arXiv:2303.02082v1 [math.MG] 3 Mar 2023

局部紧CAT(0) 空间中最优传输映射的存在性与唯一性

¨ ¨A.
BERDELLIMA

Abstract. 我们证明，在满足正角性质和其规范 Hausdorff 测度的分解正则性的局部紧完备 CAT(0) 空间中，存在唯一的最优传输映射，可将给定的绝对连续概率测度推前为另一个概率测度。特别地，这一结论适用于具有非正截面曲率的黎曼流形以及 CAT(0) 欧几里得多面体复形。此外，我们还针对 CAT(0)空间中的 Borel 映射，给出了一个关于最优传输映射和保测映射的极分解结果。

1. Introduction

Monge 问题 [29] 要求将一份质量分布移动到另一份质量分布，同时使运输的平均成本最小化。这一运输规则若存在，则称为最优传输映射。然而，最优传输映射并不总是存在。Kantorovich [23] 提出了该问题的一种松弛形式，该形式始终保证存在一个最优（但不一定唯一的）解，称为最优传输计划。当 Monge 问题有解时，Kantorovich 问题也有解，并且这两个解在本质上是一致的。对于任意完备可分度量空间（X， d），都可以对这两个问题作一般性表述。更具体地，给定一个成本函数c：$X \times X \to (-\infty, +\infty]$ 以及两个（概率）测度 μ 和 ν 在 X 上，Monge 问题要求求出

$$T^* \in \arg\min \int_X c(x, Tx)\, d\mu(x) \quad \text{(Monge formulation)} \tag{1}$$

在所有将 μ 推前到 ν 的 Borel 映射 $T : X \to X$ 中，记为 $T_{\#}\mu = \nu$，这意味着对于每个定义在 X 上的连续函数 ϕ

$$\int_X \phi(T(x))\, d\mu(x) = \int_X \phi(y)\, d\nu(y).$$

类似地，可以将 Kantorovich 问题表述为一个最小化问题

$$\pi^* \in \arg\min \int_X c(x, y)\, d\pi(x, y) \quad \text{(Kantorovich formulation)} \tag{2}$$

在所有从 μ 到 ν 的传输计划 π 中，也就是说，对于 A 中的所有 Borel 集， $\pi(A \times X) = \mu(A)$ 且 $\pi(X \times B) = \nu(B)$， $B \in X$。通常，成本函数 $c(x, y)$ 取为 $d(x, y)^2/2$。许多作者最初在欧几里得空间的框架下对 Monge 问题进行了广泛研究。Sudakov [32] 率先通过测度分解方法，证明了该问题存在从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射解。Evans–Gangbo [17] 给出了另一种存在性证明，该证明运用了偏微分方程理论中的工具。Cafarrelli–Feldman–McCann [11], 则提出了另一种方法，他们考虑更一般的成本函数 $c(x, y) = \|x - y\|^p$，其中 $p \geq 1$。他们通过坐标变换调整问题的局部几何，从而只需解决一维传输问题。这一方法也由其他人独立

发现并由 Trudinger–Wang 使用 [34]。Feldman– McCann 也再次采用了这种方法，[19] 证明了底层空间为黎曼流形时的存在性和唯一性结果。此前，McCann [30] 已证明了类似定理，但仅针对紧流形，并据此证明了博雷尔函数的极分解，以及它与流形上向量场的亥姆霍兹–霍奇分解之间的关系。这推广了 Brenier [7] 最初在欧几里得空间框架下建立的定理。Brenier 还证明，极分解问题的解与蒙日–康托罗维奇问题的解相同，参见 Brenier 的专著 [8]。后来，传输问题被推广到更一般的度量空间，其中最早的研究之一是 [27, Lott–Villani], 的工作，他们利用最优传输映射，为测度长度空间定义了下里奇曲率的概念。度量测度空间中的相关研究可见 [20, Figalli–Villani], [14, Cavalleti–Huesmann]以及 [25, 26, 24, Sturm]的一系列论文。关于蒙日–康托罗维奇问题的历史、应用及推广的详尽论述，请参阅 [3, Ambrosio–Gigli–Savar´e], [35,Villani] 及其中所列参考文献。

在这些发展的基础上，本文试图在局部紧完备CAT(0)空间的框架下，获得传输问题的存在性与唯一性结果。这些空间是Alexandrov引入的具有有界曲率的度量空间中的一个特殊类别 [1]。具有上界曲率的度量空间由Gromov [21] 推广，并在纯数学和应用数学中发挥着重要作用，例如参见 [9, 10, 5]。作为具有非正曲率的黎曼流形的一种推广，CAT(0)空间为研究传输问题提供了一个自然的框架。此外，本文在某种意义上补充了 [4, Bertrand] 关于曲率下界有界的Alexandrov空间中传输问题的结果。另一种证明可参见 [33, Rajala–Schultz]近期的工作。除了一般情况下缺乏光滑性之外，主要困难还在于，目前似乎没有明显的方法，能够将相应的豪斯多夫测度 $\mathscr{H}_d$ （其中 $d \geq 1$ 是 X的豪斯多夫维数）进行解体，使其与某个相对于一维豪斯多夫测度 $\mathscr{H}_1$绝对连续的划分相一致。对 $\mathscr{H}_d$ 进行这种形式的解体，对于运用Rademacher定理中的论证至关重要，例如参见 [35, 定理108], ，以证明在$\mathscr{H}_d$-几乎处处成立的意义下， X上的利普希茨函数是（测地）可微的。可是，当该空间的唯一测地线结构满足某些条件时，它为最优传输映射的存在性与唯一性提供了有利的环境。更具体地说，我们提出三个条件，其中前两个在本质上更为初等且具有几何性质，而第三个涉及 $\mathscr{H}_d$的解体。为简便起见，维数 d 取为有限，尽管这并非必要。第一个性质，即局部测地线延拓，要求对于每个 $x \in X$ 的邻域，都有一条包含 x 的任意测地线 γ 能够至少在局部向两个方向延拓。事实证明，当这一性质处处成立时，它等价于通常意义下的测地线延拓，即任意测地线都可以向两个方向无限延拓。测地线延拓在获得用于刻画测地可微函数局部极值的费马定理方面发挥着重要作用。第二个条件要求，对于每个 $x \in X$，都存在某个测地球 $B(x,\ r)$以及某个 $r > 0$ ，使得从 x 发出的任意两条不同测地线之间的Alexandrov角严格为正，只要这两条测地线互不包含于对方，且完全包含在 $B(x,\ r)$中。我们将这一条件称为正角性质。尽管原则上可以构造出完全不具备这一性质的CAT(0)空间，但大多数有用的空间都具有正角性质。正角性质保证了测地导数 $D_x c(x,\ \cdot\ ;\ \gamma)$的单射性，这是一种在动力系统中经常遇到的条件，被称为扭转条件。第三个性质要求豪斯多夫测度具有某种正则性，

如果满足该条件，则此测度可以进行解体，使其与某个相对于 $\mathscr{H}_1$绝对连续的划分相一致。我们将这一性质称为解体正则性条件。需要指出的是，所有条件只需在$\mathscr{H}_d$-几乎处处成立。全文中，我们使用成本函数 $c(x,\ y) = d(x,\ y)^2/2$。

本文其余部分安排如下。第2节介绍关于 CAT(0)空间、测度论、循环单调性与凸性、豪斯多夫外测度与维数，以及实值函数沿测地线的可微性的一些预备定义与结果。第3节讨论保证最优传输映射存在且唯一的三个条件。任何局部紧完备 CAT(0)空间都几乎处处满足局部测地线延拓性质 $\mathscr{H}_d$（定理 3.5）。我们特别关注第3.3节，其中引入径向投影和分解正则性的概念。我们证明，若空间 (X,d) 具有正角性质，并且满足分解正则性，那么在每个闭球上，相应的豪斯多夫测度都存在唯一分解；该分解与球内极大测地线所诱导的划分相一致，且相对于 $\mathscr{H}_1$ 绝对连续（定理 3.12）。接下来，我们讨论给定集合 $S \subseteq X$ 的豪斯多夫测度与正角性质之间的关系（定理 3.14）。这两个结果都用到了近期将著名的 Eilenberg 不等式推广到度量空间的工作 [16, 22] 。第4节给出两个用于证明主要结果的基本引理（引理 4.1、引理 4.2）。引理 4.1 是适用于满足测地线延拓性质的测地空间的一类费马定理；引理 4.2 则完全依赖于空间的非正曲率，并确保 $D_x(x,;\gamma)$ 的单射性成立。第5节陈述主要结果（定理 5.1）：我们证明，在几乎处处满足正角性质和分解正则性 $\mathscr{H}_d$的 CAT(0)空间中，给定两个概率测度μ,ν，且 μ 绝对连续，则存在一个从 μ 到 ν 的唯一最优传输计划 π。此外，该映射可表示为 $\pi = (\mathrm{Id}\ T_{\#})\mu$，其中 $T:\ X \to X$ 是一个几乎处处唯一的 Borel可测映射 μ。由此可得，当 X 是具有非正截面曲率的黎曼流形（定理 5.3），以及当 X 是 CAT(0)欧几里得多面体复形（定理 5.5）时，最优传输映射均存在且唯一。在这些情形下，正角条件不难证明，而分解正则性的证明则较为复杂，并用到了 Federer 的一个经典结果 [18]。对于黎曼流形，$\tilde{}$映射 T 的显式形式为 $T(x) = \exp_x \nabla\psi(x)$，其中 $\exp_x:\ \mathscr{T}_x\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 是$\tilde{}$指数映射，且 ψ 是一个 c- 凸函数。这里，$\nabla\psi(x)$ 表示 ψ 在 x 处的 μ- 近似梯度。最后，第 6 节给出适用于 X 中 Borel可测映射的极分解定理（定理 6.2）。借助引理6.1可以证明，对于任意 Borel可测映射 $s:\ X \to X$ 和概率测度 μ，只要 $s_{\#}\mu$ 的推前测度绝对连续，该映射就能以唯一方式在 μ-几乎处处分解为$T \circ u$；其中 T 是从 μ 到 $s_{\#}\mu$ 的唯一传输映射，而 u 是 μ 上的保测映射，即 $u_{\#}\mu = \mu$。

2. Preliminary definitions and results

2.1. CAT(0)空间的几何。设 (X,d) 为一个度量空间。如果 $\gamma:\ [0,1] \to X$满足对于所有 $s,t \in [0,1]$ 都有 $d(\gamma(s)\ \gamma(t)) = |s-t|\,d(\gamma(0)\ \gamma(1))$，则称其为一条常速测地线。我们用 $\ell(\gamma) = d(\gamma(0)\ \gamma(1))$ 表示测地线 γ的长度。如果度量空间 (X,d) 中任意两个元素 $x,y \in X$ 都可以由 X中的一条（唯一）测地线连接，则称 (X,d) 为一个（唯一）测地空间。两个元素 $x,y \in X$ 之间的测地线段通常记为 $[x,y]$。给定 $x \in X$和 $r > 0$，令 $B(x,r) = \{y \in X: d(x,y) < r\}$，并且

$B[x,r]=\{y\in X:\ d(x,y)$ 分别表示开测地球和闭测地球。如果闭球是紧的，则空间 (X,d) 是局部紧的。具有顶点 $x,y,z\in X$ 的测地三角形 $\Delta(x,y,z)$ 是三条测地线段 $[x,y]$、$[y,z]$ 和 $[z,x]$ 的并。对于 $\Delta(x,y,z)$，$\mathbb{R}^2$ 中的比较三角形 $\Delta(x,y,z)$ 是由三个顶点 $x,y,z\in\mathbb{R}^2$ 确定的三角形，满足 $d(x,y)=|x\,y|$、$d(y,z)=|y\,z|$ 以及 $d(z,x)=|z\,x|$。点 $w\in[x,y]$ 是 $w\in[x,y]$ 的比较点，如果 $d(x,w)=|x\,w|$。如果对于每个测地三角形 $\Delta(x,y,z)$ 以及任意 $p\in[x,y],q\in[x,y]$，不等式成立，则测地度量空间 (X,d) 是 CAT(0)空间

$$d(p,q)\le|\overline{p}\,\overline{q}|. \tag{3}$$

(3) 的一个重要推论是，任意两个不同的点都由一条唯一测地线连接。令 $\Gamma_x(X)=\{\gamma-$ 测地线：$x\in\gamma\}$ 和 $\Gamma(X)=\bigcup_{x\in X}\Gamma_x(X)$。我们将 $\Gamma_x^0(X)=\{\gamma-$测地线：$\gamma(0)=x\}$记作。注意，$\Gamma_x^0(X)\subseteq\Gamma_x(X)$。一般而言，给定一个连通集合 $S\subseteq X$，我们定义 $\Gamma_x(S)=\{\gamma-$在 S中的测地线：$x\in\gamma\}$。用 $x_t:=(1-t)x\oplus ty$表示 $[x,y]$ 上满足 $d(x_t,x)=td(x,y)$ 的唯一元素。我们称其为参数为 $t\in[0,1]$时 x 与 y 的凸组合。CAT(0) 不等式 (3) 等价于

$$d(x_t,z)^2\le(1-t)\,d(x,z)^2+t\,d(y,z)^2-t(1-t)\,d(x,y)^2,\quad\forall z\in X. \tag{4}$$

不等式 (3) 和 (4) 刻画了 CAT(0)空间的非正曲率。如果对于任意 $x,\ y\in C$线段 $[x,y]$ 都完全包含于 C 中，则集合$C\subseteq X$ 是凸的。对于集合 $C\subseteq X$ 和任意 $x\in X$，记 $d(x,\ C)=\inf\{y\in C:\ d(x,\ y)\}$，以及 $P_Cx=\{y\in C:d(x,\ y)=d(x,\ C)\}$（到 C 的度量投影）。

给定 $\gamma,\ \eta\in\Gamma_x(X)$，其中 $\gamma(0)=\eta(0)=x$，且 $0<s,\ t<1$考虑比较三角形 $\Delta(x,\ \gamma(s)\ \eta(t))$。令$\overline{\alpha}_{\overline{x}}(\overline{\gamma}(\overline{s})\,\overline{\eta}(\overline{t}))=\angle(\overline{\gamma}(\overline{s})\,\overline{x}\,\eta(t))$表示 x 处由线段$[x,\gamma(s)]$ 和 $[x,\eta(t)]$之间形成的角。x 处两条测地线 γ 和η 之间的 Alexandrov（上）角定义为 $[0,\pi]$ 中由下式给出的唯一数

$$\alpha_x(\gamma,\eta)=\limsup_{s,t\to0}\overline{\alpha}_{\overline{x}}(\overline{\gamma}(s),\overline{\eta}(t)). \tag{5}$$

由于空间的非正曲率，函数$\overline{s}\mapsto\overline{\alpha}_x(\gamma(s)\ \eta(t))$ 和 $t\mapsto\overline{\alpha}_x(\gamma(s)\eta(t))$ 单调不减，因此式（5）中的上极限可以替换为更简单的极限 $\alpha_x(\gamma,\eta)=\lim_{s\to0^+}\alpha_x(\gamma(s)\ \eta(s))$，参见例如 [9, §1.10-1.17]。Alexandrov角在从空间中某一点出发的测地线等价类上定义了一个度量。更具体地说，当且仅当 $\alpha_x(\gamma,\eta)=0$ 时，$\gamma,\eta\in\Gamma_x^0(X)$ 等价。我们将一个测地方向 v_γ 与每个等价类关联起来。我们用 Σ_x 表示 $x\in X$ 处的方向空间，它是赋予 Alexandrov角度量 $d_\Sigma(v_\gamma,v_\eta)=\alpha_x(\gamma,\eta)$ 的 x 处所有测地方向集合的完备化。我们将 X 在 x 处的切空间记为 $T_xX=[0,+\infty)\times\Sigma_x/\{0\}\times\Sigma_x$，其度量为 $d_T((t,v_\gamma),(s,v_\eta))^2=t^2+s^2-2ts\cos(d_\Sigma(v_\gamma,v_\eta))$。为此，我们将讨论范围限制在局部紧且完备的 CAT(0)空间。根据分析中的一个标准结果，这类空间总是可分的，因此是 Polish空间。

以下引理总结了到闭凸集上的投影的一些性质：

引理2.1. [12, 定理2.1.12] 设 $C\subseteq X$ 为一个闭凸集。则以下结论成立：

(i) 对任意 $x\in X,\ P_Cx$ 存在且唯一。此外，满足以下不等式：

$$d(x,P_Cx)^2+d(y,P_Cx)^2\le d(x,y)^2,\quad\forall y\in C. \tag{6}$$

(ii) 对任意 $x'\in[x,P_Cx]$，都有 $P_Cx'=P_Cx$。*(iii)* $\alpha_{P_Cx}([P_Cx,x],[P_Cx,y])\ge\pi/2$ 对每个 $y\in C$ 都成立。

2.2. 测度论。设 (X,d) 是一个度量空间，$\mathscr{B}(X)$ 是其 Borel σ-代数。若对于任意满足 $B\in\mathscr{B}(X)$ 的情形都有 $f^{-1}(B)\in\mathscr{B}(X)$，则称函数（映射）$f:X\to X$ 可测。给定两个测度 $\mu,\nu:\mathscr{B}(X)\to[0,+\infty]$，若对于每个 $B\in\mathscr{B}(X)$，$\mu(B)=0$ 蕴含 $\nu(B)=0$，则称 ν 相对于 μ 绝对连续，并记作 $\nu\ll\mu$。根据经典的拉东–尼科迪姆定理，这等价于存在一个可测函数 $f:X\to[0,+\infty)$，使得对于所有 $B\in\mathscr{B}(X)$，都有 $\nu(B)=\int_B f(x)\,d\mu(x)$。三元组 $(X,\mathscr{B}(X)\ \mu)$ 称为测度空间。若存在可数个可测集 X_k，使得 $X=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}X_k$，并且对于每个 $k\in\mathbb{N}$，都有 $\mu(X_k)<+\infty$，则称测度空间 $(X,\mathscr{B}(X)\ \mu)$ 是 σ-有限。令

$$\mathscr{P}_2(X):=\{\mu:\mathscr{B}(X)\to[0,1]\ :\ \int_X d(x_0,x)^2\,d\mu(x)<+\infty,\ \mu(X)=1\}$$

表示所有在 X 上具有有限二阶矩的概率测度 μ [1]的集合。给定一个可测映射 $f:X\to X$，我们令 $f_{\#}\mu$ 表示测度$\mu\in\mathscr{P}_2(X)$在 f 下的推前测度，即对于所有 $B\in\mathscr{B}(X)$，有 $(f_{\#}\mu)(B)=\mu(f^{-1}(B))$。

2.3. 循环单调性与凸性。我们遵循 [35, §1.5]中的术语。令$c:X\times X\to(-\infty,+\infty]$ 为一个成本函数。若对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 以及 Γ 中的任意点集 $(x_1,y_1)\cdots、(x_n,y_n)$，不等式 $\sum_{i=1}^n c(x_i,y_i)\le\sum_{i=1}^n c(x_i,y_{i+1})$ 成立，则称集合 $\Gamma\subseteq X\times X$ 是 c-循环单调的，其中约定 $y_{n+1}=y_1$。若传输计划 π 集中于某个 c-循环单调集 $\Gamma\subseteq X\times X$ 上，即 $\pi(\Gamma)=1$，则称其为 c-循环单调的。若函数 $\psi:X\to(-\infty,+\infty]$ 满足 $\psi\not\equiv+\infty$ 且存在$\zeta:X\to[-\infty,+\infty]$，使得对所有 $x\in X$，有 $\psi(x)=\sup_{y\in X}(\zeta(y)-c(x,y))$，则称其为 c- 凸函数。ψ 的 c- 变换定义为：对所有 $y\in X$，$\psi^c(y)=\inf_{x\in X}(\psi(x)+c(x,y))$；而 ψ 的 c-次微分是 c-循环单调集 $\partial_c\psi=\{(x,y)\in X\times X:\ \psi^c(y)-\psi(x)=c(x,y)\}$。类似地，给定 $x\in X$，ψ 在该点处的 c-次微分定义为 $\partial_c\psi(x)=\{y\in X:(x,y)\in\partial_c\psi\}$。

引理 2.2. [35, 定理5.10] 设 $\mu,\nu\in\mathscr{P}_2(X)$ 和 $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$。则存在一个可测的 c-循环单调闭集 $\Gamma\subseteq X\times X$，使得以下条件等价：

(i) π 是最优的。*(ii)* π 是 c-循环单调的。*(iii)* 存在一个 c-凸函数 ψ，使得

$$\pi(\{(x,y)\in X\times X\ :\ \psi^c(y)-\psi(x)=c(x,y)\})=1.$$

(iv) 存在函数 $\psi:\ X\to(-\infty,+\infty]$ 和 $\phi:\ X\to[-\infty,+\infty)$，使得$\phi(y)-\psi(x)\le c(x,y)$ 对 x,y 成立，且等式 π-几乎处处成立。*(v)* π 集中于 Γ。

注 2.3. [35,定理 5.10 (ii)]中的条件

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{X\times X}c(x,y)\,d\pi(x,y)<+\infty$$

对 $c(x,y)=d(x,y)^2/2$成立。此外，根据 [35, 定理 4。1], 由于 $c(x,y)=d(x,y)^2/2$ 是下半连续且（统一）有下界的，因此存在一个最优传输计划 $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$。

[1]这里 $x_0\in X$ 是任意但固定的一个元素。

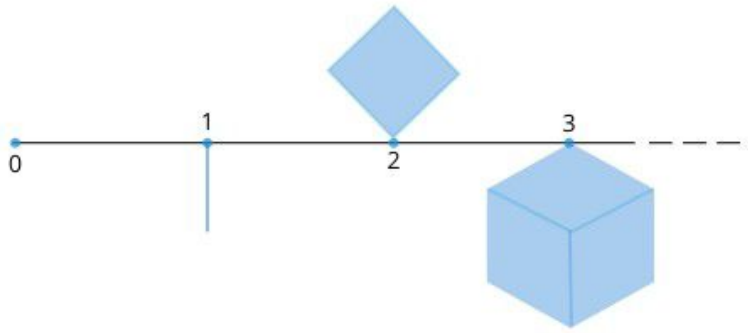


FIGURE 1. 由非负实数轴 $\mathbb{R}$ 构成的空间，其中每个点 $x = n$ 都粘接着一个 n维实心立方体 X 。

2.4. 豪斯多夫外测度与维数。对于集合 $U \subseteq X$ ，定义其直径 $\mathrm{diam}(U) = \sup\{d(x, y) : x, y \in U\}$。约定 $\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$。给定 $d > 0$ 和 $S \subseteq X$，令

$$H_\delta^d(S) = \inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}^d(U_i) : S \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i, \mathrm{diam}(U_i) < \delta\}. \tag{7}$$

S 的 d维豪斯多夫外测度定义为 $\mathscr{H}_d(S) := \lim_{\delta\to 0} H_\delta^d(S)$。根据卡拉泰奥多里扩张定理 [2, 定理 10.23] ，它在 $\mathscr{B}(X)$上确定一个测度。 S的豪斯多夫维数 $d = \dim_H S$定义为 $d = \inf\{d' \geq 0 : \mathscr{H}_{d'}(S) = 0\}$。注意，在 $\mathbb{R}^d$ 中，豪斯多夫测度 $\mathscr{H}_d$ 与勒贝格测度 λ 相差一个依赖于维数 d的归一化常数。若集合 $S \subset X$ 满足 $\mathscr{H}_d$，则称其在 X 中为零体积集，或简称零测集，当且仅当 $\mathscr{H}_d(S) = 0$。如果 $\mathscr{H}_d(S) > 0$ ，那么我们称S 为正体积集。元素 $\mu \in \mathscr{P}_2(X)$绝对连续，当且仅当 $\mu \ll \mathscr{H}_d$。

引理 2.4. [31,定理 2] 豪斯多夫维数满足以下性质：

(i) 若 $X \subset Y$，则 $\dim_H X \leq \dim_H Y$；*(ii)* 若 $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ ，且对所有 $i \in \mathbb{N}$，$\dim_H X_i \leq d$ ，则 $\dim_H X \leq d$；*(iii)* 若 X 是可数的，则 $\dim_H X = 0$；*(iv)* 若 $X \subset \mathbb{R}^d$，则 $\dim_H X \leq d$；*(v)* 若 $\dim_H X = d_1$ 且 $\dim_H Y = d_2$，则 $\dim_H(X \times Y) \geq d_1 + d_2$；*(vi)* 若 X 是连通的且包含多个点，则 $\dim_H X \geq 1$；*(vii)* 若 $f : X \to f(X)$ 是一个利普希茨映射，则 $\dim_H f(X) \leq \dim_H X$。

推论2.5. 设 (X, d) 是一个 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间，则 维数$_H X \geq 1$。若 维数$_H X = d$ 且$S \subseteq X$ 满足 维数$_H S = d_S$ ，则 $\mathscr{H}_{d_S}(S) < +\infty$ ，且当 $\mathscr{H}_d(S) > 0$时， $d_S = d$ 。

证明。 第一个断言直接由引理 2.4 (vi) 得出，因为根据定义，任意 CAT(0)空间都是连通的。对于第二个断言，令 $\dim_H S = d_S$，则由引理 2.4 (i)$d_S \leq d$。现在假设 $\mathscr{H}_d(S) > 0$，但 $d_S < d$，则 $H_\delta^d(S) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}^d(U_i) < \delta^{d-d_S} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}^{d_S}(U_i)$，其中 $S \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$。这又推出 $H_\delta^d(S) \leq \delta^{d-d_S} H_\delta^{d_S}(S)$。令 $\delta \to 0$ 趋于极限，得到 $\mathscr{H}_d(S) = 0$ ，从而导出矛盾。□

请注意，与欧几里得空间不同，一般而言，局部紧 CAT(0) 空间的豪斯多夫维数可能是无限的。考虑非负实数轴 $\mathbb{R}_+$ ，在其每一点$x = n$ 处都粘接一个 n 维立方体 C_n ，见图 1。由于每个立方体 C_n 都可以等距嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 中，因此由引理 2.4 (iv) 可得 $\dim_H C_n = n$。此外，由引理 2.4 (i)，又由于 $C_n \subseteq X$ ，可得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\dim_H X \geq n$ 。另外，非正截面曲率的黎曼流形具有有限的豪斯多夫维数。事实上，由于

一个 n 维流形 $\mathscr{M}_n$ 与 $\mathbb{R}^n$双利普希茨微分同胚，因此引理 2.4 (vii) 得出 $\dim_H \mathscr{M}_n = n$。

引理2.6。 设(X,d) 是一个维数为$_H X < +\infty$的局部紧完备$\mathrm{CAT}(0)$ 空间。令 $\mathscr{H}_d$ 为 X上的豪斯多夫测度。则$(X,\mathscr{B}(X)\ \mathscr{H}_d)$ 是一个 σ-有限测度空间。

证明。 由于(X,d)是局部紧且连通的，因此它是可分的。给定 $\varepsilon > 0$，记为 $X_k = B(y_k,\varepsilon)$，其中 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ 是一个可数稠密集，则 $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$。接下来令 $d_k = \dim_H X_k$，由引理 2.4 (i)可得 $d_k \le d$，特别地，当 $d_k < d$时，$\mathscr{H}_d(X_k) = 0$。因此，设 $d_k = d$，则对任意 $\delta > 0$，都有 $H^d_\delta(X_k) \le \mathrm{diam}^d X_k < +\infty$，其中有限性与 δ无关。因此，对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有$\mathscr{H}_d(X_k) < +\infty$。根据定义，$(X,\mathscr{B}(X)\ \mathscr{H}_d)$是一个 σ-有限空间。□

命题2.7. 局部紧完备$\mathrm{CAT}(0)$空间中的每个有界闭凸集都具有有限的豪斯多夫维数。

证明。 只需证明闭测地球的情形。设 $B[x,r]$ for some $r > 0$是 X中的一个闭测地球。若 $\dim_H B[x,r] = +\infty$，则对任意 $d \in [1,+\infty)$，有$\mathscr{H}_d(B[x,r]) = +\infty$。另一方面，对任意固定的 $\delta > 0$，都有 $H^d_\delta(B[x,r]) \le \mathrm{diam}^d B[x,r] < +\infty$，且与 δ无关，这意味着 $\mathscr{H}_d(B[x,r]) < +\infty$。这不可能。□

我们后续所依据的大部分理论都具有局部性质。因此，根据命题2.7，不失一般性地假设 $\dim_H X$ 有限。事实上，由于 X 取为局部紧且完备，我们可以写成 $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B[x_k,r]$，其中$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ 是一个可数稠密集，且 $r > 0$，因此可以在 X 上赋予体积测度 $\mathscr{H}_\infty$，使得 $\mathscr{H}_\infty|_{B[x_k,r]} = \mathscr{H}_{d_k}$，其中 $d_k = \dim_H B[x_k,r]$。特别地，对于任意$x \in X$，空间在 x 处的局部维数都是有限的。

2.5. **测地导数**。

定义 2.8. 设 $f\colon X \to (-\infty,+\infty]$ 是一个函数，且 $x \in X$。对于 $\gamma \in \Gamma_x(X)$ 定义 e

$$D^+ f(x;\gamma) := \limsup_{h\to 0} \frac{f(\gamma(s+h)) - f(\gamma(s))}{h} \tag{8}$$

其中 $\gamma(s) = x$，其中某个 $s \in [0,1]$。类似地，我们定义 $D^- f(x;\gamma)$，将 上极限 替换为下极限。如果两个极限相等，则称 f 在 x 处沿 γ 测地可微，并简记为 $Df(x;\gamma)$。如果 f在每个 x 处沿每条 $\gamma \in \Gamma_x(X)$ 测地可微，则称 f 是测地可微的。

定义 2.9. 设 $f\colon X \times \cdots \times X \to (-\infty,+\infty]$ 是一个函数，则将 $D_{x_i} f(x_1,\cdots,x_n;\gamma)$ 记为 f 的测地导数（如果存在），相对于 x_i 沿 $\gamma \in \Gamma_{x_i}(X)$。

设 μ 是 X 上的一个测度，它不会将正体积集合赋予零体积。若可测集合 $S \subseteq X$ 在 $x \in X$ 处相对于 μ 的密度为 ρ，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu(S \cap B(x,\varepsilon))}{\mu(B(x,\varepsilon))} = \rho. \tag{9}$$

显然，$\rho \in [0,1]$，特别是对于任意 μ-零测集 S，在任意 $x \in X$ 处都有 $\rho = 0$。如果 $X \setminus S$ 是一个 μ-零测集，那么 S 在任意 $x \in X$ 处的密度为 $\rho = 1$。

定义 *2.10.* 设 $\Omega \subseteq X$ 为一个开集，μ 为一个测度，且不将正体积集合赋予零体积。设 $\psi : \Omega \to [-\infty,+\infty]$ 为一个可测函数。若存在一个可测函数 $\psi : \Omega \to [-\infty,+\infty]$，其在 x 处沿 γ可微，且集合 $\{\psi = \psi\}$ 在 x处的密度为 *1*，则称 f在 $x \in X$ 处沿 $\gamma \in \Gamma_x(X)$ μ-近似测地可微。我们将 ψ 在$\sim$ $\sim x$ 处沿 $\gamma \in \Gamma_x(X)$ 的 μ-近似测地导数定义为公式 $D\psi(x;\gamma) = D\psi(x;\gamma)$。

3. Three conditions onCAT(0) spaces

3.1. 测地线延拓。

定义 3.1. 给定 $\gamma \in \Gamma(X)$，设 内$\gamma = \gamma \setminus \{\gamma(0)\ \gamma(1)\}$。若测地线 $\gamma \in \Gamma(X)$ 存在延拓 $\widetilde{\gamma} \in \Gamma(X)$，使得 $\gamma \subset$内$(\widetilde{\gamma})$，则称其可延拓。若每条测地线 $\gamma \in \Gamma(X)$ 都可延拓，则称空间 (X, d) 满足测地线延拓性质。

若 X 具有测地线延拓性质，则对任意 $x \in X$ 和 $\gamma \in \Gamma_x(X)$，存在 $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_x(X)$，使得 x 是 $\widetilde{\gamma}$的内部点，即 $x = \widetilde{\gamma}(t)$，其中 $t \in (0,1)$。显然，测地线延拓可以限制在任意连通子集 $S \subseteq X$ 上；S 如果任意测地线 $\gamma \in \Gamma(S)$都可以在 S中延拓，那么该子集就具有测地线延拓性质。特别地，开连通集也具有这一性质。在 [28]中，测地线延拓针对具有曲率上界的一般测地空间进行讨论。

命题*3.2.* [9, 引理*5.8*，*§*2] *CAT(0)*空间 (X, d) 具有测地线延拓性质，当且仅当每条测地线都可以无限延拓；也就是说，对任意 $\gamma \in \Gamma(X)$，存在一个等距映射 $\mathscr{I}: \mathbb{R} \to X$，即 $d(\mathscr{I}(s)\ \mathscr{I}(t)) = |s - t|$ 对所有 $s, t \in \mathbb{R}$均成立，使得对每个 $t \in [0, 1]$，都有 $\mathscr{I}(t\ \ell(\gamma)) = \gamma(t)$。

现在考虑空间 $X = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0\}$ 配备欧几里得距离。从点 $(x,\ 0)$ 或 $(0,\ y)$ 出发的任何测地线，按照定义 3.1 的意义都不可延拓。然而，对于任意满足 $x,\ y > 0$ 的 $(x,\ y) \in X$，存在 $r > 0$ 使得 $B((x,\ y)\ r)$ 具有测地线延拓性质。由此引出以下概念。

定义 3.3. (X, d) 在 $x \in X$ 处具有局部测地线延拓性质，若存在某个$r > 0$，使得存在满足测地线延拓性质的 $B(x, r)$。若此条件对所有 $x \in X$ 都成立，则称 (X, d) 具有局部测地线延拓性质。

命题 3.4. 一个 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间 X 具有测地线延拓，当且仅当 X 具有局部测地线延拓性质。

证明。显然，测地线延拓蕴含局部延拓。现在设 X 满足局部测地线延拓性质。取 $\gamma \in \Gamma(X)$，并记 $x = \gamma(0)\ y = \gamma(1)$。存在 $r, r' > 0$，使得 $B(x, r)$ 和 $B(y, r')$ 满足测地线延拓。令 $\gamma_B^1 =\gamma \cap B[x, r/2]$和 $\gamma_B^2 = \gamma \cap B[y, r'/2]$。特别地，$\gamma_B^1 \in \Gamma_x(B(x, r))$ 且 $\gamma_B^2 \in \Gamma_y(B(y, r'))$。存在 $\widetilde{\gamma}_1 \in \Gamma_x(B(x, r))$ $\widetilde{\gamma}_2 \in \Gamma_y(B(y, r'))$，使得 $\gamma_B^1 \subset \mathrm{int}\ \widetilde{\gamma}_1$ 且 $\gamma_B^2 \subset \mathrm{int}\ \widetilde{\gamma}_2$。但此时 $\gamma^* = [\widetilde{\gamma}_1(0)\ x] \cup [x, y] \cup [y, \widetilde{\gamma}_2(1)]$ 是 $\Gamma(X)$ 中一条严格包含 γ 的测地线。□

空间 $X = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ 几乎处处具有局部测地线延拓。事实上，对于内部的任意一点 $(x,\ y)$ X，都可以找到一个以 $B((x,\ y)\ r)$ 为中心的开球，使得任意 $\gamma \in \Gamma_{(x,y)}(B((x,\ y)\ r))$ 都能在 $B((x,\ y)\ r)$ 中延拓。然而，在坐标轴上的点处，局部测地线延拓性质不成立，而这些点构成 $\mathscr{H}_2$-零测集。这引出了一个问题：一般的局部紧完备 CAT(0) 空间是否几乎处处满足局部测地线延拓条件 $\mathscr{H}_d$，其中 d 是该空间的豪斯多夫维数。

如果开球 $B(x,\ r)$ 具有有界容量，则称其具有有界容量；如果 $r' \geq r$，那么 $B[x, r']$ 可以被有限个球 $B(y_i,\ r'/2)$ 覆盖。

定理 3.5. 具有 维数$_H X < +\infty$ 的局部紧完备 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间(X, d) 几乎处处满足局部测地线延拓条件 $\mathscr{H}_d$。

证明。令 $\dim_H X = d$ 和 $x \in X$。假设对于任意 $r > 0$，存在一条测地线$\gamma \in \Gamma_x(B(x, r))$，它在 $B(x, r)$ 中不可延拓，那么 γ与任意另一条测地线 $\eta \in \Gamma_x(B(x, r))$ 之间的 Alexandrov角 $\alpha_x(\gamma, \eta)$ 满足 $\alpha_x(\gamma, \eta) < \pi$。特别地，我们将得到$d_\Sigma(v_\gamma, v_\eta) < \pi$，其中 $v_\gamma, v_\eta \in \Sigma_x$ 是相对于 γ和 η的方向，因此，对于任意 $t, s > 0$，有$d_T((t, v_\gamma), (s, v_\eta)) < t + s$。在这种情况下，$T_x X$ 不可能与 $\mathbb{R}^k$等距

对于任意 $k = 0, 1, 2, \cdots, d$。由此可见，要证明我们的结论，只需证明对于 $\mathscr{H}_d$-几乎所有 $x \in X$，T_xX 都与 $\mathbb{R}^d$等距。令 $X_k = \{x \in X : \dim_H T_xX = k\}$，其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, d$。由于 X是可分的，可用可数多个球$B(x_i, r)$ $i \in \mathbb{N}, r > 0$覆盖它。此外，由于 X是局部紧且完备的，任意球 $B(x, r)$都可由有限多个球 $B(y_i, r/2)$覆盖，其中 $y_i \in B[x, r]$，对某个 $N \in \mathbb{N}$，有 $i = 1, 2, \cdots, N$（可能依赖于 x）。特别地，任意球 $B(x, r)$都有有界容量。用 $\mathrm{Reg}_k B(x, r)$ 表示 $B(x, r)$ 的 k-正则部分，见 [28, Lytchak–Nagano, §11.4], ，则应用 [28, 推论 11.8] 可知，$\mathrm{Reg}_k B(x, r)$ 在$B(x, r)$ 中是开集，在 $B_k(x, r)$ 中稠密，且 $= \{y \in B(x, r) : \dim_H T_yX = k\}$，并且局部双 Lipschitz 同胚于 $\mathbb{R}^k$。令 $M_k \subseteq X_k$ 为覆盖 X的球 $B(x_i, r)$ 的 k-正则部分之并。则 M_k 在 X中是开集，在 X_k 中稠密，并且局部双 Lipschitz 同胚于 $\mathbb{R}^k$。根据[28, 定理 1.2]，集合 $X_k \setminus M_k$ 是 $(k-1)$–豪斯多夫维数的；根据 [28, 定理 1.3]，集合 M_k包含 $R_k = \{x \in X : \ T_xX$与 $\mathbb{R}^k\}$等距，且 $M_k \setminus R_k$是 $(k-2)$–豪斯多夫维数的。特别地，$R_d \subseteq M_d$，并且满足 $\mathscr{H}_d(X \setminus R_d) = 0$。□

3.2. **正角性质**。

定义3.6。若一个$\mathrm{CAT}(0)$ 空间(X, d) 在 $x \in X$ 处具有正角性质，则存在$B(x, r)$ $r > 0$，使得对于任意 $\gamma, \eta \in \Gamma_x^0(B(x, r))$，只要 γ 和 η 互不包含，*Alexandrov*角 $\alpha_x(\gamma, \eta)$ 就为正。若 X 在每个 $x \in X$处都具有此性质，则 X 具有正角性质。若$\inf r > 0$，则 X 一致地满足此性质。

Pr命题3.7。设 X 在某个 $r > 0$的 $x \in X$ 处具有正角性质，则
则 ***(i)*** $B(x, r')$ 对任意 $r' < r$都在 x 处具有正角性质；***(ii)*** $B[x, r]$ 在 x处具有正角性质。

证明。(i) 对任意的 $r' < r$和 γ， $\eta \in \Gamma_x^0(B(x,\ r'))$ 蕴含 γ， $\eta \in \Gamma_x^0(B(x,\ r))$。由定义3.6和(5)即可得出结论。

(ii) 设 $\gamma, \eta \in \Gamma_x^0(B[x, r])$，使得其中一个不是另一个的子集。记为 $y = \gamma(1)$ 和 $z = \eta(1)$。对 $n \in \mathbb{N}$ 定义 $y_n = \gamma(t_n)$ $z_n = \eta(t_n)$，并取满足 $\lim_{n\to+\infty} t_n = 1$ 的序列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, 1)$。显然，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $y_n, z_n \in B(x, r)$，特别地 $[x, y_n], [x, z_n] \in \Gamma_x^0(B(x, r))$。 $x \in X$ 处的正角性质与 $r > 0$ 蕴含对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\alpha_x([x, y_n], [x, z_n]) > 0$。注意，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $y_n \in [x, y]$, $z_n \in [x, z]$，因此对于所有 m，存在某个 $\alpha > 0$ 使得 $\alpha_x([x, y_n], [x, z_n]) = \alpha_x([x, y_m], [x, z_m]) = \alpha$。由于 $\lim_{n\to+\infty} d(y, y_n) = 0$ 且 $\lim_{n\to+\infty} d(z, z_n) = 0$，由映射 $(y, z) \mapsto \alpha_x([x, y], [x, z])$ 的连续性（参见例如 [12, 命题1.2.8] yields）可得

$$\alpha_x(\gamma, \eta) = \alpha_x([x, y], [x, z]) = \lim_{n\to+\infty} \alpha_x([x, y_n], [x, z_n]) = \alpha > 0.$$

由于 $\gamma, \eta \in \Gamma_x^0(B[x, r])$ 是任意的，因此结论成立。

□

对于 CAT(0) 空间这一类空间而言，正角性质似乎相当严格，但我们只需要这一性质几乎处处（ $\mathscr{H}_d$）成立。就实际应用而言，许多 CAT(0) 空间几乎处处具有正角性质，特别是任何非正曲率的黎曼流形、任何树状空间以及 CAT(0)多面体复形；应用示例可参见系统发育树BHV空间 [5, Billera等人]。然而，也可以构造出在任何地方都不满足这一性质的局部紧CAT(0)空间。下面通过一个例子具体说明这一构造。

3.2.1. 迭代有理梳的例子。令 $X_0 = [x_0, y_0]$ 为一条赋予长度度量 d_0的单位长度线段。然后在 X_0 上的每个有理点处粘合一个 X_0的副本，得到下一个迭代空间 X_1，并再次赋予其长度度量 d_1。注意，我们所说的 X_0 上的有理点，是指满足以下条件的元素 $p \in X_0$：

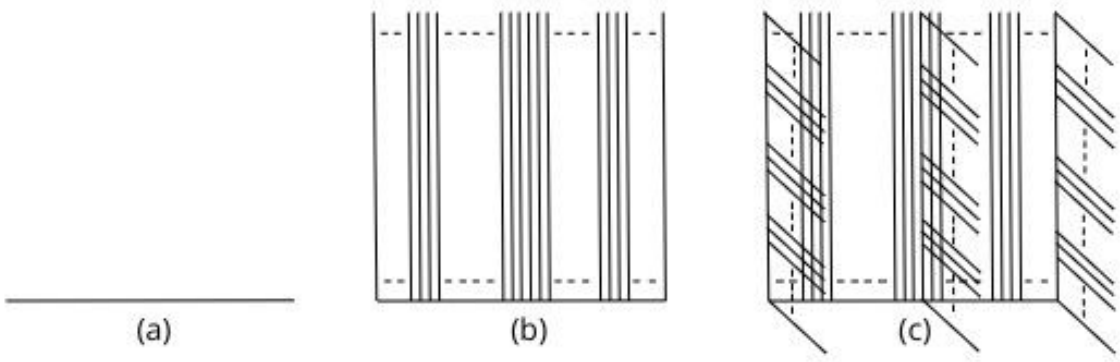


FIGURE 2. (a) 空间 X_0，(b) 有理梳形 X_1 以及 (c) 一般的迭代有理梳形 X_k。

$d_0(x_0, p)$ 是一个有理数。空间 X_1 看起来像一把梳子，见图 2(b)。然后在 X_1 的每个齿上的每个有理点处粘合一个 X_0的副本，从而得到下一个迭代空间 X_2，并为其赋予长度度量 d_2。以这种方式，我们构造出一般的迭代梳形空间 X_k，见图 2(c)。特别地，X_k 通过在 X_{k-1}的每个最末齿的每个有理点处粘合一个 X_0 的副本，从 X_{k-1}得到。根据 Reshetnyak定理，例如参见 [9, 定理 11.3]，对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$，X_k 都是 CAT(0)空间。对于 X_0，显然对于所有 $x \in \operatorname{int} X_0$ 以及所有 $\gamma, \eta \in \Gamma_x^0(X)$，只要 γ和 η 彼此不互为子集，就有 $\alpha_x(\gamma, \eta) = \pi$，因此正角性质几乎处处成立。考虑 X_1，我们声称在线段 X_0 中的任何点处，X_1 都不满足正角性质。首先，为了区分 X_1 的基线段 X_0 与其余粘合的副本，我们将粘合在有理点 $p(r)$处的 X_0 副本记为 $X_0^1(r)$，其中 $d_1(x_0, p(r)) = r \in [0,1]$。取某个 $x \in X_0$。由于有理数在 $[0,1]$ 中稠密，因此对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个有理数 $r \in [0,1]$，使得 $d_1(x, p(r)) < \varepsilon$。令 $d_1(x, p(r)) = s$，其中 $s \in (0, \varepsilon)$，且 $y \in X_0^1(r)$ 满足 $d_1(y, p(r)) < \varepsilon - s$，则$d_1(x, y) = d(x, p(r)) + d(p(r)\ y) < s + (\varepsilon - s) = \varepsilon$，即 $y \in B(x, \varepsilon)$。令 $y' \in X_0$ 满足 $s < d_1(x, y') < \varepsilon$。于是我们得到两条测地线段 $[x, y] \cap [x, y'] = [x, r]$，因此$\alpha_x([x, y], [x, y']) = \alpha_x([x, r], [x, r]) = 0$。初等计算表明，$\dim_H X_0 = 1$且 $\mathscr{H}_1(X_0) = 1 > 0$，也就是说，$X_1$ 不满足正角性质的点集具有 $\mathscr{H}_1$-测度 ≥ 1。现在定义 $X_\infty = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ 并赋予其长度度量。令$x \in X_\infty$，则对于某个 $k \in \mathbb{N}$有 $x \in X_k$。于是 x 是位于X_k 或 X_{k+1}中的某个 X_1 副本的元素。根据关于 X_1 的前述论证，空间 X_∞ 在 x处不可能满足正角性质；由于 x 是任意的，因此 X_∞ 在任何点处都不具有正角性质。

3.3. 分解正则性。 给定测度空间 (X, Σ, μ)，设 $(X_t)_{t \in T}$是 X 的一个划分，且 $p: x \in X \mapsto [x] \in T$ 为商映射。在 T 上赋予最大的 σ-代数$\mathscr{T}$，使得 p 可测，即当 $F \in \mathscr{T}$时，$p^{-1}(F)$。假设 μ 具有总有限变差，即 $|\mu|(X) = \mu^+(X) + \mu^-(X)$，其中 μ^+ 和 μ^- 分别是一般（可能为符号）测度 μ的非负部分和非正部分。记为 $\nu = p_\# \mu$。遵循 [13]，我们给出测度解体的定义。

定义 3.8。 X 中的一族概率测度 $(\mu_t)_{t \in T}$ 是与划分 $(X_t)_{t \in T}$ 相一致的测度 μ的解体，当且仅当

(i) 对每个 $B \in \Sigma$，映射 $t \mapsto \mu_t(B)$ 均为 ν-可测；

(ii) 对每个 $B \in \Sigma$ 和 $F \in \mathscr{T}$，均有

$$\mu(B \cap p^{-1}(F)) = \int_F \mu_t(B)\, d\nu(t). \tag{10}$$

如果测度 μ_t 对于 $t \in T$，ν-几乎处处唯一确定，则该解体是唯一的。

关于测度解体的更深入论述，参见例如 [6, Bogachev §10.4，§10.6]。在本节中，为简单起见，假设(X,d)是一个维数为$_H\, X < +\infty$的有界CAT(0)空间；否则，鉴于命题 2.7，我们总可以将分析限制在闭球上。此外，假设 X 满足正角性质。给定$x \in X$，定义 $M_x(X)$为所有测地线 $\gamma \in \Gamma_x^0(X)$构成的集合，其中不存在另一条测地线 $\tilde{\gamma} \in \Gamma_x^0(X)$真包含 γ。我们称 $M_x(X)$为从 x出发的所有极大测地线的集合。为简单起见，假设半径 $r_x > 0$ 使得 X 在 x 处具有正角性质，并满足 $r_x = \sup\{d(x,y) : y \in X\}$。对于 $\gamma \in M_x(X)$，令$\widehat{\gamma} = \gamma \backslash \{x\}$，则集合族$(\widehat{\gamma})_{\gamma \in M_x(X)} \cup \{x\}$ 构成 X的一个划分。这是显然的：若 $\widehat{\gamma}_1 \cap \widehat{\gamma}_2 \neq \emptyset$，则存在 $y \in X$，使得$[x,y] \subseteq \widehat{\gamma}_1$ 且$[x,y] \subseteq \widehat{\gamma}_2$，从而 γ_1 与 γ_2之间的Alexandrov角为零，这与 x 处的正角性质矛盾，或者 $\gamma_1 = \gamma_2$。由于(X,d)是完备可分度量空间，且 $\mathscr{H}_d$ 定义在Borel σ-代数 $\mathscr{B}(X)$上，所以$(X, \mathscr{B}(X)\ \mathscr{H}_d)$是一个勒贝格测度空间，参见例如 [6, Bogachev §9.4]。此外，在包含映射 $\iota : X \backslash \{x\} \hookrightarrow X$ 以及对 $\mathscr{H}_d$-零测集 $\{\emptyset\} \subset X \backslash \{x\}$ 和$\{x\} \subset X$的识别下，测度空间$(X, \mathscr{B}(X)\ \mathscr{H}_d)$与$(X \backslash \{x\}, \mathscr{B}(X)\ \mathscr{H}_d)$模0同构。类似地，带有 $\nu = p_{\#}\mathscr{H}_d$ 的测度空间$((\widehat{\gamma})_{\gamma \in M_x(X)} \cup \{x\}, \mathscr{T}, \nu)$和$((\widehat{\gamma})_{\gamma \in M_x(X)} \mathscr{T}, \nu)$模0同构。因此，只需限制到集合族$(\widehat{\gamma})_{\gamma \in M_x(X)}$即可。另一方面，可分性蕴含$(X, \mathscr{B}(X))$是可数生成的。结合条件 $\mathscr{H}_d(X) < +\infty$ （因为 X 有界），根据[13, 定理2.3]，，可得存在唯一的、与划分$(\widehat{\gamma})_{\gamma \in M_x(X)}$相容的 $\mathscr{H}_d$ 的唯一分解$(\mu_{\widehat{\gamma}})_{\gamma \in M_x(X)}$。由贝波·列维定理，参见例如 [13, 注2.2]，，公式(10)可推广至可测函数 ϕ，其形式为积分

$$\int_X \phi(u)\, d\mathscr{H}_d(u) = \int_T \int_{\widehat{\gamma}} \phi(u)\, d\mu_{\widehat{\gamma}}(u)\, d\nu(\widehat{\gamma}). \tag{11}$$

这里，T $X/\sim$ 是关于等价关系 $y \sim z$ 的商空间，当且仅当 y，z位于同一条 $\gamma \in M_x$（X）上。

定义 3.9。 $x \in X$ 到 $\gamma \in \Gamma$（X）的径向投影是元素 R_γ（x） $\in \gamma$，满足

$$d(\gamma(0), R_\gamma(x)) = \begin{cases} d(\gamma(0), x) & d(\gamma(0), x) < \ell(\gamma) \\ d(\gamma(0), \gamma(1)) & d(\gamma(0), x) \geq \ell(\gamma). \end{cases} \tag{12}$$

对于 $y \in \operatorname{int}\gamma$，集合 R_γ^{-1}（y）是半径为 $r_y = d$（γ（0） y）、以 γ（0）为中心的测地球面。

注意，对于每个 x， R_γ（x）都存在且唯一。此外， R_γ 是非扩张的，因为

$$d(R_\gamma(x), R_\gamma(y)) = |d(\gamma(0), R_\gamma(x)) - d(\gamma(0), R_\gamma(y))| \leq |d(\gamma(0), x) - d(\gamma(0), y)| \leq d(x,y)$$

对每个 $x, y \in X$。应用（广义）Eilenberg 不等式，其中 $\dim_H X = d$和 $\dim_H \gamma = 1$，例如参见 [16, 定理 1.1] 或 [22, 定理 3.26]，，可得

$$\int_\gamma \int_{R_\gamma^{-1}(y)} \chi_S(u)\, d\mathscr{H}_{d-1}(u)\, d\mathscr{H}_1(y) \leq \mathscr{H}_d(S), \quad S - \text{measurable}. \tag{13}$$

(13) 式左侧在 X 的可测集上定义了一个关于 $\mathscr{H}_d$绝对连续的测度。因此，存在一个可测函数 $\zeta_\gamma\colon X\to[0,+\infty]$，使得

$$\int_\gamma\int_{R_\gamma^{-1}(y)}\phi(u)\,d\mathscr{H}_{d-1}(u)\,d\mathscr{H}_1(y)=\int_X\phi(u)\,\zeta_\gamma(u)\,d\mathscr{H}_d(u) \tag{14}$$

对于所有可测函数 $\phi\colon X\to[0,+\infty]$。

定义3.10。一个$\mathrm{CAT}(0)$ 空间(X,d) 在 $x\in X$ 处满足解体正则性条件，当且仅当存在 $r>0$ 和 $\gamma\in\Gamma_x^0(B[x,r])$ 使得

(i) 对每个可测函数 $\phi\colon\ X\to[0,+\infty]$

$$\int_\gamma\int_{R_\gamma^{-1}(y)\cap B[x,r]}\phi(u)\,d\mathscr{H}_{d_B-1}(u)\,d\mathscr{H}_1(y)=\int_{B[x,r]}\phi(u)\,\zeta_\gamma(u)\,d\mathscr{H}_{d_B}(u) \tag{15}$$

其中 $\zeta_\gamma>0$, $\mathscr{H}_{d_B}-$ 在 $B=B[x,r]$ 上几乎处处;

(ii) 存在一个映射族 $\Psi_y\colon\ R_\gamma^{-1}(\gamma(1))\cap B[x,r]\to R_\gamma^{-1}(y)\cap B[x,r]$, $y\in\gamma$，使得

$$(\Psi_y^{-1})_\#(\mathscr{H}_{d_B-1}|_{\Psi_y(R_\gamma^{-1}(\gamma(1)))\cap B[x,r]})\ll\mathscr{H}_{d_B-1}|_{R_\gamma^{-1}(\gamma(1))\cap B[x,r]}\,.$$

如果 X 在每个 $x\in X$ 处都满足这一性质，那么我们就说(X,d) 满足解体正则性条件。如果$\inf\ r>0$，那么(X,d) 一致地满足这一性质。

引理 3.11. 设 $x\in X$，并考虑 $r>0$对应的球 $B[x,r]$。满足定义*3.10*中条件 *(ii)* 的映射族$\Psi_y\colon$ $R_\gamma^{-1}(\gamma(1))\cap B[x,r]\to R_\gamma^{-1}(y)\cap B[x,r]$, $y\in\gamma$ 由 $\Psi_y(v)=(1-t(y))\,\gamma(0)\oplus t(y)\,v$ 给出，其中 $\gamma(t(y))=y$。

证明。首先注意，由联合凸性可得，对于任意 $u,v\in R_\gamma^{-1}(\gamma(1))$，有 $d(\Psi_y(u)\ \Psi_y(v))\le t(y)\,d(u,v)$。特别地，对于任意 $y\in\gamma$，Ψ_y是非扩张的。设 $A\in\mathscr{B}(B[x,r])\cap R_\gamma^{-1}(\gamma(1))$，且 $\mathscr{H}_{d_B-1}(A)=0$。对于 $\delta>0$，取 A 的一个可数覆盖 $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $k\in\mathbb{N}$，均有 $\operatorname{diam}U_k<\delta$。那么，由于$\Psi_y(A)\subseteq\Psi_y(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}U_k)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Psi_y(U_k)$，$(\Psi_y(U_k))_{k\in\mathbb{N}}$ 是集合 $\Psi_y(A)$ 的一个可数覆盖。此外

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}\Psi_y(U_k)&=\sup\{d(\Psi_y(x_1),\Psi_y(x_2))\ :\ x_1,x_2\in U_k\}\\&\le\sup\{d(x_1,x_2)\ :\ x_1,x_2\in U_k\}=\operatorname{diam}U_k,\quad\forall k\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

特别地，对于每个 $k\in\mathbb{N}$，$\operatorname{diam}\Psi_y(U_k)<\delta$。于是，对于每个$\delta>0$，$H_\delta^{d_B-1}(\Psi_y(A))\le H_\delta^{d_B-1}(A)$蕴含 $\mathscr{H}_{d_B-1}(\Psi_y(A))\le\mathscr{H}_{d_B-1}(A)$，因此 $\mathscr{H}_{d_B-1}(\Psi_y(A))=0$。

□

定理3.12。若(X,d) 满足分解正则性，则对于每个 $x\in X$，存在一个闭球 $B=B[x,r]$，$r>0$，使得 $\mathscr{H}_{d_B}$ 存在一个与划分$(\widehat{\gamma})_{\gamma\in M_x(B)}$ 相容的唯一分解，该分解相对于 $\mathscr{H}_1$绝对连续。

证明。解体正则性意味着在每个 $x\in X$上都满足解体正则性。令$B[x,r]$ 为以 x 为中心、半径为 $r>0$ 的闭球（半径可能依赖于 x），使得定义3.10中的条件(i)(ii)成立。令 $d_B:=$ 维$_H\,B[x,r]$。由于 X 是局部紧的，因此 B是紧的。特别地，它是可分的，故$(B[x,r],\mathscr{B}(B[x,r])\ \mathscr{H}_{d_B})$是可数生成的。此外，$\mathscr{H}_{d_B}(B)<+\infty$。存在与划分$(\widehat{\gamma})_{\gamma\in M_x(B)}$相一致的 $\mathscr{H}_{d_B}$ 的唯一分解$(\mu_{\widehat{\gamma}})_{\gamma\in M_x(B)}$。为简单起见，假设 $M_x(B)$中的元素等长。由条件(i)可知，对某个 $\zeta_\gamma>0$, $\mathscr{H}_{d_B}$- 几乎处处在 $B[x,r]$ 上，我们有

$$\int_{B[x,r]}\phi(u)\,\zeta_\gamma(u)\,d\mathscr{H}_{d_B}(u)=\int_\gamma\int_{R_\gamma^{-1}(y)\cap B[x,r]}\phi(u)\,d\mathscr{H}_{d_B-1}(u)\,d\mathscr{H}_1(y),\quad\phi-\text{measurable}. \tag{16}$$

将 $\Psi_y(v) = u$ 代入 $v \in R_{\gamma_B}^{-1}(\gamma(1)) \cap B[x,r]$，再由解体正则性条件(ii)可得

$$\int_\gamma \int_{R_\gamma^{-1}(\gamma(1))\cap B[x,r]} \phi(\Psi_y(v))\, d\mathscr{H}_{d_B-1}(\Psi_y(v))\, d\mathscr{H}_1(y) = \int_\gamma \int_{R_\gamma^{-1}(\gamma(1))\cap B[x,r]} \phi(\Psi_y(v))\, \theta(v,y)\, d\mathscr{H}_{d_B-1}(v)\, d\mathscr{H}_1(y)$$

对于某个非负可测函数 $\theta(v, y)$。在最后一个二重积分中应用富比尼–托内利定理，并结合(16)，可得

$$\int_{B[x,r]} \phi(u)\, \zeta_\gamma(u)\, d\mathscr{H}_{d_B}(u) = \int_{R_\gamma^{-1}(\gamma(1))\cap B[x,r]} \int_\gamma \phi(\Psi_y(v))\, \theta(v,y)\, d\mathscr{H}_1(y)\, d\mathscr{H}_{d_B-1}(v).$$

在双射 $\phi \mapsto \phi/\zeta_\gamma$ 下，由于 $\zeta_\gamma > 0$ – $\mathscr{H}_{d_B}$-几乎处处成立于 $B[x,r]$ 上，最后一个方程可以写成

$$\int_{B[x,r]} \phi(u)\, d\mathscr{H}_{d_B}(u) = \int_{R_\gamma^{-1}(\gamma(1))\cap B[x,r]} \int_\gamma \frac{\phi(\Psi_y(v))}{\zeta_\gamma(\Psi_y(v))}\, \theta(v,y)\, d\mathscr{H}_1(y)\, d\mathscr{H}_{d_B-1}(v). \tag{17}$$

考虑函数

$$\vartheta(v) = \int_\gamma \frac{\theta(v,y)}{\zeta_\gamma(\Psi_y(v))}\, d\mathscr{H}_1(y), \quad v \in R_{\gamma_B}^{-1}(\gamma_B(1)) \cap B[x,r].$$

注意到每个元素 $v \in R_\gamma^{-1}(\gamma(1)) \cap B[x,r]$ 都可以通过商映射 p 与 $[\widehat{\gamma}_v] \in T$ 下的唯一元素对应，特别地，我们有 $v = \gamma_v(1)$。通过变量替换 $y = \gamma(t)$，并取 Ψ_y 如引理 3.11 中所述，可得

$$\vartheta(\gamma_v(1)) = \frac{\ell(\gamma)}{\ell(\gamma_v)} \cdot \int_0^1 \frac{\theta(\gamma_v(1), \gamma(t))}{\zeta_\gamma(\gamma_v(t))}\, d\mathscr{H}_1(\gamma_v(t)), \quad v \in R_\gamma^{-1}(\gamma(1)) \cap B[x,r].$$

我们定义概率测度族

$$d\widetilde{\mu}_{\widehat{\gamma}_v}(t) = \frac{d\vartheta(\gamma_v(t))}{\vartheta(\gamma_v(1))}, \quad \text{where } \vartheta(\gamma_v(t)) = \frac{\ell(\gamma)}{\ell(\gamma_v)} \cdot \int_0^t \frac{\theta(\gamma_v(1), \gamma(s))}{\zeta_\gamma(\gamma_v(s))}\, d\mathscr{H}_1(\gamma_v(s))$$

对于所有 $t \in [0,1]$ 和 $v \in R_\gamma^{-1}(\gamma(1)) \cap B[x,r]$。根据构造，对于每个$v \in R_\gamma^{-1}(\gamma(1)) \cap B[x,r]$，都有 $\widetilde{\mu}_{\widehat{\gamma}_v} \ll \mathscr{H}_1|_{\widehat{\gamma}}$。根据解体的唯一性，对于 ν-几乎处处的 $[\widehat{\gamma}] \in T$，有 $\mu_{\widehat{\gamma}} = \widetilde{\mu}_{\widehat{\gamma}}$。□

问题 3.13。 每个局部紧且完备的 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间都满足解体正则性吗?

3.3.1. 重新审视豪斯多夫维数。 本节给出一个定理，确立正角性质与集合$S \subseteq X$ 以及 ∂S（x，t）$= \{\gamma$（t）的豪斯多夫维数之间的关系：$\gamma \in M_x$（S）$\}$，其中 $x \in S$和 $t \in [0,1]$。

定理 3.14。 对于任意有界连通集 $S \subseteq X$，以下不等式成立维数$_H\, \partial S(x,t) \leq$维数$_H\, S - 1$，对每个 $t \in [0,1)$均成立。此外，如果 S在每个满足 $r_x \geq$ 直径S 的 $x \in S$ 处都具有正角性质，那么该结论对 $t = 1$ 也成立。

证明。记 $d = \dim_H S, s(t) = \dim_H \partial S(x,t)$，并令 $s = s(1)$。我们定义一族映射 ψ_t：$\partial S(x, 1) \to \partial S(x,t)$，满足 $\psi_t(y) = (1-t)x \oplus ty$对 $y \in \partial S(x,1)$ 成立。因此 ψ_t是利普希茨的，进而对每个 $t \in (0,1]$，都有 $s(t) \leq s$。此外，$s(t)$ 关于 t 单调不减。现在任取 $\gamma \in M_x(S)$，并按规则 $\varphi_t(y) = \gamma(t)$，对$y \in \partial S(x,t)$ 定义 φ_t：$\partial S(x,t)$。注意，对任意 $y_1, y_2 \in \partial S(x,t)$，都有 $d(\varphi_t(y_1)\ \varphi_t(y_2)) = 0$，特别地，$\varphi_t$是利普希茨的。由 Eilenberg 不等式可得

$$\int_\gamma \int_{\varphi_t^{-1}(y)\cap S} d\mathscr{H}_{d-1}(u)\, d\mathscr{H}_1(y) \leq 0.$$

由于左侧非负，因此积分恒等于零，这意味着对 $\mathscr{H}_1$-几乎处处的 $y \in \gamma$，$\mathscr{H}_{d-1}(\varphi_t^{-1}(y)\cap S) = \mathscr{H}_{d-1}(\varphi_t^{-1}(y)) = 0$。注意到 $\varphi_t^{-1}(y) = \partial S(x,t)$，这等价于对几乎所有 $t \in [0,1]$，$\mathscr{H}_{d-1}(\partial S(x,t)) = 0$，进而意味着对几乎所有 $t \in [0,1]$，$s(t) \le d-1$。不过，我们还能稍微加强这一结论。若对某个 $t^* \in [0,1)$ 有 $s(t^*) > d-1$，则对所有 $t \ge t^*$ 都有 $s(t) > d-1$。同样，关系式$\varphi_t^{-1}(y) = \partial S(x,t)$ 给出

$$\int_{\varphi_t^{-1}(y)\cap S} d\mathscr{H}_{d-1}(u) = \int_{\partial S(x,t)\cap S} d\mathscr{H}_{d-1}(u) = \int_{\partial S(x,t)} d\mathscr{H}_{d-1}(u) = \mathscr{H}_{d-1}(\partial S(x,t)) = +\infty$$

对所有 $t \in [t^*,1]$，因此

$$\int_\gamma \int_{\varphi_t^{-1}(y)\cap S} d\mathscr{H}_{d-1}(u)\, d\mathscr{H}_1(y) \ge \int_{\gamma|_{[t^*,1]}} \int_{\varphi_t^{-1}(y)\cap S} d\mathscr{H}_{d-1}(u)\, d\mathscr{H}_1(y) = +\infty$$

这是不可能的。因此，对于所有 $t \in [0,1$，$\dim_H(\partial S(x,t)) \le d-1$。现在设 S在每个满足 $r_x \ge \operatorname{diam} S$ 的 $x \in S$ 处都具有正角性质。令 $\delta > 0$ 足够小且 $t = 1-\delta$，则存在 $\varepsilon > 0$，使得对于所有 y，$z \in \partial S(x,1)$，$d(y,z) \le (1+\varepsilon)\, d(\psi_t(y)\ \psi_t(z))$。若情况并非如此，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 y_n，$z_n \in \partial S(x,1)$，使得 $d(y_n,z_n) > (1+n)\ d(\psi_{1-\frac{1}{n}}(y_n)\ \psi_{1-\frac{1}{n}}(z_n))$。显然，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$y_n \ne z_n$。于是我们得到

$$\begin{aligned} +\infty > \operatorname{diam}\partial S(x,1) &\ge \sup_{n\in\mathbb{N}} d(y_n,z_n) \ge \sup_{n\in\mathbb{N}} (1+n)\, d(\psi_{1-\frac{1}{n}}(y_n),\psi_{1-\frac{1}{n}}(z_n)) \\ &\ge (1+N) \sup_{n\ge N} d(\psi_{1-\frac{1}{N}}(y_n),\psi_{1-\frac{1}{N}}(z_n)), \quad N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

最后一个不等式由空间的非正曲率推出。正角性质进而意味着 $\sup_{n\ge N} d(\psi_{1-\frac{1}{N}}(y_n)\ \psi_{1-\frac{1}{N}}(z_n)) > 0$。然而，令 $N \to +\infty$ 就会导致矛盾。因此，对于充分小的 $\delta > 0$ 和 $t = 1-\delta$，映射 ψ_t 存在利普希茨连续逆映射。于是，由引理 2.4 (vii) 及陈述的第一部分可得 $\dim_H \partial S(x,1) \le \partial S(x,t) \le d-1$。□

4. Two basic lemmas

引理 4.1。设 $f\colon X \to (-\infty,+\infty]$ 是测地可微的。若 x^* 是极小化点，则对于所有 $\gamma \in \Gamma^0_{x^*}(X)$，都有 $Df(x^*;\gamma) \ge 0$。特别地，只要 X 具有局部测地线延拓性质，对于所有 $\gamma \in \Gamma_{x^*}(X)$，都有 $Df(x^*;\gamma) = 0$。

证明。设 x^*是 f的极小化点。那么对所有 $x \in X$，都有 $f(x) \ge f(x^*)$。特别地，对任意 $\gamma \in \Gamma_{x^*}(X)$，都有 $f(\gamma(h)) \ge f(x^*)$，对所有 $h \in [0,1]$均成立。首先令 $\gamma(0) = x^*$，则

$$Df(x^*;\gamma) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\gamma(h)) - f(\gamma(0))}{h} \ge 0.$$

这就证明了第一个断言。接下来假设 (X,d) 具有局部测地线延拓性质。那么对每个 $\gamma \in \Gamma_{x^*}(X)$，存在 $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_{x^*}(X)$，使得 $\gamma \subset \operatorname{int}\widetilde{\gamma}$。根据测地导数的定义，可得关系式

$$Df(x^*;\gamma) = \frac{\ell(\gamma)}{\ell(\widetilde{\gamma})}\, Df(x^*;\widetilde{\gamma}).$$

现在不失一般性地假设 $x^* \in \gamma$ 是 γ中的一个内部点，即对于某个 $s \in (0,1)$，有 $x^* = \gamma(s)$。由这两个不等式可得

$$\frac{f(\gamma(s+h)) - f(\gamma(s))}{h} \ge 0, \quad h > 0 \quad \text{and} \quad \frac{f(\gamma(s+h)) - f(\gamma(s))}{h} \le 0, \quad h < 0$$

one 获得 $0 \ge D^- f(x^*;\ \gamma) = D^+ f(x^*;\ \gamma) \ge 0$，随后获得 $Df(x^*;\ \gamma) = 0$。 □

引理 4.2。 设 $(X、\ d)$ 是一个具有正角性质的 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间。那么，对于每个 $x \in X$，存在 $r > 0$，使得 $D_x c(x、\ y_1;\ \gamma) = D_x c(x、\ y_2;\ \gamma)$ 对于所有 $\gamma \in \Gamma_x(X)$均蕴含 $y_1 = y_2$，只要 $y_1、\ y_2 \in B(x、\ r)$。

证明。 设 (X, d) 满足正角性质，并取 $x \in X$。根据定义3.6，存在 $B(x, r)$ $r > 0$，使得对于任意满足 γ_1 且 γ_2 不包含于彼此的 $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_x^0(B(x, r))$，角度 $\alpha_x(\gamma_1, \gamma_2)$ 严格为正。记 $\gamma_i(1) = y_i,\ i = 1,2$。首先注意，根据定义2.8，对所有 $\gamma \in \Gamma(X)$ 和 $u, v \in \gamma$，有

$$D_u c(u, v; \gamma) = (t - s)\, d(\gamma(0), \gamma(1))^2 \tag{18}$$

其中，对于某个 $s, y \in [0, 1]$，$u = \gamma(t)$ $v = \gamma(s)$。由 (18) 可得，对于 $i = 1, 2$，$D_x c(x, y_i; \gamma_i) = -d(x, y_i)^2$。根据测地导数以及 $i, j = 1,2$ 的反三角不等式

$$\begin{aligned} D_x c(x, y_i; \gamma_j) &= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{d(\gamma_j(h), y_i)^2 - d(x, y_i)^2}{h} \\ &\geq \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{(d(x, y_i) - d(x, \gamma_j(h)))^2 - d(x, y_i)^2}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{d(x, \gamma_j(h))^2 - 2d(x, \gamma_j(h))\, d(x, y_i)}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{h^2\, d(x, y_j)^2 - 2h\, d(x, y_j)\, d(x, y_i)}{h} = -\, d(x, y_j)\, d(x, y_i). \end{aligned}$$

结合 $D_x c(x,\ y_i; \gamma_i) = D_x c(x,\ y_j;\ \gamma_i)$，由此可得 $d(x,\ y_i) = d(x,\ y_j)$，即 $y_1,\ y_2$与 x等距。令 $P_{\gamma_i}(\gamma_j(h)) = \gamma_i(t(h))$，其中 $t:\ [0, 1] \to [0, 1]$ 于是

$$\begin{aligned} D_x c(x, y_i; \gamma_j) &= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{d(\gamma_j(h), y_i)^2 - d(x, y_i)^2}{h} \\ &\geq \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{d(\gamma_j(h), \gamma_i(t(h)))^2 + d(\gamma_i(t(h)), y_i)^2 - d(x, y_i)^2}{h} \\ &\geq \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{d(\gamma_i(t(h)), y_i)^2 - d(x, y_i)^2}{h} = \frac{1}{2}\, d(x, y_i)^2 \lim_{h \to 0} \frac{-t(h)(2 - t(h))}{h}. \end{aligned}$$

首先注意，若 $P_{\gamma_i}(\gamma_j(h)) = x$，即 $\gamma_i(t(h)) = x$，则 $D_x c(x, y_i; \gamma_j) \geq 0$，特别地，根据假设，$D_x(x, y_j; \gamma_j) \geq 0$。结合 $D_x c(x, y_j; \gamma_j) = -d(x, y_j)^2 \leq 0$，可推出 $x = y_j$，进而得到 $x = y_i$，因此 $y_1 = y_2$。给定 $h > 0$，令$\Delta(\gamma_j(h)\ x, \gamma_i(t(h)))$为 $\mathbb{R}^2$ 中对应于 $\Delta(\gamma_j(h)\ x, \gamma_i(t(h)))$的比较三角形。由该空间的非正曲率可知，对于$h > 0$，有 $\overline{\alpha}_x(\gamma_j(h)\ \gamma_i(t(h))) \leq \alpha_x(\gamma_j(h)\ \gamma_i(t(h)))$。令 ℓ 为 $\mathbb{R}^2$ 中从线段 $[x, \gamma_i(t(h))]$延伸出的直线，并令 $P_\ell(\overline{\gamma}_j(h))$表示$\overline{\gamma}_j(h)$在 ℓ上的投影。注意，根据引理2.1，$\gamma_i(t(h))$处的比较角满足

$$\overline{\alpha}_{\overline{\gamma}_i(t(h))}([\overline{\gamma}_i(t(h)), \overline{x}], [\overline{\gamma}_i(t(h)), \overline{\gamma}_j(h)]) \geq \alpha_{\gamma_i(t(h))}([\gamma_i(t(h)), x], [\gamma_i(t(h)), \gamma_j(h)]) \geq \frac{\pi}{2}.$$

关于欧几里得三角形的初等计算得出不等式

$$\frac{t(h)}{h} \leq \frac{|\overline{x}\, P_\ell(\overline{\gamma}_j(h))|}{|\overline{x}\, \overline{\gamma}_j(h)|} = \cos \overline{\alpha}_{\overline{x}}(\overline{\gamma}_j(h), \overline{\gamma}_i(t(h))).$$

令 $h \to 0$ 趋于上限，得到

$$0 \leq \limsup_{h \to 0} \frac{t(h)}{h} \leq \limsup_{h \to 0} \cos \overline{\alpha}_{\overline{x}}(\overline{\gamma}_j(h), \overline{\gamma}_i(t(h))) = \cos \alpha_x(\gamma_j, \gamma_i) < 1$$

其中，最后一个不等式对所有 $x \in X$ 都成立。因此我们得到 $D_x c(x,\ y_i; \gamma_j) > -\, d(x,\ y_i)^2$。另一方面，$D_x c(x,\ y_i; \gamma_j) = D_x c(x,\ y_j;\ \gamma_j) = -\, d(x,\ y_j)^2$ 意味着 $d(x,\ y_j) < d(x,\ y_i)$，这会导致矛盾，因为 $y_1,\ y_2$ 与 x 等距。□

5. Existence and uniqueness of optimal transport maps

5.1. CAT(0)空间中的最优传输映射。

定理5.1。 设（X, d）是一个满足以下性质的局部紧完备$\mathrm{CAT}(0)$ 空间，其中维数$_H X < +\infty$，且这些性质对 $\mathscr{H}_d$ 几乎处处一致成立：

(i) 正角度；*(ii)* 分解正则性。

设 $\mu, \nu \in \mathscr{P}_2(X)$ 且 μ 绝对连续。则存在唯一的最优传输计划 $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$。此外， $\pi = (\mathrm{Id}\ T)_{\#}\mu$，其中 $T\colon X \to X$是一个博雷尔可测映射，使得 $T(x) \in \partial_c\psi(x)$，其中 ψ 是一个 c-凸函数，并满足

$$\widetilde{D}\psi(x;\gamma) + D_x c(x, T(x);\gamma) = 0, \quad \forall \gamma \in \Gamma_x(X)\ \mu - a.e.. \tag{19}$$

证明。 由注 2.3，存在一个最优传输计划 $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$。引理 2.2 意味着， π-几乎处处有 $\psi^c(y) - \psi(x) = c(x, y)$，其中 c是某个 ψ-凸函数。显然，任何这样的 y 都满足 $y \in \partial_c\psi(x)$。接下来我们证明这个 y 是唯一的。只需证明，对于某个博雷尔可测映射 $T\colon X \to X$，有 $T(x) = y$。

给定 $y_0 \in X$ 和 $R > 0$，定义函数 $\psi_R(x) = \inf_{y \in B(y_0,R)}(\psi^c(y) - c(x, y))$. 我们声称，当 R 充分大时（大到足以使得对某个 $y \in B$，有 $\psi^c(y) < +\infty$），ψ_R 在 X 上局部利普希茨连续。事实上，令 $x_0 \in X$和 $B[x_0, r]$为以 x_0 为中心、半径为 $r > 0$的闭测地球。对于 $x_1, x_2 \in B[x_0, r]$，有

$$\begin{aligned}|\psi_R(x_1) - \psi_R(x_2)| &= |\inf_{y \in B(y_0,R)}(\psi^c(y) - c(x_1, y)) - \inf_{y \in B(y_0,R)}(\psi^c(y) - c(x_2, y))| \\ &\le \sup_{y \in B(y_0,R)} |c(x_2, y) - c(x_1, y)^2| \le 2r\, d(x_1, x_2).\end{aligned}$$

令 $x \in X$ 和 $\gamma \in \Gamma_x(X)$。记

$$\Omega = \{x \in X : D^+\psi_R(x;\gamma) > D^-\psi_R(x;\gamma) \text{ for some geodesic } \gamma \in \Gamma_x(X)\}.$$

定义 $\varphi(t;\, x, \gamma) := \psi_R(\gamma(t))$。对于任意 $s, t \in [0, 1]$，可得 $|\varphi(s;\, x, \gamma) - \varphi(t; x, \gamma)| \le 2r\ell(\gamma)\, |s - t|$，其中某个 $r > 0$。特别地， $\varphi(\cdot;\, x, \gamma)$ 在 $[0, 1]$ 上利普希茨连续。由勒贝格微分定理， $\varphi(\cdot;\, x, \gamma)$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处可微，因此 $\psi_R(y)$ 在 γ 上 $\mathscr{H}_1$-几乎处处可微。设 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ 满足正角性质和分解正则性在每个 x_k 处均成立。令$B[x_k, r]$ 为这两个性质成立的球（不失一般性， $r > 0$ 对两个条件相同）。此外，注意到根据命题3.7，只要正角性质在闭球 $B[x, r]$的内部成立，该性质就会延伸至整个闭球。由引理 2.6，存在一个可数稠密集 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$，使得 $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(y_k, r/2)$。令 $\dim_H B(y_k, r/2) = d_k$。只要 $d_k = d(= \dim_H X)$，我们就可以从 $B(y_k, r/2)$ 中选取 x_k。于是可写为

$$X = \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}, d_k < d} B(y_k, r/2)\Big) \cup \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B[x_k, r]\Big)$$

因为当 x_k 从 $B(y_k,\ r/2)$ 中选取且满足 $d_k = d$ 时， $B(y_k,\ r/2) \subset B[x_k, r]$。此外，注意到对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\dim_H B[x_k, r] = d$。根据定理3.12，豪斯多夫测度 $\mathscr{H}_d$ 具有解体 $(\mu^k_{\widehat{\gamma}})_{\widehat{\gamma}\in M_{x_k}(X_k)}$，其中 $X_k = B[x_k, r]$相对于 $\mathscr{H}_1$ 绝对连续。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\int_{\Omega\cap X_k} d\mathscr{H}_d(y) = \int_{T_k} \mu^k_{\widehat{\gamma}}(p_k^{-1}([\widehat{\gamma}]) \cap \Omega)\, d\mathscr{H}_d(p_k^{-1}([\widehat{\gamma}])), \quad T_k = X_k/\sim .$$

由于对于每个 $\gamma \in \Gamma(X)$， $\psi_R(\gamma(t))$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处可微，因此特别地，对于每个 $\widehat{\gamma} \in M_{x_k}(X_k)$， $\psi_R(\widehat{\gamma}(t))$ 也具有此性质， consequently $D^+\psi_R(y;\, \widehat{\gamma}) = D^-\psi_R(y;\, \widehat{\gamma})$ $\mathscr{H}_1-$在 $\widehat{\gamma}$ 上几乎处处成立。

因此，对于每个 $k \in \mathbb{N}$， $\mu_{\widehat{\gamma}}^{k}(p_k^{-1}([\widehat{\gamma}]) \cap \Omega) = 0$ 对所有 $\widehat{\gamma} \in M_{x_k}(X_k)$ 均成立。随后由初等估计可得

$$\mathscr{H}_d(\Omega) = \int_{y\in\Omega} d\mathscr{H}_d(y) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\Omega\cap X_k} d\mathscr{H}_d(y) = 0.$$

因此， ψ_R 在 $\mathscr{H}_d$意义下几乎处处测地可微，特别是在 X 上也 μ几乎处处成立，因为 $\mu \ll \mathscr{H}_d$。

接下来我们断言， R 中的递减集 $\{\psi < \psi_R\}$ 的交集是 μ可忽略的$S = \bigcap_{R>0}\{\psi < \psi_R\}$。事实上，如果 $\mu(S) > 0$，那么对每个 $x \in S$，我们都有 $\psi(x) < \psi_R(x)$，对所有 $R > 0$ 都成立；由引理 2.2，存在 $y(x) \in S$，使得 $\psi^c(y(x)) - \psi(x) = c(x, y(x))$。但这将意味着，对所有 $R > 0$，都有 $\psi^c(y(x)) - c(x, y(x)) < \psi_R(x)$；当 $R > 0$ 充分大时，根据 ψ_R的定义，这显然不可能。因此，当 $R > 0$ 充分大时，对 μ几乎处处成立 $\psi(x) = \psi^c(y) - c(x, y) \ge \psi_R(x)$。另一方面，对 μ-几乎所有 $x \in X$，我们有$\psi_R(x) \ge \inf_{y\in X}(\psi^c(y) - c(x, y)) = \psi(x)$，因此，当 $R > 0$充分大时，对 μ-几乎所有 $x \in X$，都有 $\psi(x) = \psi_R(x)$。因此， $\{\psi \ne \psi_R\}$ 是 μ可忽略集，特别是，$\{\psi = \psi_R\}$ 相对于 μ在每个 $x \in X$ 处的密度均为 1。于是，根据定义 2.10， ψ 的 μ近似测地导数存在，且由$\sim D\psi(x;\gamma) = D\psi_R(x;\gamma)$给出，其中对 μ-几乎所有 $x \in X$ 及 $\gamma \in \Gamma_x(X)$均成立。

函数 $z \mapsto \psi(z) + d(z, y)^2$ 的最小值为 $\psi^c(y)$，且在$z = x$处取到。由定理 3.5，局部测地线延拓性质 $\mathscr{H}_d$-几乎处处成立；再应用$\widetilde{}$引理 4.1，可得 $D\psi(x;\ \gamma) + D_x c(x, y;\ \gamma) = 0$(†)，对 μ-几乎所有 $x \in X$成立。由于 X $\mathscr{H}_d$–几乎处处满足正角性质，根据引理 4.2，对于 x μ-几乎处处的点，局部存在唯一的 y，使得对于所有 $\gamma \in \Gamma_x(X)$，(†) 均成立。令 $y := T(x)$，即$\sim D\psi(x;\ \gamma) + D_x c(x, T(x);\ \gamma) = 0$，对 μ-几乎处处的 x 及所有 $\gamma \in \Gamma_x(X)$成立。与[35, 定理 5.30] 类似的论证表明， T 是博雷尔可测的，且在相差一个 μ-零测集的意义下唯一。□

5.2. 黎曼流形的情形。CAT(0)空间的一类特殊例子是具有非正截面曲率的黎曼流形。由 [9, 定理1A。6]可知，光滑黎曼流形 $\mathscr{M}$ 当且仅当其截面曲率 κ时，才在Alexandrov意义下具有曲率 κ 。我们分别用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ 和 $\mathscr{T}_x\mathscr{M}$ 表示黎曼度量以及 $x \in \mathscr{M}$处的切空间。给定 γ、 $\eta \in \Gamma_x(\mathscr{M})$，测地线 γ 与 η 在 x 处所成的黎曼角$\angle_x(\gamma'(0)\ \eta'(0))$定义为切空间 $\mathscr{T}_x\mathscr{M}$中切向量 $\gamma'(0)$与 $\eta'(0)$之间的欧氏角。由 [9, 推论IA。7] 可知，Alexandrov角 $\alpha_x(\gamma, \eta)$与黎曼角 $\angle_x(\gamma'(0)\ \eta'(0))$一致。下文中，指数映射$\exp_x : \mathscr{T}_x\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 起着重要作用，其作用公式为$\exp_x(tv) = \gamma(t)$，其中 $\gamma'(0) = v \in \mathscr{T}_x\mathscr{M}$ 且 $t \in [0, 1]$。根据Hadamard定理，例如参见 [15, 定理3.1，第7], 节，$\exp_x : \mathscr{T}_x\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 是一个全局微分同胚，因此微分$(d\exp_x)_v$ 是良好定义的，特别地，对所有 $v \in \mathscr{T}_x\mathscr{M} \setminus \{0\}$均可逆。我们给出一个归功于Federer的经典结果，它将对我们的下一个定理有所帮助。

引理 5.2。 [18, 定理 3。1] 设 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$是两个光滑黎曼流形，满足维数$_H\mathscr{M} = d \ge k =$ 维数 $_H\mathscr{N}$，且 $f:\ \mathscr{M} \to \mathscr{N}$是一个利普希茨映射，则

$$\int_{\mathscr{M}} g(x)\, Jf(x)\, d\mathscr{H}_d(x) = \int_{\mathscr{N}} \int_{f^{-1}(y)} g(x)\, d\mathscr{H}_{d-k}(x)\, d\mathscr{H}_k(y) \tag{20}$$

对于每个 $\mathscr{H}_d$–可积函数 g均成立。这里 Jf（x）表示微分（df）矩阵的 $k \times k$ 阶子式的行列式平方和的平方根。

定理*5.3*。设 $(\mathscr{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle_x)$ 是一个具有非正曲率的黎曼流形。对于任意的 $\mu, \nu \in \mathscr{P}_2(\mathscr{M})$，其中 μ 绝对连续，存在唯一的最优传输计划$\pi \in \Pi(\mu, \nu)$。此外， $\pi = (Id\ T)_{\#}\mu$，其中 $T:\ \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 是一个*Borel*可测映射，使得$\sim T(x) \in \partial_c\psi(x)$，其中 ψ 是一个 c-凸函数，并且满足 $Tx = \exp_x(\nabla\psi(x))$ μ-几乎处处。

证明。只需证明定理5.1中的条件(i)(ii)。设 $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma_x^0(\mathscr{M})$，使得 $\{x,\gamma_1(1)\ \gamma_2(1)\}$ 不共线。假设 $\alpha_x(\gamma_1,\gamma_2)=0$，则在 $\mathbb{R}^d$ 中有 $\angle_x(\gamma_1'(0)\ \gamma_2'(0))=0$，其中 $d=\dim_H\mathscr{M}$。存在 $a>0$，使得 $\gamma_2'(0)=a\gamma_1'(0)$。这意味着，当 $a\geq 1$ 时，对于 $t\in[0,1]$ 有 $\gamma_1(t)=\gamma_2(t/a)$；当 $a<1$ 时，对于 $t\in[0,1]$ 有 $\gamma_1(at)=\gamma_2(t)$。无论哪种情况，对于 $i\neq j$ 都有 $\gamma_i\subseteq\gamma_j$，这意味着 $\{x,\gamma_1(1)\ \gamma_2(1)\}$ 共线。这是不可能的。此外，请注意，对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，对所有 $x\in\mathscr{M}$ 都有 $r_x>n$，即平凡地有 $\inf\{r_x:\ x\in\mathscr{M}\}>0$。

最后，我们证明分解正则性也得到满足。令 $x\in\mathscr{M}$ 和 $\gamma\in\Gamma_x^0(\mathscr{M})$。取 $y\in\mathscr{M}$，并记 $F(y)=\exp_x(A_\gamma\exp_x^{-1}(y))$，其中 $\eta\in\Gamma_x^0(\mathscr{M})$ 满足 $\eta(1)=y$ 以及 $A_\gamma:\ \mathscr{T}_x\mathscr{M}\to\mathscr{T}_x\mathscr{M}$ 按如下公式作用：$A_\gamma(v)=\gamma'(0)|v|/|\gamma'(0)|$ if $|v|<|\gamma'(0)|$，而 $A_\gamma(v)=\gamma'(0)$ otherwise。我们断言 $F(y)=R_\gamma(y)$。注意到 $\exp_x^{-1}(y)=\eta'(0)$，因此 $A_\gamma(\eta'(0))=\gamma'(0)\,|\eta'(0)|/|\gamma'(0)|$ if $|\eta'(0)|<|\gamma'(0)|$，而 $A_\gamma(\eta'(0))=\gamma'(0)$ otherwise。于是，如果 $|\eta'(0)|<|\gamma'(0)|$，则有 $\exp_x(A_\gamma(\eta'(0)))=\gamma(|\eta'(0)|/|\gamma'(0)|)$；否则 $\exp_x(A_\gamma(\eta'(0)))=\gamma(1)$。注意到 $|\gamma'(0)|=\ell(\gamma)$ 且 $|\eta'(0)|=\ell(\eta)$，可得：若 $\ell(\eta)<\ell(\gamma)$，则 $d(x,F(y))=d(\gamma(0)\ \gamma(\ell(\eta)/\ell(\gamma))=\ell(\eta)=d(x,y)$；否则 $d(x,F(y))=d(\gamma(0)\ \gamma(1))$。由于 $F(y)\in\gamma$，因此 $F(y)=R_\gamma(y)$。令 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathscr{M}$ 的一个稠密子集，并令 $r>0$。我们可以写成 $\mathscr{M}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_k$，其中 $B_k:=B(x_k,r)$。令 $d_k=\dim_H B_k$。将 $\mathscr{N}$ 与某个 $\gamma_k\in\mathscr{M}_{x_k}(B_k)$ 识别，并结合 (14) 与引理 5.2，可知 $\zeta_{\gamma_k}(y)=JF(y)$ 在 B_k 上 $\mathscr{H}_{d_k}$–几乎处处成立。因此，只需证明在 B_k 上 $JF(y)>0$，$\mathscr{H}_{d_k}$–几乎处处成立。于是根据 J 的定义，我们得到

$$JF(y)=\Big(\sum_{1\leq i,j\leq d}((dF)_y)_{i,j}^2\Big)^{1/2}=\|(dF)_y\|_{\mathscr{F}},$$

其中 $\|A\|_{\mathscr{F}}:=(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2)^{1/2}$ 表示一个 $m\times n$ 矩阵 A 的弗罗贝尼乌斯范数。根据微分的链式法则，我们有

$$(dF)_y=(d\exp_{x_k})_{A_{\gamma_k}\exp_{x_k}^{-1}(y)}\cdot(dA_{\gamma_k})_{\exp_{x_k}^{-1}(y)}\cdot(d\exp_{x_k}^{-1})_y.$$

非正曲率意味着，对于所有 $v\in\mathscr{T}_x\mathscr{M}\setminus\{0\}$，$(d\exp_x)_v$ 都是可逆的，特别地，$(d\exp_{x_k}^{-1})_y=(d\exp_{x_k})_{\eta'(0)}^{-1}$。我们可以写成

$$(dF)_{\exp_{x_k}(\eta'(0))}=(d\exp_{x_k})_{A_{\gamma_k}\eta'(0)}\cdot(dA_{\gamma_k})_{\eta'(0)}\cdot(d\exp_{x_k})_{\eta'(0)}^{-1}$$

进而得到

$$(dA_\gamma)_{\eta'(0)}=(d\exp_{x_k})_{A_{\gamma_k}\eta'(0)}^{-1}\cdot(dF)_{\exp_{x_k}(\eta'(0))}\cdot(d\exp_{x_k})_{\eta'(0)}$$

因此

$$\|(dA_{\gamma_k})_{\eta'(0)}\|_{\mathscr{F}}\leq\|(d\exp_x)_{A_{\gamma_k}\eta'(0)}^{-1}\|_{\mathscr{F}}\cdot\|(dF)_{\exp_x(\eta'(0))}\|_{\mathscr{F}}\cdot\|(d\exp_x)_{\eta'(0)}\|_{\mathscr{F}}.$$

注意，对于所有 $v\neq 0$，$\|(d\exp_x)_v\|_{\mathscr{F}}>0$。此外，对于每个 $v\in\mathscr{T}_x\mathscr{M}\setminus\{0\}$，$\|(dA_\gamma)_v\|_{\mathscr{F}}=1/|\gamma'(0)|^{d-1}|v|^{d-1}>0$。因此

$$JF(\exp_{x_k}(\eta'(0)))\geq\frac{\|(dA_{\gamma_k})_{\eta'(0)}\|_{\mathscr{F}}}{\|(d\exp_{x_k})_{A_{\gamma_k}\eta'(0)}^{-1}\|_{\mathscr{F}}\|(d\exp_{x_k})_{\eta'(0)}\|_{\mathscr{F}}}>0,\ \eta'(0)\in\mathcal{T}_{x_k}\mathscr{M}\setminus\{0\}$$

等价地，$JF(y)>0,\ \ y\neq x_k$，即对于所有 $y\in B_k\setminus\{x_k\}$，$\zeta_{\gamma_k}(y)>0$。令 ψ_R 如定理5.1的证明中所定义，则 ψ_R 在 $\mathscr{M}$ 上 μ-几乎处处测地可微。令 x 为 $\mathscr{M}$ 中的一点，在该点 ψ_R 可微，且 $\mathbf{u}:\ U\to\mathscr{M}$，其中 $U\subseteq\mathbb{R}^d$ 为 x 处的一个参数化。对于一条测地线 $\gamma\in\Gamma_x^0(\mathscr{M})$，我们于是有 $\mathbf{u}^{-1}(\gamma(t))=(u_1(t)\ u_2(t)\ \cdots,\ u_d(t))$。将 ψ_R 限制到 γ，得到

$$\frac{d}{dt}\psi_R(\gamma(t))\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^d u_i'(0)\,\frac{\partial\psi_R}{\partial u_i}=\langle\nabla\psi_R(x),\gamma'(0)\rangle_x$$

这与 $D\psi_R(x;\gamma) = \frac{d}{dt}\psi_R(\gamma(t))\Big|_{t=0}$ 一起蕴含 $D\psi_R(x;\gamma) = \langle\nabla\psi_R(x)\ \gamma'(0)\rangle_x$。通过类似的论证，我们得到 $D_x c(x,\ Tx;\gamma) = \langle\nabla c(x,\ T(x))\ \gamma'(0)\rangle_x$.。另一方面，初等计算表明 $\nabla c(x,\ Tx) = -\exp_x^{-1} Tx$，因此

$$\langle\nabla\psi_R(x),\gamma'(0)\rangle_x - \langle\exp_x^{-1} Tx,\gamma'(0)\rangle_x = 0,\quad \forall\gamma\in\Gamma_x^0(\mathscr{M}),\ \mu-a.e..$$

取 $\sim\gamma\in\Gamma_x^0(\mathscr{M})$，其中 $\gamma'(0) = \nabla\psi(x) - \exp_x^{-1} Tx$，由此得出结论。 □

注5.4。 定理*5.3*是以下著名结果的推论： [19, 定理 1]该结果适用于具有非正曲率的流形。

5.3. **多面体复形的情形**。 另一类有趣的空间是作为CAT(0)空间的欧几里得多面体复形。这种空间由有限个欧几里得多胞体按满足某些条件的方式粘合而成，例如参见 [9,定义 7.37]。并非所有欧几里得多面体复形都是CAT(0)空间。Gromov的一个定理（例如参见 [9, 定理5.18，§2], ）给出了欧几里得多面体复形为CAT(0)空间的充要条件。作为定理 5.1的推论，我们得到以下关于这类多面体复形的结果。

定理5.5。 设 X 是一个$\mathrm{CAT}(0)$ 多面体复形，且 $\mu,\nu\in\mathscr{P}_2(X)$ 满足 μ 绝对连续，则定理*5.1*成立。

证明。 设 $d = \max\{\dim_H P:\ P\in\mathcal{C}\}$，其中 $\mathcal{C}$ 是由欧几里得多胞体 P组成的集合。只需证明这三个条件几乎处处成立，因此只需考虑满足$\dim_H P = d$的多胞体 P 的内部。多胞体内部的正角性质显然成立，因为可以将其视为欧几里得环境空间中的一个（通常意义下的）凸集。为证明最后一个性质，任取一个 $x\in P$ 内部点，并考虑$\gamma\in\Gamma_x^0(P)$，其中 $\ell(\gamma) = \max\{d(x,p):\ \ p\text{是 }P\}$的一个顶点。由于每个多胞体 P至多只有有限个顶点，因此这个最大值存在。此外，$d(x,y)\le\ell(\gamma)$对所有 $y\in P$ 均成立，这尤其意味着，对于所有$y\in P$，除 P的某些顶点外， $R_\gamma(y)$都是 γ 的内部点。不难证明

$$R_\gamma(y) = \frac{p_\gamma - x}{\|p_\gamma - x\|_{\mathbb{E}}}\|y-x\|_{\mathbb{E}},\quad \text{for all } y\in P\setminus\{\text{vertices of } P\}.$$

这里， $\mathbb{E}$ 表示 P 的欧几里得环境空间，而 p_γ 是 P 中实现 $\max\{d(x,\ p)$ 的顶点： p是 $P\}$ 的一个顶点，并且 γ 将 x 与 p_γ连接起来。再次应用引理 5.2，这次取 $F = R_\gamma$并结合 (14)，可得 $JR_\gamma = \zeta_\gamma$， $\mathscr{H}_d$上几乎处处成立于 P。只需证明 $JR_\gamma > 0$， $\mathscr{H}_d$上几乎处处成立于 P。注意到 $JR_\gamma(y) = \|(dR_\gamma)_y\|_{\mathscr{F}}$。通过初等计算可得

$$\|(dR_\gamma)_y\|_{\mathscr{F}} = \Big(\frac{1}{\|p_\gamma - x\|_{\mathbb{E}}\,\|y-x\|_{\mathbb{E}}}\Big)^{d-1} > 0,\ \text{for all } y\in P\setminus\{x\}.$$

因此，对于所有 $y\in P\setminus\{x\}$， $\zeta_\gamma(y) > 0$；由于 $x\in P$是任意的内部点，故 X在 P上对 $\mathscr{H}_d$-几乎处处的 $x\in P$满足解体性质。由于 P是任意的，因此 X满足解体性质 $\mathscr{H}_d$-几乎处处成立。证明完毕。□

6. A POLAR FACTORIZATION THEOREM

引理6.1。 设(X,d) μ,ν,ψ,T如定理*5.1*所述，且条件(i)、(ii) 成立。若进一步有 $\nu\ll\mathscr{H}_d$，则存在 T^*： $X\to X$，使得 $\pi^* = (\mathrm{Id}\,T^*)_\#\nu$是从 ν到 μ 的唯一最优传输计划，且对于 μ-几乎处处的 $x\in X$，有 $T^*Tx = x$。特别地，T 和 T^* 互为逆映射。

证明。由于假设下所有条件均成立， T^* 的存在性和唯一性直接由定理5.1推出。我们只需证明对于所有 $x \in X$，有 $T^*Tx = x$。再次由定理5.1可知，对某个 c-凸函数ψ^*， $T^*(y) \in \partial_c\psi^*(y)$ ν-几乎处处成立。注意，由推论2.2可知， $\partial_c\psi^*(y)$由单个元素组成，且对于 ν-几乎处处的$y \in X$，有$(\psi^*)^c(T^*y) - \psi^*(y) = c(y, T^*y)$。鉴于 [35, 注5.15]，可知 $\psi^* = -\psi^c$ 且$(\psi^*)^c = -\psi$，因此对于 ν-几乎处处的 $y \in X$，有 $\psi^c(y) - \psi(T^*y) = c(y, T^*y)$。这尤其意味着对于 ν-几乎处处的 $y \in X$，有 $\partial_c\psi(T^*y) = \{y\}$ 。但$\Gamma = \{(x, Tx) : x \in X\} \subseteq \partial_c\psi$ 以及 $\pi(\partial_c\psi \setminus \Gamma) = 0$意味着对于 ν-几乎处处的$y \in X$，有$(T^*y, y) \in \Gamma$，即对于 μ-几乎处处的 $x \in X$，有 $y = Tx$和 $T^*y = x$。因此，对于 μ-几乎处处的$x \in X$，有 $T^*Tx = x$。类似地，对于 ν-几乎处处的 $y \in X$，有 $TT^*y = y$。由此得出， T和 T^*互为逆映射。证明完毕。□

定理6.2。 设(X, d) 是定理*5.1*中的$\mathrm{CAT}(0)$ 空间。考虑一个博雷尔映射$s : X \to X$ 和一个概率测度 $\mu \ll \mathscr{H}_d$。若 $s_{\#}\mu \ll \mathscr{H}_d$，则 $s = T \circ u$，其中 T是 μ 与 $s_{\#}\mu$ 之间唯一的最优传输映射，且 u 满足 $u_{\#}\mu = \mu$。因式分解映射 T、 u 在 X中除去 μ-零测集外唯一。

证明。 首先注意到 $T_{\#}\mu = s_{\#}\mu$ ，并且根据引理6.1，存在映射 $T^* : X \to X$，使得 $T^*{}_{\#}(s_{\#}\mu) = \mu$，且对于 μ-几乎处处的 $x \in X$， $T^*Tx = x$是从 $s_{\#}\mu$ 到 μ的唯一最优传输映射。定义 $u = T^* \circ s$, μ-几乎处处的 $x \in X$。注意，对于 X 上的任意 μ-可积函数 f ，我们有

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d(T^*_{\#}s_{\#}\mu)(x) = \int_X f(x)\, d(u_{\#}\mu)(x).$$

因此 $u_{\#}\mu = \mu$。为证明唯一性，设 T', u'满足 $s = T' \circ u'$。显然$T = T'$, μ在 X 上几乎处处成立，这由定理5.1可知。因此，对于 μ-几乎处处的 $x \in X$， $s(x) = T(u'(x))$。但于是，对于 μ-几乎处处的 $x \in X$， $u(x) = T^*(s(x)) = T^*(T(u'(x))) = u'(x)$。□

References

[1] A. D. Alexandrov. 度量空间中关于三角形的一个定理及其若干应用. *Trudy Mat.Inst. Steklova*, 38:5–23, 1951年.[2] Ch. D. Aliprantis and K. C. Border. 《无限维分析：搭便车指南》. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 第3版, 2006年.[3] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savar´e. 《度量空间及概率测度空间中的梯度流》. 苏黎世联邦理工学院数学讲座. Birkh¨auser, 2005年.[4] J. Bertrand. Alexandrov空间上最优映射的存在性与唯一性. *Adv. Math.*, 219(3):838– 851, 2008.[5] L. J. Billera, S. P. Holmes, and K. Vogtmann. 系统发育树空间的几何. *Adv. Appl.Math.*, 27:733–767, 2001年.[6] V. I. Bogachev. 测度论, 第2卷. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007年.[7] Y. Brenier. 向量场的极分解与单调重排. 《巴黎科学院院报 ´， 数学与物理科学分辑 ´I辑, 305:805–808, 1987.[8] Y. Brenier. 向量值函数的极分解与单调重排. *Commun.Pure Appl. Math.*, 44:375–417, 1991.[9] M. R. Bridson and A. Haefliger. 非正曲率度量空间, 《数学综合研究丛书》第319卷. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999年.[10] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. 度量几何教程, 《数学研究生教程》第33卷. 美国数学会, 2001年.[11] L. A. Cafarrelli, M. Feldman, and R.J.McCann. 将Monge传输问题的最优映射构造为严格凸成本的极限. *J. Am. Math. Soc.*, 15(1):1–26, 2001年.[12] M. Ba˘cak. *Hadamard*空间中的凸分析与优化, 《非线性分析与应用丛书》第22卷. *De Gruyter*非线性分析与应用丛书。De Gruyter, 柏林, 2014年.[13] L. Caravenna and S. Daneri. 凸函数各面上的勒贝格测度分解. *J. Funct. Anal.*, 258:3604–3661, 2010年.

[14] F. Cavalletti and M. Huesmann. 最优传输映射的存在性与唯一性. Ann. Inst. Henri Poincare (C) Anal. Non Lin ´eaire, 32(6):1367–1377, 2015年.[15] M. P. do Carmo. 黎曼几何. 数学：理论与应用. Birkh¨auser Boston, 第2版, 1988年.[16] B. Esmayli and P. Hajlasz. 余面积不等式. 《芬兰数学年刊》, 46:965–991, 2021年.[17] L. C. Evans and W. Gangbo. 求解Monge–Kantorovich质量传输问题的微分方程方法. 《美国数学会回忆录》, 137:1–66, 1999年.[18] H. Federer. 曲率测度. 《美国数学会汇刊》, 93:418–491, 1959年.[19] M. Feldman and R.J.McCann. 黎曼流形上的Monge传输问题. Trans. Am. Math. Soc., 354(4):1667–1697, 2002年.[20] A. Figalli and C. Villani. 最优传输与曲率. 非线性偏微分方程及其应用, 《数学讲义》2028卷. 2011年.[21] M. Gromov. CAT(κ)空间：构造与集中. 《圣彼得堡数学学会学术研讨班报告》, 280:101–140, 2001年.[22] P. Hajlasz. 《几何分析讲义》. 数学系，匹兹堡大学.[23] L. Kantorovich. 关于质量转移. 《苏联科学院院报》（新辑）, 37:199–201, 1942年.[24] K.T.Sturm. 概率测度的凸泛函与流形上的非线性扩散. 《纯粹与应用数学杂志》, 84:149–168, 2005年.[25] K.T.Sturm. 关于度量测度空间的几何. 《数学学报》, 196:65–131, 2006年.[26] K.T.Sturm. 关于度量测度空间的几何 II. 《数学学报》, 196:133–177, 2006年.[27] J. Lott and C. Villani. 通过最优传输定义度量测度空间的里奇曲率. 《数学年刊》, 169:903–991, 2009年.[28] A. Lytchak and K. Nagano. 具有曲率上界的测地完备空间. 《几何与泛函分析》, 29:295–342, 2019年.[29] G. Monge. 关于土方开挖与填筑理论的回忆录. 巴黎皇家科学院院史及同年数学与物理学回忆录, 11:666– 704, 1781年.[30] R.J.McCann. 黎曼流形上映射的极分解. 《几何与泛函分析》, 11:589–608, 2001年.[31] D. Schleicher. 豪斯多夫维数、其性质及意外之处. 《美国数学月刊》, 114(6):509–528, 2007年.[32] V.N. Sudakov. 无限维概率分布理论中的几何问题. 《斯捷克洛夫数学研究所论文集》, 141:1–178, 1979年.[33] T.Rajala and T. Schultz. Alexandrov空间上的最优传输映射：再探. 《数学手稿》, 169:1–18, 2022年.[34] N.S. Trudinger and X.J. Wang. 关于Monge质量传输问题. 《变分法与偏微分方程》, 13(1):19–31, 2001年.[35] C. Villani. 《最优传输：旧与新》. 《数学科学基础丛书》第338卷. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009年.

Berlin 10709, Germany.