arXiv:2303.02086v1 [math.SP] 3 Mar 2023

关于带分布系数的常微分方程系统的傅里叶展开

STEVEN REDOLFI 和 RUDI WEIKARD

ABSTRACT. 我们研究实区间（a,b）上一阶系统 $Ju'+qu=wf$ 微分方程的谱理论，其中 J 是一个常数、可逆的斜厄米矩阵，而 q 和 w 是其元素为 0 阶分布的矩阵，且 q 为厄米矩阵、 w 为非负矩阵。具体而言，在对 J、 q和 w施加某些条件后，我们构造了一个广义 Weyl-Titchmarsh m函数、相应的谱测度 τ 以及一个广义傅里叶变换。后续章节将阐述并研究不同的条件。附录中记录了我们结果所需的一个 Fatou 型恒等式。

1. INTRODUCTION

本文将在某些条件下，为微分方程建立一个傅里叶展开定理

$$Ju' + (q - \lambda w)u = wf \tag{1.1}$$

定义在实区间（a,b）上。其中， J 是一个常数、可逆的斜厄米$n\times n$矩阵， λ是一个复参数，而 q和 w是 $n\times n$矩阵，其元素为 0 阶分布， q 为厄米矩阵且 w 为非负矩阵。若 f 属于L^2（w），即下文将定义的一个希尔伯特空间，则方程的解 u 应在局部有界变差函数中寻求。我们强调，随着方程（1.1）中的系数变得更加粗糙，解 u也会相应变得更加粗糙。到某个阶段，乘积 qu 和 wu将无法定义。当 q 或 w 比 0 阶分布更加粗糙时，便会达到这一阶段。

当 q 和 w 的元素为局部可积函数时，对于初值问题 $Ju' + (q - \lambda w)u = wf$， $u(x_0) = u_0$存在存在唯一性定理（唯一延拓性质），该定理适用于其解。该定理是构造傅里叶展开的核心工具。然而，如果 q 或 w 涉及δ-分布，则初值问题的解的存在性或唯一性将不再得到保证。在 [10] 中，Ghatasheh 和 Weikard 在唯一延拓性质仅要求对实数 λ成立的情况下克服了这一障碍。本文旨在削弱这一要求，从而说明如何在更宽松的条件下建立傅里叶展开。

据我们所知，最早考虑测度系数斯图姆–刘维尔方程的是 Krein [12]，他在 1952 年建立了振动弦模型。我们所知的后续相关研究由 Kac [11], 、Feller [8],

Date: 2023年3月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 34 L10，47A70。*Key words and phrases.* 分布系数，傅里叶展开。

Mingarelli [15], Gesztesy 和 Holden [9], Kurasov [13], Kurasov 和 Boman[14], Savchuk 和 Shkalikov [18], Eckhardt 等人 [5], 以及 Eckhardt 和 Teschl [6]作出。关于该主题的历史，详见 Ghatasheh 和 Weikard [10] 以及 Eckhardt 等人 [5] 。

我们以简要概述本文内容结束本引言。本文的主要结果是第 5 节中的定理 5.1：该定理证明，在适当的边界条件下，存在一个与自伴线性关系 T 相关联的傅里叶变换，该关系表示微分方程 (1.1)。 $L^2(w)$ 中各元素的傅里叶变换构成一个希尔伯特空间 $L^2(\tau)$，其中 τ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的矩阵值非负测度。正如我们在第 4 节所示，该测度由矩阵值 Weyl-Titchmarsh 函数 $\mathbb{M}$ 的 Nevanlinna 表示确定。反过来，矩阵 $\mathbb{M}$ 是通过构造格林函数（预解算子 $R_\lambda = (T-\lambda)^{-1}$ 的核）得到的。为此，我们在第 3 节研究方程 $Ju' + (q-\lambda w)u = wf$ 的解，而不借助唯一延拓性质。在开展这一切之前，我们先在第 2 节汇集此前在 [10], [4], 和 [16] 中确立的一些结果。附录中记录了一项由 B.和C. Bennewitz [1] 私下告知我们的结果，该结果涉及法图定理的推广。

2. Preliminaries

本节汇集一些关于具有分布系数的常微分方程的基础材料。

实区间 (a,b) 上的一个分布，是定义在无限次可微且紧支撑函数（即测试函数）集合上的线性泛函 r ，满足以下性质：对于 (a,b) 的任意紧子区间 K ，存在一个正常数 C 和一个非负整数 k ，使得

$$|r(\phi)| \le C \sum_{j=0}^{k} \sup\{|\phi^{(j)}(x)| : x \in K\}$$

只要 ϕ 是支撑包含于 K 中的测试函数，就有此性质。如果可以在与 K 无关的情况下令 k 为 0，我们就称 r 为零阶分布。

每个分布都有导数和原函数。 r 的导数为 $\phi \mapsto r'(\phi) = -r(\phi')$ 。根据 du Bois-Reymond引理， r 的两个原函数之差是一个常数分布，即对于某个 $C \in \mathbb{C}$，有 $\phi \mapsto C\int \phi\, dx$ 。如果对任何只取非负值的测试函数 ϕ ，均有 $r(\phi) \ge 0$ ，则称分布 r 为非负分布。分布 r 的共轭定义为 $\phi \mapsto \overline{r}(\phi) = r(\overline{\phi})$ 。

典型的 0 阶分布示例包括：(i) $\phi \mapsto \int_{(a,b)} \phi f\, dx$ ，其中 f 是关于勒贝格测度的局部可积函数；以及 (ii) $\phi \mapsto \phi(x_0)$，即位于 x_0 的 δ-分布，其中 x_0 是 (a,b) 中的某个固定点。更一般地，如果 μ 是定义在 (a,b) 上的非负勒贝格–斯蒂尔杰斯测度，而 h 是 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ 中的函数，那么 $\phi \mapsto \int_{(a,b)} \phi h \mu$ 是一个 0 阶分布。事实上，根据里斯表示定理，所有 0 阶分布都具有这种形式。复测度 $h\mu$ 的（局部）累积分布函数是一个局部有界变差函数，而相应的分布是 $\phi \mapsto \int_{(a,b)} \phi h \mu$ 的原函数。反过来，给定定义在 (a,b) 上的局部有界变差函数，它会在 (a,b) 的每个紧子集上生成一个勒贝格–斯蒂尔杰斯测度 ν 。我们可以写成 $\nu = h|\nu|$ ，其中

$|\nu|$ 是 ν 的（局部）全变差，而 h 是一个模为 1 的函数，因而属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(|\nu|)$。下文中，我们将 0 阶分布和测度这两个术语交替使用，这与“测度”一词的传统含义有所不同。

给定一个测度（或零阶分布） r 和一个函数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(|r|)$，我们通过令 $(rf)(\phi) = \int \phi f r$ 来定义分布 $rf = fr$。注意， rf 也是一个零阶分布。

接下来讨论元素为分布的矩阵。对于任意 $n \times n$ 矩阵 w，我们以标准方式定义其伴随 w^*，即转置的共轭。若 $w = w^*$，则称 w 为厄米矩阵。若对于任意向量 $z \in \mathbb{C}^n$，分布 $z^* w z$均为非负，则称 w 为非负矩阵。非负分布必为厄米矩阵。

与非负分布相对应的是一个非负测度，可以定义空间 $\mathcal{L}^2(w)$，它由满足测度 $f^* w f$有定义且有限的函数 f 组成。在 $\mathcal{L}^2(w)$ 中，可以定义半内积 $\langle f, g\rangle = \int f^* w g$ 和半范数 $\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$。将 $\mathcal{L}^2(w)$ 中半范数为 0 的函数视为等同，我们便得到希尔伯特空间 $L^2(w)$。

本文始终要求以下规范假设成立。之后还需补充更多假设（我们怀疑这些假设仅出于技术性考虑）。

假设 2.1. (a, b) 是一个实区间。 J 是一个常数、可逆的斜厄米 $n \times n$ 矩阵。 q 和 w 是 $n \times n$ 矩阵，其元素是在 (a, b) 上的 0 阶分布； q 是厄米的， w 是非负的。

我们的目标是研究以下微分方程

$$Ju' + (q - \lambda w)u = wf$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}$、 $f \in L^2(w)$ 以及解 u 均需在 (a, b) 上的局部有界变差平衡函数（稍后定义）中求取。提出该方程是合理的，因为其中出现的所有项都是 0 阶分布。

对于每个局部有界变差函数 u，分别用 u^- 和 u^+ 表示其左极限和右极限。更精确地说， $u^-(x) = \lim_{t \uparrow x} u(t)$ 且$u^+(x) = \lim_{t \downarrow x} u(t)$。局部有界变差函数 u 的平衡形式 $u^\#$ 定义为 $u^\# = (u^+ + u^-)/2$。微分方程只考虑平衡解的原因在于分部积分公式，该公式表明

$$\int_{[c,d]} (u\,dv + v\,du) = (uv)^+(d) - (uv)^-(c) + (2\kappa - 1)\int_{[c,d]} (v^+ - v^-)\,du \qquad (2.1)$$

只要 $[c, d] \subset (a, b)$、 $u = \kappa u^+ + (1 - \kappa)u^-$和 $v = \kappa v^+ + (1 - \kappa)v^-$成立，其中参数 κ固定。因此，只有当 $\kappa = 1/2$时，即使允许 u 和 v 存在间断点，分部积分公式才具有其熟知的简单形式。

若 r 是一个矩阵值测度，其累积分布函数为 R，令$\Delta_r(x) = r(\{x\}) = R^+(x) - R^-(x)$。若 $\Delta_q(x)$ 和 $\Delta_w(w)$ 中有一个不为零，则满足微分方程 $Ju' + (q - \lambda w)u = wf$ 要求

$$B_+(x, \lambda)u^+(x) - B_-(x, \lambda)u^-(x) = \Delta_w(x)f(x)$$

其中

$$B_\pm(x, \lambda) = J \pm \frac{1}{2}(\Delta_q(x) - \lambda \Delta_w(x)).$$

如果 $B_+(x,\lambda)$ 不可逆，那么即使给定 $u^-(x)$，也无法唯一确定 $u^+(x)$。当然，当 $B_-(x,\lambda)$ 不可逆时，也有类似的结论。我们强调，$B_-(x,\lambda) = -B_+(x,\overline{\lambda})^*$。

不过，对于 $Ju' + (q - \lambda w)u = wf$，我们仍有以下关于初值问题的解的存在性与唯一性定理。

定理 2.2（[10], 定理 2.2）。假设假设 2.1 成立，$f \in L^2(w)$ 且 $\lambda \in \mathbb{C}$，矩阵 $B_\pm(x,\lambda)$ 对所有 $x \in (c,d) \subset (a,b)$ 都可逆，并且 x_0 是 (c,d) 中的一点。那么，初值问题 $Ju' + (q - \lambda w)u = wf, u(x_0) = u_0 \in \mathbb{C}^n$ 在区间 (c,d) 内有唯一的平衡解 u。

如果 q 和 w 在相关点附近是有限测度，我们可以在 c（对于 u^+）或 d（对于 u^-）处给出初始条件。

该定理意味着，在（c,d）上存在解的基本矩阵。若 U是这样一个解的基本矩阵，且 U^+或 U^-在某点 $x_0 \in$（c,d）处等于单位矩阵，则它满足以下朗斯基关系

$$U^\pm(x,\overline{\lambda})^* J U^\pm(x,\lambda) = J \text{ and } U^\pm(x,\lambda) J^{-1} U^\pm(x,\overline{\lambda})^* = J^{-1} \tag{2.2}$$

该关系由 [10]中的引理 3.2 推得。

我们快速回顾一下 [16] 中关于矩阵 $B_\pm$（x,λ）的一些基本事实。令Λ_x 表示那些无法保证 B_+（x,λ）或 B_-（x,λ）可逆的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的集合。将无法保证 B_+（x,λ）或 B_-（x,λ）可逆的 $x \in$（a,b）的集合记为 Ξ_λ。那么，对于除可数多个 $x \in$（a,b）之外的所有情形，Λ_x 均为空集。若其非空，则它要么是有限集，要么是整个 $\mathbb{C}$。此外，它关于实轴对称。$\Xi_\lambda = \Xi_{\overline{\lambda}}$ 与（a,b）中任意紧子集的交集都是有限集。

与微分方程 $Ju' + qu = wf$ 相关的线性关系为

$$\mathcal{T}_{\max} = \{(u,f) \in \mathcal{L}^2(w) \times \mathcal{L}^2(w) : u \in \mathrm{BV}^{\#}_{\mathrm{loc}}((a,b))^n, Ju' + qu = wf\}$$

and

$$\mathcal{T}_{\min} = \{(u,f) \in \mathcal{T}_{\max} : \operatorname{supp} u \text{ is compact in } (a,b)\}.$$

这里，$\mathrm{BV}^{\#}{}_{\mathrm{loc}}((a,b))$表示定义在$(a,b)$上、取值于 $\mathbb{C}^n$的局部有界变差且平衡的函数空间。关系 $\mathcal{T}_{\max}$ 和 $\mathcal{T}_{\min}$ 在希尔伯特空间 $L^2(w) \times L^2(w)$中引出线性关系

$$T_{\max} = \{([u],[f]) \in L^2(w) \times L^2(w) : (u,f) \in \mathcal{T}_{\max}\}$$

and

$$T_{\min} = \{([u],[f]) \in L^2(w) \times L^2(w) : (u,f) \in \mathcal{T}_{\min}\}.$$

$T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 分别称为最小关系和最大关系。

在 [4] 中，已证明 $T^*_{\min} = T_{\max}$，从而证明 $T_{\min}$ 是一个对称关系。因此，我们得到冯·诺伊曼关系

$$T_{\max} = \overline{T_{\min}} \oplus D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$$

其中，$\overline{T}_{\min}$是 $T_{\min}$的闭包，且 $D_\lambda = \{$（u，λu）$\in T_{\max}\}$。当 λ 在下半平面或上半平面内变化时，D_λ的维数保持不变。这些数称为 $T_{\min}$ 的亏格指标，我们用记号 $n_\pm = \dim D_{\pm\mathrm{i}}$表示。尽管一般而言，方程 $Ju' + qu = \lambda wu$ 可能有无穷多个线性无关的

解，我们在 [16] 中证明了亏格指标仍不大于 n。我们还证明了格林公式或拉格朗日恒等式，即

$$(v^*Ju)^-(b) - (v^*Ju)^+(a) = \langle v, f\rangle - \langle g, u\rangle$$

前提是（v， g）和（u， f）属于 $\mathcal{T}_{\max}$。

我们在 [16] 中证明了， $T_{\min}$ 的闭对称扩张可表示为通过边界条件对 $T_{\max}$ 的限制。特别地，自伴扩张也满足这一点；在这种情况下，我们得到 [16]中定理 4.4的以下特殊情形。

定理 2.3。如果 $T_{\min}$ 的亏格指标满足 $n_+ = n_-$，且（v_1， g_1），...，（$v_{n_\pm}$， $g_{n_\pm}$）是 $D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$ 中的线性无关元素，使得

$$(g_k^* J g_\ell)^-(b) - (g_k^* J g_\ell)^+(a) = 0 \ \ for\ 1 \le k, \ell \le n_\pm, \tag{2.3}$$

then

$$T = \{(u, f) \in T_{\max} : (g_j^* Ju)^-(b) - (g_j^* Ju)^+(a) = 0 \ for\ j = 1, ..., n_\pm\} \tag{2.4}$$

是 $T_{\min}$的自伴扩张。

反之，如果 T 是 $T_{\min}$的自伴扩张，那么 T 可表示为 (2.4)，其中适当的元素 (v_1, g_1)，...，($v_{n_\pm}$， $g_{n_\pm}$) 属于 $D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$，并且满足 (2.3)。

如果 T 是自伴关系，且 λ 属于 $\varrho(T$，即 T的预解集，我们在[16] 中证明了预解算子 $R_\lambda = (T - \lambda)^{-1}$ 是一个积分算子，也就是说，我们证明了 T的格林函数存在。

$Ju' + qu = \lambda wu$ 的一些解的范数可能为零，即 $\|u\|^2 = \int u^* wu = 0$。由于 w 非负 $\|u\| = 0$ 当且仅当分布 $wu = 0$。由此可知，这样的函数 u 对任意 λ都满足 $Ju' + qu = \lambda wu$，特别是对 $\lambda = 0$也成立。满足 $wu = 0$ 的 $Ju' + qu = 0$ 的解空间记为 $\mathcal{L}_0$。

特别是，如果 $u \in \mathcal{L}_0$ （因此 $[u] = 0$ 和 $f = 0$），那么

$$(v^*Ju)^-(b) - (v^*Ju)^+(a) = \langle v, f\rangle - \langle g, u\rangle = 0 \tag{2.5}$$

对所有（v， g） $\in \mathcal{T}_{\max}$。由于（v， g） $\in D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$蕴含（$g$， $-v$） $\in D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$, 因此 $\mathcal{L}_0$ 中的任意元素都满足定义自伴关系 T的边界条件。

3. Constructing solutions

在本文余下部分中，除假设 2.1 外，我们还要求：对于除有限个 $x \in (a, b)$ 之外的所有情形， $\Lambda_x \cap \mathbb{R} = \emptyset$。 $\Lambda_x \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ 所在的点属于（或包含于）我们按大小排序考虑的点 x_1，...， x_N。当 $\Lambda_x \cap \mathbb{R}$ 对所有 $x \in (a, b)$ 都为空时，我们允许 $N = 0$。我们还定义$x_0 = a$ 和 $x_{N+1} = b$。注意，虽然集合 $\Lambda = \bigcup_{x\in(a,b)} \Lambda_x$ 可能是整个 $\mathbb{C}$，但集合

$$\tilde{\Lambda} = \bigcup_{x \notin \{x_1, ..., x_N\}} \Lambda_x$$

与 $\mathbb{R}$ 不相交，且是可数集。

根据定理 2.2，对于 $Ju' + qu = \lambda wu$，初值问题在区间 (x_j, x_{j+1}) 上有唯一解，$j = 0, ..., N$。在每个区间 (x_j, x_{j+1}) 中，我们选取一个平衡基本解系 $U_j(\cdot, \lambda)$，使得 $U_j(\xi_j, \lambda) \overset{=}{} \mathbb{I}$，其中 ξ_j 是 q 和 w 的连续点，即 $q(\{\xi_j\}) = w(\{\xi_j\}) = 0$。将这些解延拓到整个 (a, b) 上，作为在区间外取零的平衡函数

$\overline{(x_j, x_{j+1})}$。这些延拓函数也记为 $U_j(\cdot,\lambda)$。利用它们，我们定义$n \times n(N+1)$-矩阵。

$$\mathcal{U}(x,\lambda) = (U_0(x,\lambda), ..., U_N(x,\lambda)).$$

现在，只要 f 具有紧支撑，我们就可以定义元素 $f \in L^2(w)$ 的傅里叶变换 $\mathcal{F}f$：

$$(\mathcal{F}f)(\lambda) = \int \mathcal{U}(\cdot,\overline{\lambda})^* w f,$$

$\mathbb{C}^{n(N+1)}$中的一个向量。

此处，我们先引入一些下文所需的其他记号。不同大小的单位矩阵记为 $\mathbb{I}$，而（方形或矩形）零矩阵记为 0。有时最好用下标标明维数，例如，$_k$ 是 $k \times k$ 单位矩阵，而 $0_{k,\ j}$ 是 $k \times j$ 零矩阵。

在 [4] 和 [16] 中，研究了方程 $Ju' + (q - \lambda w)u = wf$ 在存在一些点的情况下的情形，解在这些点处无法唯一延拓。在那里，解的描述涉及一个双对角分块矩阵 $\mathbb{B}$，其分块大小为 $n \times n$。这种双对角分块矩阵具有如下形式：$A\mathbb{E}_\top + B\mathbb{E}_\perp$，其中 A 和 B 是对角分块矩阵，而 $\mathbb{E}_\top$ 和 $\mathbb{E}_\perp$ 是 $N \times (N+1)$-分块矩阵，分别从其定义域中的向量去掉首尾 n 个分量。因此，$\mathbb{E}_\top = (0_{nN,\ n}, \mathbb{I}^{nN})$ 且 $\mathbb{E}_\perp = (\mathbb{I}^{nN}, 0_{nN,\ n})$。在我们的具体应用中，我们有

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathcal{B}(\lambda)\mathcal{U}^+(\lambda)\mathbb{E}_\top + \mathcal{B}(\overline{\lambda})^*\mathcal{U}^-(\lambda)\mathbb{E}_\perp$$

其中

$$\mathcal{B}(\lambda) = \operatorname{diag}(B_+(x_1,\lambda), ..., B_+(x_N,\lambda)),$$
$$\mathcal{U}^-(\lambda) = \operatorname{diag}(U_0^-(x_1,\lambda), ..., U_{N-1}^-(x_N,\lambda)),$$

and

$$\mathcal{U}^+(\lambda) = \operatorname{diag}(U_1^+(x_1,\lambda), ..., U_N^+(x_N,\lambda)).$$

我们还将需要矩阵

$$\tilde{\mathbb{B}}(\lambda) = \mathcal{B}(\lambda)\mathcal{U}^+(\lambda)\mathbb{E}_\top - \mathcal{B}(\overline{\lambda})^*\mathcal{U}^-(\lambda)\mathbb{E}_\perp.$$

如果必须将 $N = 0$、$\mathbb{E}_\top$ 和 $\mathbb{E}_\perp$ 视为从 $\mathbb{C}^{\tilde{n}}$ 到 $\{0\}$ 的线性变换。在这种情况下，$\mathbb{B}(\lambda)$ 和 $\mathbb{B}(\lambda)$ 是没有行的“矩阵”。这不会给下文带来任何问题。我们还令 $\mathcal{J} = \operatorname{diag}(J, ..., J)$ 表示一个 $N \times N$ 或一个 $(N+1) \times (N+1)$ 分块矩阵。

3.1. $R_\lambda f$ 的一个代表元。若 $\lambda \in \varrho(T) \setminus \tilde{\Lambda}$ 且 $f \in L^2(w)$ 是紧支撑的，我们现在将构造 $R_\lambda f$ 的一个平衡代表元。

3.1.1. 通解。在区间 (x_{j-1}, x_j) 上使用常数变易公式可知，$Ju' + (q - \lambda w)u = wf$ 的任意解 u 都满足

$$u^-(x) = \mathcal{U}^-(x,\lambda)\big(\tilde{u} + \mathcal{J}^{-1}\int_{(a,x)} \mathcal{U}(\cdot,\overline{\lambda})^* w f\big) \tag{3.1}$$

其中 $\tilde{u} = (\tilde{u}_0, ..., \tilde{u}_N)^\diamond$ 是 $\mathbb{C}^{n(N+1)}$ 中的一个适当向量。[1] 要使 u 确实成为一个解，当且仅当

$$-B_-(x_j,\lambda)u^-(x_j) + B_+(x_j,\lambda)u^+(x_j) = \Delta_w(x_j)f(x_j) \tag{3.2}$$

[1] 我们用 $^\diamond$ 表示一个分块列向量，如 $(c_1, ..., c_N)^\diamond = (c_1^\top, ..., c_N^\top)^\top$。

对于 $j=1,\dots,N$。由于根据方程（2.2），$U_j^-(x_j,\lambda)J^{-1}U_j^-(x_j,\overline{\lambda})^*=J^{-1}$我们得到

$$\begin{aligned}u^-(x_j)&=U_{j-1}^-(x_j,\lambda)\big(\tilde{u}_{j-1}+J^{-1}\int_{(a,x_j)}U_{j-1}(\cdot,\overline{\lambda})^*wf\big)\\&=U_{j-1}^-(x_j,\lambda)\big(\tilde{u}_{j-1}+J^{-1}\int U_{j-1}(\cdot,\overline{\lambda})^*wf\big)-\frac{1}{2}J^{-1}(\Delta_w f)(x_j)\end{aligned}$$

使得 $(u^-(x_1),\dots,u^-(x_N))^\diamond=\mathcal{U}^-(\lambda)\mathbb{E}_\perp\big(\tilde{u}+\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{F}f)(\lambda)\big)-\frac{1}{2}\mathcal{J}^{-1}\mathcal{W}_0(f)$ 其中$\mathcal{W}_0(f)$ $=((\Delta_w f)(x_1),\dots,(\Delta_w f)(x_N))^\diamond$。

类似地，$(u^+(x_1),\dots,u^+(x_N))^\diamond=\mathcal{U}^+(\lambda)\mathbb{E}_\top\tilde{u}+\frac{1}{2}\mathcal{J}^{-1}\mathcal{W}_0(f)$，因为

$$\begin{aligned}u^+(x_j)&=U_j^+(x_j,\lambda)\big(\tilde{u}_j+J^{-1}\int_{(a,x_j]}U_j(\cdot,\overline{\lambda})^*wf\big)\\&=U_j^+(x_j,\lambda)\tilde{u}_j+\frac{1}{2}J^{-1}(\Delta_w f)(x_j).\end{aligned}$$

因此，考虑到 $\mathcal{B}(\lambda)-\mathcal{B}(\overline{\lambda})^*=2\mathcal{J}$，方程（3.2）表明 $\tilde{u}$必须满足该系统

$$\mathbb{B}(\lambda)\tilde{u}=-\mathcal{B}(\overline{\lambda})^*\mathcal{U}^-(\lambda)\mathbb{E}_\perp\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{F}f)(\lambda).\tag{3.3}$$

3.1.2. 可积性条件。接下来要求 u 是 $\mathcal{L}^2(w)$ 的一个元素。我们将 $N_+(\lambda)\subset\mathbb{C}^n$ 定义为所有满足以下条件的 η 的集合：$u=U_N(\cdot,\lambda)\eta$ 满足$\int_{(x_N,\ b)}u^*wu<\infty$。类似地，$N_-(\lambda)\subset\mathbb{C}^n$ 是所有满足以下条件的 η 的集合：$u=U_0(\cdot,\lambda)\eta$满足 $\int_{(a,\ x_1)}u^*wu<\infty$。我们还分别将投影到 $N_\pm(\lambda)$ 上的正交投影记为 $P_\pm(\lambda)$。

为了选出属于 $L^2(w)$ 的微分方程的解，我们按如下步骤进行。回忆一下，wf 是紧支撑的。在 (a,x_1) 中，我们有

$$u^-(x)=U_0^-(x,\lambda)(\tilde{u}_0+J^{-1}\int_{(a,x)}U_0(\cdot,\overline{\lambda})^*wf).$$

特别地，如果 x位于 wf的支撑下方，则有 $u^-(x)=U_0^-(x,\lambda)\tilde{u}_0$。因此，我们希望 $\tilde{u}_0\in N_-(\lambda)$。定义 $\Omega_-(\lambda)=(\mathbb{I}-P_-(\lambda)\ 0,\dots,0)\in\mathbb{C}^{n\times n(N+1)}$，于是条件变为

$$\Omega_-(\lambda)\tilde{u}=0.\tag{3.4}$$

对于 $x\in(x_N,b)$，我们则得到

$$u^-(x)=U_N^-(x,\lambda)(\tilde{u}_N+J^{-1}\int_{(x_N,x)}U_N(\cdot,\overline{\lambda})^*wf)$$

特别地，若 x位于 wf的支撑上方，则 $u^-(x)=U_N^-(x,\lambda)(\tilde{u}_N+J^{-1}(\mathcal{F}f)_N(\lambda))$。因此，$(\mathbb{I}-P_+(\lambda))\tilde{u}_N=-(\mathbb{I}-P_+(\lambda))J^{-1}(\mathcal{F}f)_N(\lambda)$。令 $\Omega_+(\lambda)=(0,\dots,0,\ \mathbb{I}-P_+(\lambda))\in\mathbb{C}^{n\times n(N+1)}$，于是条件变为

$$\Omega_+(\lambda)\tilde{u}=-\Omega_+(\lambda)\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{F}f)(\lambda).\tag{3.5}$$

如果 a（或 b）是正则的，那么 $P_-(\lambda)$（或 $P_+(\lambda)$）是恒等映射，相应的条件是空泛的。

3.1.3. 边界条件。现在我们运用定理2.3 来处理 R_λ 的代表元必须满足的边界条件。这些边界条件如下：

$$(g_j^* Ju)^-(b) - (g_j^* Ju)^+(a) = 0, \quad \text{for } j = 1, ..., n_\pm \tag{3.6}$$

其中（v_1， g_1），...，（$v_{n_\pm}$， $g_{n_\pm}$）是 $D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$ 中满足方程（2.3）的线性无关元素。令 $g =$（g_1，...，g_{n_+}），并引入矩阵[2]

$$A_-(\lambda) = -(g^* J U_0(\cdot, \lambda) P_-(\lambda))^+(a),$$
$$A_+(\lambda) = (g^* J U_N(\cdot, \lambda) P_+(\lambda))^-(b),$$

and

$$\mathcal{A}_-(\lambda) = (A_-(\lambda), 0, ..., 0), \quad \mathcal{A}_+(\lambda) = (0, ..., 0, A_+(\lambda))$$

其中包含 N 个零矩阵分块。于是边界条件为

$$(\mathcal{A}_+(\lambda) + \mathcal{A}_-(\lambda))\tilde{u} = -\mathcal{A}_+(\lambda)\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{F}f)(\lambda). \tag{3.7}$$

3.1.4. 零范数解。 最后，我们考虑范数为 0 的解。定义 $N_0 = \{\eta \in \mathbb{C}^{n(N+1)} :$ $\mathcal{U}$（$\cdot$， 0）$\eta \in \mathcal{L}_0\}$。将 $\mathcal{L}_0$ 中的任意元素加到 u 的一个解 $Ju' +$（$q - \lambda w$）$u = wf$ 上，若该解属于 $\mathcal{L}^2$（w）且满足边界条件，则所得解仍具有相同性质。每一个这样的解都可由（3.1）给出，只需适当选择 $\tilde{u}$，且其中恰有一个满足$\tilde{u} \in N_0^\perp$。因此，若 $\mathbb{P}$是到 $N_0^\perp$上的正交投影，则要求

$$(\mathbb{I} - \mathbb{P})\tilde{u} = 0. \tag{3.8}$$

注意， $\mathbb{P}$ 不依赖于 λ。

我们还要强调，对于任意和任意，

$w\mathcal{U} \cdot \lambda \quad - \mathbb{P}\ \eta$

$\eta \in (,)()$都是零分布。因此$(,)$

$\mathbb{C}^{n(N+1)}$ $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\tilde{\lambda}$ $w\mathcal{U}\ \mathbb{I}\ \lambda = w\mathcal{U} \cdot \lambda\ \mathbb{P}$ $\mathcal{U} \cdot \overline{\lambda}\ ^* w =$

$(,)$，或者等价地，$(,)\mathbb{P}\mathcal{U}(,\overline{\lambda})^* w$，特别是，

$$(\mathcal{F}f)(\lambda) = \mathbb{P}(\mathcal{F}f)(\lambda) \tag{3.9}$$

我们在此记录下来，以便日后使用。

我们还需要以下结果。

引理 3.1. $\mathbb{B}(\lambda)(\mathbb{I} - \mathbb{P}) = 0$, $\mathcal{Q}_\pm(\lambda)(\mathbb{I} - \mathbb{P}) = 0$, 且 $(\mathcal{A}_+(\lambda) + \mathcal{A}_-(\lambda))(\mathbb{I} - \mathbb{P}) = 0$。

证明。设 v 是 $\mathbb{C}^{n(N+1)}$中的任意元素。则$(\mathbb{I} - \mathbb{P})v$ 属于 N_0，而$\mathcal{U}(\cdot, \lambda)(\mathbb{I} - \mathbb{P})v$ 是 $\mathcal{L}_0$ 中的一个元素。因此，它满足微分方程$Ju' + qu = \lambda w u$，这意味着根据关于 $f = 0$ 的方程 (3.3)， $\mathbb{B}(\lambda)(\mathbb{I} - \mathbb{P})v = 0$。如我们在方程 (2.5) 中所论证的，它也（显然）属于 $L^2(w)$并满足边界条件，从而得出另外两个结论。□

3.1.5. 综合起来。 现在我们将方程（3.3）、（3.4）、（3.5）、（3.7）和（3.8）汇总为以下系统

$$\mathbb{F}(\lambda)\tilde{u} = \mathbb{H}_\ell(\lambda)\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{F}f)(\lambda) \tag{3.10}$$

其中

$$\mathbb{F}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathbb{B}(\lambda) \\ \mathcal{Q}_-(\lambda) \\ \mathcal{Q}_+(\lambda) \\ \mathcal{A}_+(\lambda) + \mathcal{A}_-(\lambda) \\ \mathbb{I} - \mathbb{P} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbb{H}_\ell(\lambda) = -\begin{pmatrix} \mathcal{B}(\overline{\lambda})^* \mathcal{U}^-(\lambda)\mathbb{E}_\perp \\ 0 \\ \mathcal{Q}_+(\lambda) \\ \mathcal{A}_+(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[2]的定义 A_- 与 [10] 中的定义相差一个因子 -1。

我们现在将证明， $\mathbb{F}$ 具有平凡核，因此具有满列秩。因此，它存在左逆 $\mathbb{F}^\dagger$ ；由于我们已知解存在，可以对方程（3.10）求解 $\tilde{u}$。利用 $\tilde{u}=\mathbb{P}\tilde{u}$ 和方程（3.9），可得

$$\tilde{u}=\mathbb{P}\mathbb{F}(\lambda)^\dagger\mathbb{H}_\ell(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}(\mathcal{F}f)(\lambda)=\mathbb{M}_\ell(\lambda)(\mathcal{F}f)(\lambda) \tag{3.11}$$

从而定义矩阵 $\mathbb{M}_\ell$。取 $\tilde{u}$ 的这一值，我们重复方程（3.1）可得

$$u^-(x)=\mathcal{U}^-(x,\lambda)\int(\mathbb{M}_\ell(\lambda)+\mathcal{J}^{-1}\chi_{(a,x)})\mathcal{U}(\cdot,\overline{\lambda})^*wf. \tag{3.12}$$

˜引理 3.2. 如果 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda$ 且 $\mathrm{Im}(\lambda)\neq 0$，那么 $\ker\mathbb{F}(\lambda)=\{0\}$。

证明。假设 $v\in\ker\mathbb{F}(\lambda)$。由于随后 $v\in\ker\mathbb{B}(\lambda)$，可知 $u=\mathcal{U}(\cdot,\lambda)v$是 $Ju'+qu=\lambda wu$的一个解。进一步注意到，由于$\mathcal{Q}_\pm(\lambda)v=0$， u 必须属于 $\mathcal{L}^2(w)$。最后，$(\mathcal{A}_+(\lambda)+\mathcal{A}_-(\lambda))v=0$ 表明 u 满足边界条件。因此，$([u],\lambda[u])\in T$。由于 λ不是实数，我们必须有 $[u]=0$ ，从而 $u\in\mathcal{L}_0$。因此我们看到 $v\in N_0$。然而，我们还有 $(\mathbb{I}-\mathbb{P})v=0$ ，因此 $v=0$。□

现在，我们通过在方程（ u^+ 3.12）的右侧取极限，得到

$$u^+(x)=\mathcal{U}^+(x,\lambda)\int(\mathbb{M}_\ell(\lambda)+\mathcal{J}^{-1}\chi_{(a,x]})\mathcal{U}(\cdot,\overline{\lambda})^*wf.$$

因此

$$u(x)=\mathcal{U}(x,\lambda)\int(\mathbb{M}_\ell(\lambda)+\mathcal{J}^{-1}\chi_{(a,x)})\mathcal{U}(\cdot,\overline{\lambda})^*wf + \frac{1}{2}\mathcal{U}^+(x,\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathcal{U}(x,\overline{\lambda})^*\Delta_w(x)f(x) \tag{3.13}$$

是 $R_\lambda f$ 的一个代表元。

3.2. 追求对称性。现在，我们从对（x,b）上的积分出发，而不是从（a,x）上的积分出发，构造 $R_\lambda f$ 的另一个代表元 v 。具体而言，

$$v^+(x)=\mathcal{U}^+(x,\lambda)\big(\tilde{v}-\mathcal{J}^{-1}\int_{(x,b)}\mathcal{U}(\cdot,\overline{\lambda})^*wf\big)$$

其中 $\tilde{v}$ 是 $\mathbb{C}^{n(N+1)}$ 中一个恰当的向量。

方程（3.10）变为

$$\mathbb{F}(\lambda)\tilde{v}=\mathbb{H}_r(\lambda)\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{F}f)(\lambda) \tag{3.14}$$

其中 $\mathbb{F}$ 与前文相同，但

$$\mathbb{H}_r(\lambda)=\begin{pmatrix}\mathcal{B}(\lambda)\mathcal{U}^+(\lambda)\mathbb{E}_\top\\ \mathcal{Q}_-(\lambda)\\ 0\\ \mathcal{A}_-(\lambda)\\ 0\end{pmatrix}.$$

类似于（3.11），现在得到

$$\tilde{v}=\mathbb{P}\mathbb{F}(\lambda)^\dagger\mathbb{H}_r(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}(\mathcal{F}f)(\lambda)=\mathbb{M}_r(\lambda)(\mathcal{F}f)(\lambda) \tag{3.15}$$

定义 $\mathbb{M}_r(\lambda)$。对 v^+ 从左侧取极限，得到 v^- 因此，类似于（3.13），

$$v(x) = \mathcal{U}(x,\lambda)\int (\mathbb{M}_r(\lambda) - \mathcal{J}^{-1}\chi_{(x,b)})\mathcal{U}(\cdot,\overline{\lambda})^* w f \\ - \frac{1}{2}\mathcal{U}^-(x,\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathcal{U}(x,\overline{\lambda})^*\Delta_w(x)f(x). \quad (3.16)$$

我们强调，由于 u 和 v 是 $R_\lambda f$ 的代表元，它们的差必定是 $\mathcal{L}_0$ 的一个元素。

3.3. 构造 $\mathbb{M}$。现在我们定义 $\mathbb{M}(\lambda) = \frac{1}{2}(\mathbb{M}_\ell(\lambda) + \mathbb{M}_r(\lambda))$，即，

$$\mathbb{M}(\lambda) = \mathbb{P}\mathbb{F}(\lambda)^\dagger \mathbb{H}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}$$

其中

$$\mathbb{F}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathbb{B}(\lambda) \\ \mathcal{Q}_-(\lambda) \\ \mathcal{Q}_+(\lambda) \\ \mathcal{A}_+(\lambda) + \mathcal{A}_-(\lambda) \\ \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{H}(\lambda) = \frac{\mathbb{H}_\ell(\lambda) + \mathbb{H}_r(\lambda)}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{B}}(\lambda) \\ \mathcal{Q}_-(\lambda) \\ -\mathcal{Q}_+(\lambda) \\ \mathcal{A}_-(\lambda) - \mathcal{A}_+(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是，结合式（3.13）和（3.16），可得

$$(\mathcal{R}_\lambda f)(x) = \frac{u(x)+v(x)}{2} = \mathcal{U}(x,\lambda)\int (\mathbb{M}(\lambda) + \frac{1}{2}\mathcal{J}^{-1}\operatorname{sgn}(x-\cdot))\mathcal{U}(\cdot,\overline{\lambda})^* w f \\ + \frac{1}{4}(\mathcal{U}^+(x,\lambda) - \mathcal{U}^-(x,\lambda))\mathcal{J}^{-1}\mathcal{U}(x,\overline{\lambda})^*\Delta_w(x)f(x). \quad (3.17)$$

这是我们对 $R_\lambda f$ 的最后一个代表元。我们强调，式（3.17）中的最后一项除对至多可数多个 $x \in (a, b)$ 外均为零。

4. Properties of $\mathbb{M}$

函数

$$\mathbb{M}(\lambda) = \mathbb{P}\mathbb{F}(\lambda)^\dagger \mathbb{H}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P},$$

出现在方程（3.17）中的函数，在多种情况下（包括所有正则情形以及当 $N = 0$ 时）都是矩阵值奈万林纳函数，正如我们将在本节中展示的那样。事实上，我们认为它始终如此，但目前尚无法证明。

回忆一下，奈万林纳函数 $\mathbb{M}$ 是定义在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上并具有以下性质的函数：(i) $\mathbb{M}$ 在如下意义下是对称的：$\mathbb{M}(\lambda) = \mathbb{M}(\overline{\lambda})^*$；(ii) $\operatorname{Im}\mathbb{M}$ 在上半平面内非负；(iii) $\mathbb{M}$ 是解析的。作为奈万林纳函数，$\mathbb{M}$ 具有如下表示

$$\mathbb{M}(\lambda) = A + B\lambda + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{t^2+1}\Big)\tau(t) \quad (4.1)$$

其中 A 是厄米的，B 是非负的，而 τ 是非负矩阵值测度，其重要性将在下一节中显现。测度 τ 称为谱测度。

˜4.1. $\mathbb{M}$的对称性。对于 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$，定义集合

$$\mathbf{B}(\lambda) = \{(\mathcal{F}f)(\lambda) : f \in L^2(w), \operatorname{supp} f \text{ compact}\}.$$

˜引理 4.1. 若 $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ 则 $\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{B}(\mu)$.

证明. 令 $u = \mathcal{U}(\cdot, \overline{\lambda})\alpha$ 且 $v = \mathcal{U}(\cdot, \overline{\mu})\alpha$. 由于 $\alpha \in \mathbf{B}(\lambda)^\perp$ 当且仅当 $wu = 0$，由此可知，对于这样的 α， u 满足微分方程 $Ju' + qu = \overline{\lambda}wu = 0 = \overline{\mu}wu$，定义在 (x_j, x_{j+1}) 上。由于 $u(\xi_j) = v(\xi_j) = \alpha_j$，我们实际上有 u和 v在 (x_j, x_{j+1}) 上重合，因此处处重合。所以 $wv = 0$ 且 $\alpha \in \mathbf{B}(\mu)^\perp$. 交换 λ 和 μ 所起的作用即可得到另一个包含关系。□

鉴于引理 4.1 ，以下我们将简写为 $\mathbf{B}$ ，而不再写作 $\mathbf{B}(\lambda)$。

由于方程 (3.9)，显然 $\mathbf{B}$ 是 $N_0^\perp$ =值域 $\mathbb{P}$的子空间。这一包含关系可能是严格的[3] ，但在等号成立时，我们有以下引理。

˜引理 4.2. 假设 $\lambda \in \varrho(T) \setminus \Lambda$ 且 $\mathbf{B}$ =值域 $\mathbb{P}$。则 $\mathbb{M}(\overline{\lambda})^* = \mathbb{M}(\lambda)$。特别地，当 $N = 0$ 时，此结论成立。

证明。由于 $R_{\overline{\lambda}} = R_\lambda^*$ ，我们有

$$0 = \langle g, R_\lambda f\rangle - \langle R_{\overline{\lambda}} g, f\rangle = (\mathcal{F}g)(\overline{\lambda})^*(\mathbb{M}(\lambda) - \mathbb{M}(\overline{\lambda})^*)(\mathcal{F}f)(\lambda).$$

这里我们利用 (2.2) 说明由 (3.17) 产生的积分项彼此抵消。于是结论成立，因为 (值域$\mathbb{P})^\perp = N_0$ 同时属于$\mathbb{M}(\lambda)$ 和 $\mathbb{M}(\overline{\lambda})^*$的核。

接下来我们证明，对于 $N = 0$ ，确实有 $\mathbf{B}$ = 值域$\mathbb{P}$。设 $\alpha \in \mathbf{B}^\perp$ ，使得$\int f^* w\mathcal{U}(\cdot, \overline{\lambda})\alpha = 0$。但此处 $\mathcal{U}(\cdot, \overline{\lambda}) = U_0(\cdot, \overline{\lambda})$，这意味着 $\mathcal{U}(\cdot, \overline{\lambda})\alpha$ 是 $Ju' + qu = \overline{\lambda}wu$ 的一个解，且它垂直于 $L^2(w)$ 中的一个稠密集。这表明$\alpha \in N_0 = (\text{值域}\,\mathbb{P})^\perp$。□

若 $N \geq 1$ 仍有 $u = \mathcal{U}(\cdot, \overline{\lambda})\alpha$ 的范数在 $\alpha \in \mathbf{B}^\perp$ 时为 0，但它可能不再是该微分方程的解。为涵盖 $\mathbf{B} \neq$ 值域$\mathbb{P}$ 的例外情形，我们引入矩阵

$$\Omega(\lambda) = \mathbb{H}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{F}(\overline{\lambda})^* + \mathbb{F}(\lambda)\mathbb{P}\mathcal{J}^{-1}\mathbb{H}(\overline{\lambda})^*.$$

从左侧将 $\mathbb{P}\mathbb{F}(\lambda)^\dagger$ 作用于 $\Omega(\lambda)$，并从右侧将 $\mathbb{F}(\overline{\lambda})^{\dagger *}\mathbb{P}$ 作用于它，可知 $\Omega(\lambda) = 0$ 蕴含 $\mathbb{M}(\lambda) = \mathbb{M}(\overline{\lambda})^*$，我们将此结果表述为一个引理。

˜引理 4.3。若 $\lambda \in \varrho(T) \setminus \Lambda$ 且 $\Omega(\lambda) = 0$，则 $\mathbb{M}(\lambda) = \mathbb{M}(\overline{\lambda})^*$。

一般而言，Ω 是一个 5×5-分块矩阵；下文中若只说行和列，指的就是分块的行和列。注意，对于 $N = 0$，第一行和第一列实际上不存在；而对于 $n_\pm = 0$ ，不需要边界条件，因此第四行和第四列不存在。为简化记号，我们仍将其余分块按仿佛其他分块存在时的方式编号。

由于 $\mathbb{H}$ 和 $\mathbb{F}\mathbb{P}$ 中分块的最后几行均为零，因此 Ω 的最后一行也为零。由于 $\Omega(\overline{\lambda})^* = -\Omega(\lambda)$，最后一列也同样如此。

[3] Let, for instance, $(a, b) = \mathbb{R}$, $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\delta_0$, and $w = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\delta_0$. Then $\dim \mathbf{B} = 1$ while $\dim \operatorname{ran} \mathbb{P} = 3$.

Ω。为考察剩余的 4×4-分块矩阵，我们引入

$$X(\lambda)=\begin{pmatrix}\mathcal{B}(\lambda)\mathcal{U}^{+}(\lambda)\mathbb{E}_{\top}\\ \mathcal{Q}_{-}(\lambda)\\ 0\\ \mathcal{A}_{-}(\lambda)\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad Y(\lambda)=\begin{pmatrix}\mathcal{B}(\overline{\lambda})^{*}\mathcal{U}^{-}(\lambda)\mathbb{E}_{\perp}\\ 0\\ \mathcal{Q}_{+}(\lambda)\\ \mathcal{A}_{+}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

由引理 3.1 可得 $(X+Y)\mathbb{P}=X+Y$。因此，考虑到消去项，我们发现块 $\Omega_{\ell,\,k}$ 为

$$\Omega_{\ell,k}(\lambda)=X_{\ell}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}X_{k}(\overline{\lambda})^{*}-Y_{\ell}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}Y_{k}(\overline{\lambda})^{*}$$

对于 $1\le\ell,k\le 4$。

˜引理 4.4。若 $\lambda\in\varrho(T)\setminus\Lambda$，则 $\Omega(\lambda)$ 的第一行和第一列（若存在）均为零。

证明。$\Omega_{1,1}(\lambda)$包含以下项

$$\mathcal{U}^{+}(\lambda)\mathbb{E}_{\top}\mathcal{J}^{-1}\mathbb{E}_{\top}^{*}\mathcal{U}^{+}(\overline{\lambda})^{*}$$

其中 $\mathcal{J}^{-1}$ 是一个 $n(N+1)\times n(N+1)$ 矩阵。鉴于方程 (2.2) 以及 $\mathbb{E}_{\top}$ 的结构，该乘积等于 $nN\times nN$ 矩阵 $\mathcal{J}^{-1}$。对涉及 $\mathbb{E}_{\perp}$ 的项采用类似的论证，可得

$$\Omega_{1,1}(\lambda)=\mathcal{B}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathcal{B}(\overline{\lambda})^{*}-\mathcal{B}(\overline{\lambda})^{*}\mathcal{J}^{-1}\mathcal{B}(\lambda),$$

一个分块对角矩阵。由于 $B_{+}(\cdot,\overline{\lambda})^{*}=-B_{-}(\cdot,\lambda)$，且对于适当的矩阵 A，$B_{\pm}=J\pm A$，我们得到 $B_{-}(x_k,\lambda)J^{-1}B_{+}(x_k,\lambda)-B_{+}(x_k,\lambda)J^{-1}B_{-}(x_k,\lambda)=0$，因此 $\Omega_{1,1}(\lambda)=0$。

对于 $\ell=2$ 和 $k=1$，我们得到

$$\Omega_{2,1}(\lambda)=\mathcal{Q}_{-}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{E}_{\top}^{*}\mathcal{U}^{+}(\overline{\lambda})^{*}\mathcal{B}(\overline{\lambda})^{*}.$$

这是 0，因为行向量 $\mathcal{Q}_{-}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}$ 中只有第一个分块非零，因此被 $\mathbb{E}_{\top}^{*}$ 消去。类似的论证可用于证明 $\Omega_{3,1}(\lambda)=0$ 和 $\Omega_{4,1}(\lambda)=0$。

最后，由于 $\Omega(\overline{\lambda})^{*}=-\Omega(\lambda)$，$\Omega$ 的第一行也为零。 □

目前，我们无法证明 Ω 的其余元素在所有情况下也都会消失，尽管我们强烈怀疑确实如此。不过，˜当对于所有 $\lambda\in\varrho(T)\setminus\Lambda$，$P_{\pm}(\lambda)=\mathbb{I}$（这包括所有正则问题），且 $n=1$，以及 $n=2$ 且 J、q 和 w 为实数时，我们可以证明这一结论成立。

4.1.1. 当 $P_{\pm}(\lambda)=\mathbb{I}$ 时。

˜引理 4.5. 若 $\lambda\in\varrho(T)\setminus\Lambda$ 且 $P_{\pm}(\lambda)=\mathbb{I}$，则 $\Omega(\lambda)=0$，从而 $\mathbb{M}(\lambda)=\mathbb{M}(\overline{\lambda})^{*}$。

证明。只需考虑 $\Omega_{4,4}$ 在此情形下。回想式（2.2），可得

$$\Omega_{4,4}(\lambda)=(g^{*}Jg)^{-}(b)-(g^{*}Jg)^{+}(a)$$

根据定理2.3，因为我们有 $T_{\max}$的自伴限制而消失。 □

4.1.2. 当 $n=1$ 时的情形。

~引理 4.6：如果 $\lambda\in\varrho(T)\setminus\Lambda$ 且 $n=1$，则 $\Omega(\lambda)=0$，因此 $\mathbb{M}(\lambda)=\mathbb{M}(\overline{\lambda})^*$。

证明。首先反设 $\Omega_{2,2}(\lambda)\neq 0$，即 $P_-(\lambda)=P_-(\overline{\lambda})=0$。考虑满足 $\tilde{q}=q\chi_{(a,x_1)}$ 和 $\tilde{w}=w\chi_{(a,x_1)}$ 的问题。现在我们知道 b 是一个正则端点，但相应的亏格指标 $\tilde{n}_\pm$ 仍为~零。换言之，这是一个自伴情形，其中 $N=0$、$Q_-=1$、$\tilde{Q}_+=0$ 和 $\tilde{\mathbb{P}}=1$。在这种情形下，我们发现 $\tilde{\mathbb{M}}(\lambda)=J^{-1}/2$ 位于任一半平面内。但 J^{-1} 是一个非零纯虚数，并且根据引理 4.2，~$\mathbb{M}(\lambda)=\mathbb{M}(\overline{\lambda})^*$，矛盾。因此 $\Omega_{2,2}(\lambda)=0$，类似地可证明 $\Omega_{3,3}(\lambda)=0$。显然，我们还有 $\Omega_{3,2}(\lambda)$ 和 $\Omega_{2,3}(\lambda)$ 均为 0。

现在考虑 Ω 的第四行。$\Omega_{4,2}(\lambda)$ 中包含因子 $P_-(\lambda)J^{-1}(1-P_-(\lambda))$，由于 J^{-1} 是标量，该因子为 0。因此，类似地，$\Omega_{4,3}(\lambda)$ 也为零。最后，由于当 $P_-(\lambda)=0$ 或 $P_+(\lambda)=0$ 时，$g(\cdot,\lambda)$ 分别在 a 或 b 附近消失，我们可以从该表达式中去掉因子 $P_\pm$

$$\Omega_{4,4}(\lambda)=-\big(g^*JU_0(\cdot,\lambda)P_-(\lambda)J^{-1}P_-(\overline{\lambda})U_0(\cdot,\overline{\lambda})^*Jg^*\big)^+(a)\\ +\big(g^*JU_N(\cdot,\lambda)P_+(\lambda)J^{-1}P_+(\overline{\lambda})U_N(\cdot,\overline{\lambda})^*Jg^*\big)^-(b).$$

因此，利用（2.2）和（2.3），$\Omega_{4,4}(\lambda)=(g^*Jg)^-(b)-(g^*Jg)^+(a)=0$。 □

4.1.3. $n=2$ 且系数为实数的情形。J 为实数、斜伴随且可逆这一条件意味着，对于某个 $\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，有 $J=\beta\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$。不失一般性，以下设 $\beta=1$。[4] 此外注意到，u 是 $Ju'+qu=\lambda wu$ 的解，当且仅当 $\overline{u}$ 是 $J\overline{u}'+q\overline{u}=\overline{\lambda}w\overline{u}$的解。这意味着$n_+=n_-$ 以及 $P_\pm(\overline{\lambda})=P_\pm(\lambda)$。

~引理 4.7. 若 $\lambda\in\varrho(T)\setminus\Lambda$, $n=2$，且 J, q 和 w 均为实数，则 $\Omega(\lambda)=0$，因此 $\mathbb{M}(\lambda)=\mathbb{M}(\overline{\lambda})^*$。

证明. 与 $n=1$ 的情形一样，我们将利用辅助问题，其中$\tilde{q}=q\chi_{(a,x_1)}$，且 $\tilde{w}=w\chi_{(a,x_1)}$。同样，$b$ 是正则端点，且~$N=0$。我们还将通过添加~符号来表示与辅助问题相关的其他量。

首先证明不可能有 $P_\pm(\lambda)=0$。反设 $P_-(\lambda)=0$，因此 $P_-(\overline{\lambda})=0$，则有 $n_\pm=0$，并得到$\tilde{\mathbb{P}}(\lambda)=(\mathbb{I},0,0)^\top$，且辅助问题满足 $\tilde{\mathbb{H}}(\lambda)=\tilde{\mathbb{F}}(\lambda)/2$。因此，在任一半平面中，$\tilde{\mathbb{M}}(\lambda)=J^{-1}/2$，这与之前一样是荒谬的。类似的论证表明，$P_+(\lambda)$ 不可能为 0。

当 $P_-(\lambda)=\mathbb{I}$ 时，$\mathcal{Q}_-(\lambda)=0$，这意味着 $\Omega(\lambda)$ 的第二列和第二行均为零。

接下来，假设 $P_-(\lambda)$ 的秩为 1。正如直接计算所示，$\mathbb{C}^2$ 中任意秩为 1 的正交投影 P 都满足 $PJ^{-1}\overline{P}=0$。将此应用于 $P=\mathbb{I}-P_-(\lambda)$，可知 $\Omega_{2,2}(\lambda)=0$。$\Omega_{3,2}(\lambda)=0$ 再次显然成立。现在考虑 $\mathcal{A}_-(\lambda)=-(g^*JU_0(\cdot,\lambda)P_-(\lambda))^+(a)$，并设 η 是 $\mathbb{C}^2$ 中任意元素。若 $u=U_0(\cdot,\lambda)P_-(\lambda)\eta$ 且 $\int_{(a,x_1)}u^*wu>0$，则我们的辅助问题是定的，因此得到 $(g^*Ju)^+(a)=0$，进而由 [10] 中的引理 7.6 得到 $\mathcal{A}_-(\lambda)=0$。如果

[4]如果 $\pm\beta>0$ 我们可以采用刘维尔变换 $v(x)=\pm\beta u(\pm x)$，从而得到一个具有相同性质但带有 $J=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 的方程。

$\int_{(a,x_1)} u^* w u = 0$，即若 $u \in \tilde{\mathcal{L}}_0$，则 u 对任意 $\mu \in \mathbb{C}$ 都满足 $Ju' + \tilde{q}u = \mu \tilde{w} u = 0$。在这种情况下，存在一个 $\alpha \in \mathbb{R}^2$，使得 $\tilde{\mathcal{L}}_0$ 由 $v = U_0(\cdot, 0)\alpha$ 张成。于是 u 和 g 均为 v 的倍数，并且对于适当的 $c \in \mathbb{C}$，$(g^* J u)^+ = c\alpha^* U_0^+(\cdot, 0)^* J U_0^+(\cdot, 0)\alpha$。由方程 (2.2)，且由于 $\alpha^* J \alpha = 0$，我们得到 $\mathcal{A}_-(\lambda) = 0$。由此可知，当 $P_-(\lambda)$ 的秩为 1 时，$\Omega(\lambda)$ 的第二列和第二行也都为零，也就是说，无论哪种情况都成立。

同理可证，无论什么是 $P_+(\lambda)$，$\Omega(\lambda)$ 的第三列和第三行都为零，因此只需考虑

$$\Omega_{4,4}(\lambda) = \mathcal{A}_-(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathcal{A}_-(\overline{\lambda})^* - \mathcal{A}_+(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathcal{A}_+(\bar{\lambda})^*.$$

如果 $P_-(\lambda)$ 的秩为 1，则有 $\mathcal{A}_-(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathcal{A}_-(\overline{\lambda})^* = 0 = (g^* J g)^+(a)$。如果 $P_-(\lambda) = \mathbb{I}$，根据方程 (2.2)，可得 $\mathcal{A}_-(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathcal{A}_-(\overline{\lambda})^* = (g^* J g)^+(a)$。对 $P_+(\lambda)$ 作类似考虑，因此有 $\Omega_{4,4}(\lambda) = (g^* J g)^+(a) - (g^* J g)^+(b)$，由 (2.3) 可知其为 0。□

稍后我们还需要下面这个引理。

引理 4.8. 如果 B = 值域 $\mathbb{P}$，或者 $\Omega(\lambda) = 0$，那么值域 $\mathbb{H}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P} \subset$ 值域 $\mathbb{F}(\lambda)$，且值域 $\mathbb{F}(\lambda)^\dagger \mathbb{H}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P} \subset$ 值域 $\mathbb{P}$。

证明。若 B = ran $\mathbb{P}$ 且 z 是 $\mathbb{C}^{n(N+1)}$的任意元素，则存在一个紧支撑的 $f \in L^2(w)$，使得 $\mathbb{P}z = (\mathcal{F}f)(\lambda)$。因此，(3.10) 和 (3.14) 确立了向量 $\tilde{z} = \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}) \in$ ran $\mathbb{P}$ 的存在性，使得 $\mathbb{F}(\lambda)\tilde{z} = \mathbb{H}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}z$，从而在此情形下证明了我们的第一个结论。应用 $\mathbb{F}(\lambda)^\dagger$ 后即可得到第二个结论，因为$\mathbb{F}(\lambda)^\dagger \mathbb{F}(\lambda) = \mathbb{I}$。

若 $\Omega(\lambda) = 0$，则有 $\mathbb{H}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{F}(\overline{\lambda})^* = -\mathbb{F}(\lambda)\mathbb{P}\mathcal{J}^{-1}\mathbb{H}(\overline{\lambda})^*$。这里我们利用$\mathbb{F}(\overline{\lambda})^*\mathbb{F}(\overline{\lambda})^{\dagger *} = \mathbb{I}$得到 $\mathbb{H}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P} = -\mathbb{F}(\lambda)\mathbb{P}\mathcal{J}^{-1}\mathbb{H}(\overline{\lambda})^*\mathbb{P}\mathbb{F}(\overline{\lambda})^{\dagger *}$。□

注 4.9. 若 B = 值域 $\mathbb{P}$，我们现在得到值域 $\mathbb{F}(\lambda)^\dagger\Omega(\lambda) \subset$ 值域 $\mathbb{P}$。由于$\mathbb{F}(\lambda)\mathbb{F}(\lambda)^\dagger$是投影到 $\mathbb{F}(\lambda)$ 的值域上的正交投影，这表明$\mathbb{F}(\lambda)(\mathbb{M}(\lambda) - \mathbb{M}(\overline{\lambda})^*)\mathbb{F}(\overline{\lambda})^* = \Omega(\lambda) = 0$。换言之，当 B = 值域$\mathbb{P}$时，条件 $\Omega(\lambda) = 0$ 得以满足。

4.2. $\mathbb{M}$ 的虚部。本节假设 λ 位于上半平面内，但不在 Λ 中，并且 $\Omega(\lambda) = 0$（当 B = 值域$\mathbb{P}$ 时成立）。令$\mathcal{S}(x)$ 为对角分块矩阵，其对角项依次为 $n \times n$ 分块 $\operatorname{sgn}(x-\xi_j)\mathbb{1}$、$j = 0$、.....、$N$。回顾第 3 节开头的内容，$U_j(\xi_j, \lambda) = \mathbb{I}$。

定义 θ 为

$$\theta(x, \lambda) = \big(\mathbb{M}(\lambda) + \frac{1}{2}\mathcal{S}(x)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}\big)z$$

其中 $z \in \mathbb{C}^{n(N+1)}$。注意，$\mathcal{U}(\cdot, \lambda)\theta(\cdot, \lambda)$ 在区间 (x_k, ξ_k) 和 (ξ_k, x_{k+1})，$k = 0, ..., N$ 上是 $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$ 的一个解。我们要证明它实际上在 (ξ_{k-1}, ξ_k)，$k = 1, ..., N$ 上满足微分方程，同时也满足边界条件，包括要求 $\mathcal{U}(\cdot, \lambda)\theta(\cdot, \lambda)$ 属于 $\mathcal{L}^2(w)$。对于第一个结论，我们需要证明

$$\mathbb{F}_k(\lambda)\theta(x_k, \lambda) = 0 \tag{4.2}$$

其中 $\mathbb{F}_k$ 表示 k的第 $n \times n$ 个分块 $\mathbb{F}$，因此也表示 $\mathbb{B}$。利用 $\mathbb{F}_k\mathbb{P} = \mathbb{F}_k$（见引理 3.1）以及 $\mathbb{F}^\dagger\mathbb{F} = \mathbb{I}$，(4.2) 的左端变为

$$\mathbb{F}_k(\lambda)\mathbb{F}(\lambda)^\dagger\big(\mathbb{H}(\lambda) + \frac{1}{2}\mathbb{F}(\lambda)S(x_k)\big)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}z.$$

由于 $\mathbb{F}(\lambda)\mathbb{F}(\lambda)^\dagger$ 是到 $\operatorname{ran}\mathbb{F}(\lambda)$ 上的正交投影，并且由引理 4.8，$\mathbb{H}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}z$ 属于 $\operatorname{ran}\mathbb{F}(\lambda)$，于是得到下一式

$$\frac{1}{2}\big(\tilde{\mathbb{B}}_k(\lambda)+\mathbb{B}_k(\lambda)S(x_k)\big)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}z.$$

~这确实会消失，这是由于 $\mathbb{B}$ 和 $\mathbb{B}$ 的特殊结构，而且由于 $S(x_k)$ 是一个对角分块矩阵，其前 k 个分块为 $\mathbb{I}^n$，而其余 $N+1-k$ 个分块为 $-_n$。

为了证明 $\mathbb{I}$ $\mathcal{U}(\cdot,\lambda)\theta(\cdot,\lambda)$ 属于 $L^2(w)$，我们采用了非常相似的策略。在 (4.2) 的左侧，我们必须选择 $k=N+1$，使得 $\mathbb{F}_k=\mathcal{Q}_-$，或者选择 $k=N+2$，使得 $\mathbb{F}_k=\mathcal{Q}_+$。我们还必须在 (a,ξ_0) 或 (ξ_N,b) 中选择 x，使得 $S(x)$ 要么是 $-_{\mathbb{I}^n(N+1)}$，要么是 $\mathbb{I}^n(N+1)$。由于 $\mathcal{Q}_\pm\mathbb{P}=\mathcal{Q}_\pm$，我们得到 $\mathbb{F}_k(\lambda)\mathbb{M}(\lambda)=\mathbb{H}_k(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}=\pm\frac{1}{2}\mathbb{F}_k(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}$。这就证明了对于 $k=N+1$ 和 $k=N+2$，(4.2) 成立。

最后，边界条件可写为 $\mathcal{A}_+(\lambda)\theta_+(\lambda)+\mathcal{A}_-(\lambda)\theta_-(\lambda)=0$其中 $\theta_\pm(\lambda)=\theta(x,\lambda)$，其中 $x>\xi_N$ 对应上号，$x<\xi_0$ 对应下号。注意，仿照之前的论证，

$$(\mathcal{A}_+(\lambda)+\mathcal{A}_-(\lambda))\theta_+(\lambda)=(\mathbb{H}_{N+3}(\lambda)+\frac{1}{2}\mathbb{F}_{N+3}(\lambda))\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}z=\mathcal{A}_-(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}z$$

得到 $\mathcal{A}_+(\lambda)\theta_+(\lambda)=\mathcal{A}_-(\lambda)(\frac{1}{2}\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}z-\mathbb{M}(\lambda)z)=-\mathcal{A}_-(\lambda)\theta_-(\lambda)$，这就是我们所需的结果。

~现在将 $\mathcal{U}\theta$ 简记为 s。固定 $\lambda,\mu\in\varrho(T)\setminus\Lambda$，并定义 $h=s(\cdot,\lambda)-s(\cdot,\mu)$。因此，$h$满足微分方程

$$Jh'+(q-\mu w)h=(\lambda-\mu)ws(\cdot,\lambda)$$

在区间 (a,ξ_0)、(ξ_{k-1},ξ_k)、$k=1$、...、N 以及 (ξ_N,b) 上成立。由于 $s(\cdot,\lambda)$ 在 ξ_k 处的跳跃等于分块 $\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}z$ 的第 k行，因此与 λ 无关，由此可知 h 在这些点连续，这意味着它在整个 (a,b) 上都满足上述方程。由于 h 也属于 $\mathcal{L}^2(w)$，并满足边界条件（若有），因此 h 属于类 $(\lambda-\mu)R_\mu s(\cdot,\lambda)$。将 h 在 ξ_{k-1} 处（其中 $k=1$、...、$N+1$）取值，得到

$$(h(\xi_0),...,h(\xi_n))^\diamond=(\mathbb{M}(\lambda)-\mathbb{M}(\mu))z \tag{4.3}$$

表明 $(h(\xi_0)...,h(\xi_n))^\diamond\in N_0^\perp$，从而 $h=(\lambda-\mu)\mathcal{R}_\mu s(\cdot,\lambda)$。

将 (4.3) 乘以 z^*，在左侧相乘得到

$$\frac{z^*\mathbb{M}(\lambda)z-z^*\mathbb{M}(\mu)z}{\lambda-\mu}=\sum_{k=1}^{N+1}z_k^*(\mathcal{R}_\mu s(\cdot,\lambda))(\xi_{k-1}). \tag{4.4}$$

利用 (3.17) 和 $\mathcal{U}(\xi_{k-1},\ \mu)=e_k^*$，其中 e_k^*是一行 $n\times n$ 分块，除第 k个外均为零，该分块为$\mathbb{I}^n$，得到

$$(\mathcal{R}_\mu s(\cdot,\lambda))(\xi_{k-1})=e_k^*\int\big(\mathbb{M}(\mu)+\frac{1}{2}\mathcal{J}^{-1}\operatorname{sgn}(\xi_{k-1}-\cdot)\big)\mathcal{U}(\cdot,\overline{\mu})^*ws(\cdot,\lambda).$$

现在令 $\mu=\overline{\lambda}$，并回忆 $\mathbb{M}(\overline{\lambda})=\mathbb{M}(\lambda)^*$。于是

$$z^*\frac{\mathbb{M}(\lambda)-\mathbb{M}(\lambda)^*}{\lambda-\overline{\lambda}}z=\int\sum_{k=1}^{N+1}\Big[\mathcal{U}(\cdot,\lambda)\big(\mathbb{M}(\lambda)-\frac{1}{2}\mathcal{J}^{-1}\operatorname{sgn}(\xi_{k-1}-\cdot)\big)e_kz_k\Big]^*ws(\cdot,\lambda).$$

利用恒等式 $\sum_{k=1}^{N+1} e_k z_k = z$ 和 $\sum_{k=1}^{N+1} \operatorname{sgn}(\xi_{k-1} - x) e_k z_k = -\mathcal{S}(x)z$，以及矩阵 $\mathcal{J}^{-1}$ 和 $\mathcal{S}(x)$ 可交换这一事实，我们现在得到

$$z^* \frac{\mathbb{M}(\lambda) - \mathbb{M}(\overline{\lambda})}{\lambda - \overline{\lambda}} z = \int s(\cdot, \lambda)^* w s(\cdot, \lambda)$$

它是非负的。

我们证明了以下引理。

˜引理 4.10. 若 $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $\lambda \notin \Lambda$ 且 $\mathsf{B} = \text{值域} \mathbb{P}$ 或 $\Omega(\lambda) = 0$，则 $\operatorname{Im} M(\lambda) \geq 0$。

4.3. 解析性。设 λ 是一个非实复数，存在一个˜邻域与 Λ不相交。R_μ 的预解式恒等式以及选取 $([u], [f]) \in T_{\max}$ 代表元的算子的有界性（见 [16]中的引理 5.2）表明，映射 $\mu \mapsto \mathcal{R}_\mu f$ 在 λ处连续。现在利用方程 (4.4) 可知，$z^*(\mathbb{M}(\mu) - \mathbb{M}(\lambda))z/(\mu - \lambda)$ 在 μ 趋于 λ时存在极限。因此，$z^* \mathbb{M} z$ 在 λ附近是解析的。

4.4. $\mathbb{M}$ 是 Nevanlinna 矩阵。在研究过程中，我们在基本假设 2.1中加入了若干假设。现在我们再加入一项，并将这些假设汇总为以下假设 4.11。

假设 4.11。(a, b) 是一个实区间。J 是一个常数、可逆的反厄米 $n \times n$ 矩阵。q和 w 是 $n \times n$ 矩阵，其元素是定义在 (a, b) 上的 0 阶分布；q 是厄米的，w 是非负的。除非$x \in \{x_1, \ldots, x_N\} \subset (a, b)$，否则 $\Lambda_x \cap \mathbb{R}$ 为空集，且 $\Lambda = \bigcup_{x \notin \{x_1, \ldots, x_N\}} \Lambda_x$ 是一个孤立点闭集。最后，我们要求 $\Omega = 0$ （当 $\mathsf{B} =$ 值域$\mathbb{P}$时，该条件成立）。

在这一假设下，我们可以证明以下定理。

定理 4.12. 假设假设 *4.11*成立。那么函数 $\mathbb{M}$ 可以扩展到整个 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，成为矩阵值奈万林纳函数。

证明。设 $z \in \mathbb{C}^{n(N+1)}$ 和 $m = z^* \mathbb{M} z$。m 的奇点是˜Λ中的点，根据假设，这是一个孤立点闭集。现在假设 μ 是这些˜点之一，且 B 是以 μ 为中心、与 $\mathbb{R}$ 或 $\Lambda \setminus \{\mu\}$不相交的球。注意，在 $B \setminus \{\mu\}$ 中，$\operatorname{Im} m(\lambda)/\operatorname{Im} \lambda \geq 0$，因此 μ 是 m的可去奇点。由于对任意 $z \in \mathbb{C}^{n(N+1)}$ 都如此，我们可以将 $\mathbb{M}$扩展到整个 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，使其成为解析函数。对称性以及 $\operatorname{Im} \mathbb{M}$ 的符号性质也得以保留。□

5. The Fourier expansion

我们先简要介绍自伴关系的谱定理T。T 定义域的闭包 $\mathcal{H}_0$ 是 $\mathcal{H}_\infty = \{f \in L^2(w) : (0, f) \in T\}$在 $L^2(w)$中的正交补。由此可知 $T = T_0 \oplus (\{0\} \times \mathcal{H}_\infty)$，其中$T_0 = T \cap (\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0)$是在 $\mathcal{H}_0$中稠密定义的自伴算子。自伴算子的谱定理保证存在单位分解 π，使得

$$\langle f, T_0 g \rangle = \int t \, d\langle f, \pi((-\infty, t)) g \rangle.$$

现在可以通过规定在 $f \in \mathcal{H}_\infty$时 $\pi(B) f = 0$，将谱投影 $\pi(B)$ 的定义域从 $\mathcal{H}_0$ 扩展到 $\mathcal{H}$。因此，$\pi(\mathbb{R})$ 成为

从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}_0$的正交投影。更多信息请参阅 [10] 的附录 B，或 [3]的第 2.2 节。

下面我们要求假设 4.11 成立。于是，正如我们刚刚证明的 $\mathbb{M}$是一个 Nevanlinna 函数，因此定义了一个谱测度 τ，见方程（4.1）。对于紧支撑函数 f，其属于 $L^2(w)$，并且如果 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \tilde{\Lambda}$ 我们之前定义了傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 为

$$(\mathcal{F}f)(\lambda) = \int \mathcal{U}(\cdot, \overline{\lambda})^* w f.$$

注意，$\mathbb{C} \setminus \Lambda$ 是一个包含实数轴的开集，因此 $\mathcal{F}f$ 在 $\mathbb{R}$的某个邻域内处处有定义。事实上，我们主要关注$\mathcal{F}f$ 在 $\mathbb{R}$ 上的限制，但不会使用不同的记号。

本节余下部分将证明以下定理，即本文的主要定理。除一处例外，证明思路如下，其证明沿用了 Bennewitz [2]中的定理 15.5。该证明的思想也用于 [3] 和 [10]，后者可供参考其中一些我们为简洁起见略去的细节。例外之处涉及证明 $\ker \mathcal{F}^*$ 是平凡的这一事实，见下文引理 5.7，其中 $\mathcal{F}^*$ 被称为 $\mathcal{G}$。

定理 5.1。设 T 是关系 $T_{\max}$ 的一个自伴限制，其系数 q 和 w 满足假设 *4.11*。令 τ 为由相应的 $\mathbb{M}$-函数生成的测度。则以下陈述成立。

(1) 存在一个连续映射 $\mathcal{F} : L^2(w) \to L^2(\tau)$，它将紧支撑元素 $f \in L^2(w)$ 赋予由 $(\mathcal{F}f)(t) = \int \mathcal{U}(\cdot, t)^* w f$ 定义的函数。$\mathcal{F}$的核是空间 $\mathcal{H}_\infty = \{f \in L^2(w) : (0, f) \in T\}$。(2) 存在一个连续映射 $\mathcal{G} : L^2(\tau) \to L^2(w)$，它将紧支撑元素 $\hat{f} \in L^2(\tau)$ 赋予由 $(\mathcal{G}\hat{f})(x) = \int \mathcal{U}(x, \cdot)\tau\hat{f}$ 定义的函数。$\mathcal{G}$ 的值域是空间 $\mathcal{H}_0 = \operatorname{dom} T$。(3) $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ 是 $L^2(\tau)$ 上的恒~~等算子~~，$\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ 是从 $L^2(w)$ 到 $\mathcal{H}_0$ 的正交投影，而 $\mathcal{F}$ 限制在 $\mathcal{H}_0$ 上是酉的。(4) 如果 $(u, f) \in T$，那么 $(\mathcal{F}f)(t) = t(\mathcal{F}u)(t)$。反之，如果 $t \mapsto \hat{u}(t)$ 和 $t \mapsto \hat{f}(t) = t\hat{u}(t)$ 都属于 $L^2(\tau)$，那么 $(\mathcal{G}\hat{u}, \mathcal{G}\hat{f}) \in T$。

注记 5.2。当 q 和 w 是 (a, b) 上的有限测度时，即当端点a 和 b 为正则时，Λ 是孤立点闭集这一条件，以及 $\Omega = 0$ 在假设 4.11 中的条件都会自动满足。

由于函数 $\mathcal{U}(x, \cdot)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ 上解析，因此立即得到

$$\langle g, R_\lambda f\rangle - (\mathcal{F}g)(\overline{\lambda})^* \mathbb{M}(\lambda)(\mathcal{F}f)(\lambda)$$

延拓为 $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ 上的解析函数，从而得到恒等式

$$\oint_\Gamma \langle f, R_\lambda f\rangle \, d\lambda = \oint_\Gamma (\mathcal{F}f)(\overline{\lambda})^* \mathbb{M}(\lambda)(\mathcal{F}f)(\lambda) \, d\lambda \tag{5.1}$$

当 Γ 是由顶点为 $c \pm i\varepsilon$ 和 $d \pm i\varepsilon$ 的矩形所描述的轮廓，其中$c < d$ 且 ε 足够小但为正时，只要积分存在。

令 π 为自伴关系 T 的单位分解，并定义

$$\Pi_{f,g}(t) = \langle f, \pi((-\infty, t))g\rangle_w.$$

借助谱定理、Fubini 定理和柯西积分公式，现在可以证明

$$\oint_{\Gamma} \langle f, R_\lambda f\rangle d\lambda = -2\pi i \int_{[c,d)} d\Pi_{f,f}. \tag{5.2}$$

当 c 和 d 是 $\Pi_{f,\ f}$ 的可导点时。同样地，利用 $\mathbb{M}$ 的 Nevanlinna表示、Fubini 定理和柯西积分公式可得

$$\oint_{\Gamma} (\mathcal{F}f)(\overline{\lambda})^* \mathbb{M}(\lambda)(\mathcal{F}f)(\lambda) d\lambda = -2\pi i \int_{[c,d)} (\mathcal{F}f)^* \tau (\mathcal{F}f) \tag{5.3}$$

当 c 和 d 是原函数 $\mathfrak{T}$ （ τ 的原函数）的可导点时。因此我们得到

$$\int_{[c,d)} (\mathcal{F}f)^* \tau (\mathcal{F}f) = \int_{[c,d)} d\Pi_{f,f}. \tag{5.4}$$

由于 $\Pi_{f,\ f}$ 是左连续的，并且 $\mathfrak{T}$ 可以取为左连续函数，方程（5.4）实际上对所有 c， d 且 $c < d$的情形均成立。

有了这些准备，我们可以证明定理 5.1 的断言（1）。

引理 5.3。当 $f \in L^2(w)$ 具有紧支撑时， $\mathcal{F}f$ 属于 $L^2(\tau)$。映射 $\mathcal{F}$ 可通过连续性延拓到 $L^2(w)$ 的全部范围。此外，

$$\Pi_{f,g}(t) = \langle f, \pi((-\infty, t))g\rangle_w = \int_{(-\infty,t)} (\mathcal{F}f)^* \tau (\mathcal{F}g) \tag{5.5}$$

每当 $f, g \in L^2(w)$ 时。特别地， $\langle f, \pi(\mathbb{R})g\rangle_w = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_\tau$ 以及 $\ker \mathcal{F} = \mathcal{H}_\infty$。

证明。 假设 $f \in L^2(w)$ 是紧支撑的。取足够大的区间 $[c, d)$，代入方程 (5.4) 即可证明 $\mathcal{F}f \in L^2(\tau)$。若 f 是 $L^2(w)$ 中的任意元素，且 $n \mapsto [a_n, b_n]$ 是 (a, b) 中收敛到 (a, b) 的一列区间，令 $f_n = f\chi_{[a_n,b_n]}$。于是

$$\|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f_m\|_\tau = \|\pi(\mathbb{R})(f_n - f_m)\|_w \le \|f_n - f_m\|_w$$

这表明 $n \mapsto \mathcal{F}f_n$ 是 $L^2(\tau)$ 中的柯西序列，因而收敛。通过交错排列序列可知，这个柯西序列的极限不依赖于 f 的逼近方式。我们将该极限记为 $\mathcal{F}f$ ，从而将傅里叶变换的定义扩展到整个 $L^2(w)$。当$g = f$ 时，方程 (5.5) 成立；否则由极化得出。 □

现在我们定义一个变换 $\mathcal{G}\colon L^2(\tau) \to L^2(w)$。我们首先令

$$(\mathcal{G}\hat{f})(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{U}(x, \cdot)\tau\hat{f}$$

$\hat{}$ $\hat{}$whenever f 具有紧支撑。注意， $\mathcal{G}f$ 局部具有有界变差。于是我们得到以下结果，它证明了定理 5.1 中的陈述 (2)。

引理 5.4。当 $\hat{}$ $f \in L^2(\tau)$ 具有紧支撑时， $\mathcal{G}\hat{}f$ 属于 $L^2(w)$。映射 $\mathcal{G}$ 可通过连续性延拓到 $L^2(\tau)$ 的全体。我们有

$$\langle g, \mathcal{G}\hat{f}\rangle_w = \langle \mathcal{F}g, \hat{f}\rangle_\tau \tag{5.6}$$

对所有的 $g \in L^2(w)$ 和所有的 $\hat{}$ $f \in L^2(\tau)$ 都成立。此外，$\ker \mathcal{G} = (\text{ran } \mathcal{F})^\perp$、$\text{ran } \mathcal{G} = H_0$， 以及$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \pi(\mathbb{R})$。

证明。假设 $\hat{} f \in L^2(\tau)$ 是紧支撑的，将 $\mathcal{G}\hat{}f$ 记为 f，并令 $f_n = f\chi_{[a_n,b_n]}$。交换积分次序后，我们得到

$$\|f_n\|_w^2 = \langle f_n, f\rangle_w = \langle \mathcal{F}f_n, \hat{f}\rangle_\tau \le \|\mathcal{F}f_n\|_\tau \|\hat{f}\|_\tau.$$

$\hat{}$ 引理 5.3 意味着 $\|\mathcal{F}f_n\|_\tau = \|\pi(\mathbb{R})f_n\|_w \le \|f_n\|_w$ 因此 $\|f_n\|_w \le \|f\|_\tau$。这对每个区间 $[a_n,b_n] \subset (a,b)$ 都成立，因此可得 $\mathcal{G}\hat{}f \in L^2(w)$。

与前面一样，我们将 $\mathcal{G}$ 的定义域从 $L^2(\tau)$中的紧支撑函数扩展到整个 $L^2(\tau)$。具体来说，对于 $L^2(\tau)$中的一般元素 $\hat{} f$，令 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}f_n = f\chi_{[-n,n]}$。那么，根据我们刚刚证明的内容，$\|\mathcal{G}f_n - \mathcal{G}f_m\|_w \le \|f_n - f_m\|_\tau$，这意味着 $n \mapsto \mathcal{G}\hat{}f_n$ 是 $L^2(w)$中的柯西序列，因此收敛。我们将其极限记为 $\mathcal{G}f$。

现在设 $g \in L^2(w)$、$\hat{} f \in L^2(\tau)$、$[a_k,b_k] \subset (a,b)$ 以及 $[-n,n] \subset \mathbb{R}$。交换积分次序后，我们得到（如前所述）

$$\langle g\chi_{[a_k,b_k]}, \mathcal{G}(\hat{f}\chi_{[-n,n]})\rangle_w = \langle \mathcal{F}(g\chi_{[a_k,b_k]}), \hat{f}\chi_{[-n,n]}\rangle_\tau.$$

现在令 $[a_k,b_k]\times[-n,n]$ 趋近于 $(a,\ b)\ \times\mathbb{R}$，从而得到方程（5.6）。

方程（5.6）意味着 $\ker \mathcal{G} = (\text{值域}\,\mathcal{F})^\perp$ 以及值域 $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}_\infty^\perp = \mathcal{H}_0$。在（5.6）中取 $\hat{} f = \mathcal{F}f$，利用引理 5.3 可得 $\langle g,\ (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})f\rangle = \langle g,\ \pi(\mathbb{R})f\rangle$。由于对所有 $g \in L^2(w)$ 都成立，我们得到 $\mathcal{G}\circ\mathcal{F} = \pi(\mathbb{R})$，特别地，$\mathcal{H}_0 \subset$ 值域 $\mathcal{G}$。□

我们的下一个目标是证明 $\ker \mathcal{G}$ 是平凡的，从而值域 $\mathcal{F}$ 在 $L^2(\tau)$ 中稠密。这将表明定理5.1 的陈述（3）成立，理由如下。利用引理 5.3、引理 5.4以及 $\pi(\mathbb{R})$ 的自伴性，我们得到

$$\langle \mathcal{F}g, (\mathcal{F}\circ\mathcal{G} - \mathbb{I})\hat{f}\rangle = \langle \mathcal{F}g, \mathcal{F}(\mathcal{G}\hat{f})\rangle - \langle \mathcal{F}g, \hat{f}\rangle = 0.$$

这意味着 $\mathcal{F}\circ\mathcal{G} = \mathbb{I}$ 并且 $\mathcal{G}$ 是等距映射。我们已经知道 $\mathcal{G}\circ\mathcal{F} = \pi(\mathbb{R})$，并且 $\mathcal{F}|_{\mathcal{H}_0}$ 是等距映射。然而，证明 $\ker \mathcal{G} = \{0\}$（见引理 5.7）还需要更多准备。

引理 5.5。如果 $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$，则 $(\mathcal{F}(R_\lambda g))(t) = (\mathcal{F}g)(t)/(t-\lambda)$。

证明。首先注意到，$t \mapsto \hat{} g(t)/(t-\lambda)$ 属于 $L^2(\tau)$，只要 $\hat{} g$ 属于其中。谱定理和引理 5.3 给出

$$\langle f, R_\lambda g\rangle_w = \int \frac{1}{t-\lambda}\, d\Pi_{f,g}(t) = \int \frac{(\mathcal{F}f)(t)^*\tau(t)(\mathcal{F}g)(t)}{t-\lambda} = \langle \mathcal{F}f, (\mathcal{F}g)/(\cdot-\lambda)\rangle_\tau.$$

特别地，$\|R_\lambda g\|_w^2 = \langle \mathcal{F}(R_\lambda g),\ (\mathcal{F}g)/(\cdot-\lambda)\rangle_\tau$。另一方面

$$\|R_\lambda g\|_w^2 = \langle g, R_{\overline{\lambda}}R_\lambda g\rangle_w = \frac{1}{\lambda-\overline{\lambda}}\langle g, (R_\lambda - R_{\overline{\lambda}})g\rangle_w = \|\mathcal{F}g/(\cdot-\lambda)\|_\tau^2.$$

引理 5.3 还意味着 $\|R_\lambda g\|_w^2 = \|\mathcal{F}(R_\lambda g)\|_\tau^2$。因此，$\|\mathcal{F}(R_\lambda g) - \mathcal{F}g/(\cdot-\lambda)\|^2$ 展开式中的四项两两抵消，剩下 0。□

令 $\mathbb{T} = (\tau/\operatorname{tr}\tau)$ 为 τ 关于 $\operatorname{tr}\tau$ 的 Radon–Nikodym 导数。注意，$\mathbb{T} \in L^\infty(\operatorname{tr}\tau)$。由 Lebesgue–Radon–Nikodym 定理可得 $\operatorname{tr}\tau = h\mathrm{m} + \sigma$，其中 m 表示勒贝格测度，$h$ 是非负函数，σ 是非负测度，而 σ 与 m 互相奇异。定义

$$\omega(s,\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(s-t)^2+\varepsilon^2}\operatorname{tr}\tau(t).$$

根据法图定理（例如，参见 Rosenblum and Rovnyak 中的定理 5.5 [17]） $\omega(s,\ \varepsilon)$ 收敛到 $\pi h(s)$，对 m- 几乎处处的 $s \in \mathbb{R}$ 当 $\varepsilon \downarrow 0$。事实上， $h(s) > 0$ 对 m- 几乎处处成立。测度 σ 集中在集合

$$S = \{s \in \mathbb{R} : \lim_{r\downarrow 0} \operatorname{tr} \tau((s-r, s+r))/(2r) = \infty\}$$

因此，当 $s \in S$ 时， $\omega(s,\varepsilon)$ 趋于 ∞ ，当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时。由此可知，当 s 属于一个具有全 tr τ-测度的集合时，$1/\omega(s,\varepsilon)$ 有上界。

引理 5.6。 $\mathbb{B}\mathbb{T} = 0$，并且 $(1-\mathbb{P})\mathbb{T} = 0$ 关于 tr τ 几乎处处成立。

证明。 由于 $\mathbb{F}(\lambda)\mathbb{F}(\lambda)^\dagger$ 是到 $\mathbb{F}(\lambda)$ 的值域上的正交投影，引理 4.8表明

$$\mathbb{H}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P} = \mathbb{F}(\lambda)\mathbb{F}(\lambda)^\dagger\mathbb{H}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}.$$

利用 $\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{P}$ （见引理 3.1），该恒等式的前 nN 行为

$$\mathbb{B}(\lambda)\mathbb{M}(\lambda) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbb{B}}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}.$$

将 λ 替换为 $\overline{\lambda}$ 所得到的恒等式从该恒等式中减去，可得

$$\mathbb{B}(\lambda)\mathbb{M}(\lambda) - \mathbb{B}(\overline{\lambda})\mathbb{M}(\overline{\lambda}) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbb{B}}(\lambda) - \tilde{\mathbb{B}}(\overline{\lambda}))\mathcal{J}^{-1}\mathbb{P}. \tag{5.7}$$

现在我们令 $\varepsilon = \operatorname{Im}\lambda \downarrow 0$ 趋于极限。首先注意，(5.7) 右端将趋于 0。接下来，出现在 $\mathrm{i}\varepsilon\mathbb{M}(s \pm \mathrm{i}\varepsilon)$ 中的积分为

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{i}\varepsilon(1 + ts \pm \mathrm{i}t\varepsilon)}{t - s \mp \mathrm{i}\varepsilon} \frac{\tau(t)}{t^2+1}.$$

对于 $\varepsilon \in [0,1]$ 和 $t \in \mathbb{R}$，第一个分式可由 $5(s^2+1)$ 控制。由于测度 $\tau(t)/(t^2+1)$ 有限，根据控制收敛定理可得

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathrm{i}\varepsilon\mathbb{M}(s \pm \mathrm{i}\varepsilon) = \mp\tau(\{s\}).$$

此外，$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\mathbb{B}(s \pm \mathrm{i}\varepsilon) - \mathbb{B}(s))/(\mathrm{i}\varepsilon) = \pm\mathbb{B}(s)$。结合这些事实可得

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{B}(s)(\mathbb{M}(\lambda) - \mathbb{M}(\overline{\lambda})) = 0.$$

M 的 Nevanlinna表示给出

$$\mathbb{M}(s + \mathrm{i}\varepsilon) - \mathbb{M}(s - \mathrm{i}\varepsilon) = 2\mathrm{i}\varepsilon B + 2\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(t-s)^2+\varepsilon^2}\mathbb{T}(t)\operatorname{tr}\tau(t).$$

利用函数 $1/\omega(s,\ \varepsilon$ 对 tr τ-几乎处处的 s 有上界这一事实，以及定理 A.2 ，现在得到

$$\mathbb{B}(s)\mathbb{T}(s) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{B}(s)\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(t-s)^2+\varepsilon^2}\mathbb{T}(t)\operatorname{tr}\tau(t)/\omega(s,\varepsilon) = 0.$$

恒等式 $(1-\mathbb{P})\mathbb{T} = 0$ 的证明非常相似，只需记住 $\mathbb{P}$是 $\mathbb{M}$ 最左侧的因子，因此

$$0 = (1-\mathbb{P})(\mathbb{M}(\lambda) - \mathbb{M}(\overline{\lambda})) = 2\mathrm{i}(1-\mathbb{P})\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(t-s)^2+\varepsilon^2}\mathbb{T}(t)\operatorname{tr}\tau(t).$$

证明至此完成。 □

引理 5.7. $\ker\mathcal{G}$ 是平凡的。

证明。 假设 $\hat{u} \in \ker \mathcal{G}$。那么，利用引理 5.4 和 5.5，我们得到

$$0 = \langle R_{\overline{\lambda}} g, \mathcal{G}\hat{u} \rangle_w = \langle \mathcal{F} R_{\overline{\lambda}} g, \hat{u} \rangle_\tau = \int \frac{(\mathcal{F}g)(t)^*}{t - \lambda} \tau(t) \hat{u}(t)$$

对于任意 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 和任意 $g \in L^2(w)$。Stieltjes 反演公式表明，$(\mathcal{F}g)^* \tau \hat{u}$ 是零测度。若 K 是 $\mathbb{R}$ 的紧子集，且 $\psi_K(t) = t\chi_K(t)$，则

$$\langle g, \mathcal{G}\chi_K \hat{u} \rangle_w = \langle \mathcal{F}g, \chi_K \hat{u} \rangle_\tau = 0 \text{ and } \langle g, \mathcal{G}\psi_K \hat{u} \rangle_w = \langle \mathcal{F}g, \psi_K \hat{u} \rangle_\tau = 0$$

可得 $\chi_K \hat{u}$ 和 $\psi_K \hat{u}$ 也属于 $\ker \mathcal{G}$。

定义 $u(x) = \int_K \mathcal{U}(x,t)\mathbb{T}(t)\hat{u}(t)\,\mathrm{tr}\,\tau(t)$ 和 $f(x) = \int_K \mathcal{U}(x,t)\mathbb{T}(t)t\hat{u}(t)\,\mathrm{tr}\,\tau(t)$，它们分别是 $\mathcal{G}\chi_K \hat{u} = [0]$ 和 $\mathcal{G}\psi_K \hat{u} = [0]$的代表元。

我们在引理 5.6 中证明了，$\mathbb{B}\mathbb{T}\hat{u} = 0$ 相对于 $\mathrm{tr}\,\tau$几乎处处成立。因此，根据 $f = 0$的方程 (3.3)，$\mathcal{U}(\cdot,t)\mathbb{T}(t)\hat{u}(t)$ 对几乎每个 $t \in K$都是 (a,b) 上 $Jv' + qv = twv$ 的一个解。利用 Fubini 定理可得$Ju' + qu = wf$。由于 u 和 f 属于 $[0]$, , 因此 $u \in \mathcal{L}_0$。所以$\tilde{u}_0 = (u(\xi_0) \ldots, u(\xi_N))^\diamond = \int_K \mathbb{T}\hat{u}\,\mathrm{tr}\,\tau$属于 $\ker \mathbb{P}$。由引理 5.6 还可知 $(\mathbb{I} - \mathbb{P})\mathbb{T} = 0$，因而 $\tilde{u}_0 = 0$。只有当 u 恒等于 0 时，这才可能成立。

选择 $K = [0,s]$ 或 $K = [s,0]$ 可知，测度 $\mathcal{U}(x,\cdot)\mathbb{T}\hat{u}\,\mathrm{tr}\,\tau$的累积分布函数为零，即该测度是零测度。特别地，若 $x = \xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ 是 $\mathbb{T}\hat{u}\mathrm{tr}\,\tau = \tau\hat{u}$ 的第 $(k+1)$ 个块，那么这意味着 $\hat{u}$ 关于 τ 几乎处处为零。□

我们的最后一个引理给出了定理5.1的陈述 (4) 的证明。

引理 5.8. 若 $(u,f) \in T$，则 $(\mathcal{F}f)(t) = t(\mathcal{F}u)(t)$。反之，若 $t \mapsto \hat{u}(t)$ 和$t \mapsto \hat{f}(t) = t\hat{u}(t)$ 均属于 $L^2(\tau)$，则 $(\mathcal{G}\hat{u}, \mathcal{G}\hat{f}) \in T$。

证明。假设 $(u,f) \in T$，因而 $(f - \lambda u, u) \in R_\lambda$。于是，由引理 5.5 可得 $(\mathcal{F}u)(t) = (\mathcal{F}(f - \lambda u))(t)/(t - \lambda)$，化简后得到 $t(\mathcal{F}u)(t) = (\mathcal{F}f)(t)$。

现在假设 $\hat{u}$，$\hat{f} \in L^2(\tau)$，其中 $\hat{f}(t) = t\hat{u}(t)$。定义 $f = \mathcal{G}\hat{f}$以及 $u = \mathcal{G}\tilde{u}$，并选取一个 λ 属于 $\varrho(T) \setminus \Lambda$。于是，利用引理 5.5，

$$\mathcal{F}u = \hat{u} = \frac{\hat{f} - \lambda\hat{u}}{t - \lambda} = \frac{\mathcal{F}(f - \lambda u)}{t - \lambda} = \mathcal{F}(R_\lambda(f - \lambda u)).$$

应用 $\mathcal{G}$ 得到 $u = R_\lambda(f - \lambda u)$，这等价于 $(u,f) \in T$。 □

Appendix A. An extension of Fatou's theorem

1906 年，法图 [7] 研究了定义在单位圆盘上的全纯函数的极限行为。对于定义在上半平面上的全纯函数，类似的考察导出了以下定理，该定理通常称为法图定理；例如，参见 Rosenblum and Rovnyak 中的定理 5.5 [17]。

定理 A.1. 设

$$V(s + \mathrm{i}r) = \int_{\mathbb{R}} \frac{r\mu(t)}{(t-s)^2 + r^2}$$

其中 μ 是满足 $\int_{\mathbb{R}} \mu(t)/(t^2+1) < \infty$, $r > 0$ 和 $s \in \mathbb{R}$ 的非负博雷尔测度。若 μ 的勒贝格–拉东–尼科迪姆分解为 $h\mathrm{m} + \sigma$（其中 m 表示勒贝格测度），则

$$\lim_{r \downarrow 0} V(s + \mathrm{i}r) = \pi h(s)$$

几乎处处（相对于勒贝格测度）。

将此结果应用于测度 $f\mu$，当 $f \in L^\infty(\mu)$ 时可得

$$\lim_{r\downarrow 0}\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{rf(t)\mu(t)}{(s-t)^2+r^2}\Big/\int_{\mathbb{R}} \frac{r\mu(t)}{(s-t)^2+r^2}\right] = f(s) \tag{A.1}$$

相对于勒贝格测度几乎处处。

我们关注左侧商在全 A.1-测度集合上的行为，也就是说，还关注 σ 集中的点。以下定理解决了这一问题，其证明归功于 Bj¨orn 和 Christer Bennewitz [1]。

定理 A.2. 设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负测度，且 $\int_{\mathbb{R}} \mu(t)/(t^2+1)$ 有限。若 $f \in L^\infty(\mu)$，则

$$\lim_{r\downarrow 0}\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{rf(t)\mu(t)}{(s-t)^2+r^2}\Big/\int_{\mathbb{R}} \frac{r\mu(t)}{(s-t)^2+r^2}\right] = f(s)$$

对于 μ-几乎每个 $s \in \mathbb{R}$。

证明。假设 s 是 μ-Lebesgue 点，即对于每个正的 ε，都存在一个正的 δ，使得

$$\int_I |f(t)-f(s)|\mu(t) < \varepsilon\mu(I) \tag{A.2}$$

对于包含 s 的任意区间 $I \subset [s-\delta, s+\delta]$。不妨设 $\delta \le 1$，且 $s-\delta$ 和 $s+\delta$ 是 μ 的连续点。微分定理（例如参见 [3] 的定理 B.8.8）表明，μ-几乎处处的点都是 μ-Lebesgue 点。此外，假设

$$\inf\{\mu((s-r,s+r))/(2r) : r > 0\} > 0. \tag{A.3}$$

同样，根据 Hardy极大定理（例如参见 [3] 的定理 B.8.9），将其应用于函数 $s \mapsto \sup\{2r/\mu((s-r,s+r)) : r > 0\}$，这对 μ-几乎所有 s 都成立。

令 F 为 $|f(\cdot)-f(s)|\mu$ 的左连续原函数，满足 $F(s) = 0$；类似地，令 M 为 μ 的左连续原函数，满足 $M(s) = 0$。此外，将表达式 $r/((s-t)^2+r^2)$ 简写为 $p(t)$。于是，该断言可写为

$$\int_{\mathbb{R}} p\,dF\Big/\int_{\mathbb{R}} p\,dM \to 0$$

如 $r \downarrow 0$。

方程（A.2）可用 F 和 M 改写如下。若 $t > s$

$$F(t) \le \varepsilon\mu([s,t)) = \varepsilon M(t) \tag{A.4}$$

并且，若 $t < s$，

$$F(t) \le \varepsilon\mu([t,s]) = \varepsilon(\mu(\{s\}) - M(t)). \tag{A.5}$$

将积分 $\int_{\mathbb{R}} p\,dF$ 分成两部分，即 $I_1 = \int_{(s-\delta,s+\delta)} p\,dF$ 和 $I_2 = \int_{(s-\delta,s+\delta)_c} p\,dF$。

由于 p 连续，分部积分可得

$$I_1 = (pF)(s+\delta) - (pF)(s-\delta) - \int_{(s-\delta,s+\delta)} F\,dp.$$

现在利用估计（A.4）和（A.5）可得

$$I_1 \le \varepsilon\Big((pM)(s+\delta) - (pM)(s-\delta) + \mu(\{s\})p(s) - \int_{(s-\delta,s+\delta)} M\,dp\Big).$$

再次进行分部积分可得

$$I_1 \le \varepsilon\mu(\{s\})p(s) + \varepsilon\int_{(s-\delta,s+\delta)} p\,dM \le 2\varepsilon\int_{\mathbb{R}} p\,dM.$$

为估计 I_2，注意到，若 $|s-t| \ge \delta$ 且 $\delta \in (0,1]$,，则

$$\frac{r(t^2+1)}{(s-t)^2+r^2} \le 8\frac{s^2+1}{\delta^2}r.$$

要得到这个估计，当 $|t| \le 2|s|+1$ 且 $t^2+1 \le 2t^2$ 时使用 $t^2+1 \le 4s^2+2$（s^2+1）$+2 \le 8$（s^2+1），而当 $|t| \ge 2|s|+1$ 时使用（$s-t$）$^2 \le t^2/4$。因此

$$I_2 \le 16\|f\|_\infty \frac{s^2+1}{\delta^2} r \int \frac{\mu(t)}{t^2+1}$$

当 $r \downarrow 0$ 时，它趋于 0。此外

$$\int_{\mathbb{R}} p\,dM \ge \int_{(s-r,s+r)} p\,dM \ge \frac{\mu((s-r,s+r))}{2r}$$

根据方程（A.3），它远离 0。因此 $I_2/\int_{\mathbb{R}} p\,dM < \varepsilon$ 当 r 充分小时。

将这个估计与关于 I_1 的估计结合起来即可证明该断言，因为 ε 可以任意小。□

References

[1] Bj¨orn Bennewitz 和 Christer Bennewitz。私人通信，2022。[2] Christer Bennewitz。希尔伯特空间中的谱理论。讲义，2008。[3] Christer Bennewitz、Malcolm Brown 和 Rudi Weikard。*Spectral and scattering theory for ordinary differential equations. Vol. I* 2020 。

Universitext。Springer，瑞士恰姆，。斯图姆–刘维尔方程。[4] Kevin Campbell、Minh Nguyen 和 Rudi Weikard。关于不具唯一延拓性质的一阶系统的谱理论。 *Linear Multilinear Algebra*，69(12):2315–2323，2021。在线发表于：2019 年 10 月 4 日。[5] Jonathan Eckhardt 、 Fritz Gesztesy 、 Roger Nichols 和 Gerald Teschl。具有分布势的斯图姆-刘维尔算子的 Weyl-Titchmarsh 理论。 *Opuscula Math.*，33(3):467– 563，2013。[6] Jonathan Eckhardt 和 Gerald Teschl。具有测度值系数的斯图姆-刘维尔算子。 *J. Anal. Math.*，120:151–224，2013。[7] P. Fatou。三角级数与泰勒级数。 *Acta Math.*，30(1):335–400，1906。[8] William Feller。关于二阶微分算子。 *Ann. of Math. (2)*，61:90–105，1955。[9] F. Gesztesy 和 H. Holden。量子力学中描述直线上的点相互作用的一类新型可解模型。 *J. Phys. A*，20(15):5157–5177，1987。[10] Ahmed Ghatasheh 和 Rudi Weikard。具有分布系数的常微分方程组的谱理论。 *J. Differential Equations*，268(6):2752–2801，2020。[11] I. S. Kac。关于某些二阶奇异微分系统的谱函数的存在性。 *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*，106:15–18，1956。[12] M. G. Kre ˘ *Doklady Akad. Nauk SSSR* ın。关于 *(N.S.)* 87 881 884, 1952 Stieltjes 研究的一种推广。，：–。[13] P. Kurasov。关于不连续测试函数的分布理论及具有广义系数的微分算子。 *J. Math. Anal. Appl.*，201(1):297–323，1996。[14] P. Kurasov 和 J. Boman。有限秩奇异扰动及具有不连续测试函数的分布。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，126(6):1673–1683，1998。[15] Angelo B. Mingarelli。 *Volterra-Stieltjes integral equations and generalized ordinary differential expressions* 989 *Lecture Notes in Mathematics* 1983 ，卷，第。Springer-Verlag，柏林，。[16] Steven Redolfi 和 Rudi Weikard。不具唯一延拓性质的一阶常微分方程组的格林函数。 *Integral Equations Operator Theory* 94 2 23, 19, 2022 ，():论文编号。

[17] Marvin Rosenblum 和 James Rovnyak。 *Topics in Hardy classes and univalent functions*。 Birkh¨auser 高级文本：巴塞尔教材。 [Birkh¨auser 高级文本：巴塞尔文本]。Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，1994年。[18] A. M. Savchuk 和 A. A. Shkalikov。具有奇异势的斯图姆-刘维尔算子。 *Mathematical Notes* 66 6 741 753, 1999 66, 897 912 , ( ): – 。

译自《数学札记》第 卷，页码 – （1999年）。

Department of Mathematics, University of Alabama at Birmingham, Birmingham, AL35226-1170, USA*Email address*: stevenre@uab.edu, weikard@uab.edu