arXiv:2303.02065v1 [math.CT] 3 Mar 2023

超越初始代数与终结余代数

Clemens Kupke、Jade Master、Ezra Schoen

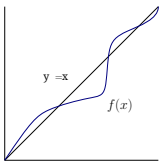
2023年3月6日

摘要

我们给出了函子不动点的一种构造，这些不动点可能既不是初始代数，也不是终结余代数。对于自函子 F，这种不动点构造可以表示为 F-余代数与 F-代数之间的一对伴随函子。我们证明了适用于这些广义不动点的极限与余极限重合定理的一个版本。

1 中间不动点

Knaster-Tarski 定理为完备格 L 上的单调函数 $f\colon L \to L$ 构造最小与最大不动点。考虑通常序下实数区间的格 $([0,1], \leq)$ 上的以下单调函数。



函数 f 与函数 $y = x$ 叠加绘出。两条曲线的交点表示函数 f 的不动点。f 的最小不动点是 0，最大不动点是 1，但两者之间还有 3 个其他不动点。这些“中间”不动点的构造方式与最小和最大不动点类似。给定一个“前不动点”，即满足 $x \leq f(x)$ 的点 $x \in [0,1]$，我们可以找到其上方的第一个不动点：

$$\mu(x) = \sup\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}$$

其中的 $\ldots$ 表示迭代至足够大的序数。类似地，给定一个“后不动点” $f(y) \leq y$，我们可以找到 y 下方最近的不动点。

$$\nu(y) = \inf\{y, f(y), f^2(y), f^3(y), \ldots\}.$$

对于完备格 L，令 $Pre(f)$ 为 L 中仅由前不动点组成的子序 $x \leq f(x)$。类似地，令 $Post(f)$ 为由后不动点 $f(y) \leq y$ 构成的子序。于是存在一个伽罗瓦连接

$$Pre(f) \underset{\nu}{\overset{\mu}{\perp}} Post(f)$$

是伽罗瓦连接意味着

$$\mu(x) \leq y \iff x \leq \nu(y)$$

在本文中，我们将把这一伽罗瓦连接从单调函数推广到函子的定点。在从偏序集推广到范畴时，我们将采用表 1 中所示的替换。尽管“中间定点”构造是新的，但既非初始也非终结的定点此前已有研究。这些就是 Ad´amek、Milius 和 Velebil [AMV06] 的有理定点。

2 伴随

下文中，ω 将表示有限序数范畴，即你所熟悉的那类范畴：对象数量可数，并且每个对象到下一个对象都有一个生成态射。图示地，ω 是范畴

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \ldots$$

定理2.1. 假设 C 是一个具有形状为 ω 的余极限和形状为 ω^{op} 的极限的范畴，并且假设 $F\colon C \to C$ 保留这些形状的极限和余极限。那么存在一个伴随

$$\mathsf{Coalg}(F) \underset{\nu}{\overset{\mu}{\perp}} \mathsf{Alg}(F)$$

由下式给出

$$\mu(b\colon B \to FB) =$$

余极限($B \to F(B) \to F^2(B) \xrightarrow{Fb} \xrightarrow{F^2 b} \cdots$)

偏序集	范畴
单调函数 f	函子 F
f 的前不动点	F-余代数
f的后不动点	F-代数
上确界$\{f(x)\ f^2(x)\ f^3(x)\ \ldots\}$	余极限$(X \to F(X) \to F^2(X) \to F^3(X)\ldots)$
inf$\{f(x)\ f^2(x)\ f^3(x)\ \ldots\}$	lim$(X \leftarrow F(X) \leftarrow F^2(X) \leftarrow F^3(X)\ldots)$
伽罗瓦连接	伴随

图 1：将偏序集推广为范畴

$$\nu(a\colon FA \to A) =$$

$$\lim(\ A \xleftarrow{a} F(A) \xleftarrow{Fa} F^2(A) \xleftarrow{F^2(a)} \cdots\ )$$

并利用极限和余极限的泛性质定义在态射上。

证明。（概要）伴随同构

$$\mathsf{Alg}(F)(\mu(b), a) \cong \mathsf{Coalg}(F)(b, \nu(a))$$

对于代数 $a\colon FA \to A$和余代数 $b\colon B \to FB$，依赖于这样一个事实：这两个集合都自然同构于从 b 到 a的余代数到代数同态的集合。给定一个余代数到代数同态

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{b} & F(B) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ A & \xleftarrow[a]{} & F(A) \end{array}$$

我们可以对其进行可数多次迭代，从而得到一个图表

$$\begin{array}{ccccccccc} B & \xrightarrow{b} & F(B) & \xrightarrow{Fb} & F^2(B) & \xrightarrow{F^2b} & F^3(B) & \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \downarrow{\scriptstyle F^2(f)} & & \downarrow{\scriptstyle F^3(f)\cdots} & \\ A & \xleftarrow[a]{} & F(A) & \xleftarrow[Fa]{} & F^2(A) & \xleftarrow[F^3a]{} & F^3(A) & \cdots \end{array}$$

顶行的余极限是 $\mu(b)$，向下和向左的映射构成了图表上关于 $\mu(b)$ 的余锥。因此，余极限的泛性质诱导出一个态射 $\mu(b) \to a$，我们不加证明地指出，这是一种代数同态。同样，底行的极限是余代数 $\nu(a)$，向右和向下的态射构成一个锥。极限的泛性质给出一个态射 $b \to \nu(a)$。我们不加证明地指出，该态射是一个余代数同态，并且此处描述的对应关系在两个自变量上都是自然的。

□

令 1 为 C 的终对象，0 为始对象。于是存在唯一的代数 $1\colon F1 \to 1$，且 $\nu(1)$ 是终余代数。类似地，初始代数由唯一余代数 $0\colon 0 \to F0$ 所对应的 $\mu(0)$ 给出。初始代数和终余代数分别表示有限迹和无限迹 [Rut00]。对于余代数 $c\colon X \to FX$，代数 $\mu(c)$ 可被解释为 c 的一个语义对象，它既不表示有限迹，也不表示无限迹。当 F 是集合范畴上的函子时，$\mu(c)$ 同时包含有限迹和无限迹的元素。在 μ 的余极限中，F 的常量生成其初始代数的一个副本。对于每个元素 $x \in X$，$\mu(c)$ 中都有一个表示其轨道的对象。在 μ 的余极限中，每个对象都与其后继相等，因此在代数 $\mu(c)$ 中，传递闭包所生成的后继关系的每个等价类都对应一个元素。注意，无限迹语义由唯一映射 $c \to \nu(1)$ 给出。将此映射沿伴随传递，得到唯一态射 $\mu(c) \to 1$。这让我们认为，代数 $\mu(c)$ 在某种程度上预先编译了 c 的终迹语义。在转到下一节之前，我们给出一个关于递归余代数和余递归代数的推论。

定义 2.1. 若一个 F-代数 a 对每个 F-余代数 b 都存在唯一一个从 $b \to b$ 出发的余代数到代数的态射，则称其为余递归的。对偶地，若一个 F-余代数 b 对任意 F-代数 a 都存在唯一一个余代数到代数的态射 $b \to a$，则称其为递归的。

余代数的递归性与将其视为程序时的终止性有关（参见 [ALM07]）。递归性与我们的伴随密切相关。

推论 2.1。 F 的初始代数是递归的，而 F 的终余代数是余递归的。

证明。伴随的证明意味着 $\mathsf{Coalg}(F)(c, \nu(1)) \cong \mathsf{CoAlgToAlg}(c, 1)$，其中后一个集合是到终代数的余代数到代数的同态集合。该集合

有唯一元素，这意味着 $\nu(1)$ 是余递归的。对偶命题也有类似的证明。

□

3 μ 与 ν 在 dagger 下重合

当多项式函子 $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ 的余代数被解释为具有 F 形状的自动机时，初始 F-代数充当有限迹语义，而终 F-余代数则给出无限迹语义。当 F 不再是集合范畴上的函子时，这种解释便不再成立。例如，若 $F : \mathrm{Rel} \to \mathrm{Rel}$，其中 Rel 是集合与关系范畴，那么初始代数和终余代数会重合[SP82]。文献 [Kar19]，证明，这一结论在任何 dagger 范畴中都更普遍地成立。由于这种重合，初始代数/终余代数给出的是有限迹语义，而非无限迹语义。为获得无限迹的语义，Urabe 和 Hasuo 构造了一个在余代数中弱终的对象，并将映入该对象的极大映射定义为无限迹语义 [HU18]。请注意，当 $\mu(c)$ 被解释为 c 的语义对象时，极限与余极限的重合不会造成问题。不过，由 μ 和 ν 生成的不动点也存在一种广义的极限与余极限重合。

定义 3.1. dagger 范畴 $(C, \dagger)$ 是一个配备了恒等于对象上的函子 $\dagger : C \to C^{\mathrm{op}}$，满足 $\dagger^2 = id$ 的范畴。

定理 3.1. 假设 $(C, \dagger)$ 是一个 dagger 范畴，具有可数链的极限和余极限，并且 $F : C \to C$ 是一个保持这些极限和余极限的 dagger 函子。那么存在一个同构

$$\mu(c)^\dagger \cong \nu(c^\dagger)$$

对于每个余代数 c，结论均成立。对偶地，对于每个代数 a，存在一个同构 $\nu(a)^\dagger \cong \mu(a^\dagger)$。

证明. 对于余代数 $X \xrightarrow{c} FX$，我们有

$$\begin{aligned}
\nu(c^\dagger) &\cong \lim(X \xleftarrow{c^\dagger} FX \xleftarrow{Fc^\dagger} F^2X \leftarrow \ldots) \\
&\cong \mathrm{colim}_{C^{\mathrm{op}}}(X \xleftarrow{c^\dagger} FX \xleftarrow{Fc^\dagger} F^2X \leftarrow \ldots) \\
&\cong \mathrm{colim}(X \xrightarrow{c} FX \xrightarrow{Fc} F^2X \to \ldots)^\dagger \\
&\cong \mu(c)^\dagger
\end{aligned}$$

第二个同构是因为 C 中的极限是 C^{op} 中的余极限，而第三个同构是因为 $\dagger$ 保持余极限，因为它是一个等价。对偶命题也有类似的证明。

□

4 结论在这篇扩展摘要中

，我们论证了中间不动点，即既非初始也非终端的不动点，足够有趣，值得进一步研究。伴随 $\mu \vdash \nu$与余代数到代数同态的概念密切相关。人们已在这些同态唯一的情况下对其进行研究，借助递归代数和余递归余代数的概念[CUV09]。然而，在 [H+15]中，作者指出，即使余代数到代数的态射并不唯一，它们也同样值得关注。作者通过概率、动力系统和博弈论中的实例，展示了非唯一的余代数到代数态射往往如何表示这些学科中问题的解。从 $\mu(c$出发的态射表示一个起源于 c 的余代数到代数同态；对偶地，对于 $\nu(a$亦然。未来，我们希望用伴随 [H+15] 和 μ 以及 ν 来重新表述

参考文献

[ALM07] Jiˇr´ı Ad´amek、Dominik L”ucke 和 Stefan Milius。有限元函子的递归余代数。《RAIRO - 理论信息学与应用》，41(4):447–462，2007年。（见第 2 页。）[AMV06] Jiˇr´ı Ad´amek、Stefan Milius 和 Jiˇr´ı Velebil。实践中的迭代代数。《计算机科学中的数学结构》，16(6):1085–1131，2006年。（见第 1 页。）[CUV09] Venanzio Capretta、Tarmo Uustalu 和 Varmo Vene。余递归代数：结构化余递归的一般理论研究。载于《巴西形式方法研讨会》，第 84–100 页。施普林格，2009年。（见第 3 页。）[H+15] Michael Hauhs 等。利用余代数-代数同态进行科学建模。arXiv:1506.07290，2015年。（见第 3 页。）

[HU18] Ichiro Hasuo 和 Natsuki Urabe。余代数无限轨迹与 Kleisli 模拟。逻辑方法与计算机科学，14，2018年。（见第 3 页。）[Kar19] Martti Johannes Karvonen。匕首范畴。博士论文，爱丁堡大学，2019年。（见第 3 页。）[Rut00] Jan JMM Rutten。普适余代数：系统理论。理论计算机科学，249(1):3–80，2000年。（见第 2 页。）[SP82] Michael B Smyth 和 Gordon D Plotkin。递归域方程的范畴论解。《SIAM 计算杂志》，11(4):761–783，1982年。（见第 3 页。）