arXiv:2303.02055v1 [math.AP] 3 Mar 2023

具有绝对连续调和测度的康托尔集

Guy David* Cole Jeznach† 和 Antoine Julia‡

2023年3月6日

摘要

我们构造了平面中维数较小的阿尔福斯正则康托尔集 K，使得其补集上的豪斯多夫测度等价于调和测度。特别地，$\mathbb{R}^2 \setminus K$ 中的格林函数满足 $G^p(x) \simeq \text{dist}(x, K)^\delta$，只要 $\text{dist}(x, K) \leq 1$ 且 p 远离 K。

目录

1 引言 **2**2 康托尔集的构造 **8**2.1 直线上的构造.82.2 构造的变体.133 格林函数与调和测度 **14**4 平面中的阿尔福斯正则例子 $\mathbb{R}^n$ **22**4.1 主引理及参数的选择 24
4.2 格林函数的控制 .26

*G. David 部分获得了欧洲共同体 H2020 项目 GHAIA 777822 以及西蒙斯基金会项目 601941 的资助，GD。

†C. Jeznach 部分获得了西蒙斯 MPS 合作项目 563916、SM 以及 Max Engelstein 的美国国家科学基金会项目 2000288 的资助。

‡A. Julia 获得了西蒙斯基金会项目 601941 的资助，GD。

1 引言

给定平面中的一个连通域 Ω，其补集具有正容量，且有一点 $x \in \Omega$，调和分析中的一个基本问题是：Ω 在 x 处有极点的调和测度 ω^x，是否与 Ω 边界上的豪斯多夫测度 $\sigma := \mathscr{H}^\delta \llcorner \partial\Omega$ 相比具有可比性，其中 $\delta > 0$ 是 Ω 的维数 ∂。对于测度而言，「可比」可以有几种含义：它们是否具有相同的维数？它们是否彼此绝对连续？如果是，密度 $d\omega^x/d\sigma$ 是否有上界且远离零？

Jones 和 Wolff 在 [JW] 中证明了，ω^x 的维数至多为 1；也就是说，存在一个豪斯多夫维数为 1 的集合，其 ω^x测度是满测度。当 ∂ Ω 的维数大于 1 时（例如，该集合的边界是科赫雪花），这就回答了这一问题。在更高的环境维数中，问题则更为微妙，但 Azzam 最近在 [Az] 中证明，若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的维数为 $s > n-1$ 且是s-阿尔福斯正则，则其补集上的调和测度维数小于 E s。

当 Ω 的边界 $\subset \mathbb{R}^n$ 的余维为 1 时，ω^x 相对于 $\sigma = \mathscr{H}^{n-1} \llcorner \partial$ Ω 的绝对连续性问题，主要取决于非切向可达性和可求长性。已有大量充分条件能够推出 ω^x 与 σ互相绝对连续；例如参见 [AHM+20]。最近也有一些逆向结果，尤其是 Azzam 等人在 [AHM+16] 中证明，若 ω^x 相对于 σ 在 Ω 的某个有限 ∂-测度部分上绝对连续，σ那么该部分是 $(n-1)$-可求长的。关于这一问题的全面综述，请参见 [AHM+16] 。

在本文中，我们主要关注维数小于 1 的边界集 $K \subset \mathbb{R}^2$ 。当 $K = \partial\Omega$ 是维数为 $\delta \in (0, 1)$ 的自相似康托集时，Carleson [Ca], Makarov 和 Volberg [MV], 以及 Batakis [Ba] 证明，ω^x 由一个维数小于 δ 的博雷尔集支撑；一般化结果另见 [BZ] ，与复动力系统相关的类似问题见 [Vo1, Vo2, Zd] 。不过，若将范围限制在调和测度集中的集合上，Batakis 构造了一个维数为 δ 的康托集，使得 ω^x 也具有 δ 维。此外，在一封未发表的信中，Bishop 构造了一个维数较小的非自相似康托集，在该集合上，σ 和 ω 有界等价。但这些特殊的集合非常

不具备阿尔福斯正则性，而 Volberg 最近猜想[Vo3，猜想 19] 指出，对于维数严格小于 1 的阿尔福斯正则集，这种情况不可能发生。更近来，X. Tolsa [To]在集合 K 包含于直线且豪斯多夫维数至少为 $1/2-\varepsilon$的特殊情形下证明了这一猜想。Tolsa 的结果和自相似集的情形表明，Volberg 的猜想是自然的。然而，我们证明它并不成立：

定理 1.1。存在 $\delta_M \in (0,1]$，使得对于 $\delta \in (0,\delta_M)$，存在一个维数为 δ 的紧阿尔福斯正则集 K，使得对于 $x \in \Omega := \mathbb{R}^2 \setminus K$，$\Omega$ 上以 x 为极点的调和测度 ω^x 等价于 $\sigma = \mathscr{H}^\delta \llcorner K$，即

$$C_x^{-1}\sigma(A) \le \omega^x(A) \le C_x\sigma(A) \quad for\ A \subset K, \tag{1.1}$$

对于某个 $C_x \ge 1$。此外，Ω 上以 x 为极点的格林函数 G^x 满足：

$$C_x^{-1}\,\mathrm{dist}\,(y,K)^\delta \le G^x(y) \le C_x\,\mathrm{dist}\,(y,K)^\delta, \tag{1.2}$$

当 y 足够接近 K 时。此外，若 δ 小于某个$\delta_1 \in (0,1/2)$，则集合 K 可以包含在一条直线中。

回顾一下，若紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 至少包含 2 个点，且在 K 上存在一个正测度 μ 和一个常数 $C_0 \ge 1$，使得

$$C_0^{-1}\rho^\delta \le \mu(B(x,\rho)) \le C_0\rho^\delta \quad \text{for } x \in K \text{ and } 0 < \rho \le \mathrm{diam}(K). \tag{1.3}$$

众所周知，此时 μ 等价于豪斯多夫测度 $\mathscr{H}^\delta$ 在 K 上的限制，其含义是

$$C_1^{-1}\mathscr{H}^\delta \llcorner K \le \mu \le C_1\mathscr{H}^\delta \llcorner K \tag{1.4}$$

对于某个常数 C_1，它取决于 n、C_0 和 δ。

更准确地说，Volberg 猜想，满足（1.2）的集合必然具有维数 $\delta = 1$，前提是其补集满足某种可达性条件（$\Omega = \mathbb{R}^2\setminus K$ 应当是一个单侧 NTA 域，例如见 [DFM1]）。我们的集合满足这两个条件。Volberg 还猜想，在这类集合上，两个格林函数之比不可能是解析的。我们不知道，也不认为我们的集合能够为该猜想提供反例。

这两个估计（1.1）和（1.2）是相关的，因为当 $K \subset \mathbb{R}^2$ 是维数为 $\delta < 1$的阿尔福斯正则集时，其补集自动连通，并具有非切向可达性。定义及证明可参见 [DFM1] 第2节（即使对于 $< n-1$ 中的维数为 $\mathbb{R}^n$的阿尔福斯正则集也成立）。因此，我们可以用相应曲面球的调和测度来估计开瓶器点处格林函数的大小。这对于康托尔集而言相当标准（见引理 3.2），但我们也参考了更一般的结果[DFM2], 引理 15.28，该结果适用于我们的情形及该构造的变体。 [DM], 中使用了这一观察，其希望是，对于集合 K，用格林函数对距离函数的逼近来刻画一致可整性可能更为容易。

应当注意到，我们的例子与自相似集非常接近，因为它们与正则分形集双Lipschitz等价；而对于自相似集， ω 与 σ是奇异的。这与余维 1 的情形形成对比，在该情形中，我们所知的所有绝对连续性判据都是双Lipschitz不变的。

在上述表述中，如果我们将范围限制为 $\delta \in [\delta_{min}, \delta_M]$，其中 $\delta_{min} > 0$，就可以确保 Ahlfors 常数C_0 保持有界。我们还可以对 K 进行归一化，使得 diam(K) $= 1$；这样一来，只要 dist(x, K) ≥ 1，并且（比如）dist (y, K) ≤ 1，就可以确保常数 C_x 不依赖于 δ 和 x。

我们将用维数界 $\delta_1 = 0.249$证明定理的第二部分；这是我们在线上能够得到的最佳结果。这个界或许还可以改进，但根据 X. Tolsa 的结果，如果 K 包含于一条直线中，则必然有 $\delta_1 < 1/2$。对于不包含于直线中的集合，我们不作详细证明，而只说明如何调整这一策略。总的来说，我们能够为δ_M 得到的最佳下界略高于 0.4。

我们以调和测度和带有位于有限距离处的极点 x 的格林函数来表述我们的结果（而且已知 x 的具体选择几乎无关紧要），但带有无穷远极点的类似结果也成立。事实上，这正是我们首先要证明的结果，因为构造带有无穷远极点的格林函数更为容易。

对于定理 1.1，我们坚持使用通常的 Laplace算子。寻找其他适用于 L 的椭圆算子更为容易 K，其椭圆测度满足（1.1）和（1.2）。事实上，[DM],已经证明，即使对于维数为 1 的标准自相似四角Cantor集，

我们也可以找到一个适用的椭圆算子 $L = -\operatorname{div} a\nabla$，其标量系数为 a，使得（1.1）和（1.2）的类似结论成立。当前工作也与近年来对适用于高余维边界的椭圆算子的研究有关（例如在 [DFM1]之后）。

我们将在第4节说明如何证明定理1.1 在 $\mathbb{R}^n$, $n > 2$的如下类比命题。

定理1.2。对每个 $n \geq 3$，存在 $\delta_n \in (0, 1]$，使得对于$\delta \in (0, \delta_n)$，我们可以找到一个维数为$n - 2 + \delta$的紧阿尔福斯正则集 K，使得对于 $x \in \Omega :$ $= \mathbb{R}^2 \setminus K$，$\Omega$ 上以 x 为极点的调和测度 ω^x 与 $\sigma = \mathscr{H}^{n-2+\delta} \llcorner K$ 等价，即

$$C_x^{-1}\sigma(A) \leq \omega^x(A) \leq C_x\sigma(A) \quad for\ A \subset K, \tag{1.5}$$

对于某个 $C_x \geq 1$。此外，Ω 上以 x 为极点的格林函数 G^x 满足:

$$C_x^{-1} \operatorname{dist}(y, K)^\delta \leq G^x(y) \leq C_x \operatorname{dist}(y, K)^\delta, \tag{1.6}$$

对于充分接近 E的 y 。

在定理1.1中，我们可以考虑维数为任意（足够小的） K 的集合 $\delta \in (0,1)$，因为任何维数为$\delta > 0$的阿尔福斯正则集都有正的对数容量，因此调和测度是良定义的。在 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$中，情况不再如此，这就是我们将集合的维数限制为大于 $n - 2$的原因。

此外，定理 K 1.2 所给出的集合具有 $K_0 \times S$ 的形式，其中 K_0 是直线 δ 中维数为 L的阿尔福斯正则集，而 S是正交超平面 $n - 2$ 中的维数为 $L^\perp$的单位球面。因此 K 不再是康托尔集，但它仍然不可求长（其维数不是整数）。

如果我们确实想采用同类的构造来寻找一个具有所需性质的康托尔集 $K \subset \mathbb{R}^n$，那么似乎需要找到 A 个 N 点在球面上（或其附近）的构型，其中 N 足够大（使得 K 的维数大于 $m - 2$），并且具有这样的对称性：由 A 中的其他点在 $a \in A$ 处产生的势对所有 $a \in A$都相同。这看起来像是在球面上优化 N 个电荷静电能的汤姆孙问题，也许还需要更大的灵活性，但目前我们不知道该如何推进。

构造策略

现在我们简单介绍证明定理 1.1 的算法。获得一个维数为 K^0 的阿尔福斯正则集 $\delta \in (0,$ **1)** 的一种常用方法，是采用自相似构造。我们从单位区间 $I_0 = [0,1]$ 开始，然后将 I_0 替换为两个长度为 I 的区间$r < 1/2$ ，它们包含于 I_0 的两端；接着将这两个区间中的每一个替换为两个长度为 r^2 的区间，依此类推。在第 n 代，我们得到 2^n 个长度为 r^n 的区间，而所有各代的交集构成一个维数为 δ 的自相似康托集，其中δ 满足 $\delta = -\ln(2)/\ln(r)$。

如果允许集合 $K^0 \subset \mathbb{R}^2$ 不包含在直线中，我们可以从一个正方形开始，在每个角上保留一个较小的正方形；或者甚至从一个圆盘开始，保留 N 与边界等距分布且与边界相切的较小圆盘。这提供了更大的灵活性，我们将在第 2.2 节讨论如何从这样的构造出发，得到康托尔集 $K \subset \mathbb{R}^2$ 其维数略大于我们在直线上构造的康托尔集。

上述集合 $K^0 \subset \mathbb{R}$ 具有自相似性，并且[BZ] 的结果表明，调和测度 ω^x 在 $\mathbb{R}^2 \setminus K^0$ 上集中于一个维数为 K^0 的子集上 $< \delta$。一种理解方式是：在有限尺度下，分解中总会有一些区间获得的调和测度略多于其应得的份额 ω 。这些区间通常位于 K^0的“外部”边界处。由于自相似性，这种不平衡会按几何级数增长，因此我们预计 ω会集中在 K^0 的各个部分上，而这些部分在 K 的构造过程中多次接近 “ 外部 ” 边界。

不过，这种构造仍有一定的调整空间：我们可以沿实数轴稍微平移这些区间，而不损害阿尔福斯正则性。关键在于，如果两个相邻区间远离集合的其余部分，将它们彼此拉开，就会提高布朗运动击中它们的概率。（从解析的角度来看，两个集合的并集的对数容量会随二者之间距离的增大而增加。）因此，在分割一个所得调和测度低于其应得份额的区间时，我们可以让它的后代之间的间距比构造其他部分时稍大一些，从而提高它们的调和测度；事实证明，这足以弥补前一步造成的不平衡。

问题在于，精确计算调和测度

很困难，而且必须立即弥补任何误差，否则误差就会像在自相似情形下一样失控。幸运的是，我们的构造使我们能够计算格林函数。为此，我们运用经典位势理论：它指出，在 K 上的某个概率测度（电荷分布），若其对数（电）势在 K 上为常数，则该测度等于无穷远极点处的调和测度。这个测度称为 的平衡分布 K。此外，相应的势[1] 除相差一个加法常数外，就是无穷远处的格林函数。我们只需找到这个测度μ ，并证明它与豪斯多夫测度等价。我们将构造 K ，使平衡分布 μ恰好是抽象康托尔集 K 上的自然概率测度向 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$的推前。结合 μ 满足（1.3），从而满足（1.4）这一事实，便可得出结论。

现在来定义近似格林函数。我们不再考虑有限个区间的并，而是用有限个由 K_n 2^n 个点组成的族（即上述区间的中心）来近似康托尔集，并估计均匀分布在这些点上的概率测度μ_n 所产生的电势。对于每个点 $x \in K_n$，我们用 $g_n(x)$表示K_n中所有其他点产生的势。如果 g_n 在 K_n 上接近常数，我们就构造 K_{n+1} ，使其g_{n+1} 的振荡更小：这是可行的，因为给定 $x \in K_{n+1}$ 时，对 $g_{n+1}(x)$贡献最大的，是 x 的兄弟节点 $\widetilde{x}$（即 K_{n+1} 中唯一一个具有相同父节点的其他点）；通过调节 x和 $\widetilde{x}$ 之间的距离，就能控制这一贡献的大小。这足以恰好抵消由 g_n的变化所带来的偏差。当然，在第 $n+1$步也会产生另一种偏差，但它并不大，因为 x 和 $\widetilde{x}$ 产生的势与它们的父节点产生的势相差不大，而且受间距影响很小。因此，可以在下一步对其加以控制；总的来说，随着 n 趋于无穷， g_n 的振荡将趋于0。测度 μ_n 收敛到一个自然概率测度 μ ，相应的势将收敛到 μ所产生的势，该势在 K 上为常数。因此， μ 就是调和测度，其势是 $\mathbb{R}^2 \setminus K$的格林函数（相差一个常数）。

我们将在后面的第 2.2 小节讨论构造不包含在一条直线中的康托尔集的几种略有不同的方法 $K \subset \mathbb{R}^2$ ，以及

[1]势是 $e * \mu$ 与二维拉普拉斯算子的基本解的卷积， $e(x) = \ln(|x|)$。

这些方法可以得到维数略大的阿尔福斯正则集，并且这些集合满足定理 1.1 的性质。我们还将在第 4 节介绍如何构造实例 $K \subset \mathbb{R}^n$，$n \geq 3$。与此同时，我们将在第 K_n 和 $K \subset \mathbb{R}$ 节（第2节）更详细地解释其几何构造，然后利用格林函数的估计证明定理 1.1 （见第 3 节）。

2 康托尔集构造

2.1 直线上的构造

我们的康托尔集 $K \subset \mathbb{R}$ 将是“普适康托尔集” $\mathcal{E} := \{-1, 1\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$的一个嵌入。设 $r \in (0, 1/2)$ 和 $a \in [1, 3]$ 给定，稍后再选取。我们定义映射 $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$f(\varepsilon) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}(\varepsilon)}{2}\, r^{k-1}\varepsilon_k, \tag{2.1}$$

其中，对于每个无限词 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) \in \mathcal{E}$ 以及每个 $k \geq 0$，我们选取一个系数 $a_k(\varepsilon) = a_k(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in [1, a]$。对于第一项，我们取 $a_0(\varepsilon) = 1$。重要的是，$a_k(\varepsilon)$（稍后选取）可以依赖于 ε 的前 k 个坐标，但不能依赖于其他坐标。然后令

$$K := \Big\{ f(\varepsilon)\,,\ \varepsilon \in \mathcal{E} \Big\}. \tag{2.2}$$

我们还将使用 $\mathcal{E}_n := \{-1, 1\}^{\{1,\dots,n\}}$ 对 $\mathcal{E}$ 的逼近（可将其视为长度为 n 的词集）以及逼近集 $K_0 = \{0\}$，并且对于 $n \geq 1$,

$$K_n := \Big\{ f_n(\varepsilon) := \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}(\varepsilon)}{2}\, r^{k-1}\varepsilon_k,\ \varepsilon \in \mathcal{E}_n \Big\}.$$

我们将把注意力限制在

$$a \in [1, 3] \quad \text{and } r \in (0, 1/16]; \tag{2.3}$$

在大部分构造过程中，我们不必如此严格，但请注意，$r = 1/16$ correspondsto 对应于维数 $\delta = 1/4$ （因为 $r^\delta =$

1/2），而我们发现用这种构造无法达到这一维数，因此在这里我们不会有任何损失。接着

$$1-\frac{ar}{1-r}\geq\frac{4}{5}. \tag{2.4}$$

我们很快就会验证（在命题2.1 和 2.2中），改变参数 a_n（ε）于（2.1）会得到双Lipschitz等价集 K，尤其是 K 与自相似康托集双Lipschitz等价；该集合是通过令所有 K^0 都取 a_n（ε）等于 1 得到的。于是，由（K 2.3）所构造的集合都是维数为$\delta=-\ln(2)/\ln(r)$ $\leq 1/4$的阿尔福斯正则集。

分形集 K^0 的阿尔福斯正则性验证是经典且简单的：取不变测度 μ，使构成 K^0 的第 n 次近似的每个 2^n 区间都具有相同的测度 2^{-n}，并检验 μ 满足（1.3）即可。不过，鉴于我们对 K的表示（2.2），稍微简便的做法是先验证赋予以下超度量距离的 $\mathcal{E}$是一个阿尔福斯正则度量空间，再证明我们的参数化 f 是双 Lipschitz 的。对于 ε、$\varepsilon'\in\mathcal{E}$，令 $m(\varepsilon,\varepsilon')$ 为满足 $\varepsilon_m\neq\varepsilon'_m$ 的最小整数（若 $\varepsilon=\varepsilon'$，则令 $m(\varepsilon,\varepsilon')$ 为 $=\infty$），并定义 $\mathrm{dist}_r(\varepsilon,\varepsilon'):=r^{m(\varepsilon,\varepsilon')-1}$。这也在有限集 $\mathcal{E}_n$上定义了商距离（记号仍相同）。也就是说，对于 $n\geq 1$ 和 $\overline{\varepsilon}$、$\overline{\varepsilon}'\in\mathcal{E}_n$、$\overline{\varepsilon}\neq\overline{\varepsilon}'$，令$m(\overline{\varepsilon},\overline{\varepsilon}')\in\{1,\dots,n\}$为 $m(\varepsilon,\varepsilon')$ 的共同值，其中 ε 以 $\overline{\varepsilon}$开头，而 ε' 以 $\overline{\varepsilon}'$开头；$\mathrm{dist}_r(\varepsilon,\varepsilon'):=r^{m(\varepsilon,\varepsilon')-1}$ 则在 $\mathcal{E}_n$上定义了一个距离。以下结果是经典的。

命题 2.1. 配备距离 dist_r 的空间 $\mathcal{E}$ 是维数为 δ 的阿尔福斯正则空间：$=-\ln 2/\ln r$。

证明. 在空间 $\mathcal{E}$ 中，球就是 $\mathcal{E}$，而显然的胞元 $Q_n(\overline{\varepsilon})$ 即为 $\overline{\varepsilon}$ 的所有子代中满足 $n\geq 1$ 和 $\overline{\varepsilon}\in\mathcal{E}_n$ 的集合。令 σ 为 $\mathcal{E}$ 上的自然概率测度（即 $\{-1,1\}$ 上显然的概率测度的乘积）；于是 $\sigma(Q_n)=2^{-n}$，而 Q_n 对于 $\rho\simeq r^n$ 是半径为 ρ 的球，因此 $\sigma(Q_n(\overline{\varepsilon}))\simeq\rho^{\delta}$。这就证明了 σ 是维数为 δ 的阿尔福斯正则空间，证毕。 □

命题 2.2。 在条件 (2.4)下，对于 ε，$\varepsilon'\in\mathcal{E}$ 有：

$$\Big(1-\frac{ar}{1-r}\Big)r^{m(\varepsilon,\varepsilon')-1}\leq|f(\varepsilon)-f(\varepsilon')|\leq\frac{ar^{m(\varepsilon,\varepsilon')-1}}{1-r}, \tag{2.5}$$

对于 $n \geq 0$, f_n 也同样成立。特别地，这些映射从赋予距离 dist_r 的 $\mathcal{E}$ （分别为 $\mathcal{E}_n$）到其在 $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$中的像是双 Lipschitz 连续的。

证明。给定 $\varepsilon \neq \varepsilon'$ 属于 $\mathcal{E}$，令 $m = m(\varepsilon, \varepsilon')$。我们可以写成

$$f(\varepsilon) - f(\varepsilon') = \sum_{n=m}^{\infty} \Big(\frac{a_{n-1}(\varepsilon)}{2} \varepsilon_n - \frac{a_{n-1}(\varepsilon')}{2} \varepsilon'_n \Big) r^{n-1},$$

并且由于 $a_{m-1}(\varepsilon) = a_{m-1}(\varepsilon')$（因为 $a_n(\varepsilon)$ 仅依赖于 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$），且 $1 \leq a_n \leq a$，我们有

$$\Big| f(\varepsilon) - f(\varepsilon') - \frac{a_{m-1}(\varepsilon) r^{m-1}}{2} (\varepsilon_m - \varepsilon'_m) \Big| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} a r^{k-1}.$$

利用条件（2.4），我们得到（2.5）。 □

下面进入构造中的关键技术点。定义$g_0 := 0$，并对 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 和 $x \in K_n$，定义

$$g_n(x) := 2^{-n} \sum_{y \in K_n \setminus \{x\}} e(y - x), \tag{2.6}$$

其中，与前面一样， $e(x) = \ln |x|$。

引理 2.3。假设 r和 a 满足条件（2.4），且 r 足够小。固定一个整数 $n \geq 1$，并假设 a_k（ε）已为 $k = 0, \dots, n-2$ 选定，并且对所有 $x \in K_{n-1}$ 都有

$$c_{n-1} \leq g_{n-1}(x) \leq c_{n-1} + 2^{-(n-1)} \frac{\ln a}{2}, \tag{2.7}$$

对于某个实常数 c_{n-1}。那么，可以选择仅依赖于 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ 的 $a_{n-1}(\varepsilon) \in [1, a]$，使得存在 c_n，满足 $|c_n - c_{n-1}| \lesssim n 2^{-n} \ln a$ 并且

$$c_n \leq g_n(x) \leq c_n + 2^{-n} \frac{\ln a}{2} \quad \text{for } x \in K_n. \tag{2.8}$$

证明。固定 $x \in K_n$，并将其在 K_{n-1}中的父节点记为 $\widehat{x}$。我们可以写成

$$g_n(x) = g_{n-1}(\widehat{x}) + 2^{-n} \big(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \big),$$

其中各项 Δ_j 定义如下。第一项反映了 x 的兄弟节点 $\widetilde{x}$ （ $\widehat{x}$的另一个子节点）的影响:

$$\Delta_1 = e(\widetilde{x} - x). \tag{2.9}$$

项 Δ_2 是由 K_{n-1} 中位于点 $\widehat{x}$ 和 x 之间的点 y 产生的势之差; 由于 g_{n-1} 的定义中有 2^{-n+1} ，因此要计数两次:

$$\Delta_2 = 2 \sum_{\substack{y \in K_{n-1} \\ y \neq \widehat{x}}} \big(e(y - x) - e(y - \widehat{x})\big). \tag{2.10}$$

最后， Δ_3 汇总了由第 $n-1$ 层的点 y 产生的、在 x 处的势，与由这些点的子点 y 产生的势之间的差:

$$\Delta_3 = \sum_{\substack{y \in K_{n-1} \\ y \neq \widehat{x}}} \sum_{z \in \mathrm{Ch}(y)} \big(e(z - x) - e(y - x)\big). \tag{2.11}$$

首先估计 Δ_1; 这是我们可以调整、而不会过多影响其余部分的量。对于某个 $\varepsilon \in \mathcal{E}_n$，记 $x = f_n(\varepsilon)$; 于是 $\widehat{x} = f_{n-1}(\widehat{\varepsilon})$（其中从 ε 中去掉 ε_n 得到 $\widehat{\varepsilon}$），并且

$$\Delta_1 = \ln(a_{n-1}(\varepsilon) r^{n-1}/2) = \beta_n + \ln(a_{n-1}(\varepsilon)),$$

其中 β_n 不依赖于 x。我们可以根据 $\widehat{\varepsilon}$（即 ε 的前几个坐标 ε_1，……，ε_{n-1}）来选择 $a_{n-1}(\varepsilon) \in [1, a]$，使得 Δ_1 可以取介于 β_n 和 $\beta_n + \ln(a)$ 之间的任意值。我们这样做，使得

$$g_{n-1}(\widehat{x}) + 2^{-n}\Delta_1 = c_{n-1} + 2^{-(n-1)}\frac{\ln a}{2} + 2^{-n}\beta_n.$$

因此，这个 $a_{n-1}(\varepsilon)$ 恰好补偿了 g_{n-1}相对于常数 $c_{n-1} + 2^{-n}\ln a$ 在 (2.7) 中的偏差。注意， $a_{n-1}(\varepsilon)$ 仅取决于 $n-1$ 的前几项 ε，因此 x 的兄弟节点也采用相同的 $a_{n-1}(\varepsilon)$ 处理。

还需证明 $|\Delta_2| + |\Delta_3| \le \ln(a)$ 4。由于无法控制允许误差的符号，我们将其除以 2。为此，我们将利用以下事实：对于 $|u| < 1$，有

$$|\ln(1 + u)| \le \frac{|u|}{1 - |u|}. \tag{2.12}$$

回忆一下，$\widehat{x}=f_{n-1}(\widehat{\varepsilon})$，其中 $\widehat{\varepsilon}\in\mathcal{E}_{n-1}$ 记录了定义 x的单词的前 $n-1$ 个字母；我们将 $K_{n-1}\backslash\{\widehat{x}\}$ 分解为以下环带

$$\mathcal{Y}_\ell:=\big\{y\in K_{n-1}, y=f_{n-1}(\varepsilon'),\ m(\varepsilon,\varepsilon')=n-\ell\big\},$$

其中 ℓ遍历 $\{1,\dots,n-1\}$。容易验证，$\#\mathcal{Y}_\ell=2^{\ell-1}$。固定 $y\in\mathcal{Y}_\ell$；由（2.5）可得

$$|y-\widehat{x}|\geq\Big(1-\frac{ar}{1-r}\Big)r^{n-\ell-1} \tag{2.13}$$

并且 $|x-\widehat{x}|\leq ar^{n-1}/2$。因此我们可以写成

$$\begin{aligned}|e(y-x)-e(y-\widehat{x})| &= \Big|\ln\frac{|y-x|}{|y-\widehat{x}|}\Big|=\Big|\ln\Big|1+\frac{x-\widehat{x}}{y-\widehat{x}}\Big|\Big|\\ &\leq \frac{ar^{n-1}/2}{\Big(1-\frac{ar}{1-r}\Big)r^{n-\ell-1}-ar^{n-1}/2}\\ &= \frac{ar^\ell}{2\Big(1-\frac{ar}{1-r}\Big)-ar^\ell}.\end{aligned}$$

按照 Δ_2 中的方法对 ℓ 和 $\mathcal{Y}_\ell$ 求和，得到

$$|\Delta_2|\leq 2\sum_{\ell=1}^{n-1}\frac{2^{\ell-1}ar^\ell}{2\Big(1-\frac{ar}{1-r}\Big)-ar^\ell}. \tag{2.14}$$

回顾（2.4）和（2.3），分母至少为 $\frac{8}{5}-ar\geq\frac{8}{5}-\frac{3}{16}>1$；于是 $|\Delta_2|\leq a\sum_{\ell=1}^{+\infty}(2r)^\ell<4r$。取 r足够小，可使 Δ_2任意小（且与 n无关）。

为了估计 Δ_3，我们将利用这样一个事实：$y\in K_{n-1}$ 是其两个子项 y_1、$y_2\in K_n$ 的重心，因此它们产生的势与 y 产生的势不会相差太大。给定 $y\in K_{n-1}\backslash\{\widehat{x}\}$，我们写作

$$\begin{aligned}e(x-y_1)+e(x-y_2)-2e(x-\widehat{y}) &= \ln\Big(\frac{|x-y_1||x-y_2|}{|x-\widehat{y}|^2}\Big)\\ &= \ln\Big|\frac{(x-\widehat{y}+\widehat{y}-y_1)(x-\widehat{y}+\widehat{y}-y_2)}{(x-\widehat{y})^2}\Big|\\ &= \ln\Big|1+\frac{\widehat{y}-y_1+\widehat{y}-y_2}{x-\widehat{y}}+\frac{(\widehat{y}-y_1)(\widehat{y}-y_2)}{(x-\widehat{y})^2}\Big|\\ &= \ln\Big|1-\frac{(\widehat{y}-y_1)^2}{(x-\widehat{y})^2}\Big|\end{aligned}$$

因为 $\widehat{y}-y_2=-(\widehat{y}-y_1)$ 。因此，对于 $\widehat{y}\in\mathcal{Y}_\ell$，（2.12）和（2.13）可得

$$|e(x-y_1)+e(x-y_2)-2e(x-\widehat{y})| = -\ln\Big|1-\frac{|\widehat{y}-y_1|^2}{|x-\widehat{y}|^2}\Big|$$
$$\le \frac{|\widehat{y}-y_1|^2}{|x-\widehat{y}|^2-|\widehat{y}-y_1|^2} \le \frac{a^2r^{2\ell}}{4\big(1-\frac{ar}{1-r}\big)^2-a^2r^{2\ell}},$$

因此，化简并对 $y\in\mathcal{Y}_\ell$ 和 ℓ 求和可得

$$|\Delta_3| \le \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{2^{\ell-1}a^2r^{2\ell}}{4\big(1-\frac{ar}{1-r}\big)^2-a^2r^{2\ell}}. \tag{2.15}$$

与之前一样，当 n足够小时，这个量可以任意小（且与 r 无关）。因此，我们可以选择 r 使得（2.8）成立。

我们还说过 $|c_n-c_{n-1}|\lesssim n2^{-n}\ln a$，这可由上述计算得到；额外的 n 来自这样一个事实： Δ_1中隐含着一个 $\ln(r^{n-1})$。

□

我们刚刚证明，可以构造一类康托尔集，使其 g_n 的振荡在 n 趋于无穷时趋于零。我们将在第3节看到，这些康托尔集满足定理1.1的结论。

2.2 构造的变体

我们验证了（这很简单，但很繁琐），取 $a=2.217$ 和 $r=0.0623$ 时，上述估计给出 $|\Delta_2|+|\Delta_3|\le\ln a/4$；这意味着构造时可以取这些值（并证明引理2.3，进而证明定理1.1）。这些结果是在对a 和 r进行一定优化后得到的，并使用了上述界（2.14）和（2.15）。取这些值可得 $\delta=-\ln(2)/\ln(r)>0.2497$，因此我们可以取 $\delta_M=0.2497$，得到定理1.1 中的例子，它们包含在线上。

我们还对其他 $K\subset\mathbb{R}^2$构造进行了计算，得到了稍好的估计（因为其中的集合 K 分布得更为分散）；对于其中一些构造，我们得到的维数为 $\delta>0.4$ （针对下文所述的四角康托尔集的变体）。然而，采用这些变体，我们仍无法接近 $\delta=1/2$。当然，这并不意味着其他更精巧的构造无法得到$\delta>1/2$，而且这也不会与Tolsa定理 [相]矛盾。

有几种方法可以构造满足（ $K \subset \mathbb{R}^2$ 1.1）且维数更大的康托尔集 $\mathcal{E} = \{-1,1\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$，使其不再位于直线上。对上述构造的一种简单变体，是将之前使用的通用集 $\mathcal{E}(N) = A_N^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 替换为 $A_N \subset \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$, 其中 N是 f 次单位根的集合。接着，我们可以像（2.1）中那样定义 $\varepsilon_k \in A_n$，但使用坐标 N。这样便得到平面上的一个 $a_k(\varepsilon) = 2$进康托尔集；与之前一样，它与采用$\delta = -$构造得到的分形集双Lipschitz等价，并且是维数为$N\ln(/)r\ln(r)$的阿尔福斯正则集。

对于这样的集合，我们可以保持引理 2.3 的表述不变，只需将所有出现的 2 替换为 N；证明过程相同，只有以下几点细节有所不同。首先， Δ_1 的精确公式略有不同，因为现在 $\Delta_1 = \sum_{\widetilde{x}} e(\widetilde{x} - x)$ 中，对 x 的 $N-1$ 个兄弟节点求和时，所得值有所变化。不过， A_N 的对称性意味着这个值只取决于我们对 $a_{n-1}(\varepsilon)$ 的选择，因此对 x 及其兄弟节点而言都相同。这使我们可以像之前那样选取 $a_{n-1}(\varepsilon)$。对于 Δ_2，我们需要用稍微不同的方式估计 $e(y-x) - e(y-\widehat{x})$（我们无法像之前那样利用对数进行精确的代数运算），但主项仍出现在 $y \in K_{n-1}$ 是 $\widehat{x}$ 的兄弟节点时；对于其他项，我们可以利用 $\nabla e($ $y-u)$ 的大小。最后， Δ_3 是一个二阶项，这是由于 A_n 的对称性（或者说 y 是其子节点的重心）；它通常略小，可以用二阶导数处理。我们略去计算，只记录对于 $N = 4$、 $a = 2.63$ 和 $r = 0.033$, 我们得到了所需的估计 $4^n(\Delta_2 + \Delta_3) < \frac{3}{32}\ln(a)$，这使我们可以取 $\delta > 0.406$。

将 N 取为非常大似乎并不能改进这些估计。另一个诱人的变体是保持 $N = 2$ 如上所述，但改用集合 $A = \{-1,1\}$ 和 $A' = iA$（旋转 90 度）。这样就能用矩形来近似 K，其边长之比为 $\sqrt{2}$（并且交替水平和垂直排列）。这似乎并不比正方形好多少。

3 估计格林函数和调和测度

在本节中，我们证明1.1）和（1.2）中的估计，这些估计适用于 K 上一节构造的康托尔集。主要工具是

引理2.3中的估计（2.8），由此我们可以得到域 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus K$中无穷远极点处格林函数和调和测度的良好估计。

在此之前，我们先给出一个适用于域 Ω 中正调和函数的有用边界估计。该估计依赖于 Ω 是一致域这一事实，即 Ω 具有内部 Harnack 链和内部开瓶器点。我们不加证明地使用这一事实，因为[DFM1的引理 2 已证明了这一点。2] 这也是 δ- 阿尔福斯正则性 ∂ Ω 的推论， $\delta < 1$不过，对于我们的康托尔集，也可以相当明确地证明哈纳克链和内部开瓶器点的存在性。

定理 3.1 (([Ai]中的定理 1)。存在 $A_0 > 1$ ，仅依赖于 Ω，使得对于任意 $x_0 \in \partial\Omega$，以及所有 $R > 0$ 充分小的情形，以下结论成立。若 u， v 是 Ω $\cap B(x_0, A_0R)$ 上的正有界调和函数，且在 $\partial\Omega \cap B(x_0, A_0R)$上取零，则

$$C^{-1}\frac{u(y)}{v(y)} \leq \frac{u(x)}{v(x)} \leq C\frac{u(y)}{v(y)},$$

对所有 $x, y \in \Omega \cap B(x_0, R)$。这里， C仅取决于域 Ω。

另一个重要结果对于康托尔集尤其有用，它给出了格林函数与集合中那些被环域和其余部分隔开的部分上的调和测度值之间的比较。我们在 [MV] 中发现了这一表述，它是引理 3.4。

引理 3.2。设集合 $K \subset \mathbb{R}^2$ 是阿尔福斯正则的，并且存在一个环域 A: $= B(x, (1+\eta)R)\setminus B(x, (1-\eta)R) \subset \mathbb{R}^2\setminus K$。固定 $x_0 \in \mathbb{R}^2$，使得 dist(x_0, K) ≥ 1，对于 $y \in A$，有:

$$\omega^{x_0}(K \cap B(x, R)) \simeq G(x_0, y), \tag{3.1}$$

不等式中的常数仅取决于 η 和 K的阿尔福斯正则性常数。

证明。固定 $z \in \partial B(x, (1 + \eta/2)R)$，由 Bourgain 引理（ [AHM+16]中的引理 3.4）可得 $\omega^z(K \cap B(x, (1 - \eta)R)) \simeq 1$。固定 $z \in\partial B(x, ($ $1 + \eta/2)R)$ 和 $y \in \partial(B(x, (1 - \eta/2)R))$，由最大值原理可得 $G^z(y) \gtrsim 1$。阿尔福斯正则性条件意味着 K 满足所谓的容量-密度条件（参见

例如 [To] 的第 2.1 节），因此 $K \cap B(x, (1-\eta)R)$ 的对数容量与 R 可比。令 G 为域 $\mathbb{R}^2 \setminus (K \cap B(x, (1-\eta)R))$ 的格林函数（有两个变量；根据共形映射下的不变性，∞ 是一个普通点）。容量估计意味着 $G(y, \infty) \lesssim 1$。由最大值原理和哈纳克不等式，对于 $z \in \partial B(x, (1+\eta/2)R)$，有：

$$G(z, y) \leq \widetilde{G}(z, y) \simeq \widetilde{G}(y, \infty) \lesssim 1.$$

我们已经证明，对于 $y \in \partial B(x, (1-\eta/2)R)$ 和 $z \in \partial B(x, (1+\eta/2)R)$，有 $G(z, y) \simeq \omega^z(K \cap B(x, R))$。将比较两边视为定义在 $\mathbb{R}^2 \setminus (K \cup B(x, (1+\eta/2)R))$ 中关于 z 的有界非负调和函数，并且它们在 $K \setminus B(x, (1+\eta/2)R)$ 上为零，由定理 3.1（并经过一次反演）可得，对 $x_0 = z$，只要其不太靠近 K，(3.1) 就成立。 □

记

$$\mu_n = 2^{-n} \sum_{x \in K_n} \delta_x \tag{3.2}$$

为 K_n上的自然概率测度，然后令 μ 为 μ_n的弱极限。它也是由 $f : \mathcal{E} \to K$ 将定义在 $\mathcal{E}$ 上的自然概率测度 σ 推前所得。根据命题 2.1，且由于 f是双 Lipschitz 映射，K 的阿尔福斯正则性由此可得。注意，μ 与 $\mathscr{H}^\delta \llcorner K$略有不同，但阿尔福斯正则性保证这两个测度有界等价。

作为证明的第一步，我们将按承诺证明，μ 是 K的平衡测度。

引理 3.3. 由下式定义的函数

$$G(y) = \int \ln(|x-y|)\, d\mu(x)$$

在 $\mathbb{R}^2$上连续，在 $\mathbb{R}^2 \setminus K$上调和，并在 K上为常数。

证明。首先注意到，即使在$y \in K$的情况下，积分也能很好地收敛，因为若令 $A_k(y) = \{x \in \mathbb{R}^2;\ 2^{-k} \leq |y-x| < 2^{-k+1}\}$当 $k \in \mathbb{Z}$ 时，则由 μ 的阿尔福斯正则性可得

$$\int_{A_k(y)} |\ln(|x-y|)|\, d\mu(x) \leq (|k|+1)\ln(2)\mu(A_k) \leq C(|k|+1)2^{-k\delta} \tag{3.3}$$

相应的级数也收敛（因为较大的 k 不会产生贡献）。此外，根据控制收敛定理，并且由于每个 $x \mapsto \ln(|x-y|)$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ 上都是调和函数， G 在 $\mathbb{R}^2 \setminus K$ 上是调和函数。

接下来考虑由逼近概率测度 μ_k产生的势，即令

$$\tilde{g}_n(y) = \int \ln(|x-y|)\, d\mu_n(x) = 2^{-n} \sum_{x \in K_n} e(y-x) \quad \text{for } y \notin K_n. \tag{3.4}$$

我们声称，对于任意 $x_0 \in K_n$ 以及任意满足 $|y - x_0| = r^{n-1}/2$的 y （我们将看到，这可以确保 y 远离 K_n ，且 K_m越大，距离越远），都有

$$c_n + 2^{-n} \ln(r^{n-1}/2) \le \tilde{g}_n(y) \le c_n + 2^{-n} \ln(r^{n-1}/2) + C 2^{-n}, \tag{3.5}$$

其中， $C > 1$ 是一个与 n、 x_0和 y无关的常数。我们不再追求对 C作精确估计。

事实上，给定 $x_0 = f_n(\varepsilon_0) \in K_n$ 和这样的 y 。如前所述，令

$$\mathcal{Y}_\ell = \{x = f_n(\varepsilon) \in K_n \setminus \{x_0\} \,:\, m(\varepsilon_0, \varepsilon) = n - \ell\}$$

对于 $\ell = 1, \dots, n$。回想一下， $m(\varepsilon_0, \varepsilon)$是序列 ε_0 和 ε 首次出现分歧的指标，即

$$\#\mathcal{Y}_\ell = 2^{\ell-1}, \tag{3.6}$$

并且由（2.5）和（2.4），对于 $x \in \mathcal{Y}_\ell$，我们有

$$\begin{aligned} |x_0 - x| = |f_n(\varepsilon_0) - f_n(\varepsilon)| &\ge \Big(1 - \frac{ar}{1-r}\Big) r^{m(\varepsilon_0,\varepsilon)-1} \\ &\ge \Big(1 - \frac{ar}{1-r}\Big) r^{n-\ell-1} \ge \frac{4}{5}\, r^{n-\ell-1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

这远大于 $|y - x_0| = r^{n-1}/2$，因为 $\ell \ge 1$。现在

$$\begin{aligned} \tilde{g}_n(y) - g_n(x_0) &= 2^{-n} \left(\ln(|y-x_0|) + \sum_{x \in K_n \setminus \{x_0\}} \ln\left(\frac{|y-x|}{|x_0-x|}\right) \right) \\ &= 2^{-n} \ln(r^{n-1}/2) + 2^{-n} \sum_{x \in K_n \setminus \{x_0\}} \ln\left|\frac{y-x}{x_0-x}\right|, \end{aligned} \tag{3.8}$$

并且我们可以写成

$$1-\frac{|y-x_0|}{|x_0-x|}\le\frac{|y-x|}{|x_0-x|}\le 1+\frac{|y-x_0|}{|x_0-x|}.$$

这给出 $x\in\mathcal{Y}_\ell$,

$$\left|\frac{|y-x|}{|x_0-x|}-1\right|\le\frac{|y-x_0|}{|x_0-x|}\le\frac{5}{8}\,r^\ell\le r \tag{3.9}$$

根据（3.7）。因此，我们估计（3.8）中的第二项:

$$\begin{aligned}\Big|2^{-n}\sum_{x\in K_n\setminus\{x_0\}}\ln\Big|\frac{y-x}{x_0-x}\Big|\Big|&\le 2^{-n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{x\in\mathcal{Y}_\ell}\left|\ln\left(\frac{|y-x|}{|x_0-x|}\right)\right|\\ &\lesssim 2^{-n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{x\in\mathcal{Y}_\ell}\frac{r^\ell}{1-r^\ell}\lesssim 2^{-n}r\sum_{\ell=1}^{n}(2r)^{\ell-1}\lesssim 2^{-n},\end{aligned} \tag{3.10}$$

由（3.6）且由于 $2r<1$。由于差值（3.8）中的第一项关于 y为常数，估计（3.10）和引理 2.3的结论立即给出（3.5）。

接下来，我们断言，只要 $m\ge n$、 $x_0\in K_n$和 y 满足 $|y-x_0|=r^{n-1}/2$，就有

$$|\tilde g_n(y)-\tilde g_m(y)|\le C2^{-n}. \tag{3.11}$$

（3.11）的证明与估计（3.10）非常相似，因此我们仅作简述。首先验证，将 $x\in\mathcal{Y}_\ell$ 替换为它的任一后代时，距离估计（3.7）仍然成立；常数 4 5 只会略微变小。主要思路是写成

$$\tilde g_m(y)-\tilde g_n(y)=2^{-n}\Big(\sum_{x\in K_n}2^{-(m-n)}\sum_{z\in \mathrm{Ch}_m(x)}\ln\Big|\frac{y-z}{y-x}\Big|\Big),$$

其中 $\mathrm{Ch}_m(x)$ 是 $z\in K_m$ 的后代 $x\in K_n$ （共有 2^{m-n} 个）。我们先处理后代 z x_0。注意，由（2.1）和（2.4），它们满足

$$|z-x_0|\le\sum_{\ell>n}\frac{a}{2}\,r^{\ell-1}\le ar^n\ll|y-x_0|/2$$

因此 $\ln\big|\frac{y-z}{y-x_0}\big|\le 2$，所有这些项对 $|\tilde g_n(y)-\tilde g_m(y)|$的总贡献至多为 $C2^{-n}$。其余的和可以拆分为

$\mathcal{Y}_\ell$对 $\ell = 1$、……、 n，然后再次注意到 $|z - x| \ll |y - x|$，即可像之前一样得出结论。因此（3.11）成立。

我们现在可以证明， $G = e * \mu$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，并在 K上为常数。为了证明它在点 y处连续，我们注意到，对于 $B(y,t)$中的$t > 0$ 和 z，

$$G(y) - G(z) = \int_{B(y,2t)} [e(x - y) - e(x - z)]d\mu(x) + \int_{K\setminus B(y,2t)} [e(x - y) - e(x - z)]d\mu(x).$$

第一项小于 $C\ln(1+t)t^\delta$，由（3.3）可知；而（固定 t后）第二项在 z 趋于 y时趋于 0，例如由控制收敛定理可知。因此， G 是连续的；仔细考察证明甚至可以看出，它在任意 C^α 上都 $\alpha \in (0, \delta)$，不过我们并不需要这一点。

现在我们证明 G 在 K上为常数。固定 $x_0 = f(\varepsilon_0) \in K$，并令 $x_n = f_n(\varepsilon_0) \in K_n$ 为 x_0的有限近似。接着任取满足 $|y_n - x_n| = r^{n-1}/2$的y_n。对于 $m > n$，我们可以写成：

$$\begin{aligned} |G(x_0) - c_n| \le{}& |G(x_0) - G(y_n)| + |G(y_n) - \tilde{g}_m(y_n)| \\ &+ |\tilde{g}_m(y_n) - \tilde{g}_n(y_n)| + |\tilde{g}_n - c_n|. \end{aligned} \tag{3.12}$$

当 n 足够大时，利用 G的连续性、（3.11）以及（3.5），可以分别使（3.12）中的第一、第三和第四项任意小。固定 n 后，当 m 足够大时，（3.12）中的第二项也可以任意小，因为 μ是（ μ_n ）中概率测度3.2的弱极限。由此估计可知，$\lim_{n\to\infty} c_n = c_\infty$ 存在，并且 G 在 K上为常数，且等于 c_∞。引理 3.3的证明至此完成。

□

定义 G^∞ 于 $\mathbb{R}^2$ 上，满足

$$G^\infty(y) = G(y) - c_\infty, \tag{3.13}$$

其中 c_∞ 是 G 在 K上的常数值。于是， G^∞ 在$\mathbb{R}^2$ 上连续，并在 $\mathbb{R}^2 \setminus K$上调和。它在无穷远处也等价于 $\ln(|y|)$；由最大值原理（应用于足够大的球 $B(0,R)$，使得$G > 0$ 在 $\partial B(0,R)$上），可知 $G^\infty(y) > 0$ 在 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus K$。因此， G^∞ 等于 Ω 上的格林函数（可能相差一个乘法常数），其极点位于无穷远处。这里格林函数的唯一性是阿尔福斯正则性以及

良好的非切向可达性，通向 K，通过 H¨定理中比较原理的较旧版本 3.1。我们提及 [DEM], ，因为我们知道这里采用了这种做法，而目前没有更好的参考文献。我们首先证明 1.2) 中的估计 G^∞。

引理 3.4。 格林函数 G^∞ 由 （3.13）定义，且当dist（y， K） ≤ 1 时满足，

$$G^\infty(y) \simeq \operatorname{dist}(y,K)^\delta, \tag{3.14}$$

其中，如前所述， δ 是 K的豪斯多夫维数。

证明。我们给出一个具体的论证，利用了 K 包含于该直线这一事实。固定 $R \in (0,1]$, 以及一点 y，使得dist（y， K） $=R$。再选取 $x_0 \in K$ 使得 $|x - x_0| = R$。然后考虑开瓶器点 $y_0 = x_0 \pm (0,R)$。存在一条从 y_0 到 y的哈纳克链；这里我们可以将其取为非常简单的形式（因为 $K \subset \mathbb{R}$, 若我们选择符号使得 y_0 与 y位于 $\mathbb{R}$的同一侧，则这就更容易了）。又由于哈纳克不等式表明 $G(y)$与 $G(y_0)$可比较，所以只需对 y_0证明（3.14）即可。不失一般性，设 $y_0 = x_0 + (0,R)$，并写为

$$G^\infty(y_0) = G(y_0) - c_\infty = G(y_0) - G(x_0) = \int \ln \frac{|y_0 - z|}{|x_0 - z|} d\mu(z).$$

对于下界，注意到 $\ln(|y_0 - z|/|x_0 - z|) \geq 0$ for $z \in K$，因为 z_0 正好位于 x_0上方。然后，即使仅考虑 $B = B(x_0, R/2)$ 的贡献，我们也得到

$$G^\infty(y_0) \geq \int_B \ln \frac{|y_0 - z|}{|x_0 - z|} d\mu(z) \geq (\ln 2)\mu(B) \gtrsim R^\delta,$$

因为 μ 是阿尔福斯正则的。

对于上界，我们按照证明 G 连续性的方法，将 K 分成环带 $A_k := K \cap (B(x_0, 2^k R) \setminus B(x_0, 2^{k-1}R))$、 $k \in \mathbb{Z}$。我们从 $k \leq 2$ 开始，并指出

$$\sum_{k\leq 2} \int_{A_k} \ln \frac{|y_0 - z|}{|x_0 - z|} \, d\mu(z) \lesssim \sum_{k\leq 2} (|k|+1)\mu(A_k) \lesssim \sum_{k\leq 2} (|k|+1)(2^k R)^\delta \lesssim R^\delta$$

根据阿尔福斯正则性。对于 $k > 2$ 和 $z \in A_k$，很容易看出，由于 $y_0 = x_0 + (0,R)$ 和 $|z - x_0| \geq 2^{k-1}R \geq 2R$，我们有

$$1 \leq |y_0 - z|/|x_0 - z| \leq 1 + C2^{-k},$$

由此得到 $0 \le \ln(|y_0 - z|/|x_0 - z|) \le 2^{-k}$ 且

$$\sum_{k>2} \int_{A_k} \ln \frac{|y_0 - z|}{|x_0 - z|} \, d\mu(z) \lesssim \sum_{k>2} 2^{-k} \mu(A_k) \lesssim R^\delta \sum_{k>2} 2^{k(1-\delta)} \lesssim R^\delta,$$

这里我们再次用到了 δ的阿尔福斯正则性 μ，现在还用到了 $\delta < 1$这一事实。将所有项相加，得到 $G^\infty(y) \lesssim R^\delta$，与 (3.14) 中一样。

当 K 通过稍复杂的构造得到时，如第2.2小节所示，我们需要调整证明。只有下界看起来比较棘手，因此需要找到一些开瓶器点 y_0 使得$G(y_0)$ 不会太小。一种方法是从 K的一个局部角点出发，沿着与 K相反的方向移动。此处 $\nabla G(y) = \int_K \frac{y-x}{|y-x|^2} d\mu(x)$ 这一事实有所帮助，因为主要贡献项不会相互抵消。不过，细节留待读者补充。

□

定理3.1 的一个简单推论是，对于极点足够远离 Ω 的格林函数，(3.14) 也成立，其中极点为 $x \in \Omega$:

推论 3.5. 存在一个常数 $C \ge 1$，它仅依赖于 δ（在下一节中，还依赖于环境维数 n），使得若 $x \in \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus K$，且 $\operatorname{dist}(x, K) > C$，那么对所有满足 $\operatorname{dist}(y, K) \le 1$ 的 y，都有

$$C^{-1} \operatorname{dist}(y, K)^\delta \le G^x(y) \le C \operatorname{dist}(y, K)^\delta,$$

其中，$G^x(y)$ 表示 Ω（以及 $-\Delta$）中以 x 为极点的格林函数。

证明. 令 A_0 为定理 3.1 中的常数。取 $z \in \Omega$ 中一点，使得 $\operatorname{dist}(z, K) = 1$，并令 $w \in K$ 满足 $|z - w| = 1$。固定 $x \in \Omega$，使得 $|z - x| > A_0(2 + \operatorname{diam} K) + 2$。现在，对于任意满足 $\operatorname{dist}(y, K) \le 1$ 的 $y \in \Omega$，函数 G^∞ 和 G^x 在 $\Omega \cap B(w, A_0(2 + \operatorname{diam} K) + 1)$ 中为正且调和，并在 K 上取零。此外，$z, y \in B(w, \operatorname{diam} K + 2)$，因此应用定理 3.1 可得

$$\frac{G^\infty(y)}{G^x(y)} \simeq \frac{G^\infty(z)}{G^x(z)},$$

这只是一个常数（因为 z 是一个不动点）。利用（3.14）我们得到 $G^x(y) \simeq G^\infty(y) \simeq \operatorname{dist}(y, K)^\delta$。该常数取决于证明中的几何常数；只要 δ 始终远离 0，我们就能对其进行一致控制。

□

推论 3.6。存在一个常数 $C \geq 1$，它仅取决于δ （以及在下一节中取决于环境维数 n），使得如果$x \in \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus K$，且 dist（$x$， K） $> C$，那么

$$C^{-1}\mu \leq \omega^x \leq C\mu, \tag{3.15}$$

其中 ω^x 表示 K上的调和测度，其极点位于 x。

注意， μ 等价于 $\mathscr{H}^\delta \llcorner K$，因此 ω^x 也等价于$\mathscr{H}^\delta \llcorner K$。

证明。 只需证明 $C^{-1}(B)\mu \leq \omega^x(B) \leq C\mu(B)$ 对于满足以下条件的球B $B \cap K = f(Q_n(\bar{\varepsilon}))$，其中 $n \geq 1$ 且 ε 足够小。对于这些球， $B \cap K$ 与 $K \setminus B$ 之间由一个模数有界的环域隔开，因此我们可以应用引理 3.2 得到

$$\omega^x(B) \simeq G^x(y),$$

其中 y 是上述环域边界上的一点。特别地，$\mathrm{dist}(y, K) \simeq R$，其中 R是球的半径。因此 $G^x(y) \simeq R^\delta$。进而 $\omega^x(B) \simeq R^\delta$，故由阿尔福斯正则性的性质可得$\omega^x \simeq \mu$。 □

4 $\mathbb{R}^n$中的阿尔福斯正则实例

对于 $n \geq 2$，我们构造一个集合 $E = K \times \mathbb{S}^{n-2}$，其中 K 是直线 $\mathbb{R} \times \{0\}^{n-1}$ 上的一个康托尔子集，按（2.1）中的定义给出；而 $\mathbb{S}^{n-2}$ 是正交平面 $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$中以原点为中心、半径为 1 的球面。与第（2.1）节相同，我们将证明，当 $r > 0$ 充分小时，对每个 a（ε） $\in [1, a]$，都可以选择参数 $\varepsilon \in \mathcal{E}$，使得集合 E 满足定理 1.2的条件。

证明步骤与第 2.1 节相同，主要区别在于，在集合构造的第 m 步中，我们将狄拉克质量的离散和替换为概率测度

$$\mu_m := 2^{-m} C(n)^{-1} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}_m} \mathscr{H}^{n-2} \llcorner (\{f(\varepsilon)\} \times \mathbb{S}^{n-2}),$$

其中， $C(n)$表示单位球面的（$n-2$）维豪斯多夫测度 $\mathbb{S}^{n-2}$。我们需要将基本解 ln $|x-y|$ 替换为$|x-y|^{2-n}$。首先计算在

点 $x \in \mathbb{R}^n$ 由 $\mathscr{H}^{n-2}\llcorner\mathbb{S}^{n-2}$产生的势。根据对称性， $e(x)$仅取决于两个量 $t = x_1 \in \mathbb{R}$ 和 $R = |x'| \in \mathbb{R}^+$ （其中， x' 表示 x的最后 $n-1$ 个坐标）。并且（略微滥用记号）

$$\begin{aligned} e(t,R) &= C(n)^{-1} \int_{y\in\mathbb{S}^{n-2}} \frac{d\mathscr{H}^{n-2}(y)}{(t^2+|x'-y|^2)^{(n-2)/2}} \\ &= C(n)^{-1} \int_{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{S}^{n-2}} \frac{d\mathscr{H}^{n-2}(y)}{(t^2+|R-y_1|^2+|y_2|^2)^{(n-2)/2}}. \end{aligned}$$

我们将继续使用记号 $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{S}^{n-2}$ 其中 $y_1 \in \mathbb{R}$和 $y_2 \in \mathbb{R}^{n-2}$ 同上。注意， 当 $R = 1$ 和 $t = 0$时， $e(t, R)$ 具有一个奇点（该奇点将得到控制）。我们首先记录函数 $e(t, R)$ 的以下性质，这些性质是我们所需要的。

命题 4.1. 有如下结论：

(i) 函数 $t \mapsto e(t,1)$ 是偶函数、连续的，并且在 $t > 0$ 时严格递减。此外，

$$e(t,1) - e(t',1) \gtrsim 1 \quad for\ 0 < 2t < t',$$

(ii) 当 $t \in \mathbb{R}$ 和 $R \geq 0$ 时， $|\nabla e(t,R)| \lesssim (t^2 + (R-1)^2)^{-1/2}$; (iii) 当 t 足够小时， $|\partial_t^2 e(t,1)| \lesssim t^{-2}$ 。

证明。 我们先从（i）开始。唯一困难的部分是增量界。对于 $0 < 2t < t' < 1$， 我们有

$$\begin{aligned} e(t,1) - e(t',1) &= \int_{y\in\mathbb{S}^{n-2}} \Big(\frac{1}{(t^2+|1-y_1|^2+|y_2|^2)^{(n-2)/2}} \\ &\qquad - \frac{1}{((t')^2+|1-y_1|^2+|y_2|^2)^{(n-2)/2}} \Big) d\mathscr{H}^{n-2}(y) \\ &\geq \int_{\mathbb{S}^{n-2}\cap\{|y-(1,0)|\leq t/2\}} \Big(\frac{1}{(t^2+|1-y_1|^2+|y_2|^2)^{(n-2)/2}} \\ &\qquad - \frac{1}{((t')^2+|1-y_1|^2+|y_2|^2)^{(n-2)/2}} \Big) d\mathscr{H}^{n-2}(y) \\ &\geq \int_{\mathbb{S}^{n-2}\cap\{|y-(1,0)|\leq t/2\}} \Big(\frac{1}{(t^2+t^2/4)^{(n-2)/2}} - \frac{1}{t'^{(n-2)}} \Big) d\mathscr{H}^{n-2}(y) \\ &\gtrsim \big(\frac{4}{5}\big)^{(n-2)/2} - \big(\frac{t}{t'}\big)^{n-2} \gtrsim 1. \end{aligned}$$

现在来处理界（ii）。在点 $p = (t, R, 0, \ldots\ldots, 0)$ 处，我们估计：

$$|\nabla e(t,R)| \lesssim \int_{y\in\mathbb{S}^{n-2}} \frac{d\mathscr{H}^{n-2}(y)}{|p-y|^{n-1}}.$$

令 $r_0 := (t^2 + (R-1)^2)^{1/2}$ 表示 p 与 $\{0\}\times\mathbb{S}^{n-2}$ 之间的距离（注意，该距离在点 $p_0 := (0,1,0,\ldots,0)$ 处取得）。我们将 $\mathbb{S}^{n-2}$ 分解为环带 $A_k := \{y:\ |p-y| \in [2^k r_0, 2^{k+1} r_0)\}$，其中 $0 \le k \le -\log_2 r_0 + 10$（即，$k$ 足够大，能覆盖整个球面）。有 $\mathscr{H}^{n-2}(A_k) \cdot (2^k r_0)^{n-2}$，若 $y \in A_k$，则有 $|p-y| \gtrsim 2^k r_0$，因此对环带求和可得

$$|\nabla e(t,R)| \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2^k r_0)^{n-2}}{(2^k r_0)^{n-1}} \lesssim \frac{1}{r_0}.$$

关于二阶导数的估计 (iii)，我们采用类似的方法。 □

现在我们来讨论主引理的一个变体。

4.1 主引理，参数的选取

在构造集合 E 的第 $m \ge 1$ 步中，我们可以将 $x \in K_m \subset \mathbb{R}$ 的近似“格林函数”定义为

$$\widetilde{g}_m(x) := 2^{-m} \sum_{y\in K_m\setminus\{x\}} e_n(x-y).$$

引理 4.2。 假设 r，且 a 满足条件 (2.4)，并且r 足够小。那么存在 $A > 0$ 使得下述结论成立。固定一个整数 $m \ge 1$，并假设 $a_k(\varepsilon)$ 已针对 $k = 0,\ldots,n-2$ 选定，且对于所有 $x \in K_{m-1}$，

$$c_{m-1} \le \widetilde{g}_{m-1}(x) \le c_{m-1} + 2^{-(m-1)} A, \tag{4.1}$$

对于某个实常数 c_{m-1}。那么，可以选择仅取决于 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{m-1}$ 的 $a_{m-1}(\varepsilon) \in (1,a)$，使得存在满足下式的 c_m

$$c_m \le \widetilde{g}_m(x) \le c_m + 2^{-m} A \quad \text{for } x \in K_m. \tag{4.2}$$

证明。 这里我们不打算进行优化，因此读者可以取 $a = 2$（如果愿意）。与二维情形一样，我们假设（4.1）并将其切分为

下一层 $\widetilde{g}_m$。如果 $x \in K_m$ 有父节点 $\widehat{x} \in K_{m-1}$，我们可以写成：

$$\widetilde{g}_m(x) = \widetilde{g}_{m-1}(\widehat{x}) + 2^{-m}(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3),$$

其中，令 $\widetilde{x}$ 为 x 的兄弟节点，

$$\Delta_1 = e(x - \widetilde{x}),$$

$$\Delta_2 = 2 \sum_{y \in K_{m-1} \setminus \{\widehat{x}\}} \big(e(y - x) - e(y - \widehat{x})\big),$$

and

$$\Delta_3 = \sum_{y \in K_{m-1} \setminus \{\widehat{x}\}} \sum_{z \in \mathrm{Ch}(y)} \big(e(z - x) - e(y - x)\big).$$

需要检查两点：我们首先证明，对于 $\widehat{x} = f(\varepsilon)$，对 $a(\varepsilon)$ 作出适当选择可得到

$$\widetilde{g}_{m-1}(\widehat{x}) + 2^{-m}\Delta_1 = c_{m-1} + 2^{-(m-1)}A + 2^{-m}\beta_m, \tag{4.3}$$

其中 β_m 与 x 无关。这将告诉我们 A 可以是什么。然后我们将证明，当 r 足够小时：

$$|\Delta_2| + |\Delta_3| \le A/2. \tag{4.4}$$

为证明 (4.3)，我们使用命题 4.1 的 (i) 部分，该部分表明，当 $|x - \widetilde{x}|$ 在 r^n 和 ar^n 之间变化时，Δ_1 可以取 $e(r^n)$ 与 $e(ar^n)$ 之间的任意值。由于 $0 < 2r^n \le ar^n$，存在一个常数 $A > 0$，使得 $e(r^n) - e(ar^n) \ge 2A$。为证明 (4.4)，我们按照第 2.1 节中的方法，将涉及对数的公式替换为 $t \mapsto e(t)$ 的一阶和二阶导数。更准确地说，对于 Δ_2，我们利用以下事实：

$$|e(y - x) - e(y - \widehat{x})| \lesssim |\partial_t e(y - \widehat{x})||x - \widehat{x}| \lesssim \frac{|x - \widehat{x}|}{|y - \widehat{x}|}$$

并像上面一样对环带求和，当 r 趋于 0 时，这将产生一个任意小的项。另一方面，对于 Δ_3，我们使用以下估计

$$|e(y_1 - x) + e(y_2 - x) - 2e(\widehat{y} - x)| \lesssim |\partial_t^2 e(\widehat{y} - x)||y_1 - \widehat{y}|^2 \lesssim \frac{|y_1 - \widehat{y}|^2}{|\widehat{y} - x|^2},$$

这可以用同样的方式处理。

注意，由于我们有固定的 A 下的 (4.3)，并且对 Δ_2 和 Δ_3 有界，因此也得到 $|c_m - c_{m-1}| \le C2^{-n}(e(r^m, 1))$，如引理 2.3 所示。事实上，很容易从命题 4.1 中的 ii 推得 $e(r^m, 1) \le C(m + 1)$，因此我们可以像引理 2.3 那样估计 Δ_1 的主要部分，即 $e(r^n) - e(ar^n)$。 □

4.2 格林函数的控制

总之，证明过程与第 3 节类似，只需使用 $e(t,\ R)$ 的梯度的泰勒估计，而不是对数之差。唯一实质性的变化是，没有可直接用于比较格林函数与调和测度的引理 3.2 的对应结果。不过，我们可以使用 [DFM2]，中非常一般的引理15.28，它恰好给出了针对开瓶器点且极点距离足够远时所需的估计。顺便一提，K 的单侧可达性可由 [DFM1 的引理 2.2]，推出，但手动证明并不比平面情形更难。

关于引理中的下界 3.4，我们的工作更容易，因为根据哈纳克不等式，只需证明开瓶器点处的情形；我们可以选取形如（$t,\ x'$）且满足 $x' \in \mathbb{S}^{n-2}$ 的开瓶器点。对于这些点，我们可以利用 G 的对称性以及 e（$t,\ R$）的单调递减性质，像之前一样继续证明。

至此，我们完成了对定理 1.2 证明的说明。

参考文献

[Ai] H. Aikawa，一致域的边界哈纳克原理与 Martin 边界，日本数学会杂志 第 53 卷（2001 年）。15[Az] J. Azzam，阿尔福斯正则边界上调和测度的维数下降，**Potential Anal.** 53（2020），第 3 期，1025–1041。 2[AHM+16] J. Azzam、S. Hofmann、J. M. Martell、S. Mayboroda、M. Mourgoglou、X. Tolsa、A. Volberg，调和测度的可整性，**Geom. Funct. Anal.**26（2016），第 3 期，703–728。 2，15[AHM+20] J. Azzam、S. Hofmann、J. M. Martell、M. Mourgoglou、X. Tolsa，调和测度与定量连通性：狄利克雷问题 Lp 可解性的几何刻画，**Invent. Math.**222 （ 2020 ），第 3 期，881–993。 2[AHM+17] J. Azzam、S. Hofmann、J.M. Martell、K. Nystr¨om 和 T. Toro，弦弧域的一种新刻画。**J. Eur.Math. Soc.**，（2017）。

[Ba] A. Batakis，某些康托尔型集合上的调和测度，芬兰科学院数学年刊，第 21 卷（1996），第 2 期，255–270。2[BZ] A. Batakis、A. Zdunik，非齐次康托尔集上的豪斯多夫测度与调和测度，芬兰科学院数学年刊 40（2015），第 1 期，279–303。[Ca] L. Carleson，康托尔型集合的调和测度支撑，《芬兰科学院数学年刊》A辑 I 数学 10（1985），113–123。2，6 2[DEM] G. David、M. Engelstein 和 S. Mayboroda，余维大于 1 时的平方函数、非切向极限与调和测度，《杜克数学杂志》第 170 卷（2021）。20[DFM1] G. David、J. Feneuil、S. Mayboroda，高余维边界集合的椭圆理论，美国数学学会回忆录 274（2021），第 1346 号，vi+123 页码 3、4、5、15、26[DFM2] G. David、J. Feneuil、S. Mayboroda，混合维数边界域中的椭圆理论。即将在 Ast´erisque 上发表。4、26[DM] G. David、S. Mayboroda，康托尔集上的良椭圆算子，arXiv（2020），2007.01745。4[DM] G. David、S. Mayboroda，对格林函数的逼近，以及具有各维度一致可整边界的域。即将发表。4[FSY] E. B. Fabes、M. V. Safanov 和 Y. Yuan，二阶抛物方程正解在边界附近的行为，II，《美国数学会汇刊》351（1999），第 12 期，4947–4961。[JK] D. Jerison 和 C. E. Kenig，非切向可达域中调和函数的边界行为。《数学进展》46（1982），第 1 期，80–147。[JW] P. W. Jones、T. H. Wolff，平面中调和测度的豪斯多夫维数，《数学学报》161（1988），第 1–2 期，131–144。[MV] N. Makarov、A. Volberg，关于不连续分形的调和测度，LOMI预印本（1986）。2 2，15

[致] X. Tolsa, 《某些分数维 AD 正则平坦集上调和测度的维数》，arXiv（2023），2301.04084。3，13，16[UZ] M. Urbanski 和 A. Zdunik, 《自共形集上调和测度的豪斯多夫维数》。《Adv. Math.》，171(1)（2002），1–58。[Vo1] A.L. Volberg, 《平面上自相似集的调和测度》。载于《调和分析与离散位势理论》，第 267–280 页。施普林格，1992。2[Vo2] A. Volberg, 《康托尔排斥子上调和测度的维数》。《Michigan Math. J.》，40(2)（1993），239–258。2[Vo3] A. Volberg, 《两个正调和函数的单相问题：低于余维 1 阈值》。arXiv 预印本（2022），2205.03687。3[Zd] A. Zdunik, 《多项式型映射的朱利亚集上的调和测度》。Invent. Math. 128（1997），第 2 期，303–327。