A. Cianchi 和 V. G. Maz'ya。一类拟线性椭圆方程的全局 Lipschitz 正则性。Comm. Partial Differential Equations, 36(1):100–133, 2011年。[6] H. Donnelly 和 C. Fefferman。黎曼流形上特征函数的节点集。Invent. Math., 93(1):161–183, 1988年。[7] H. Donnelly 和 C. Fefferman。特征函数的节点集：带边界的黎曼流形。载于 Analysis, et cetera，第 251–262 页。Academic Press，美国马萨诸塞州波士顿，1990年。[8] R. M. Dudley。关于凸函数的二阶导数。Math. Scand., 41(1):159–174, 1977年。[9] J. M. Gallegos。Lipschitz 常数较小的 Lipschitz 域边界附近椭圆偏微分方程解的零点集大小。arXiv:2201.12307, 2022年。[10] H. Jia、D. Li 和 L. Wang。拟凸域上散度型椭圆方程的全局正则性。J. Differential Equations, 249(12):3132–3147, 2010年。[11] C. Kenig。二阶椭圆边值问题的调和分析技巧，第 83 卷，CBMS Regional Conference Series in Mathematics。由 Conference Board of the Mathematical Sciences 出版，美国华盛顿特区；由美国数学会出版，美国罗得岛州普罗维登斯，1994年。[12] C. Kenig、F. Lin 和 Z. Shen。格林函数与诺伊曼函数的周期均匀化。Comm. Pure Appl. Math., 67(8):1219–1262, 2014年。[13] C. Kenig 和 Z. Shen。椭圆均匀化问题的层势方法。Comm. Pure Appl. Math., 64(1):1–44, 2011年。[14] C. Kenig 和 Z. Zhao。在 C^1-Dini 域上的边界唯一延拓与奇异集的大小。Arch. Ration. Mech. Anal., 245(1):1–88, 2022年。[15]C. Kenig 和 Z. Zhao。具有大奇异集的非 Dini 域实例。arXiv:2212.01541, 2022年。[16] I. Kukavica 和 K. Nystr¨om。Dini 域上的边界唯一延拓。Proc. Amer. Math. Soc., 126(2):441–446, 1998年。[17] F. Lin 和 J. Zhu。特征值问题中特征函数节点集的上界。Math. Ann., 382(3-4):1957–1984, 2022年。[18] F.-H. Lin。椭圆与抛物方程解的节点集。Comm. Pure Appl. Math., 44(3):287–308, 1991年。[19] A. Logunov。拉普拉斯特征函数的节点集：豪斯多夫测度的多项式上界估计。Ann. of Math. (2), 187(1):221–239, 2018年。[20] A. Logunov。拉普拉斯特征函数的节点集：Nadirashvili 猜想的证明及 Yau 猜想下界的证明。Ann. of Math. (2), 187(1):241–262, 2018年。[21] A. Logunov、E. Malinnikova、N. Nadirashvili 和 F. Nazarov。狄利克雷拉普拉斯特征函数节点集面积的精确上界。Geom. Funct. Anal., 31(5):1219–1244, 2021年。[22] S. Mccurdy。凸域上的唯一延拓。Rev. Mat. Iberoam.，即将发表。

[23] D. Mitrea、M. Mitrea 和 L. Yan。凸域和半凸区域中拉普拉斯算子的边值问题。《函数分析杂志》，258(8):2507–2585，2010年。[24] X. Tolsa。 C^1 域和小常数 Lipschitz 域中调和函数在边界处的唯一延拓。《纯粹与应用数学通讯》，即将刊出。[25] J. Zhu。Robin 和 Neumann 特征函数的边界倍增不等式与节点集。《势分析》，2022年。[26] J. Zhuge。拟凸 Lipschitz 域中双调和方程的弱最大值原理。《函数分析杂志》，279(12):108786，36页，2020年。

Department of Mathematics, Louisiana State University, Baton Rouge, LA70803, USA, Email: zhu@math.lsu.edu

Morningside Center of Mathematics, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China, Email: jpzhuge@amss.ac.cn