arXiv:2303.02089v2 [math.OA] 6 Sep 2024

由 étale 群胚对应构造 Kasparov 范畴之间的函子

ALISTAIR MILLER

摘要。对于 étale 群胚之间的 étale 对应 Ω: $G \to H$，我们构造了一个诱导函子 Indᴀ: $\mathrm{KK}^H \to \mathrm{KK}^G$，其作用于等变 Kasparov 范畴之间。我们引入了 Ω 对 H-等变对应的交叉积，并据此构造一个自然变换 α_Ω: $K_*(G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega -) \Rightarrow K_*(H \ltimes -)$。当 Ω 适当时，这些构造自然地对应于 K 理论中的一个诱导映射 $K_*(C^*(G)) \to K_*(C^*(H))$。

1. 引言

étale 群胚为各种各样的 C*-代数提供模型，编码了许多在实例中自然出现的拓扑动力系统。Li的结果表明，每个可分类的 C*-代数都有一个（扭曲的）étale 群胚模型 [Li20]。K理论是用于分类 C*-代数的 Elliott 不变量的一个组成部分 [TWW17, EGLN15, Kir95, Phi00]，并且更一般地说，它能从 C*-代数中提取重要信息。计算并控制 étale 群胚 C*-代数的 K理论，是一项重要研究计划的焦点，例如围绕 Baum–Connes 猜想展开的研究 [Tu99a, BCH94, LG99, BP24]。

在不同群胚之间变换时控制 K理论，是进行 K理论计算的一项关键技术。例如，Morita等价群胚具有 Morita 等价的 C*-代数 [MRW87]，因而其 K理论同构。这种控制也是 [Li20], 中的重要组成部分：其中，具有特定 K理论的扭曲群胚 C*-代数通过一个对 K理论表现良好的归纳系统构造而成。连接映射在群胚层面由开包含与某些方向相反的适当同态相结合来实现。这些连接映射和 Morita 等价都通过群胚对应来实现。群胚对应是群胚的某种双空间，由 Holkar 引入（见 [Hol14, Hol17b, Hol17a]），旨在作为 C*-对应的群胚模型；C*-对应是 Kasparov 用于构造其双变 K 理论的一类广义态射。特别地，适当对应会在 K理论中诱导一个映射。étale 对应见于 [Alb15, AKM22],；该文将其置于 étale群胚的一个（双）范畴中，并将函子从这个（双）范畴发展到以 C*-代数为对象、以 C*-对应为态射的（双）范畴。

étale 群胚 G [LG99] 的等变 KK 理论，为我们提供了一个框架，使我们能够更好地理解 K 理论群 $K_*(C^*(G))$ 或 $K_*(C_r^*(G))$。通过研究由 G-C*-代数构成的整个 Kasparov 范畴 KK^G 以及 K 理论函子 $K_*(G \ltimes_r -)$: $\mathrm{KK}^G \to \mathrm{Ab}$，我们可以研究 $K_*(C_r^*(G)) = K_*(G \ltimes_r C_0(G^0))$

本项工作是作者博士论文的一部分，该论文曾获英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）通过博士生奖学金提供的支撑。作者还曾获欧洲研究委员会（ERC）根据欧盟地平线 2020研究与创新计划（拨款协议编号：817597）提供的支撑，以及丹麦独立研究基金通过拨款1054-00094B提供的支撑。

通过将 $C_0(G^0)$ 与其他 G-C*-代数联系起来。这体现于针对 G 的 Baum–Connes猜想的范畴方法 [MN06, BP24]：该猜想断言，以 KK^G 中适当的 G-C*-代数为基础，对 $K_*(C_r^*(G))$ 作某种逼近是精确的。Baum–Connes猜想已对范围广泛的 étale 群胚得到验证，尤其适用于可和群胚，更一般地，也适用于具有Haagerup性质的群胚 [Tu99a]。ABC谱序列 [MN10,Mey08] 是为通过范畴方法研究 Baum–Connes猜想而引入的。对于满足 Baum–Connes猜想的群 Γ，该谱序列收敛至 K 理论 $K_*(C_r^*(\Gamma))$。对于单位空间全不连通且无挠各向同性群满足 Baum–Connes猜想的 étale 群胚 G，ABC谱序列的一个实例将 K 理论 $K_*(C_r^*(G))$ 与群胚同调 $H_*(G)$ [PY22] 联系起来。这又被用于低维情形 [BDGW23] 验证 HK猜想 [Mat12]，该猜想将 $K_*(C_r^*(G))$ 计算为 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_{*+2n}(G)$ 的直和。

Le Gall 证明，Morita等价群胚具有等价的 Kasparov 范畴；更一般地，他从群胚的广义态射构造 Kasparov 范畴之间的函子[LG99，第 7] 节。Bönicke 利用这一点构造诱导函子 $\mathrm{Ind}_H^G\colon \mathrm{KK}^H \to \mathrm{KK}^G$，它与闭子群胚$H \subseteq G$ [Bön20，命题 4 7] 相关，这与群的情形类似 Kas95，第5], 节；此外还需使用遗忘函子 $\mathrm{KK}^{G\ltimes X} \to \mathrm{KK}^G$。群胚对应与 Le Gall 考虑的广义态射相似，在某些方面更一般，在另一些方面则更特殊。闭子群胚 $H \subseteq G$自然对应一个群胚对应。我们的第一个主要结果从一般的 étale 对应Ω：$G \to H$ 出发，构造一个函子$\mathrm{Ind}_\Omega\colon \mathrm{KK}^H \to \mathrm{KK}^G$，该函子基于 Bönicke 的子群胚诱导函子。

定理A (定理6.9)。一个第二可数*Hausdorff étale*对应Ω：$G \to H$ 诱导出一个加性函子

$$\mathrm{Ind}_\Omega\colon \mathrm{KK}^H \to \mathrm{KK}^G$$

作用于等变*Kasparov*范畴，我们称之为诱导函子。

其动机源于一项尝试：将由适当对应诱导的K理论映射相关思想与Baum–Connes猜想相关思想结合起来。在 [CEL13，CEL15，Li21] 中，存在可表达为如下形式的K理论同构

$$K_*(C_r^*(S)) \cong \bigoplus_{[e]\in E(S)^\times/S} K_*(C_r^*(S_e)) \tag{1.1}$$

对于一个逆半群 S，其非零幂等元处的稳定子子群为 S_e $e \in E(S)^\times$。证明方法要求 S 的动力学能够由一个群 Γ 实现。随后构造一个 KK^Γ 中的等变 Kasparov 循环，并通过应用下降原理 [CEOO04, Bön20]，（这是 Baum–Connes猜想的一种形式）得到同构 (1.1)。对于一般的逆半群 S，可能不存在这样的群 Γ，但我们或许可以尝试利用 S 的泛群胚 $S \ltimes E$ 来重复这一过程。然而，似乎无法从一个相对于单个 étale 群胚等变的 Kasparov 循环构造出 K理论中的目标映射 (1.1)。相反，它可以看作由 étale 对应 Ω：$G \to H$ 诱导的映射 $K_*(C_r^*(G)) \to K_*(C_r^*(H))$。为了运用与 Baum–Connes猜想相关的强大工具，我们将研究映射 $K_*(C_r^*(G)) \to K_*(C_r^*(H))$ 如何处于由 Ω 在更高层次的 Kasparov 范畴 KK^G 和 KK^H 中诱导的行为之下。

本文的工作是一个更大研究计划的一部分（见 [Mil24a, Mil24b]），该计划研究与 étale 群胚 G 相关的某些构造，并发展关于 étale 对应的函子性。其中一些构造涉及 KK^G，例如 [PY22] 中的谱序列 $E(G)$，它将 $H_*(G)$ 与 $K_*(C_r^*(G))$ 联系起来；该谱序列与一个满足 Baum–Connes猜想且具有无挠各向同性群的丰 ample 群胚 G 相关。在这一研究计划中，我们从此类群胚之间的一个适当对应 $\Omega\colon G \to H$ 构造谱序列的态射$E(G) \to E(H)$。这将诱导映射 $H_*(G) \to H_*(H)$ 与诱导映射 $K_*(C_r^*(G)) \to K_*(C_r^*(H))$ 联系起来，从而加强群胚同调与 K理论之间的联系。最终，K理论同构可由群胚同调中的同构推出。作为应用，我们为每个可数逆半群 S 推出 K理论同构 (1.1)；其泛群胚 $S \ltimes \hat{}E$ 是豪斯多夫的、无挠的，并满足 Baum–Connes猜想 [Mil24a]。

在建立与 étale 群胚 G 相关联的等变 Kasparov 范畴 KK^G 的函子性之后，理解 $K_*(C_r^*(G))$ 行为的下一步是研究 K理论函子 $K_*(G\ltimes_r -)\colon \mathrm{KK}^G \to \mathrm{Ab}_*$ 的行为。通过一个 étale 对应 $\Omega : G \to H$，我们将 K理论函子 $K_*(G \ltimes -) : \mathrm{KK}^G \to \mathrm{Ab}_*$ 与 $K_*(H \ltimes -) : \mathrm{KK}^H \to \mathrm{Ab}_*$ 联系起来。我们使用全交叉积，因为它比约化交叉积 [1]具有更强的函子性。为了得到一个自然变换，我们发展了一种 C^*-对应构造 $C^*(\Omega) : C^*(G) \to C^*(H)$ [AKM22]，使其允许系数取自 C^*-代数[2]。

定理 B（命题 5.2）。一个豪斯多夫 *étale* 对应 $\Omega\colon G \to H$ 以及一个 H-等变的 C^*-对应 $E\colon A \to B$ 诱导出一个 C^*-对应

$$\Omega \ltimes E\colon G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega A \to H \ltimes B$$

我们称其为 E 关于Ω的交叉积。

当 $E\colon A \to B$ 为适当时，交叉积对应 $\Omega \ltimes E$ 是适当的。特别地，如果我们取一个恒等对应 $A\colon A \to A$，那么 $\Omega \ltimes A$ 在 K理论中从 $K_*(G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega A)$ 到 $K_*(H \ltimes A)$ 诱导出一个映射。

定理 C（定理 6.11）。设 $\Omega\colon G \to H$ 是一个第二可数豪斯多夫 *étale* 对应。那么，将映射指派

$$K_*(\Omega \ltimes A)\colon K_*(G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega A) \to K_*(H \ltimes A)$$

将其指派给一个 H-C^*-代数 $A \in \mathrm{KK}^H$，相对于 KK^H 中的态射是自然的，因此确定了一个自然变换

$$\alpha_\Omega\colon K_*(G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega -) \Rightarrow K_*(H \ltimes -)\colon \mathrm{KK}^H \rightrightarrows \mathbf{Ab}_*\,.$$

特化到 H-C^*-代数 $C_0(H^0)$ 后，诱导代数 $\mathrm{Ind}_\Omega C_0(H^0)$ 由 $C_0(\Omega/H)$ 给出，我们得到一个映射 $K_*(C^*(G \ltimes \Omega/H)) \to K_*(C^*(H))$。一般而言，除非假设 $\Omega\colon G \to H$ 是适当映射，否则我们无法从 $K_*(C^*(G))$ 得到映射。在这种情况下，存在一个 G-等变适当映射 $\overline{\rho}\colon \Omega/H \to G^0$，它诱导出一个元素 $f_\Omega \in \mathrm{KK}^G(C_0(G^0)\ C_0(\Omega/H))$。由此，我们可以将 Ω 在 K理论中诱导的映射还原为以下复合

$$\alpha_\Omega(C_0(H^0)) \circ K_*(G \ltimes f_\Omega)\colon K_*(C^*(G)) \to K_*(C^*(H)).$$

[1]可以对该对应施加一个温和的可约性条件，以便在约化层面进行处理；此外，通过 Baum–Connes猜想，我们可以通过研究完整交叉积来理解约化交叉积。[2]还可以处理更一般的 C^*-系数，参见 [Mil22], 但我们目前没有针对此项的应用。

我们还验证了，所有构造都与 étale 对应的复合相容。由于此范畴中的同构由 Morita 等价给出，这尤其以一种非常具体的方式还原了等变 Kasparov 范畴 KK^G 以及 K 理论函子 $K_*(G \ltimes -)\colon \mathrm{KK}^G \to \mathrm{Ab}_*$ 的 Morita 不变性。

在第2节中，我们回顾了在群胚等变 KK 理论中进行具体研究所需的材料。这包括为定义在 $C_0(X)$-代数上的希尔伯特模的可伴算子丛引入严格拓扑。第3 节中，我们给出 étale 对应的示例，包括来自逆半群的新示例。第4 节中，我们构造与 étale 对应相关的诱导 Banach 空间；第5节中，我们构造交叉积对应。第6 节中，我们依次利用这些构造建立 KK-理论诱导函子，以及与 étale 对应相关的自然变换。最后，第7节中验证了它与对应的复合的相容性。

作者谨此感谢 Christian Bönicke、Xin Li 和 Ralf Meyer 提供的宝贵意见并参与讨论。

2. 预备知识

2.1. étale 群胚、逆半群及其作用。拓扑群胚 G 是一个拓扑空间 G，带有一个称为单位空间的指定子空间 G^0，以及连续映射 $r, s\colon G \rightrightarrows G^0$，它们分别为每个群胚元素指定值域和源。值域和源相匹配的元素 g 和 h（$r(h) = s(g)$）可以相乘或复合，得到元素 gh，其值域为 $r(g)$，源为 $s(h)$。乘法是一个连续的结合映射 $(g,h) \mapsto gh\colon G^2 \to G$，其中 $G^2 := \{(g,h) \in G \times G \mid s(g) = r(h)\}$ 是可复合对构成的空间。G^0 中的元素作为恒等元起作用，即每个元素的值域和源都是它自身，并且对于每个 $g \in G$，$r(g)g = g = gs(g)$。存在一个连续的求逆映射$g \mapsto g^{-1}\colon G \to G$，它交换每个元素的值域和源，并且对于每个 $g \in G$，满足$g^{-1}g = s(g)$ 和 $gg^{-1} = r(g)$。

对于每个 $x \in G^0$，我们将 G^x 记作值域纤维 $r^{-1}(x)$，将 G_x 记作源纤维 $s^{-1}(x)$，二者的交集为各向同性群 G^x_x。若值域映射 $r\colon G \to G^0$ 是局部同胚，且单位空间G^0 在 G中是开集，则拓扑群胚 G称为*étale*。在此情形下，源映射同样是局部同胚；若 r 和 s 在 U上是单射，则子集 $U \subseteq G$ 称为双截面。除非另有说明，我们假设 étale 群胚的单位空间 G^0 是局部紧且豪斯多夫的；此时，G 是局部紧且局部豪斯多夫的，但不一定是豪斯多夫的。

一个逆半群 S 是满足以下条件的半群：对每个 $s \in S$，存在唯一的元素 $s^* \in S$，称为 s 的伴随，满足 $s^*ss^* = s^*$ 和 $ss^*s = s$；按照惯例，我们总是包含一个特殊的 0 元素，对每个 $s \in S$满足 $0s = 0$和 $s0 = 0$。幂等元的集合 $E(S)$ 在乘法下构成一个半格。

我们将逆半群的元素视为部分对称，这一点也体现在它们的作用方式上。逆半群通过部分同胚作用于空间 X，这些部分同胚是开子集 α到 $\alpha \to$、α 之间的同胚，其中 X。两个部分同胚的复合 $\alpha \circ \beta$ 是部分同胚 $x \mapsto \alpha(\beta(x))$，其定义域由 $\operatorname{dom}\beta$ 中满足 $\beta(x) \in \operatorname{dom}\alpha$ 的 x 组成。空间 X 上的部分同胚构成一个逆半群 $\mathrm{PHom}(X)$；部分同胚 α 的伴随 α^* 是其逆$\alpha^{-1}\colon \operatorname{ran}\alpha \to \operatorname{dom}\alpha$。

定义 2.1（逆半群作用）。逆半群 S 在空间 X 上的一个（左）作用 $S \curvearrowright X$，是一个同态 $\alpha\colon S \to \mathrm{PHom}(X)$，其值属于 X 上部分同胚构成的逆半群。若要强调空间，对于$s \in S$， $\alpha(s)$ 的定义域和值域可分别记为 $\mathrm{dom}_X s$ 和 $\mathrm{ran}_X s$。我们通常用 $s\cdot x$ 表示 $\alpha(s)(x)$。

一个空间之间的连续映射 $f\colon X \to Y$ S 是 S-等变 的，当且仅当 $x \in \mathrm{dom}_X s$ 意味着 $f(x) \in \mathrm{dom}_Y s$，且 $f(s\cdot x) = s\cdot f(x)$。由逆半群作用可构造一个 étale 群胚:

定义 2.2（逆半群作用的变换群胚）。设$S \curvearrowright X$ 是逆半群 S 在局部紧豪斯多夫空间 X上的一个作用。考虑商空间

$$S \ltimes X := \{(s,x) \in S \times X \mid x \in \mathrm{dom}\, s\}/\sim,$$

其中，$(s,x) \sim (t,x)$，当且仅当存在一个幂等元 $e \in E$，使得 $x \in \mathrm{dom}\, e$ 且 $se = te$。我们取$S \times X$上积拓扑的子空间拓扑所诱导的商拓扑，其中 S赋予离散拓扑，并将 (s,x) 的等价类记为 $[s,x]$。我们将值域映射和源映射定义为 $r([t,x]) = t\cdot x$、 $s([t,x]) = x$（$[t,x] \in S \ltimes X$），并在 $y = s\cdot x$ 时定义复合 $[t,y][s,x] = [ts,x]$。由此，$S \ltimes X$ 成为一个（可能是非Hausdorff的）étale 群胚，称为 $S \curvearrowright X$ 的变换群胚，其单位空间是 X的一个开子集。每个 étale 群胚都可以通过这种方式得到，例如，令其Hausdorff开双截面的逆半群作用于其单位空间。

定义 2.3（群胚作用）。设 G 是一个 étale 群胚， X 是一个拓扑空间。一个（左）群胚作用 $G \curvearrowright X$ 由以下部分组成:

- 一个连续映射 $\tau\colon X \to G^0$，称为锚映射,
- 一个连续映射 $\alpha\colon {}^{G}\!\times_{s,\,G^0,\,\tau} X \to X$ 称为作用映射。通常将 $\alpha(g,x)$ 写作 $g\cdot x$。

当 g、$h \in G$ 和 $x \in X$ 满足 $s(g) = r(h)$ 且 $s(h) = \tau(x)$ 时，二元组 (τ,α) 是一个作用；此时有 $\tau(h\cdot x) = r(h)$ 且 $gh\cdot x = g\cdot(h\cdot x)$。每个群胚元素 $g \in G$ 都诱导出一个同胚 α_g: $X_{s(g)} \to X_{r(g)}$，将 x 映射到 $g\cdot x$，其中我们将 $X_z = \tau^{-1}(z)$ 记作 X 在 $z \in G^0$ 处的纤维。我们称 X 为一个 G-空间。

étale 群胚 G 在其单位空间 G^0 上有一个典范作用，对于每个 $g \in G$，$g\cdot s(g) = r(g)$。这使我们能够从作用的角度来看待 G。反过来，我们也可以通过作用群胚 $G \ltimes X$从群胚的角度来看待作用 $G \curvearrowright X$:

定义 2.4（作用群胚）。设 G 为一个 étale 群胚， X 为一个带锚映射 τ: $X \to G^0$ 的局部紧豪斯多夫 G-空间。纤维积${}^{G}\!\times_{s,G^0,\tau} X$可赋予 étale 群胚 $G \ltimes X$ 的结构，其单位空间为 X，我们称之为作用群胚。对于 $(g,x) \in G \ltimes X$，值域定义为$g\cdot x$，源定义为 x；乘法定义为 $(g,x)(h,y) = (gh,y)$，其中 (g,x)、$(h,y) \in G \ltimes X$且 $x = h\cdot y$。

定义 2.5（自由、适当且 étale 的作用）。设 G 是一个 étale 群胚，且 X 是一个带有锚映射 $\tau\colon X \to G^0$ 的 G-空间。称 G-空间 X 或作用 $G \curvearrowright X$ 为:

- 自由，如果对于 $g \in G$ 和 $x \in X$， $g\cdot x = x$ 蕴含 $g \in G^0$。
- 适当，如果映射 $(g,x) \mapsto (g\cdot x, x)$: ${}^{G}\!\times_{s,G^0,\tau} X \to X \times X$ 是适当的。
- *étale*，如果 $\tau\colon X \to G^0$ 是局部同胚。

如果 G 在其单位空间上的典范作用 $G \curvearrowright G^0$ 是适当的，我们就称 G 是适当的；如果该作用是自由的，我们就称 G 是主的。

我们汇总了关于适当作用的一些关键事实。

命题 2.6 （ [Tu04], 中的引理 2.12 和命题 2.19 [AKM22]）。 设 G 是一个 *étale* 群胚，并设 X 是一个适当的 G空间。则轨道空间 $G\backslash X$ 是豪斯多夫的。如果该作用还是自由的，那么商映射$q\colon X \to G\backslash X$ 是一个局部同胚。

命题 2.7 （[Tu04]中的命题 2.20）。 设 G 是一个 *étale* 群胚，设 X是一个豪斯多夫右 G空间，并设 Y 是一个适当的左 G空间。则对角作用 $X \times_{G^0} Y \curvearrowleft G$ 是适当的。

定义 2.8 （群胚上的拉回）。 设 G 是一个 étale 群胚，设 X 是一个带锚映射 τ 的右 G-空间，并设 Y是一个左 G-空间。考虑 G 在 $X \times_{G^0} Y$上的对角作用，其定义为 $(x,y)\cdot g := (x\cdot g, g^{-1}\cdot y)$，其中 $(x,y) \in X \times_{G^0} Y$且 $g \in G^{\tau(x)}$。 X 和 Y 在 G 上的拉回 $X \times_G Y$ 是对角作用的商空间 $(X \times_{G^0} Y)/G$ 。

2.2. $C_0(X)$-巴拿赫空间与巴拿赫丛。

定义 2.9 （$C_0(X)$-巴拿赫空间）**：** 设 X 是一个局部紧豪斯多夫空间。 $C_0(X)$-巴拿赫空间是指一个巴拿赫空间 A ，配备一个双线性映射 $(f,a) \mapsto f\cdot a\colon C_0(X) \times A \to A$，称为结构映射，满足

- 对每个 $f \in C_0(X)$ 和 $a \in A$，都有 $\|f\cdot a\| \le \|f\|\|a\|$，并且
- 对每个 f、 $g \in C_0(X)$ 和 $a \in A$，都有 $f\cdot(g\cdot a) = fg\cdot a$，并且
- 形如 $f\cdot a$ 的元素（其中 $f \in C_0(X)$ 且 $a \in A$ ）在 A中具有稠密线性张成 .

简言之， $C_0(X)$ 在 A 上非退化地作用。我们通常省略 $\cdot$，用 fa代替 $f\cdot a$。 $C_0(X)$-巴拿赫空间之间的连续线性映射 $\varphi\colon A \to B$ 如果是$C_0(X)$-线性的，则对每个 $f \in C_0(X)$ 和 $a \in A$，都有 $f\varphi(a) = \varphi(fa)$。

如果一个 C*-代数 B 配备了一个非退化的 $*$-同态 $C_0(X) \to ZM(B)$，其值落在 B 的中心乘子中，则称其为 B 的 $C_0(X)$-代数结构。这使 B 成为一个 $C_0(X)$-巴拿赫空间。此外，如果 E 和 F 是希尔伯特 B-模，那么 E、 F 和 $\mathcal{K}(E,F)$ 都是 $C_0(X)$-巴拿赫空间（参见 [Bön20，第 4] 节），但 $C_0(X)$ 在 $\mathcal{L}(E,F)$ 上的作用可能不是非退化的。 $C_0(X)$-巴拿赫空间 A 在 $x \in X$ 处的纤维 A_x 是 A 对闭子空间 ~~$C_0(X\setminus\{x\})$~~A 取商所得的空间。每个 $a \in A$ 都确定一个截面 $x \mapsto a_x\colon X \to \bigsqcup_{x\in X} A_x$。与 $C_0(X)$-代数类似，函数 $x \mapsto \|a_x\|\colon X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 是上半连续的，且在无穷远处消失；对每个 $f \in C_0(X)$ 和 $x \in X$，都有 $(fa)_x = f(x)a_x$。若一个 $C_0(X)$-巴拿赫空间 A 对每个 $a \in A$ 都满足 $\|a\| = \sup_{x\in X}\|a_x\|$ ，则称其为 $C_0(X)$-局部凸的。每个 $C_0(X)$-代数 B 都是局部 $C_0(X)$-凸的 [Wil07，命题 C.10]。希尔伯特 B-模 E 在 E_x 处的每个纤维都是希尔伯特 B_x-模，其运算与纤维映射 $E \to E_x$ [相容 4], Bön20，第 4]，节；局部 $C_0(X)$-凸性则由 B 的局部凸性推出。给定另一个希尔伯特 B-模 F，每个 $T \in \mathcal{L}(E,F)$ 都自动是 $C_0(X)$-线性的，因此存在唯一的 $T_x \in \mathcal{L}(E_x,F_x)$，使得对每个 $e \in E$ 都有 $(Te)_x = T_x e_x$。此外，我们有 $\|T\| = \sup_{x\in X}\|T_x\|$（参见 [Wil07，引理 C.11]）。如果 T 是紧的，那么 T_x 也是紧的，由此诱导出同构 $\mathcal{K}(E,F)_x \cong \mathcal{K}(E_x,F_x)$，将 T 在 x 处的纤维与 T_x[3] 识别起来。为了理解这些纤维的连续族，下面转而讨论巴拿赫丛：

定义 2.10 （巴拿赫丛）。 局部紧豪斯多夫空间 X 上的一个巴拿赫丛 是一个拓扑空间 $\mathcal{A}$ ，配备一个连续的开满射

[3]这见于 [LG94，推论 2.3。1] 以及 [LG99，命题 4。2], 尽管很难找到其证明，但其主要难点在于单射性。这是因为 $x \mapsto \|T_x\|$ 对每个 $T \in \mathcal{K}(E,F)$都上半连续且在无穷远处消失。而上半连续性又可通过为每个有限秩 $b \in M_n(B)$ 找到 T来推出，使得对每个 $\|T_x\| = \|b_x\|$ 都有 $x \in X$，详见 [Mil22，命题 1。51] 了解详情。

p: $\mathcal{A} \to X$ 以及每个纤维 $A_x := p^{-1}(x)$ 上的复 Banach 空间结构，使得

- 映射 $a \mapsto \|a\|$: $\mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是上半连续的，
- 映射 $(a, b) \mapsto a + b$: $\mathcal{A} \times_X \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是连续的，
- 对每个 $\lambda \in \mathbb{C}$，映射 $a \mapsto \lambda a$: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是连续的，并且
- 若 $(a_i) \in \mathcal{A}_x$ 上一个满足 $p(a_i) \to x$ 且 $\|a_i\| \to 0$ 的网，则 $a_i \to 0$ 是 $\mathcal{A}$ 上一个满足 $p(a_i) \to x$ 且 $\|a_i\| \to 0$ 的网，则 X 上）是一个函数，满足对每个 $x \in X$，都有 $\varphi(A_x) \subseteq B_x$，且这些诱导映射 $(\varphi_x$: $A_x \to B_x)_{x \in X}$ 构成一个有界族连续线性映射。我们关注巴拿赫丛之间的连续映射。C*-丛 是一个巴拿赫丛 $\mathcal{A} \to X$，其每个纤维上都具有 C*-代数结构，并且乘法 $\mathcal{A} \times_X \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 和伴随映射$\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是连续的。

我们可以通过以下构造从 $C_0(X)$-巴拿赫空间得到巴拿赫丛，参见 [FD88] 中的 II.13.18 以及 [Wil07] 中的定理 C.25。尽管 [FD88] 仅涉及具有连续范数函数的巴拿赫丛，而 [Wil07] 仅涉及 C*-丛，但它们的证明同样适用于巴拿赫丛的一般情形。

命题 2.11。 设 X 是一个局部紧豪斯多夫空间，设 $(A_x)_{x \in X}$ 是巴拿赫空间的一个集合，并设 Γ 是一个截面的复向量空间 $X \to \mathcal{A} = \bigsqcup_{x \in X} A_x$，满足

- 对每个 $a \in \Gamma$， $x \mapsto \|a(x)\|$ 都是上半连续的，
- 对每个 $x \in X$，集合 $\{a(x) \mid a \in \Gamma\}$ 在 A_x 中稠密。

则 $\mathcal{A}$ 上存在唯一的拓扑，使 $\mathcal{A} \to X$ 成为一个巴拿赫丛，并且 Γ 中的每个截面都是连续的。

因此，对于任意 $C_0(X)$-巴拿赫空间 A，在 $\mathcal{A} = \bigsqcup_{x \in X} A_x \to X$ 上存在唯一的巴拿赫丛结构，使得对每个 $a \in A$， $x \mapsto a_x$: $X \to \mathcal{A}$ 都是连续截面。我们称之为与 $C_0(X)$-巴拿赫空间A关联的巴拿赫丛；默认情况下，我们用同一个字母的花体形式来指称它。

反过来，对于任意巴拿赫丛 $\mathcal{A} \to X$，由在无穷远处消失的连续截面组成的空间 $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$ 是一个 $C_0(X)$-巴拿赫空间，其上的逐点作用由 $C_0(X)$ 给出。对于每个 $x \in X$，求值映射 $\Gamma_0(X, \mathcal{A}) \to A_x$，即在 x 处的求值映射，将 $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$ 在 x 处的纤维同 A_x 识别。证明中的关键步骤是求值映射的满射性，见 [FD88] 中的定理 C17 和注 C18。命题 2.11 将 $\mathcal{A}$ 恢复为由 $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$ 关联的巴拿赫丛。

对于任意 $C_0(X)$-巴拿赫空间 A，与每个元素 $a \in A$ 相关联的截面 $x \mapsto a_x$: $X \to \mathcal{A}$ 确定了一个 $C_0(X)$- 线性压缩映射 $A \to \Gamma_0(X, \mathcal{A})$。当且仅当 A 局部 $C_0(X)$-凸时，该映射是等距的；我们用于等变 KK 理论的每个 $C_0(X)$-巴拿赫空间也都是如此。根据以下稠密性判据，映射 $A \to \Gamma_0(X, \mathcal{A})$ 的像总是稠密的，因此当 A 局部 $C_0(X)$-凸时，它是一个同构：

命题 2.12（[*Wil*07] 中的命题 *C.*24[4]）。设 $\mathcal{A} \to X$ 是局部紧豪斯多夫空间 X 上的一个巴拿赫丛，且 $\Gamma \subseteq \Gamma_0(X, \mathcal{A})$。假设 Γ 在 $C_0(X)$ 的作用下封闭，并且对每个 $x \in X$，集合 $\{\gamma_x \mid \gamma \in \Gamma\}$ 在 A_x 中具有稠密线性张成。那么 Γ 在 $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$ 中具有稠密线性张成。

因此，我们常常将局部 $C_0(X)$-凸 $C_0(X)$-巴拿赫空间的元素 $a \in A$ 与其对应的截面 $x \mapsto a_x \in \Gamma_0(X, \mathcal{A})$等同起来，并在研究 $C_0(X)$-巴拿赫空间 A 与巴拿赫丛 $\mathcal{A} \to X$之间自由切换。我们汇集了一些关于巴拿赫丛拓扑的结果。

[4]证明可逐字照搬到一般的巴拿赫丛。

引理 *2.13*（ [*Wil*07] 中的命题 *C.20*）。设 $p\colon \mathcal{A} \to X$ 是定义在局部紧豪斯多夫空间 X 上的巴拿赫丛，并设 $(a_i)_i$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个网，满足$p(a_i) \to p(a)$，其中 $a \in \mathcal{A}$为某个元素。假设对所有 $\epsilon > 0$，都存在 $\mathcal{A}$中的一个网 $(u_i)_i$ 以及 $u \in \mathcal{A}$，使得 $p(u_i) = p(a_i)$ 且 $p(u) = p(a)$，并且

- $u_i \to u$ 在 $\mathcal{A}$，
- $\|a - u\| < \epsilon$，以及
- $\|a_i - u_i\| < \epsilon$ 对于较大的 i。

那么 $a_i \to a$。

直接应用这个引理可得巴拿赫丛的映射和双线性映射连续性的条件：

命题 *2.14*（丛上映射的连续性条件）。设 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是定义在局部紧豪斯多夫空间 X 上的巴拿赫丛映射，且 $\Gamma \subseteq \Gamma_0(X, \mathcal{A})$ 是一个具有稠密线性张成的子集。若对每个 $\gamma \in \Gamma$，$\varphi \circ \gamma$ 都是连续的，则 φ 是连续的。类似地，设 $\psi\colon \mathcal{A} \times_X \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 是巴拿赫丛 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 之间的双线性或半双线性映射有界族，并假设 $\Gamma_A \subseteq \Gamma_0(X, \mathcal{A})$ 和 $\Gamma_B \subseteq \Gamma_0(X, \mathcal{B})$ 都具有稠密线性张成。若对每个 $\gamma_A \in \Gamma_A$ 和 $\gamma_B \in \Gamma_B$，$\psi \circ (\gamma_A, \gamma_B)\colon X \to \mathcal{C}$ 都是连续的，则 ψ 是连续的。

注记 2.15。这个连续性条件使我们能够验证与 $C_0(X)$-代数 B 相关联的丛上的逐纤维乘法和伴随是连续的。此外，给定希尔伯特 B-模 E 和 F，逐纤维的模结构和内积结构定义了连续映射，且映射 $\Theta_{\_,\_}\colon \mathcal{F} \times_X \mathcal{E} \to \mathcal{K}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是连续的。

我们将用到的另一个连续性引理如下：

引理 2.16 (巴拿赫丛同构的条件，参见 [MW08]中的注记 3.8)。设 $\mathcal{A} \to X$ 和 $\mathcal{B} \to X$ 是局部紧豪斯多夫空间 X 上的巴拿赫丛，并设 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是巴拿赫丛之间的连续映射，且 $\varphi_x\colon A_x \to B_x$ 对每个 $x \in X$都是等距同构。那么 φ 是巴拿赫丛的同构。

我们或许会希望，对于 $C_0(X)$-代数上的希尔伯特模 E 和 F，空间 $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{L}(E_x, F_x)$ 上存在一种巴拿赫丛结构，使得将 $T \in \mathcal{L}(E, F)$ 映射到截面 $x \mapsto T_x\colon X \to \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 的赋值是一个同构 $\mathcal{L}(E, F) \cong \Gamma_b(X, \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}))$。遗憾的是，这并非总是可能，因为 $x \mapsto \|T_x\|\colon X \to \mathbb{R}$ 可能不是上半连续的（[Wil07, 注记 C.14]）。尽管如此，考虑总空间 $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 上的一种拓扑仍然有用。按照 [Wil07, 引理 C.11],，有界截面 $x \mapsto T_x\colon X \to \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 确定一个可伴算子 $T \in \mathcal{L}(E, F)$，当且仅当对于每个 $e \in E$和 $f \in F$，截面 $x \mapsto T_x e_x$和 $x \mapsto T_x^* f_x$都是连续的（因而分别与 F 和 E 中的元素相对应）。这可以自然地视为总空间 $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 上某种拓扑下关于 $x \mapsto T_x$ 的连续性条件。

定义 2.17（可伴随算子丛的严格拓扑）。设 E 和 F 是定义在 $C_0(X)$-代数 B 上的希尔伯特 B-模，且 $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{L}(E_x, F_x)$。$\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 上的严格拓扑是使得下列映射连续的最弱拓扑：

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to \mathcal{F} \qquad\qquad \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to \mathcal{E}$$
$$(x, T) \mapsto (x, T(e_x)) \qquad\qquad (x, T) \mapsto (x, T^*(f_x))$$

对每个 $e \in E$ 和 $f \in F$ 都成立。

因此，我们可以将算子 $T \in \mathcal{L}(E, F)$ 与其有界严格连续截面 $x \mapsto T_x \in \Gamma_b(X, \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}))$ 等同。有界截面 $x \mapsto T_x$ 严格连续，当且仅当巴拿赫丛之间的映射 $(T_x)_{x \in X}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 和 $(T_x^*)_{x \in X}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ 连续。

2.3. **群胚在巴拿赫空间上的作用**。给定局部紧豪斯多夫空间之间的连续映射 f: $Y \to X$ 和一个巴拿赫丛 $\mathcal{A} \to X$，拉回丛 $f^*\mathcal{A} := Y \times_X \mathcal{A} \to Y$ 是一个巴拿赫丛，其在 $y \in Y$ 处的纤维可与 $A_{f(y)}$ 等同。因此，我们可以将局部 $C_0(X)$-凸 $C_0(X)$-巴拿赫空间 A 的拉回 f^*A 定义为截面空间 $\Gamma_0(Y, f^*\mathcal{A})$。通过 f: $Y \to X$ 拉回一个 $C_0(X)$-代数 B 所得的拉回 f^*B 是一个 $C_0(Y)$-代数；而希尔伯特 B-模 E 的拉回 f^*E 是一个希尔伯特 f^*B-模，其运算按 Y 上的逐点方式定义。给定另一个希尔伯特 B-模 F，我们可以将 $f^*\mathcal{K}(E,F)$ 与 $\mathcal{K}(f^*E, f^*F)$ 等同。

注记 2.18. 截面 a: $Y \to f^*\mathcal{A}$可视为一个函数 a: $Y \to \mathcal{A}$，满足对每个 $y \in Y$， $a(y) \in A_{f(y)}$，我们将经常采用这种视为函数的方式。若其中一个连续，则另一个也连续。

注记 2.19. 巴拿赫丛 $\mathcal{A} \to X$ 在子空间$Y \subseteq X$ 上的限制 $\mathcal{A}\restriction_Y \to Y$，可描述为沿包含映射$Y \hookrightarrow X$对 $\mathcal{A} \to X$ 作拉回。对于截面空间，我们记作 $\Gamma_0(Y, \mathcal{A})$，而不记作 $\Gamma_0(Y, \mathcal{A}\restriction_Y)$。

对于局部紧豪斯多夫空间之间的连续映射 f: $Y \to X$ 以及取值于巴拿赫丛 $\mathcal{A} \to Y$ 的连续截面 ξ: $Y \to \mathcal{A}$，我们称 ξ 相对于 f 具有适当支集， f 若将 f 限制在（闭）支撑 $\operatorname{supp}\xi$ 上所得的映射是适当的。以下 [Bön20引理 312] 的一个版本，其证明几乎完全相同。

引理 2.20 (纤维求和引理)。 设 f: $X \to Y$ 是局部紧豪斯多夫空间之间的局部同胚，且 $\mathcal{A} \to Y$ 是一个巴拿赫丛。设 $\xi \in \Gamma_b(X, f^*\mathcal{A})$ 是关于 f 具有适当支撑的有界连续截面。则由下式给出的截面 $f_*\xi$: $Y \to \mathcal{A}$

$$f_*\xi(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \xi(x)$$

定义良好且连续。如果 ξ 具有紧支撑，则 $f_*\xi$也具有紧支撑。

定义 2.21 （群胚在巴拿赫空间上的作用）。 设 G 是一个豪斯多夫 étale 群胚，其单位空间为 X，且 A 是一个局部 $C_0(X)$-凸 $C_0(X)$-巴拿赫空间。一个（左）巴拿赫空间作用 α: $G \curvearrowright A$ 由 G 在 A 上的作用是一个等距同构α: $s^*\mathcal{A} \to r^*\mathcal{A}$ 的巴拿赫丛同构，满足

- 对于每个 $x \in X$ 和 $a \in A_x$，都有 $\alpha(x, a) = a$，并且
- 对于每个 $(g,h) \in G^2$和$a \in A_{s(h)}$，我们有 $\alpha(g, \alpha(h,a)) = \alpha(gh, a)$。

换言之，这是 G 在 $\mathcal{A}$ 上的一个连续作用，其作用由线性等距同构给出。我们通常省略 α，并用 $a\cdot$表示 $\alpha(g,a)$。我们称 A 为一个 G-巴拿赫空间[5]，称 $\mathcal{A}$ 为一个巴拿赫 G-丛。

利用下面的引理检查作用映射是否连续通常很方便，参见[Bön20，引理 3。9]:

引理 2.22。设 G 是一个豪斯多夫 *étale* 群胚， $\mathcal{A}$ 是一个巴拿赫 G-丛，并假设 $\Gamma \subseteq \Gamma_0(G^0, \mathcal{A})$ 具有稠密线性张成。那么，巴拿赫丛之间的映射 $(g, a) \mapsto g\cdot a$: $s^*\mathcal{A} \to r^*\mathcal{A}$是连续的，当且仅当对每个 $\xi \in \Gamma$，映射 $g \mapsto g\cdot\xi_{s(g)}$: $G \to r^*\mathcal{A}$是连续的。

豪斯多夫 étale 群胚 G 在 $C_0(G^0)$-代数 B上的巴拿赫空间作用，若对每个 $g \in G$，诱导映射 $B_{s(g)} \to B_{r(g)}$ 是一个 $*$-同构，则称为 C*-代数作用；此时 B 是一个 G-C*-代数，且 $\mathcal{B}$ 是一个 G-C*-丛。希尔伯特 B-模 E 上的作用与 C*-代数作用 $G \curvearrowright B$ 相容，若对每个

[5]请注意，局部 $C_0(X)$-凸性现在是隐含的，因为我们处理的只有这类巴拿赫空间。

$g \in G$、 $b \in B_{s(g)}$ 和 $e \in E_{s(g)}$，都有 $g\cdot(e\cdot b) = (g\cdot e)\cdot(g\cdot b)$；并且对每个 $g \in G$ 和e、 $f \in E_{s(g)}$，都有 $g\cdot\langle e,\ f\rangle = \langle g\cdot e,\ g\cdot f\rangle$。于是我们称 E为一个 G-希尔伯特 B-模，称$\mathcal{E}$ 为一个 G-希尔伯特 $\mathcal{B}$-丛。给定 G-希尔伯特 B-模 E 和 F，由元素 g的作用进行共轭定义了一个映射 $T \mapsto g\cdot T\colon \mathcal{L}(E_{s(g)}, F_{s(g)}) \to \mathcal{L}(E_{r(g)}, F_{r(g)})$。根据引理 2.22，这确定了一个巴拿赫空间作用 $G \curvearrowright \mathcal{K}(\mathcal{E},\mathcal{F})$。

令 G 为豪斯多夫 étale 群胚，并令 A 为一个 G-C*-代数。其（全）交叉积 $G \ltimes A$ 是 $*$-代数 $\Gamma_c(G, s^*\mathcal{A})$[6] 关于最大 C*-范数的完备化。当 E 是一个 G-Hilbert A-模时，空间 $\Gamma_c(G, s^*\mathcal{E})$ 带有一个取值于 $\Gamma_c(G, s^*\mathcal{A})$ 的内积，以及 $\Gamma_c(G, s^*\mathcal{A})$ 的右作用。关于该内积和 $G \ltimes A$ 范数完备化后，我们得到交叉积 Hilbert $G \ltimes A$-模 $G \ltimes E$。我们记录 $\Gamma_c(G, s^*\mathcal{A})$ 上的卷积和对合，以及 $\Gamma_c(G, s^*\mathcal{E})$ 上的内积和模结构；对于 $a, b \in \Gamma_c(G, s^*\mathcal{A})$、 $\xi, \eta \in \Gamma_c(G, s^*\mathcal{E})$ 和 $g \in G$，有

$$a * b\colon g \mapsto \sum_{h\in G^{s(g)}} (h\cdot\xi(gh))\eta(h^{-1}), \qquad a^*\colon g \mapsto g^{-1}\cdot a(g^{-1})^*,$$
$$\langle\xi,\eta\rangle\colon g \mapsto \sum_{h\in G_{r(g)}} \langle g^{-1}\cdot\xi(h), \eta(hg)\rangle, \quad \xi\cdot a\colon g \mapsto \sum_{h\in G^{s(g)}} (h\cdot\xi(gh))\cdot a(h^{-1}).$$

下面的引理是构造 $\Gamma_c(G, s^*\mathcal{A})$的表示，从而构造 $G \ltimes A$的重要工具。其依据是 [BHM18中一个重要的特殊情形，定义 5.1、推论 6。2], 详情请见 [Mil22，引理 1。83]

引理 2.23。 设 G 是一个豪斯多夫 *étale* 群胚， A 是一个 G-C*-代数，D 是一个 C*-代数，且 F 是一个 *Hilbert* D-模，其稠密子空间为 F_0。设 $L\colon \Gamma_c(G, s^*\mathcal{A}) \times F_0 \to F_0$ 是一个双线性映射，满足：

- L 的像具有稠密线性张成，
- 对于 $a, b \in \Gamma_c(G, s^*\mathcal{A})$ 和 $f \in F_0$，有 $L(a, L(b, f)) = L(ab, f)$，并且
- 对于 $a \in \Gamma_c(G, s^*\mathcal{A})$ 和 $e, f \in F_0$，有 $\langle L(a, e)\ f\rangle = \langle e, L(a^*, f)\rangle$。

于是存在唯一的非退化 $*$-表示 $\pi\colon \Gamma_c(G, s^*\mathcal{A}) \to \mathcal{L}(F)$，使得对每个 $a \in \Gamma_c(G, s^*\mathcal{A})$，都有 $\pi(a)f = L(a, f)$，并且 $f \in F_0$。

C*-代数的一个对应 $E\colon A \to B$ 是一个希尔伯特 B-模 E，配备非退化的 $*$-表示 $\varphi\colon A \to \mathcal{L}(E)$，称为该对应的结构映射。通常省略 φ，并在给定 $a \in A$ 和 $e \in E$ 时，写作 $a\cdot e$，而不写 $\varphi(a)(e)$。若 $\varphi(A) \subseteq \mathcal{K}(E)$，则称 E 适当。若对于某个局部紧豪斯多夫空间 X， A 和 B 是 $C_0(X)$-代数，则称 E 为 $C_0(X)$-对应，当且仅当结构映射是 $C_0(X)$-线性的。此时， E 在每个 $x \in X$ 处诱导纤维间的对应 $E_x\colon A_x \to B_x$。此外，若对于某个单位空间为 X 的豪斯多夫 étale 群胚 G， A 和 B 是 G-C*-代数，且 E 是一个 G-希尔伯特 A-模，则当

$$g\cdot(a\cdot e) = (g\cdot a)\cdot(g\cdot e)$$

对于每个 $g \in G$、 $a \in A_{s(g)}$ 和 $e \in E_{s(g)}$。

$G \ltimes E$ $G \ltimes A \to G \ltimes B$： G-等变对应E： $A \to B$的交叉积构造如下。考虑 $\Gamma_c(G, s^*\mathcal{A})$在$\Gamma_c(G, s^*\mathcal{E})$上的左作用，该作用对于 $a \in \Gamma_c(G, s^*\mathcal{A})$、 $\xi \in \Gamma_c(G, s^*\mathcal{E})$ 和 $g \in G$ 定义为

$$a\cdot\xi\colon g \mapsto \sum_{h\in G^{s(g)}} (h\cdot a(gh))\cdot\xi(h^{-1}).$$

这可以扩展为一个非退化的 $*$-同态 $G \ltimes A \to \mathcal{L}(G \ltimes E)$ 例如，根据引理2.23。由此得到的对应 $G \ltimes E$： $G \ltimes A \to G \ltimes B$ 是适当的

[6]其他作者可能会选择改用 $\Gamma_c(G, r^*\mathcal{A})$。

当 E成立时，这是因为 A在 $G \ltimes A$中是满的，且 A在 $G \ltimes E$上的作用可经由$\mathcal{K}(E)$分解，而后者在 $G \ltimes E$上以紧算子作用。具体而言，对于作为 $\iota(e)$ $\iota(f)$ 的 $e, f \in E$，算子 $\Theta_{e,f} \in \mathcal{K}(E)$ 在 $G \ltimes E$上作用为 $\Theta_{\iota(e),\iota(f)}$。

2.4. **群胚等变 KK 理论**。

定义 2.24（等变 Kasparov 循环）。设 G 是一个豪斯多夫 étale 群胚，且 A 和 B 是 G-C*-代数。一个 G-等变 ***Kasparov*** A-B 循环 是一个对 (E, T)，其中 $E\colon A \to B$ 是一个可数生成的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次 G-等变对应，其结构映射为 φ，且 $T \in \mathcal{L}(E)$ 是一个次数为 1 的可伴算子，满足：

- 几乎自伴：$\varphi(a)(T - T^*) \in \mathcal{K}(E)$ 对每个 $a \in A$,
- 是几乎酉的：$\varphi(a)(T^*T - 1) \in \mathcal{K}(E)$，对每个 $a \in A$,
- 与 φ几乎交换：$[T, \varphi(a)] \in \mathcal{K}(E)$ 对每个 $a \in A$，且
- 是几乎不变的：$\varphi_{s(g)}(a)(g^{-1} \cdot T_{r(g)} - T_{s(g)}) \in \mathcal{K}(E_{s(g)})$ 对每个 $g \in G$和 $a \in A_{s(g)}$都成立，并由此确定一个连续映射 $s^*\mathcal{A} \to s^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$。

我们称这类算子为 Fredholm 算子。Kasparov 循环 $(E_0, T_0) \sim_u (E_1, T_1)$ 的酉等价是一个次数为 0 的 G-等变酉算子 $U \in \mathcal{L}(E_0, E_1)$，它交织 A 的作用和 Fredholm 算子 T_i。我们用$\mathbb{E}^G(A, B)$ 表示 G-等变 Kasparov A-B 循环的酉等价类集合，并且通常默认将酉等价的 Kasparov 循环视为相同。Kasparov 循环的同伦是一个 G-等变 Kasparov A-$C([0,1], B)$ 循环，使得在 0 和 1 处求值得到的 Kasparov A-B 循环互相同伦。给定一个 Kasparov 循环 (E, T)，T的紧扰动是一个算子 $S \in \mathcal{L}(E)$，满足对每个 $a \in A$，$\varphi(a)(S - T) \in \mathcal{K}(E)$ 且 $(S - T)\varphi(a) \in \mathcal{K}(E)$；在这种情况下，$(E, S)$ 与 (E, T) 同伦。Kasparov 群 $\mathrm{KK}^G(A, B)$ 是 Kasparov 循环 $\mathbb{E}^G(A, G)$ 按同伦取等价类所得的集合，其元素称为 Kasparov 类。Kasparov 循环 $(E_1, T_1) \in \mathbb{E}^G(A, B)$ 和 $(E_2, T_2) \in \mathbb{E}^G(B, C)$ 的 Kasparov 积是一个 Kasparov 循环 $(E_1 \otimes_B E_2, T)$，使得

- Fredholm 算子 T 是 T_2的 -连接 E_1。这意味着对于每个齐次 $e_1 \in E_1$,

$$\theta_{e_1} T_2 - (-1)^{\deg(e_1)} T \theta_{e_1} \in \mathcal{K}(E_2, E_1 \otimes_B E_2)$$
$$\theta_{e_1} T_2^* - (-1)^{\deg(e_1)} T^* \theta_{e_1} \in \mathcal{K}(E_2, E_1 \otimes_B E_2)$$

其中，$\theta_{e_1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1 \otimes_B E_2)$在 $e_2 \in E_2$处定义为 $\theta_{e_1}(e_2) = e_1 \otimes e_2$，并且

- 对于每个 $a \in A$，都有 $\varphi(a)[T_1 \otimes 1, T]\varphi(a)^* \geq 0$ 模 $\mathcal{K}(E_1 \otimes_B E_2)$[7]。

我们将$(E_1, T_1) \#_B (E_2, T_2)$ 记作 $\mathbb{E}^G(A, C)$ 的 Kasparov 积子集(E_1, T_1) 与(E_2, T_2)。Kasparov 理论中的主要技术结果是 Kasparov 乘积的存在性与唯一性，参见 [LG99，第 6 节《Kasparov 乘积》]，了解群胚等变情形。

定理 *2.25*（*Kasparov* 乘积的存在性与唯一性）。设 G 是第二可数豪斯多夫 *étale* 群胚，设 A、B 和 C 是可分的 G-C*-代数，并设 $(E_1, T_1) \in \mathbb{E}^G(A, B)$ 和 $(E_2, T_2) \in \mathbb{E}^G(B, C)$ 是 *Kasparov* 循环。那么存在一个 *Kasparov* 乘积 $(E, T) \in (E_1, T_1) \#_B (E_2, T_2)$，且其在同伦意义下唯一。此外，这会下降为一个双线性运算，我们称之为 *Kasparov* 积

$$- \otimes_B -\colon \mathrm{KK}^G(A, B) \times \mathrm{KK}^G(B, C) \to \mathrm{KK}^G(A, C).$$

[7]交换子带有分次，因此在此情况下为 $[T, T_1 \otimes 1] = (T_1 \otimes 1)T + T(T_1 \otimes 1)$。

Kasparov 积具有结合性，由此得到一个由可分离G-C*-代数组成的范畴 KK，其态射是 *Kasparov* 类，复合由 *Kasparov* 积给出。

在非等变情形下，对于每个可分的 C*-代数 A，我们有 $K_0(A) \cong \mathrm{KK}(\mathbb{C}, A)$。因此，Kasparov 积对每一对可分的 A 和 B 诱导出一个同态 $\mathrm{KK}(A,B) \to \mathrm{Hom}(K_*(A)\ K_*(B))$，由此构成一个 K理论函子$K_*$: KK $\to$ Ab$_*$。

交叉积 $G \ltimes -$ 和 $G \ltimes_r -$ 给出下降函子 $\mathrm{KK}^G \to$ KK[LG94，第 7], 章; Kasparov 循环 $(E,T) \in \mathbb{E}^G(A,B)$ 分别映射为 $(G \ltimes E, G \ltimes T)$ 和 $(G \ltimes_r E, G \ltimes_r T)$。算子 $G \ltimes T$和 $G \ltimes_r T$由 $T \otimes 1$通过识别 $G \ltimes E \cong E \otimes_B G \ltimes B$ 和 $G \ltimes_r E \cong E \otimes_B G \ltimes_r B$给出，并且在 $\nu \in \Gamma_c(G, s^*\mathcal{E}) \subseteq G \ltimes E$ 处，二者都具体表示为 $\Gamma_c(G, s^*\mathcal{E})$ 中的元素 $g \mapsto (g^{-1} \cdot T_{r(g)}) \cdot \nu(g)$。

3. étale 群胚之间的 étale 对应

étale 对应是 étale 群胚之间的一种态射概念，涵盖了群胚之间的多种关联方式，例如 Morita 等价。关于 [AKM22] 中与 C*-代数相关的理论，请参阅相关文献。本文着重给出许多 étale 对应的例子，以展现它们在自然情形中的丰富性。

定义3.1（étale 对应）。设 G 和 H 为 étale 群胚，其单位空间分别为 X 和 Y。一个 ***étale*** 对应 Ω: $G \to H$ 是一个空间 Ω，带有左G-作用和右 H-作用，以及锚映射 ρ: $\Omega \to X$ 和 σ: $\Omega \to Y$，分别称为值域和源，且满足：

- G-作用与 H-作用可交换——Ω 是一个 G-H-双空间，并且
- 右作用 $\Omega \curvearrowleft H$ 是自由、适当且 étale 的。

若映射 $\overline{\rho}$: $\Omega/H \to G^0$（由 ρ 诱导）是适当的，则称 Ω: $G \to H$ 为适当的。若 Ω、G 和 H 均为豪斯多夫空间，则称 Ω 为豪斯多夫的；若三者均为第二可数空间，则称其为第二可数的。若要强调对应 Ω，我们可以用 σ_Ω 和 ρ_Ω 代替 σ 和 ρ。对于 $x \in X$ 和 $y \in Y$，我们用 Ω^x 和 Ω_y 表示值域纤维和源纤维 $\rho^{-1}(x)$ 和 $\sigma^{-1}(y)$。

例 3.2（étale 同态）。 étale 群胚之间的同态 φ: $G \to H$ 若为局部同胚，则称为 *étale* 。令 φ^0: $G^0 \to H^0$ 为 φ 在单位空间上的限制，并考虑空间

$$\Omega_\varphi := G^0 \times_{\varphi^0, H^0, r} H = \{(x,h) \in G^0 \times H \mid \varphi(x) = r(h)\}.$$

我们定义左作用 $G \curvearrowright \Omega_\varphi$，其作用方式为 $g \cdot (s(g)\ h) = (r(g)\ \varphi(g)h)$，其中 $g \in G$ 和 $h \in H$满足 $\varphi(s(g)) = r(h)$；并定义右作用 $\Omega_\varphi \curvearrowleft H$，其作用方式为 $(x,h) \cdot h' = (x, hh')$，其中 $x \in G^0$和 $h, h' \in H$ 满足 $r(h) = \varphi(x)$ 且 $s(h) = r(h')$。当 φ 为 étale 时，G-H-双空间 Ω_φ 是一个 étale 对应；此外，它还是一个适当对应，因为 $\overline{\rho}$: $\Omega_\varphi/H \to G^0$ 是一个同胚，其逆映射为 $x \mapsto [x, \varphi(x)]_H$。这一情形的一个重要特例是开嵌入 ι: $G \hookrightarrow H$，此时 $\Omega_\iota = H^{G^0}$。

例 3.3（代数态射）。设 G 和 H 为 étale 群胚。代数态射 $G \to H$ 是一种作用 $G \curvearrowright H$，它与右乘作用 $H \curvearrowleft H$相容。BS05、BEM12] 研究了这类态射，它们也称为 Zakrzewski 态射或 actor。与 étale 同态类似，这类态射推广了离散群的同态。不同于 étale 同态，代数态射会诱导群胚 C*-代数之间的 $*$-同态 $C^*(G) \to M(C^*(H))$；当该对应适当时，此同态的值落在 $C^*(H)$ 中。

例 3.4 （拓扑对应）。设 X 和 Y 为局部紧豪斯多夫空间，并将其视为仅含恒等箭头的群胚。一个拓扑对应 $\Omega: X \to Y$是一个局部紧豪斯多夫空间 Ω，配有连续映射 $\rho: \Omega \to X$和局部同胚 $\sigma: \Omega \to Y$。当且仅当 $\rho: \Omega \to X$ 是适当映射时，该对应是适当的。作为一个特例，考虑全不连通空间 Y的一个紧开覆盖 $\mathcal{U}$。令 $\Omega = \bigsqcup_{U\in\mathcal{U}} U$，则典范映射 $\Omega \to Y$ 是局部同胚，而指标映射 $\Omega \to \mathcal{U}$ 是适当映射。由此得到一个适当对应 $\Omega: \mathcal{U} \to Y$。

例 3.5 （作用对应）。设 G 是一个 étale 群胚，X是一个带锚映射 $\tau: X \to G^0$ 的局部紧豪斯多夫 G-空间。于是存在一个以双空间 $G \ltimes X$ 为底的对应 $G \curvearrowright G \ltimes X \curvearrowleft G \ltimes X$，称为作用对应。右作用由 $G \ltimes X$ 中的右乘法给出。左作用的锚映射由 $(g, x) \mapsto r(g)$: $G \ltimes X \to G^0$ 给出，作用映射由 $h \cdot (g, x) = (hg, x)$ 给出，其中 $h \in G$，且 $(g, x) \in G \ltimes X$ 满足 $r(g) = s(h)$。这是代数态射的一个特例。当且仅当 τ 是适当映射时，作用对应是适当的。

例 3.6 （因子映射）。设 $\varphi: H \to G$ 是 étale 群胚之间的连续同态（不一定是 étale 的），并进一步假设 φ 是满射、作为连续映射是适当的，且逐纤维双射，即对每个 $y \in H^0$，φ 限制为一个双射 $H_y \cong G_{\varphi(y)}$。特别地，将 $h \in H$ 映为 $(\varphi(h), s(h))$ 的连续双射 $\beta: H \to G \times_{G^0} H^0$ 是一个同胚，因为 β 的闭性可由 φ 的适当性推出。于是我们可以定义一个作用 $G \curvearrowright H^0$，其作用映射为

$$G \times_{G^0} H^0 \xrightarrow{\beta^{-1}} H \xrightarrow{r} H^0.$$

映射 β成为群胚同构 $\beta: H \to G \ltimes H^0$，因此我们得到一个从 G 到 H的适当作用对应。诸如 φ 这样的因子映射很有意义（例如见 [Li20]），因为它们诱导一个包含 $C_r^*(G) \subseteq C_r^*(H)$。

我们也可以仅利用“右侧”的数据来构造群胚对应。

例 3.7。设 H 是一个 étale 群胚，且 Ω 是一个自由、适当的 étale 右H-空间。那么，Ω 是一个从 Ω/H 到 H的适当对应。

设 $S \curvearrowright X$ 和 $S \curvearrowright Y$是逆半群在局部紧豪斯多夫空间 X 和 Y 上的偏同胚作用，并设 $f: X \to Y$ 是一个 S-等变连续映射。由此得到一个同态 $S \ltimes X \to S \ltimes Y$，它将 $[s, x] \in S \ltimes X$映为 $[s, f(x)] \in S \ltimes Y$；若 f是局部同胚，则该同态是 étale 的。另一方面，若对每个 $s \in S$都有 $f^{-1}(\mathrm{dom}_Y s) = \mathrm{dom}_X s$，则存在一个通过左乘在 S中的作用 $S \ltimes Y \curvearrowright S \ltimes X$。结合以上结果，我们可以从适当的 S-等变拓扑对应构造 étale 对应

定义 3.8. 设 S 是一个逆半群，且 $\Omega: X \to Y$是一个拓扑对应，配备有由部分同胚给出的作用 $S \curvearrowright \Omega$、$S \curvearrowright X$和 $S \curvearrowright Y$。若值域与源 $\rho: \Omega \to X$和 $\sigma: \Omega \to Y$是 S-等变的，并且对每个 $s \in S$，都有 $\rho^{-1}(\mathrm{dom}_X s) = \mathrm{dom}_\Omega s$，则称 Ω 是一个 S-等变拓扑对应 。

例 3.9 （逆半群等变拓扑对应）。设 S 是一个逆半群，且 $\Omega: X \to Y$ 是一个 S-等变拓扑对应。则空间

$$\Omega \times_{\sigma,Y,r} (S \ltimes Y) = \{(\omega, [s, y]) \in \Omega \times (S \ltimes Y) \mid \sigma(\omega) = s \cdot y\}$$

可赋予从 $S \ltimes X$ 到 $S \ltimes Y$ 的 étale 对应结构。左作用定义为 $[s,x]\cdot(\omega,[t,y]) = (s\cdot\omega,[st,y])$，其中 $[s,x] \in S \ltimes X$，$\omega \in$ 属于 Ω，且 $[t,y] \in S \ltimes Y$ 满足 $\rho(\omega) = x$，而 $\sigma(\omega) = t\cdot y$。右作用定义为 $(\omega,[s,y])\cdot[t,z] = (\omega,[st,z])$，其中 $\omega \in$ 属于 Ω，且 $[s,y],[t,z] \in S \ltimes Y$ 满足 $\sigma(\omega) = s\cdot y$，而 $y = t\cdot z$。若 $\Omega\colon X \to Y$ 是适当的，则 $S \ltimes \Omega\colon S \ltimes X \to S \ltimes Y$ 也适当。

例 3.10。设 S 是一个逆半群，其幂等元半格为 E。令 $E^\times$ 为非零幂等元的集合，并令 $\hat{E}$ 为 E 上滤子的空间，其紧开集为 $U_e = \{\chi \in \hat{E} \mid \chi(e) = 1\}$，对每个 $e \in E^\times$ 均成立。存在一个典范作用 $S \curvearrowright E^\times$，由 $s\cdot e = ses^*$ 给出，其中 $s \in S$ 且 $e \in E$ 满足 $es^*s = e$；还有一个典范作用 $S \curvearrowright \hat{E}$，由 $s\cdot\chi\colon e \mapsto \chi(s^*es)$ 给出，其中 $s \in S$、$\chi \in U_{s^*s}$ 且 $e \in E$。那么，拓扑对应

$$E^\times \leftarrow \bigsqcup_{e\in E^\times} U_e \to \hat{E}$$

是一个 S-等变拓扑对应，其中 $s\cdot(e,\chi) := (s\cdot e, s\cdot\chi)$，对 $s \in S$、$e \in \mathrm{dom}\ {}_{E^\times}{}^{s}$ 和 $\chi \in U_e$ 均成立。这诱导出一个对应

$$S \ltimes E^\times \curvearrowright \bigsqcup_{e\in E^\times} \left\{ [s,\chi] \in S \ltimes \hat{E} \;\middle|\; s\cdot\chi \in U_e \right\} \curvearrowleft S \ltimes \hat{E}.$$

要复合 étale 对应 $\Omega\colon G \to H$ 和 $\Lambda\colon H \to K$，我们取 Ω 和 Λ 在 H 上的拉回 $\Omega \times_H \Lambda$。

定义 3.11（étale 对应的复合）。设 $\Omega\colon G \to H$ 和 $\Lambda\colon H \to K$ 为 étale 对应。其复合 $\Lambda\circ\Omega\colon G \to K$ 由以下拉回给出

$$\Omega \times_H \Lambda = (\Omega \times_{H^0} \Lambda)/H$$

它自然构成一个 G-K-双空间。左侧的 G-作用由 Ω 上的作用诱导，右侧的 K-作用由 Λ 上的作用诱导。具体而言，对于 $\omega \in \Omega$、$\lambda \in \Lambda$、$g \in G$ 和 $k \in K$，作用由以下公式给出：$s(g) = \rho(\omega)$、$\sigma(\omega) = \rho(\lambda)$ 和 $\sigma(\lambda) = r(k)$。

$$\begin{aligned} G \curvearrowright \Omega \times_H \Lambda \qquad & g\cdot[\omega,\lambda]_H := [g\cdot\omega,\lambda]_H, \\ \Omega \times_H \Lambda \curvearrowleft K \qquad & [\omega,\lambda]_H\cdot k := [\omega,\lambda\cdot k]_H. \end{aligned}$$

étale 群胚和 étale 对应自然构成一个双范畴，其中还可以考虑 étale 对应之间的 2-箭头 [AKM22，第6], 节，因为复合在典范同构意义下满足结合律。就我们的目的而言，只需忽略 2-范畴细节，转而考虑 étale 群胚范畴，其中的态射是 étale 对应的同构类。

例 3.12（Morita 等价）。设 G 和 H 是 étale 群胚。从 G 到 H 的一个*Morita* 等价 是一个 G-H-双空间 Ω，其锚映射为 $\rho\colon \Omega \to G^0$ 和$\sigma\colon \Omega \to H^0$，并满足

- 左作用 $G \curvearrowright \Omega$ 和右作用 $\Omega \curvearrowleft H$ 是自由且适当的，并且
- 由锚映射诱导的映射 $\overline{\rho}\colon \Omega/H \to G^0$ 和 $\overline{\sigma}\colon G\backslash\Omega \to H^0$ 是同胚。

第二个条件意味着这些作用是 étale 的，因此这是一个（适当的）对应。Morita 等价恰好是可逆的 étale 对应 [Alb15，定理 2。30]。

例3.13（Étale Hilsum–Skandalis 态射）。étale 群胚的一个*Hilsum–Skandalis* 态射 $\Lambda\colon G \to H$ 是一个 G-H- 双空间 Λ，其锚映射为 $\rho\colon \Lambda \to G^0$ 和 $\sigma\colon \Lambda \to H^0$，满足

- 右作用 $\Lambda \curvearrowleft H$ 是自由且适当的，并且
- 由左锚映射诱导的映射 $\overline{\rho}\colon \Lambda/H \to G^0$ 是一个同胚。

满足下述条件的 étale 群胚之间的 Hilsum–Skandalis 态射$\sigma\colon \Lambda \to H^0$ 是 étale 的，称为 étale 对应。反过来，任意 étale 对应$\Omega\colon G \to H$ 都可分解为作用对应 $G \to G \ltimes \Omega/H$ 和 étale Hilsum–Skandalis 态射 $G \ltimes \Omega/H \curvearrowright \Omega \curvearrowleft H$。Le Gall 将 Hilsum–Skandalis 态射称为正则图；对于这类态射，他的广义态射提供了另一种视角 [LG99，定义 2。3]。

处理 étale 群胚 G时，开双截面 $U \subseteq G$ 尤为重要，我们也将其称为切片。给定一个 étale 对应 $\Omega\colon G \to H$，切片 $U \subseteq \Omega$ 是一个开集，满足 $q\colon \Omega \to \Omega/H$ 和 $\sigma\colon \Omega \to H^0$ 在 U 上是单射。若还有另一个 étale 对应 $\Lambda\colon H \to K$，则切片 $U \subseteq \Omega$ 与 $V \subseteq \Lambda$ 的复合 $V \circ U \subseteq \Omega \times_H \Lambda$ 是如下切片

$$V \circ U := \{[u,v]_H \in \Omega \times_H \Lambda \mid (u,v) \in U \times_{H^0} V\}.$$

给定一个 étale 对应 $\Omega\colon G \to H$，存在一个对应

$$C^*(\Omega)\colon C^*(G) \to C^*(H)$$

满 C^*-代数 [AKM22，第 7] 由 $C_c(\Omega)$[8]完备化得到。此构造与对应的复合相容。当 $C^*(\Omega)$ 对应 Ω 适当时，该对应也是适当的，因此在 K理论中诱导出一个映射。

4. 诱导Banach空间

本节将描述如何利用 étale 对应 $\Omega\colon G \to H$，从一个 H-C*-代数诱导出一个 G-C*-代数。为在 KK理论层面实现这一点，我们还将从 H 和 G-巴拿赫空间的角度，讨论诱导希尔伯特模以及紧算子空间。

定义 4.1 (诱导Banach空间)。设 $\Omega\colon G \to H$ 是一个豪斯多夫 étale 对应，且 A 是一个 H-巴拿赫空间。我们将诱导巴拿赫空间 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 定义为满足以下条件的截面空间 $\xi \in \Gamma_b(\Omega\ \sigma^*A)$:

- 对于每个 $\omega \in \Omega$ 和 $h \in H^{\sigma(\omega)}$，都有 $\xi(\omega \cdot h) = h^{-1} \cdot \xi(\omega)$，并且
- 映射 $[\omega]_H \mapsto \|\xi(\omega)\|\colon \Omega/H \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 在无穷远处消失。

这是一个巴拿赫空间，其范数为 $\|\xi\| = \sup_{\omega\in\Omega}\|\xi(\omega)\|$。

命题 4.2。设 $\Omega\colon G \to H$ 为一个豪斯多夫 étale 对应，并设 A为一个 H-巴拿赫空间。则 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 可赋予 $C_0(\Omega/H)$-巴拿赫空间和 $C_0(G^0)$-巴拿赫空间的结构，其结构映射如下。对于$\gamma \in C_0(\Omega/H)$、 $\delta \in C_0(G^0)$ 和 $\xi \in \mathrm{Ind}_\Omega A$，我们对每个 $\omega \in \Omega$ 定义 $(\gamma \cdot \xi)(\omega) = \gamma([\omega]_H)\xi(\omega)$ 以及 $(\delta \cdot \xi)(\omega) = \delta(\rho(\omega))\xi(\omega)$。

证明。我们只需验证 $C_0(\Omega/H)$ 和$C_0(G^0)$ 在 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 上的作用是非退化的。对于每个 $\xi \in \mathrm{Ind}_\Omega A$ 和 $\epsilon > 0$，都存在一个紧集 $K \subseteq \Omega/H$，使得对 $\omega \in \Omega$ 中满足 $[\omega]_H$ 的元素，有 $\|\xi(\omega)\| < \epsilon$。存在 $[0,1]$-值函数 $\gamma \in C_c(\Omega/H)$ 和 $\delta \in C_c(G^0)$，使得 $\gamma = 1$ 在 K 上成立，且 $\delta = 1$ 在 $\overline{\rho}(K)$ 上成立。根据构造，我们有 $\|\gamma \cdot \xi - \xi\| < \epsilon$ 和 $\|\delta \cdot \xi - \xi\| < \epsilon$。□

[8]当 X 不是豪斯多夫空间时，记号 $C_c(X)$ 是一种滥用记号，指的是函数集合 $X \to \mathbb{C}$，其中的函数不一定连续，且可以写成有限个函数之和；这些函数在开豪斯多夫子空间 $U \subseteq X$ 之外取值为零，并且在 U上连续且紧支撑。

我们可以通过以 H-等变的方式，将某个切片 $U \subseteq \Omega$ 上具有紧支撑的截面延拓，从而构造出大量诱导Banach空间的元素。

命题 4.3。设 $\Omega\colon G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应，且 A是一个 H-巴拿赫空间。假设 $\eta \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{A})$ 在切片 $U \subseteq \Omega$ 上紧支撑。那么，由下式定义的 η 的 H- 等变延拓 $\tilde{\eta}$: $\Omega \to \sigma^*\mathcal{A}$

$$\tilde{\eta}\colon \omega \mapsto \sum_{h \in H^{\sigma(\omega)}} h \cdot \eta(\omega \cdot h)$$

是 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 中的一个元素，且满足 $\|\tilde{\eta}\| = \|\eta\|_\infty$。若 $\mathcal{U}$ 是 Ω 的一个由切片构成的开覆盖，则这类元素（ $U \in \mathcal{U}$ 取遍相应取值）的线性张成在 $\mathrm{Ind}_\Omega A$中稠密。

证明。 考虑值域映射 $r\colon \Omega \rtimes H \to \Omega$ 以及连续截面

$$(\omega, h) \mapsto h \cdot \eta(\omega \cdot h)\colon \Omega \rtimes H \to r^*\sigma^*\mathcal{A}.$$

由于 η 是紧支撑的，且 $\Omega \rtimes H$ 是适当的，因此该截面相对于 $r\colon \Omega \rtimes H \to \Omega$具有适当支撑。引理 2.20 因此保证 $\tilde{\eta}$定义良好且连续。它是 H-等变的，并且按构造，其支撑在 Ω/H 中的像是紧的，故定义了 $\mathrm{Ind}_\Omega A$中的一个元素。由于 η 支撑在一个切片上，对每个 $\omega \in \Omega$ 求和时至多有一项非零，因此 $\|\tilde{\eta}\| = \|\eta\|_\infty$。

子空间 $C_c(\Omega/H)\ \mathrm{Ind}_\Omega A$ 在 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 中稠密，并且 $C_c(\Omega/H)$ 由所有 $U \in \mathcal{U}$ 上的 $C_c(q(U))$ 张成，其中 $q\colon \Omega \to \Omega/H$ 是商映射。$C_c(q(U))\ \mathrm{Ind}_\Omega A$ 中的任意元素都是其在 U 上的限制的 H- 等变延拓，因此，H- 等变延拓在 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 中稠密线性张成。□

命题 4.4。设 $\Omega\colon G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应，设 A 是一个 H-巴拿赫空间，并设 $x \in G^0$。那么，$(\mathrm{Ind}_\Omega A)_x$ 在 $x \in G^0$ 处的纤维，是 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 作为 $C_0(G^0)$- 巴拿赫空间的截面空间 $\xi \in \Gamma_b(\Omega^x, \sigma^*\mathcal{A})$，满足：

- 对于每个 $\omega \in \Omega^x$ 和 $h \in H^{\sigma(\omega)}$，我们有 $\xi(\omega \cdot h) = h^{-1} \cdot \xi(\omega)$，
- 且映射 $[\omega]_H \mapsto \|\xi(\omega)\|\colon \Omega^x/H \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 在无穷远处消失。

纤维映射 $\mathrm{Ind}_\Omega A \to (\mathrm{Ind}_\Omega A)_x$ 由从 Ω 到 Ω^x的限制给出。对于每个$\omega \in \Omega$，$(\mathrm{Ind}_\Omega A)_{[\omega]_H}$ 在 $[\omega]_H \in \Omega/H$ 处的纤维作为一个 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ $C_0(\Omega/H)$-巴拿赫空间同构于 $A_{\sigma(\omega)}$，其中纤维映射 $\mathrm{Ind}_\Omega A \to A_{\sigma(\omega)}$ 由在ω处的求值给出。

证明。对于每个 $x \in G^0$，限制映射 $\mathrm{Ind}_\Omega A \to \Gamma_b(\Omega^x, \sigma^*\mathcal{A})$ 在$C_0(G^0 \setminus \{x\})\ \mathrm{Ind}_\Omega A$上为零。反之，如果 $\xi \in \mathrm{Ind}_\Omega A$ 在 Ω^x上为零，那么对于每个 $\epsilon > 0$，令 $K = \{\omega \in \Omega \mid \|\xi(\omega)\| \geq \epsilon\}$。集合 $\rho(K) \subseteq G^0$ 是紧的，并且不包含x。因此，我们可以找到一个取值于 $[0,1]$ 的函数 $\gamma \in C_c(G^0 \setminus \{x\})$，使得 ~~$\gamma = 1$在 $\rho(K)$上成立~~。根据构造，$\|\gamma \cdot \xi - \xi\| < \epsilon$，因此 $C_0(G^0 \setminus \{x\})\ \mathrm{Ind}_\Omega A$ 是限制映射 $\mathrm{Ind}_\Omega A \to \Gamma_b(\Omega^x, \sigma^*\mathcal{A})$ 的核。因而，纤维 $(\mathrm{Ind}_\Omega A)_x$ 可以与限制映射的像相识别。对于 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 中的每个元素，其到 Ω^x 的限制是 H-等变的，并且相对于 Ω^x/H在无穷远处消失。对于每个切片 $U \subseteq \Omega$，元素 $\eta \in \Gamma_c(U, \sigma^*\mathcal{A})$ 的 H-等变延拓限制为其限制 $\eta_x \in \Gamma_c(U \cap \Omega^x, \sigma^*\mathcal{A})$ 的 H-等变延拓，其中 η 限制到 Ω^x。这些元素在 $\Gamma_b(\Omega^x, \sigma^*\mathcal{A})$ 中取值于 H-等变截面且相对于 Ω^x/H在无穷远处消失的巴拿赫空间中具有稠密线性张成。因此，该空间就是限制映射的像，从而可与 $(\mathrm{Ind}_\Omega A)_x$相识别。

$\mathrm{Ind}_\Omega A$ 在 Ω/H 上的纤维描述，是关于 G^0的描述的一个特例，因为 Ω 也是一个从 Ω/H 到 H的 étale 对应。在这种情形下，$\Gamma_b(\Omega^{[\omega]_H}, \sigma^*\mathcal{A})$ 中的 H-等变截面在无穷远处消失

关于 $\Omega^{[\omega]_H}/H = \{[\omega]_H\}$ 的截面可通过在 ω 处求值与$A_{\sigma(\omega)}$相对应。□

由于纤维映射由限制和求值给出，因此 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 作为一个 $C_0(G^0)$-巴拿赫空间，在局部上是 $C_0(G^0)$-凸的；作为一个 $C_0(\Omega/H)$-巴拿赫空间，在局部上是 $C_0(\Omega/H)$-凸的。这为我们提供了 $\mathrm{Ind}_\Omega A$中稠密性的一个便利判据。

命题 4.5。设 Ω: $G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应，且 A 是一个 H-巴拿赫空间。设 $\Gamma \subseteq \mathrm{Ind}_\Omega A$ 是一个在 $C_0(\Omega/H)$ 的作用下封闭的向量子空间，使得 $\{\xi(\omega) \mid \xi \in \Gamma\}$ 对于每个 $\omega \in \Omega$在 $A_{\sigma(\omega)}$ 中都是稠密的。那么 Γ 在 $\mathrm{Ind}_\Omega A$中是稠密的。

证明。局部 $C_0(\Omega/H)$-凸性使我们能够将 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 视为一个由 c_0截面组成的空间，因此我们可以应用命题 2.12中的稠密性判据。命题 4.4 中对 Ω/H 上的 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 纤维的描述完成了证明。□

由于 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ over G^0 的纤维本身就是截面空间，因此任何映入伴随丛 $\mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A}$ over G^0 的映射，也可以在 Ω 中的各个点处求值。这些映射的连续性随后可以通过一个取值于 $\mathcal{A}$ 的相关二元函数来理解。这通常是掌握 $\mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A}$ 拓扑的最有效方法。

引理 4.6 (映入诱导丛的映射的连续性)。设 Ω: $G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应，设 A 是一个 H-巴拿赫空间，并考虑诱导丛 $p\colon \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A} \to G^0$。从局部紧豪斯多夫空间 Z 到 $\xi\colon Z \to \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A}$ 的映射连续，当且仅当

- 复合 $g = p \circ \xi\colon Z \to G^0$ 是连续的，并且~
- 对于每个 $\gamma \in C_c(Z)$，映射 $\xi\colon (z,\omega) \mapsto \gamma(z)\xi(z)(\omega)\colon Z \times_{G^0} \Omega \to \mathcal{A}$ 关于 $Z \times_{G^0} \Omega/H$ 是 c_0 的。

证明。我们首先注意到映射

$$(\eta,\omega) \mapsto \eta(\omega)\colon \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A} \times_{G^0} \Omega \to \mathcal{A} \tag{4.1}$$

是连续的。事实上，对于 $\mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A} \times_{G^0} \Omega$ 中的一个收敛网 $(\eta_i,\omega_i) \to (\eta_0,\omega_0)$，我们可以选取 $\nu \in \mathrm{Ind}_\Omega A$，使得 $\nu_{\rho(\omega_0)} = \eta_0$。于是我们得到收敛网 $\eta_i \to \eta_0$和 $\nu_{\rho(\omega_i)} \to \eta_0$，因此 $\eta_i(\omega_i) - \nu(\omega_i) \to 0$。由于 $\nu(\omega_i) \to \eta_0(\omega_0)$，我们有$\eta_i(\omega_i) \to \eta_0(\omega_0)$。

假设 $\xi\colon Z \to \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A}$ 连续。那么 $g = p \circ \xi$ 是两个连续函数的复合。令 π_Z 和 π_Ω 为 $Z \times_{G^0} \Omega$ 上的坐标投影。对于任意 $\mu \in \Gamma_0(Z, g^*\mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A})$，由 (4.1) 的连续性可得连续截面 $(z,\omega) \mapsto \mu(z)(\omega)\colon Z \times_{G^0} \Omega \to \pi_\Omega^*\sigma^*\mathcal{A}$。根据命题 2.12，每个 μ 都可由形如 $\gamma\eta\colon z \mapsto \gamma(z)\eta_{g(z)}$ 的元素逼近，其中 $\gamma \in C_c(Z)$ 且 $\eta \in \mathrm{Ind}_\Omega A$。这些元素映射为有界截面 $Z \times_{G^0} \Omega \to \pi_\Omega^*\sigma^*\mathcal{A}$，它们关于 $Z \times_{G^0} \Omega/H$ 在无穷远处消失。由逼近可知，对于每个 $\mu \in \Gamma_0(Z, g^*\mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A})$，截面 $(z,\omega) \mapsto \mu(z)(\omega)\colon Z \times_{G^0} \Omega \to \pi_\Omega^*\sigma^*\mathcal{A}$ 在无穷远处消失。将此应用于 $\mu = \gamma\xi\colon z \mapsto \gamma(z)\xi(z)$，我们可以得出结论：$\xi$ 关于 $Z \times_{G^0} \Omega/H$ 是 c_0。

~现在假设 $g = p \circ \xi$ 是连续的，并且对于每个$\gamma \in C_c(Z)$，ξ 都是连续的。我们将证明，当 $\|\gamma\|_\infty \le 1$ 时，$\gamma\xi$ 是连续的，因此 ξ必定连续。令 $z_i \to z_0$。令 $x_i = g(z_i)$、$x_0 = g(z_0)$，并令 $\eta \in \mathrm{Ind}_\Omega A$，满足 $\eta_{x_0} = \xi(z_0)$。我们设 $u_i = \gamma(z_i)\eta_{x_i}$，它们收敛到 $\gamma(z_0)\xi(z_0)$。对于每个

$\epsilon > 0$，集合

$$\begin{aligned}&\left\{z \in Z \;\middle|\; \|\gamma(z)(\xi(z) - \eta_{g(z)})\| \geq \epsilon\right\}\\ &= \left\{z \in Z \;\middle|\; \sup_{\omega \in \Omega^{g(z)}} \|\gamma(z)(\xi(z)(\omega) - \eta(\omega))\| \geq \epsilon\right\}\\ &= \bigcap_{\delta \in (0,\epsilon)} \pi_Z\left(\left\{(z, [\omega]_H) \in Z \times_{G^0} \Omega/H \;\middle|\; \|\gamma(z)(\xi(z)(\omega) - \eta(\omega))\| \geq \delta\right\}\right)\end{aligned}$$

它是紧集的连续像的交，因此是闭集。对于足够大的i，我们因此有 $\|\gamma(z_i)\xi(z_i) - u_i\| < \epsilon$，因此 $\gamma(z_i)\xi(z_i) - u_i \to 0$。我们可以得出结论，$\gamma(z_i)\xi(z_i) \to \gamma(z_0)\xi(z_0)$。□

我们可以利用这个引理在 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 上构造一个 G 的作用，从而使 Ind_Ω 实际上将 G-巴拿赫空间从 H-巴拿赫空间诱导出来。

命题 4.7。设 $\Omega\colon G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应，并设A 是一个 H-巴拿赫空间。那么，在巴拿赫丛 $\mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A} \to G^0$ 上，以下给出了 G 的一个（连续）作用。对于 $g \in G$ 和 $\xi \in (\mathrm{Ind}_\Omega A)^{s(g)}$，元素$g \cdot \xi \in (\mathrm{Ind}_\Omega A)^{r(g)}$ 由截面给出

$$g \cdot \xi\colon \omega \mapsto \xi(g^{-1} \cdot \omega)\colon \Omega^{r(g)} \to \sigma^*\mathcal{A}.$$

证明。由引理 2.22，我们可以通过验证对于每个 $\eta \in \mathrm{Ind}_\Omega A$，映射 $g \mapsto g \cdot \eta_{s(g)}$: $G \to \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A}$ 是连续的，来检查作用映射 $(g, \xi) \mapsto g\cdot\xi$: $s^*\mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A} \to r^*\mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{A}$ 是连续的。根据引理 4.6，这归结为验证对于每个 $\gamma \in C_c(G)$，映射 ${}^{G}\times_{r,\, G^0,\, \rho}\Omega \to \mathcal{A}$ 给出的

$$(g, \omega) \mapsto \gamma(g)\eta(g^{-1} \cdot \omega)$$

关于 $G \times_{G^0} \Omega/H$ 是 c_0。令 $\epsilon > 0$，并考虑紧集 $K = \{[\omega]_H \in \Omega/H \mid \|\gamma\|_\infty \|\eta(\omega)\| \geq \epsilon\}$。上述映射与紧集 $\mathrm{supp}^{\gamma} \times_{G^0} (\mathrm{supp}\ \gamma)^{-1} \cdot K \subseteq G \times_{G^0} \Omega/H$ 相距至少 ϵ。□

现在，我们已经具备处理诱导Banach空间所需的全部一般工具，接下来将注意力转向 C*-代数。

命题 4.8. 设 Ω: $G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应，且 A是一个 H-C*-代数。那么，诱导的 G-巴拿赫空间 $\mathrm{Ind}_\Omega A$ 是一个 G-C*-代数。

证明。通过在 Ω 上逐点计算可清楚看出，$C_0(G^0)$ 通过中心乘子作用于 $\mathrm{Ind}_\Omega A$，使其成为一个 $C_0(G^0)$-代数。通过在 $\Omega^{s(g)}$ 上逐点验证可知，每个 $g \in G$ 都在纤维间诱导出一个 $*$-同态 $(\mathrm{Ind}_\Omega A)^{s(g)} \to (\mathrm{Ind}_\Omega A)^{r(g)}$。□

命题 4.9. 设 Ω: $G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应，设 A 是一个H-C*-代数，且 E 是一个 H-*Hilbert* A-模。那么，诱导的 G-巴拿赫空间 $\mathrm{Ind}_\Omega E$ 是一个 *Hilbert* $\mathrm{Ind}_\Omega A$-模，其运算在 Ω 上逐点定义。巴拿赫空间作用 $G \curvearrowright \mathrm{Ind}_\Omega E$ 与 C*-代数作用$G \curvearrowright \mathrm{Ind}_\Omega A$相容。

证明。$\mathrm{Ind}_\Omega E$ 上的逐点运算对于 ξ、$\eta \in \mathrm{Ind}_\Omega E$ 和 $\nu \in \mathrm{Ind}_\Omega A$，由 $\langle\xi, \eta\rangle$定义为: $\omega \mapsto \langle\xi(\omega), \eta(\omega)\rangle$: $\Omega \to \sigma^*\mathcal{A}$ 以及 $\xi \cdot \nu$: $\omega \mapsto \xi(\omega) \cdot \nu(\omega) \in \sigma^*\mathcal{E}$，其中每个 $\omega \in \Omega$均如此。这些运算是有界的、H-等变的，并且相对于Ω/H在无穷远处消失；根据注 2.15，它们还是连续的。因此，$\langle\xi, \eta\rangle \in \mathrm{Ind}_\Omega A$ 以及 $\xi \cdot \nu \in \mathrm{Ind}_\Omega E$，我们便在$\mathrm{Ind}_\Omega E$上获得了内积 $\mathrm{Ind}_\Omega A$-模的结构。这诱导出与$\mathrm{Ind}_\Omega E$ 原有范数相同的范数，因而使 $\mathrm{Ind}_\Omega E$ 成为一个 Hilbert $\mathrm{Ind}_\Omega A$-模。

该命题的陈述中隐含的是，$\mathrm{Ind}_\Omega E$ 上的 $C_0(G^0)$-巴拿赫空间结构与其作为 Hilbert $\mathrm{Ind}_\Omega A$-模所继承的 $C_0(G^0)$-巴拿赫空间结构一致，这一点很容易验证。$G \curvearrowright \mathrm{Ind}_\Omega E$ 与 $G \curvearrowright \mathrm{Ind}_\Omega A$ 的相容性源于这些作用仅置换了进行逐点运算所针对的输入。□

命题 *4.10*（诱导模上可伴算子的纤维）。设 Ω*:* $G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应，设 A 是一个 H-C^*-代数，设 E 和 F 是 H-*Hilbert* A-模，并设 $T \in \mathcal{L}(\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_\Omega F)$。对于每个 $\omega \in \Omega$，存在唯一的算子 $T_\omega \in \mathcal{L}(E_{\sigma(\omega)}, F_{\sigma(\omega)})$，使得对于每个 $\xi \in \mathrm{Ind}_\Omega E$，均有 $T_\omega \xi(\omega) = (T\xi)(\omega)$。

证明。给定 $e \in E_{\sigma(\omega)}$，我们定义 $T_\omega(e)$ 为任意 $\xi \in \mathrm{Ind}_\Omega E$（满足 $\xi(\omega) = e$）对应的 $(T\xi)(\omega)$。这一定义与 ξ 的选取无关，因为对于任意 $\eta \in \mathrm{Ind}_\Omega F$，我们有 $\langle (T\xi)(\omega)\ \eta(\omega)\rangle = \langle T\xi, \eta\rangle(\omega) = \langle \xi, T^*\eta\rangle(\omega) = \langle e, (T^*\eta)(\omega)\rangle$。由此得到算子 $T_\omega \colon E_{\sigma(\omega)} \to F_{\sigma(\omega)}$；对 T^* 运用同样的论证，可得算子 $T_\omega^* \colon F_{\sigma(\omega)} \to E_{\sigma(\omega)}$，它是 T_ω 的伴随。根据构造，对于每个 $\xi \in \mathrm{Ind}_\Omega E$，公式 $T_\omega \xi(\omega) = (T\xi)(\omega)$ 均成立，并且该公式唯一确定 T_ω。□

我们称 T_ω $T \in \mathcal{L}(\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_\Omega F)$ 在 $\omega \in \Omega$ 处的纤维 为其纤维。算子 T由其各纤维唯一确定，此外 $\|T\| = \sup_{\omega\in\Omega}\|T_\omega\|$。对于 $\xi \in \mathrm{Ind}_\Omega E$ 和$\eta \in \mathrm{Ind}_\Omega F$，纤维 $(\Theta_{\eta,\xi})_\omega$ 由 $\Theta_{\eta(\omega),\xi(\omega)}$给出。

命题 *4.11*（诱导模上紧算子的描述）。设 Ω*:* $G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应，A 是一个 H-C^*-代数，且E和 F是 H-*Hilbert* A-模。对于每个 $T \in \mathcal{K}(\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_\Omega F)$，截面 $\omega \mapsto T_\omega$*:* $\Omega \to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 定义了 $\mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{K}(E, F)$ 中的一个元素。此外，这给出了一个等距同构 $\mathcal{K}(\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_\Omega F) \cong \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{K}(E, F)$。

证明。显然，截面 $\omega \mapsto T_\omega$ 有界且为 H-等变。只需证明，对于 $\xi \in \mathrm{Ind}_\Omega E$ 和 $\eta \in \mathrm{Ind}_\Omega F$ 中的 $T = \Theta_{\eta,\xi}$，映射 $[\omega]_H \mapsto \|\Theta_{\eta(\omega),\xi(\omega)}\|$ 关于 Ω/H 连续且在无穷远处消失，因为这类元素在 $\mathcal{K}(\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_\Omega F)$ 中稠密线性张成。映射 $[\omega]_H \mapsto \|\Theta_{\eta(\omega),\xi(\omega)}\|$: $\Omega/H \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 在无穷远处消失，因为对每个 $\omega \in \Omega$，$\|\Theta_{\eta(\omega),\xi(\omega)}\| \leq \|\eta(\omega)\|\|\xi(\omega)\|$。$\omega \mapsto \Theta_{\eta(\omega),\xi(\omega)}$: $\Omega \to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 的连续性由 $(f, e) \mapsto \Theta_{f,e}$: $\mathcal{F} \times_{H^0} \mathcal{E} \to \mathcal{K}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 的连续性推出。

这定义了一个等距映射 φ: $\mathcal{K}(\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_\Omega F) \to \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{K}(E, F)$。$\varphi$的像在 $C_0(\Omega/H)$ 的作用下封闭。对于每个 $\omega \in \Omega$，$\mathcal{K}(E_{\sigma(\omega)}, F_{\sigma(\omega)})$ 中的像包含每个 $\xi \in \mathrm{Ind}_\Omega E$ 和 $\eta \in \mathrm{Ind}_\Omega F$ 对应的 $\Theta_{\eta(\omega),\xi(\omega)}$。这些元素的线性张成稠密，因此根据命题 4.5，$\varphi$ 是满射的。□

命题 *4.12*（诱导模上可伴算子的描述）。设 Ω*:* $G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应，A 是一个 H-C^*-代数，且E和 F是 H-*Hilbert* A-模。对于每个 $T \in \mathcal{L}(\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_\Omega F)$，截面$\omega \mapsto T_\omega$*:* $\Omega \to \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E}, \sigma^*\mathcal{F})$ 有界、严格连续且为 H-等变。此外，这给出了一个等距映射 $\mathcal{L}(\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_\Omega F) \hookrightarrow \Gamma_b(\Omega\ \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E}, \sigma^*\mathcal{F}))$，其像是 H-等变截面。

证明。显然，截面 $\omega \mapsto T_\omega$ 有界且具备 H-等变性。为检验 $(T_\omega)_{\omega\in\Omega}$: $\sigma^*\mathcal{E} \to \sigma^*\mathcal{E}$ 连续，只需检验对于每个切片 $U \subseteq \Omega$ 和每个 $\eta \in \Gamma_c(U, \sigma^*\mathcal{E})$，截面 $u \mapsto T_u\eta(u)$: $U \to \sigma^*\mathcal{E}$连续。此截面是 $T(\tilde{\eta}) \in \mathrm{Ind}_\Omega E$在 U上的限制，其中 $\tilde{\eta} \in \mathrm{Ind}_\Omega E$ of η 是 η的 H-等变延拓。因此它连续，故 $(T_\omega)_{\omega\in\Omega}$: $\sigma^*\mathcal{E} \to \sigma^*\mathcal{E}$连续。伴随 $(T_\omega^*)_{\omega\in\Omega}$: $\sigma^*\mathcal{E} \to \sigma^*\mathcal{E}$同样连续，因此 $\omega \mapsto T_\omega$ 严格连续。

为从有界、严格连续且具备H-等变性的截面 $\omega \mapsto T_\omega \colon \Omega \to \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E}, \sigma^*\mathcal{F})$ 重构一个可伴算子，我们定义 $T(\xi)\colon \omega \mapsto T_\omega(\xi(\omega))$，其中 $\xi \in \operatorname{Ind}_\Omega E$。根据构造，这一截面连续、具备 H-等变性，并且相对于 Ω/H 在无穷远处消失，因此定义了 $\operatorname{Ind}_\Omega F$中的一个元素。我们得到一个算子 $T\colon \operatorname{Ind}_\Omega E \to \operatorname{Ind}_\Omega F$；对 $\omega \mapsto T_\omega^*$应用相同论证，可得到一个算子 $T^*\colon \operatorname{Ind}_\Omega F \to \operatorname{Ind}_\Omega E$，它是 T的伴随。□

5. étale 对应的交叉积

设 $\Omega\colon G \to H$是一个豪斯多夫 étale 对应，且设 $E\colon B \to C$是一个H-等变对应。本节将构造一个对应

$$\Omega \ltimes E \colon G \ltimes \operatorname{Ind}_\Omega B \to H \ltimes C$$

我们称之为 E 关于 Ω 的交叉积 。我们利用空间$\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$（即 $\sigma^*\mathcal{E} \to \Omega$ 的紧支撑截面）构造 $\Omega \ltimes E$。考虑 $\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 上的以下结构：

- 一个取值于 $\Gamma_c(H, s^*\mathcal{C})$ 的内积。对于每个 $\xi, \eta \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$，我们定义$\langle \xi, \eta\rangle \in \Gamma_c(H, s^*\mathcal{C})$，其中 $h \in H$ 满足

$$\langle \xi, \eta\rangle \colon h \mapsto \sum_{\omega \in \Omega_{r(h)}} \langle h^{-1}\cdot \xi(\omega), \eta(\omega \cdot h)\rangle \in C_{s(h)}. \tag{5.1}$$

- 一个右作用 $\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E}) \curvearrowleft \Gamma_c(H, s^*\mathcal{C})$。对于每个 $\xi \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 和$c \in \Gamma_c(H, s^*\mathcal{C})$，我们定义 $\xi\cdot c \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$，其中 $\omega \in \Omega$ 满足

$$\xi \cdot c \colon \omega \mapsto \sum_{h \in H^{\sigma(\omega)}} (h \cdot \xi(\omega \cdot h)) \cdot c(h^{-1}) \in E_{\sigma(\omega)}. \tag{5.2}$$

- 左作用 $\Gamma_c(G, s^* \operatorname{Ind}_\Omega \mathcal{B}) \curvearrowright \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$。对于每个 $b \in \Gamma_c(G, s^* \operatorname{Ind}_\Omega \mathcal{B})$ 和 $\xi \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$，我们定义 $b\cdot \xi \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 对于 $\omega \in \Omega$ 为

$$b \cdot \xi \colon \omega \mapsto \sum_{g \in G_{\rho(\omega)}} (b(g^{-1})(g \cdot \omega)) \cdot \xi(g \cdot \omega) \in E_{\sigma(\omega)}. \tag{5.3}$$

(5.1)、(5.2) 和 (5.3) 中描述的截面确实是紧支撑且连续的，这是将引理 2.20 分别应用于局部同胚 $(\omega, h) \mapsto h\colon \Omega \rtimes H \to H$、$(\omega, h) \mapsto \omega\cdot h\colon \Omega \rtimes H \to \Omega$ 以及 $(g, \omega) \mapsto g\cdot \omega\colon G \ltimes \Omega \to \Omega$ 得到的。直接计算可验证，$\Gamma_c(H, s^*\mathcal{C})$ 和 $\Gamma_c(G, s^* \operatorname{Ind}_\Omega \mathcal{B})$ 在 $\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 上的作用是双线性的，并且保持这些 $*$-代数中的乘法，且

$$\langle -, -\rangle \colon \Gamma_c(\Omega, \sigma^*\mathcal{E}) \times \Gamma_c(\Omega, \sigma^*\mathcal{E}) \to \Gamma_c(H, s^*\mathcal{C})$$

是定义在 $\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 上的厄米半双线性型，并且与其对 $\Gamma_c(H, s^*\mathcal{C})$ 的右作用相容。$\Omega \ltimes E$ 的构造：$G \ltimes \operatorname{Ind}_\Omega B \to H \ltimes C$ 分为两个部分：希尔伯特 $H \ltimes C$-模 $\Omega \ltimes E$ 以及结构映射 $G \ltimes \operatorname{Ind}_\Omega B \to \mathcal{L}(\Omega \ltimes E)$。要将 $\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 完备化为希尔伯特 $H \ltimes C$-模，我们只需要右作用 $\Omega \curvearrowleft H$ 以及 H-希尔伯特 C-模 E 的数据。

命题 *5.1*（交叉积 *Hilbert* 模）。设 H 是一个豪斯多夫 *étale* 群胚，设 C 是一个 H-C^*-代数，设 E 是一个 H-希尔伯特 C-模，并设 Ω 是一个豪斯多夫自由适当 *étale* 右 H- 空间，其锚映射为 $\sigma\colon \Omega \to H^0$。则存在一个希尔伯特 $H \ltimes C$- 模 $\Omega \ltimes E$，其中包含 $\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 的一个稠密副本，其内积和右模结构分别扩展 *(5.1)* 和 *(5.2)*。

证明。 我们希望关于范数补全 $\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$

$$\|\xi\| := \|\langle \xi, \xi\rangle\|_{H\ltimes C}^{\frac{1}{2}} \qquad \xi \in \Gamma_c(\Omega, \sigma^*\mathcal{E})$$

该范数由 $\langle -,-\rangle$ 诱导，从而得到一个 Hilbert $H \ltimes C$-模 $\Omega \ltimes E$。这确实是一个范数，取决于 $\langle -,-\rangle$的正性。设 $\xi \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$。我们旨在证明 $\langle \xi,\xi\rangle$ 是 $H \ltimes C$中的一个正元素。存在有限多个切片 $U_i \subseteq \Omega$ 和$\xi_i \in \Gamma_c(U_i,\sigma^*\mathcal{E})$，满足 $\|\xi_i\|_\infty \leq \|\xi\|_\infty$，使得 $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$。考虑 Hilbert $\mathrm{Ind}_\Omega C$-模 $\mathrm{Ind}_\Omega E$。对于每个 i，内积在 $\Gamma_c(U_i,\sigma^*\mathcal{E})$ 上诱导上确界范数，因此存在一个等距线性映射 $\Phi_i\colon \Gamma_c(U_i,\sigma^*\mathcal{E}) \to \mathrm{Ind}_\Omega E$，由 H-等变延拓给出。将 [MW08, 引理 6.3]的左侧版本应用于左 Hilbert $\mathcal{K}(\mathrm{Ind}_\Omega E)$-模 $\mathrm{Ind}_\Omega E$，对于任意 $\epsilon > 0$，存在有限多个元素 $\nu_j \in \mathrm{Ind}_\Omega E$，使得

$$\sum_{j=1}^m \nu_j \cdot \langle \nu_j, \Phi_k(\xi_k)\rangle \sim_\epsilon \Phi_k(\xi_k)$$

对每个 $1 \leq k \leq n$。我们用 $x \sim_\epsilon y$ 表示 $d(x,y) < \epsilon$。对每个 i， Φ_i 的像是支撑在 $U_i \cdot H$ 中、且限制到 U_i 后具有紧支撑的等变截面集合，而 Φ_i^{-1} 就是限制映射。为了从 ν_j 中恢复 $\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 的元素，我们取 $\varphi_i \in C_c(q(U_i)) \subseteq C_c(\Omega/H)$，使得对 $z \in \bigcup_{k=1}^n q(\mathrm{supp}(\xi_k))$，$\sum_{i=1}^n |\varphi_i(z)|^2 = 1$。然后我们令

$$\eta_{i,j} := \Phi_i^{-1}(\varphi_i \cdot \nu_j) \in \Gamma_c(U_i, \sigma^*\mathcal{E}),$$

它将 $u \in U_i$ 映射到 $\varphi_i([u]_H)\nu_j(u)$。我们声称，$\langle \xi,\xi\rangle$ 可由正算子 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle \eta_{i,j},\xi\rangle^*\langle \eta_{i,j},\xi\rangle$ 逼近。对每个 i, j 和 k，元素$\eta_{i,j}\cdot\langle \eta_{i,j},\xi_k\rangle \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 支撑在 U_k 上，而 $\Phi_k\left(\eta_{i,j}\cdot\langle \eta_{i,j},\xi_k\rangle\right) = (\varphi_i\cdot\nu_j)\cdot\langle \varphi_i\cdot\nu_j, \Phi_k(\xi_k)\rangle$。对 i 和 j 求和，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \Phi_k\left(\eta_{i,j}\cdot\langle \eta_{i,j},\xi_k\rangle\right) &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m (\varphi_i\cdot\nu_j)\cdot\left\langle \varphi_i\cdot\nu_j, \Phi_k(\xi_k)\right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \nu_j\cdot\langle \nu_j, \Phi_k(\xi_k)\rangle \\ &\sim_\epsilon \Phi_k(\xi_k),\end{aligned}$$

且由于 Φ_k 是等距的，我们得到 $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \eta_{i,\ j}\cdot\langle \eta_{i,\ j},\xi_k\rangle \sim_\epsilon \xi_k$。对于 $e_i \in \Gamma_c(U_i,\sigma^*\mathcal{E})$ 和 $e_j \in \Gamma_c(U_j,\sigma^*\mathcal{E})$，内积 $\langle e_i,e_j\rangle \in \Gamma_c(H, s^*\mathcal{C})$ 的支撑包含在一个切片上，并且 $\|\langle e_i,e_j\rangle\| \leq \|e_i\|\|e_j\|$。我们可以计算

$$\begin{aligned}\langle \xi,\xi\rangle &= \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \langle \xi_k,\xi_l\rangle \\ &\sim_{n^2\|\xi\|_\infty\epsilon} \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \left\langle \xi_k, \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \eta_{i,j}\cdot\langle \eta_{i,j},\xi_l\rangle \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \langle \eta_{i,j},\xi\rangle^*\langle \eta_{i,j},\xi\rangle.\end{aligned}$$

令 ϵ 趋于 0，我们得出 $\langle \xi,\xi\rangle \geq 0$。

如果 $\xi \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 满足 $\langle \xi、\ \xi\rangle = 0$，那么对于每个 $y \in H^0$，我们有 $\langle \xi、\ \xi\rangle(y) = \sum_{\omega\in\Omega_y}\langle \xi(\omega)\ \xi(\omega)\rangle = 0$，因此 $\xi = 0$。这意味着，$\langle -、\ -\rangle$ 在 $\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 上诱导出一个范数。完备化 $\Omega \ltimes E$ 配备了一个内积 $\langle -、\ -\rangle\colon \Omega \ltimes E \times \Omega \ltimes E \to H \ltimes C$。由连续性，右作用 $\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E}) \times \Gamma_c(H、\ s^*\mathcal{C}) \to \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 完备化为右作用 $\Omega \ltimes E \times H \ltimes C \to \Omega \ltimes E$。$\langle -、\ -\rangle$ 与 $H \ltimes C$ 的右作用相容，这一点由连续性可知。因此，$\Omega \ltimes E$ 是一个 Hilbert $H \ltimes C$-模。□

我们注意到，对于一个豪斯多夫 étale 对应 Ω：$G \to H$，交叉积 Hilbert $C^*(H)$-模 $\Omega \ltimes C_0(H^0)$ 与 [AKM22 第 7] 节中构造的 Hilbert $C^*(H)$-模$C^*(\Omega)$ 相同。不过，我们考虑的是代数 $G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega C_0(H^0) \cong C^*(G \ltimes \Omega/H)$ 通过可伴随算子施加的左作用，而不是 $C^*(G)$ 的左作用。

命题 *5.2*（交叉积对应的结构映射）。设 Ω：$G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应，且 E：$B \to C$ 是一个 H-等变对应。那么，公式 *(5.3)* 所述的左作用 $\Gamma_c(G, s^* \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{B}) \curvearrowright \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 可延拓为一个 $*$-同态 $G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega B \to \mathcal{L}(\Omega \ltimes E)$。由此，$\Omega \ltimes E$ 具有从 $G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega B$ 到 $H \ltimes C$的对应结构；若 E 是适当的，则该对应是适当的。

证明。左作用 $\Gamma_c(G, s^* \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{B}) \curvearrowright \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 保持卷积，并且在 $\Gamma_c(G, s^* \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{B})$ 中保持伴随运算，即对于任意 $a, b \in \Gamma_c(G, s^* \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{B})$ 及 $\eta, \xi \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$，有

$$a \cdot (b \cdot \xi) = (a * b) \cdot \xi \quad \text{and} \quad \langle a \cdot \xi, \eta \rangle = \langle \xi, a^* \cdot \eta \rangle.$$

为了证明作用映射的像

$$\Gamma_c(G, s^* \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{B}) \times \Gamma_c(\Omega, \sigma^*\mathcal{E}) \to \Gamma_c(\Omega, \sigma^*\mathcal{E})$$

具有稠密线性张成，只需对任意切片$U \subseteq \Omega$逼近 $\xi \in \Gamma_c(U, \sigma^*\mathcal{E})$，因为这些元素稠密线性张成 $\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$。对于每个 $\epsilon > 0$，我们可以取 $\eta \in \Gamma_c(U, \sigma^*\mathcal{B})$，使得 $\|\eta \cdot \xi - \xi\|_\infty < \epsilon$。通过 H-等变延拓，我们得到一个元素$\tilde{\eta} \in \mathrm{Ind}_\Omega B$，其相对于$\Omega/H$具有紧支撑。因此，相应的截面$\hat{\eta} \in \Gamma_0(G^0, \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{B})$具有紧支撑。根据构造，$\|\hat{\eta} \cdot \xi - \xi\| = \|\eta \cdot \xi - \xi\|_\infty < \epsilon$。

由于左作用是非退化的，并且保持卷积与伴随运算，因此它可由引理 2.23 延拓为一个非退化表示 $\Gamma_c(G, s^* \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\Omega \ltimes E)$。继而，它延拓为一个非退化表示 $G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega B \to \mathcal{L}(\Omega \ltimes E)$。

现在假设 E：$B \to C$ 是适当的，因此 B 通过紧算子作用于E。因此，$\mathrm{Ind}_\Omega B$ 在 $\Omega \ltimes E$ 上的作用可因子化为 $\mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{K}(E)$ 在 $\Omega \ltimes E$上的作用。对于每个切片 $U \subseteq \Omega$，考虑截面 $\xi, \eta \in \Gamma_c(U, \sigma^*\mathcal{E})$ 及其 H-~等变延拓 $\xi, \tilde{\eta} \in \mathrm{Ind}_\Omega E$。算子 $\Theta_{\tilde{\xi},\ \tilde{\eta}} \in \mathcal{K}(\mathrm{Ind}_\Omega E) = \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{K}(E)$ 在 $\Omega \ltimes E$ 上作用为紧算子 $\Theta_{\xi,\ \eta}$。遍历所有切片，形如 $\Theta_{\tilde{\xi},\ \tilde{\eta}} \in \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{K}(E)$ 的算子具有稠密线性张成，因此我们可以得出结论：$\mathrm{Ind}_\Omega B$，进而 $G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega B$，通过紧算子作用于 $\Omega \ltimes E$。□

例 5.3。考虑与豪斯多夫 étale 群胚 G 及局部紧豪斯多夫 G-空间 Z 相关联的作用对应 Ω：$G \to G \ltimes Z$，其锚映射为 τ：$Z \to G^0$。诱导函子 Ind_Ω 与遗忘映射 τ_* 一致；该映射将一个 $G \ltimes Z$-C*-代数 B 的底层 C*-代数赋予 G的自然作用。特别地，交叉积 $G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega B$ 与 $(G \ltimes Z) \ltimes B$ 可以识别。通过这一识别，$G \ltimes Z$-等变对应 E：$B \to C$ 的交叉积 $\Omega \ltimes E$ 与通常的交叉积 $(G \ltimes Z) \ltimes E$：$(G \ltimes Z) \ltimes B \to (G \ltimes Z) \ltimes C$一致。

尽管对应 $\Omega \ltimes E$：$G \ltimes B \to H \ltimes C$通常不会在无系数的情形下特化为对应 $C^*(\Omega)$：$C^*(G) \to C^*(H)$，但唯一的差异在于结构映射，我们可以如下恢复 $C^*(\Omega)$：$C^*(G) \to C^*(H)$。G-等变映射 $\overline{\rho}$：$\Omega/H \to G^0$ 诱导出结构映射 $C_0(G^0) \to M(C_0(\Omega/H))$，从而得到一个 G-等变对应

$$E_\Omega = C_0(\Omega/H) \colon C_0(G^0) \to \mathrm{Ind}_\Omega C_0(H^0),$$

如果 Ω 是适当的，则该对应也是适当的。

命题 5.4。 设 Ω: $G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应。那么复合

$$\Omega \ltimes C_0(H^0) \circ G \ltimes E_\Omega \colon G \ltimes C_0(G^0) \to H \ltimes C_0(H^0)$$

同构于 C*-对应 C^*(Ω): $C^*(G) \to C^*(H)$。

证明。 该对应所基于的 Hilbert $G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega C_0(H^0)$-模本身就是 $G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega C_0(H^0)$，这是在将 $C_0(\Omega/H)$ 与 $\mathrm{Ind}_\Omega C_0(H^0)$ 视为相同之后得到的。因此，将 $\Omega \ltimes C_0(H^0)$ 与 $G \ltimes E_\Omega$ 复合不会改变其底层 Hilbert $H \ltimes C_0(H^0)$-模，而结构映射 $G \ltimes C_0(G^0) \to \mathcal{L}(\Omega \ltimes C_0(H^0))$ 满足

$$a \cdot (b \cdot e) = (a \cdot b) \cdot e$$

对每个 $a \in G \ltimes C_0(G^0)$、 $b \in G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega C_0(H^0)$ 和 $e \in \Omega \ltimes C_0(H^0)$ 都成立。取 $a \in C_c(G)$ 和 $b \in C_0(\Omega/H)$，我们可以将元素 $a \cdot b \in G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega C_0(H^0)$ 描述为 $\Gamma_c(G, s^*\mathcal{E}_\Omega)$ 中的一个元素；它在 $g \in G$ 处是元素 $(a \cdot b)(g) \in (\mathrm{Ind}_\Omega C_0(H^0))_{s(g)} \subseteq C_b(\Omega^{s(g)})$，其在 $\omega \in \Omega^{s(g)}$ 处由下式给出

$$(a \cdot b)(g) \colon \omega \mapsto a(g) b([\omega]_H).$$

因此，我们可以将 $a \in C_c(G)$、 $b \in C_0(\Omega/H)$ 和 $e \in C_c(\Omega)$代入（5.3）以计算 $a \cdot (b \cdot e) \in C_c(\Omega)$在 $\omega \in \Omega$处的值：

$$(a \cdot (b \cdot e))(\omega) = ((a \cdot b) \cdot e)(\omega) = \sum_{g \in G_{\rho(\omega)}} a(g^{-1}) b([g \cdot \omega]_H) e(g \cdot \omega).$$

这确定了结构映射，因为 $\Omega \ltimes C_0(H^0)$ 中形如 $b \cdot e \in C_c(\Omega)$ 的元素构成稠密集，而 $C_c(G)$ 在 $G \ltimes C_0(G^0)$ 中稠密。由于这与对应 $C^*(\Omega)$: $C^*(G) \to C^*(H)$ [AKM22 的结构映射一致，在识别 $C^*(G) = G \ltimes C_0(G^0)$、 $C^*(\Omega) = \Omega \ltimes C_0(H^0)$ 和 $C^*(H) = H \ltimes C_0(H^0)$ 后，C*- 对应是同构的。 □

引理5.5。 设 Ω: $G \to H$ 是一个豪斯多夫 *étale* 对应，且 $E \colon B \to C$是一个 H-等变对应。那么存在以下对应的同构

$$\Phi \colon G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega E \otimes_{G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega C} \Omega \ltimes C \cong \Omega \ltimes E$$
$$\Psi \colon \Omega \ltimes B \otimes_{H \ltimes B} H \ltimes E \cong \Omega \ltimes E$$

从 $G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega B$ 到 $H \ltimes C$，使得对每个

$$\xi \in \Gamma_c(G, s^* \mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{E}) \subseteq G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega E, \qquad \eta \in \Gamma_c(\Omega, \sigma^*\mathcal{C}) \subseteq \Omega \ltimes C,$$
$$\mu \in \Gamma_c(\Omega, \sigma^*\mathcal{B}) \subseteq \Omega \ltimes B, \qquad \nu \in \Gamma_c(H, s^*\mathcal{E}) \subseteq H \ltimes E,$$

我们有 $\Phi(\xi \otimes \eta) \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E}) \subseteq \Omega \ltimes E$以及 $\Psi(\mu \otimes \nu) \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E}) \subseteq \Omega \ltimes E$，由下式给出

$$\Phi(\xi \otimes \eta) \colon \omega \mapsto \sum_{g \in G_{\rho(\omega)}} (\xi(g^{-1})(g \cdot \omega)) \cdot \eta(g \cdot \omega),$$
$$\Psi(\mu \otimes \nu) \colon \omega \mapsto \sum_{h \in H^{\sigma(\omega)}} (h \cdot \mu(\omega \cdot h)) \cdot \nu(h^{-1}).$$

此外，对于每个 $T \in \mathcal{L}(\mathrm{Ind}_\Omega E)$ 和 $\lambda \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E}) \subseteq \Omega \ltimes E$，元素$\Phi(G \ltimes T \otimes 1)\Phi^{-1}(\lambda) \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E}) \subseteq \Omega \ltimes E$ 由下式给出

$$\Phi(G \ltimes T \otimes 1)\Phi^{-1}(\lambda) \colon \omega \mapsto T_\omega \lambda(\omega).$$

证明。 我们通过如下定义双线性映射 $u\colon \Gamma_c(G, s^*\operatorname{Ind}_\Omega \mathcal{E}) \times \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{C}) \to \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$

$$u(\xi,\eta)\colon \omega \mapsto \sum_{g\in G_{\rho(\omega)}} (\xi(g^{-1})(g\cdot\omega))\cdot\eta(g\cdot\omega).$$

对于每个 $\xi\in\Gamma_c(G, s^*\operatorname{Ind}_\Omega\mathcal{E})$ 和 $\eta\in\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{C})$。通过将引理 2.20 应用于源映射 $(g,\omega)\mapsto\omega\colon G\ltimes\Omega\to\Omega$，可知截面 $u(\xi,\eta)$ 是连续且紧支撑的。双线性映射 u 保持取值于 $\Gamma_c(H, s^*\mathcal{C})\subseteq H\ltimes C$ 的内积，并且交织 $\Gamma_c(G, s^*\operatorname{Ind}_\Omega\mathcal{B})$ 的左作用和 $\Gamma_c(H, s^*\mathcal{C})$ 的右作用。因此，它延拓为一个保持内积的映射$\Phi\colon G\ltimes\operatorname{Ind}_\Omega E\otimes_{G\ltimes\operatorname{Ind}_\Omega C}\Omega\ltimes C\to\Omega\ltimes E$。若限制到一个切片 $U\subseteq\Omega$，则$\Gamma_c(U,\sigma^*\mathcal{E})\subseteq\Omega\ltimes E$ 上的范数是一致范数。给定一个切片 $V\subseteq G$、$\xi\in\Gamma_c(V, s^*\operatorname{Ind}_\Omega\mathcal{E})$ 和 $\eta\in\Gamma_c(U,\sigma^*\mathcal{C})$，截面 $\Phi(\xi\otimes\eta)$ 的支撑包含于切片 $V\cdot U\subseteq\Omega$，并满足

$$\Phi(\xi\otimes\eta)(g\cdot\omega) = (\xi(g)(\omega))\cdot\eta(\omega)$$

对每个 $g\in V$ 和 $\omega\in U$。根据命题 2.12，此类截面的线性张成在 $\Gamma_c(V\cdot U,\sigma^*\mathcal{E})$ 中稠密 $C_0(V\cdot U)$，因为它们在 $g\cdot\omega\in V\cdot U$的逐点作用下封闭，且对每个

$$\{(\xi(g)(\omega))\cdot\eta(\omega)\mid \xi\in\Gamma_c(V, s^*\operatorname{Ind}_\Omega\mathcal{E}),\ \eta\in\Gamma_c(U,\sigma^*\mathcal{C})\}$$

在 $E_{\sigma(\omega)}$ 中有稠密线性张成。我们可以得出结论，Φ 有稠密像，因此是从 $G\ltimes\operatorname{Ind}_\Omega B$ 到 $H\ltimes C$的对应的同构。Ψ 的构造遵循完全相同的过程。

对每个 $T\in\mathcal{L}(\operatorname{Ind}_\Omega E)$，将 $\lambda\in\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 映至截面 $\omega\mapsto T_\omega\lambda(\omega)\in\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 的映射，在稠密子空间 $\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 上定义了 T的一个作用。该作用可延拓为一个 $*$-同态 $\psi\colon\mathcal{L}(\operatorname{Ind}_\Omega E)\to\mathcal{L}(\Omega\ltimes E)$，使得对于每个 $T\in\mathcal{L}(\operatorname{Ind}_\Omega E)$、$\lambda\in\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 和 $\omega\in\Omega$，都有 $\psi(T)(\lambda)(\omega) = T_\omega\lambda(\omega)$；这是通过将引理 2.23 用于平凡群胚得到的。算子 $\psi(T)\circ\Phi$ 和 $\Phi\circ(G\ltimes T\otimes 1)$ 在简单张量 $\xi\otimes\eta$上与 $\xi\in\Gamma_c(G, s^*\operatorname{Ind}_\Omega\mathcal{E})$ 和 $\eta\in\Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{C})$ 一致，因此 $\Phi(G\ltimes T\otimes 1)\Phi^{-1} = \psi(T)$。□

6. étale 对应的诱导函子

为定义豪斯多夫 étale 对应 $\Omega\colon G\to H$ 的 KK-理论诱导函子 $\operatorname{Ind}_\Omega\colon \mathrm{KK}^H\to\mathrm{KK}^G$，我们使用适当群群胚 $\Omega\rtimes H$ 的截断函数。这样，我们便可以进行平均化过程，将一个算子变为 H-等变算子。

定义 6.1（截断函数）。设 G 是一个 étale 群胚。对于 G，截断函数是指满足以下条件的连续函数 $c\colon G^0\to\mathbb{R}_{\geq 0}$：

- 对每个 $u\in G^0$，都有 $\sum_{g\in G_u} c(r(g)) = 1$，
- 映射 $r\colon \operatorname{supp}(c\circ s)\to G^0$ 是适当的。

étale 对应 $\Omega\colon G\to H$ 的截断函数是 $\Omega\rtimes H$ 的截断函数。由于 $s\colon G\to G^0$ 是开映射，我们有 $\operatorname{supp}(c\circ s) = s^{-1}(\operatorname{supp} c)$，因此，适当性条件等价于对每个紧 $K\subseteq G^0$，$G^K_{\operatorname{supp} c}$ 都是紧的。

例6.2。设 $\varphi\colon G\to H$ 是豪斯多夫 étale 群胚之间的 étale 同态，其相关 étale 对应为 $\Omega_\varphi = G^0\times_{H^0} H$。那么 $c\colon\Omega_\varphi\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 在 $(x,h)\in\Omega_\varphi$ 处的定义为

$$c(x,h) = \begin{cases} 1 & \text{if } h\in H^0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

是一个截断函数。

命题 6.3 (Tu, [Tu99b]中的命题 6.10 和 6.11）。若豪斯多夫 *étale* 群胚 G 存在截断函数，则它是适当的。反之，若 G 是适当的，且其σ轨道空间是 σ-紧的，则它存在截断函数。

定义 6.4 （诱导 Fredholm 算子）。 设 Ω: $G \to H$ 是一个可数第二公理的豪斯多夫 étale 对应，并设 $(E,T) \in \mathbb{E}^H(B,C)$ 是一个 Kasparov 循环。令 c: $\Omega \to \mathbb{R}$ 是一个截断函数。回顾一下，我们可以将 $\mathcal{L}(\mathrm{Ind}_\Omega E)$ 识别为 $\Gamma_b(\Omega\ \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E}))$ 中的 H-等变截面。在此识别下，我们将 Ω 处的诱导 *Fredholm* 算子 $\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T \in \mathcal{L}(\mathrm{Ind}_\Omega E)$ 定义为

$$\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T\colon \omega \mapsto \sum_{h\in H^{\sigma(\omega)}} c(\omega\cdot h)(h\cdot T_{s(h)}) \in \mathcal{L}(E_{\sigma(\omega)}).$$

按构造，截面 $\Omega \to \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E})$ 是 H-等变的，并且由 c 的求和条件可知它有界。为证明严格连续性，我们可以检查对于每个$\xi \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$，以下截面

$$\omega \mapsto \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T(\omega)\xi(\omega) \qquad\qquad \omega \mapsto \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T(\omega)^*\xi(\omega)$$

是连续的。考虑连续截面

$$\begin{aligned} \Omega \rtimes H &\to r^*\sigma^*\mathcal{E} \\ (\omega,h) &\mapsto c(\omega\cdot h)(h\cdot T_{s(h)})(\xi(\omega)). \end{aligned}$$

将 c 的适当性条件与 ξ 的紧支撑结合起来，可知其具有紧支撑。因此，我们可以应用引理2.20 ，推出 $\omega \mapsto \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T(\omega)\xi(\omega)$: $\Omega \to \sigma^*\mathcal{E}$ 是连续的。对伴随算子也可作相同论证，因此诱导 Fredholm 算子 $\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T$: $\Omega \to \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E})$ 严格连续，故定义了 $\mathcal{L}(\mathrm{Ind}_\Omega E)$ 中的一个元素。

引理 6.5。 设 Ω : $G \to H$ 是一个第二可数豪斯多夫 *étale* 对应，设 c: $\Omega \to \mathbb{R}$ 是 Ω 的截断函数，并设 $(E,T) \in \mathbb{E}^H(B,C)$ 是一个 *Kasparov* 循环，其结构映射为 φ: $B \to \mathcal{L}(E)$。那么对于每个 $\omega \in \Omega$，算子

$$\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T(\omega) = \sum_{h\in H^{\sigma(\omega)}} c(\omega\cdot h)(h\cdot T_{s(h)}) \in \mathcal{L}(E_{\sigma(\omega)})$$

是 $T_{\sigma(\omega)}$ 的紧扰动。此外，该紧扰动关于 ω 连续，具体而言，映射

$$\begin{aligned} \sigma^*\mathcal{B} &\to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E}) & \qquad \sigma^*\mathcal{B} &\to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E}) \\ (\omega,b) &\mapsto \varphi_{\sigma(\omega)}(b)(\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T(\omega) - T_{\sigma(\omega)}) & \qquad (\omega,b) &\mapsto (\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T(\omega) - T_{\sigma(\omega)})\varphi_{\sigma(\omega)}(b) \end{aligned}$$

是连续的。

证明。 对于每个 $\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T(\omega)$, $\mathrm{Ind}\ T_{\sigma(\omega)}$ 是 $\omega \in \Omega$ 的紧扰动，这直接由 T 的 Fredholm 性质以及截断函数 c的求和条件得出。为验证两个映射 $\sigma^*\mathcal{B} \to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$ 连续，根据命题 2.14 ，只需验证任意 $b \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{B})$ 都映射为一个连续截面 $\Omega \to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$。该截面

$$\begin{aligned} \Omega \rtimes H &\to r^*\sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E}) \\ (\omega,h) &\mapsto c(\omega\cdot h)\varphi_{\sigma(\omega)}(b(\omega))(h\cdot T_{s(h)} - T_{\sigma(\omega)}) \end{aligned}$$

由 T 的几乎不变性可知，该映射定义良好且连续。结合 c 的适当性条件与

$b \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{B})$。因此，由引理 2.20，截面

$$\begin{aligned}\Omega &\to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})\\ \omega &\mapsto \sum_{h\in H^{\sigma(\omega)}} c(\omega\cdot h)\varphi_{\sigma(\omega)}(b(\omega))(h\cdot T_{s(h)} - T_{\sigma(\omega)})\\ &= \varphi_{\sigma(\omega)}(b(\omega))(\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T(\omega) - T_{\sigma(\omega)})\end{aligned}$$

是良定义的、连续的且紧支撑的。这表明第一个映射$\sigma^*\mathcal{B} \to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$是连续的；同样的论证也表明第二个映射同样连续。□

我们来验证诱导 Fredholm 算子确实定义了一个 Fredholm 算子：

命题 6.6 (诱导 Fredholm 算子)。 设 Ω: $G \to H$ 是另一个可数豪斯多夫 *étale* 对应，设 c: $\Omega \to \mathbb{R}$ 是 Ω 的截断函数，并设$(E,T) \in \mathbb{E}^H(B,C)$是一个 *Kasparov* 循环。那么，$(\operatorname{Ind}_\Omega E, \operatorname{Ind}_{\Omega,c} T)$ 是一个 G-等变的 *Kasparov* $\operatorname{Ind}_\Omega B$-$\operatorname{Ind}_\Omega C$ 循环。

证明。 设 φ: $B \to \mathcal{L}(E)$ 和 $\hat{}\varphi$: $\operatorname{Ind}_\Omega B \to \mathcal{L}(\operatorname{Ind}_\Omega E)$ 是 E: $B \to C$ 与 $\operatorname{Ind}_\Omega E$: $\operatorname{Ind}_\Omega B \to \operatorname{Ind}_\Omega C$ 的结构映射。我们首先验证，对于每个 $\xi \in \operatorname{Ind}_\Omega B$， $\mathcal{L}(\operatorname{Ind}_\Omega E)$ 中的下列算子都是紧的：

$$\hat{\varphi}(\xi)((\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T)^* - \operatorname{Ind}_{\Omega,c} T), \tag{6.1}$$

$$\hat{\varphi}(\xi)((\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T)^* \operatorname{Ind}_{\Omega,c} T - 1), \tag{6.2}$$

$$[\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T, \hat{\varphi}(\xi)]. \tag{6.3}$$

根据命题 4.11 我们可以将 $\mathcal{K}(\operatorname{Ind}_\Omega E)$ 与 $\operatorname{Ind}_\Omega \mathcal{K}(E)$等同起来，因此只需验证这些算子定义了连续截面 $\Omega \to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$。根据 T的 Fredholm 性质，以下是连续截面 $\Omega \rtimes H \to r^*_{\Omega\rtimes H}\sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$:

$$\begin{aligned}(\omega,h) &\mapsto c(\omega\cdot h)(\hat{\varphi}(\xi)(\omega))(h\cdot T^*_{s(h)} - h\cdot T_{s(h)})\\ (\omega,h) &\mapsto c(\omega\cdot h)\left((\hat{\varphi}(\xi)(\omega))(h\cdot T_{s(h)}) - (h\cdot T_{s(h)})(\hat{\varphi}(\xi)(\omega))\right)\end{aligned}$$

根据截断函数 c 的适当性条件，这些算子关于 $(\omega,h) \mapsto \omega$: $\Omega \rtimes H \to \Omega$ 有适当支撑。在 $\omega \in \Omega$ 处对算子 (6.1) 和 (6.3) 求值，可写成将上述算子在 (ω,h) 处的值对 $h \in H^{\sigma(\omega)}$ 求和。因此，根据引理 2.20，这些算子定义了连续截面 $\Omega \to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$，所以 (6.1) 和 (6.3) 是紧的。通过两次应用引理 2.20，可以类似地证明算子 (6.2) 是紧的。

现在我们转而讨论 $\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T$ 的几乎不变性。对于每个 $\xi \in \operatorname{Ind}_\Omega B$，我们的目标是证明该截面

$$g \mapsto \hat{\varphi}_{s(g)}(\xi_{s(g)})\left(g^{-1}\cdot(\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T)_{r(g)} - (\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T)_{s(g)}\right) : G \to s_G^*\mathcal{L}(\operatorname{Ind}_\Omega \mathcal{E})$$

是映入紧算子丛 $s_G^*\mathcal{K}(\operatorname{Ind}_\Omega \mathcal{E})$ 的连续截面。通过将 $\mathcal{K}(\operatorname{Ind}_\Omega \mathcal{E})$ 与 $\operatorname{Ind}_\Omega \mathcal{K}(\mathcal{E})$ 识别，根据引理 4.6，只需验证对于每个 $\gamma \in C_c(G)$，由下式定义的截面 η: $G \ltimes \Omega \to s^*_{G\ltimes\Omega}\mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E})$ 满足

$$\eta\colon (g,\omega) \mapsto \gamma(g)(\hat{\varphi}(\xi)(\omega))(\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T(g\cdot\omega) - \operatorname{Ind}_{\Omega,c} T(\omega))$$

是一个取值于紧算子丛 $s^*_{G\ltimes\Omega}\sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$ 的连续截面，并且相对于 $G \ltimes \Omega/H$ 在无穷远处消失。它相对于$G \ltimes \Omega/H$ 在无穷远处消失，因为 $\xi \in \operatorname{Ind}_\Omega B$ 相对于 Ω/H 在无穷远处消失，且 $\gamma \in C_c(G)$ 具有紧支撑。考虑局部同胚 α: $(g,\omega,h) \mapsto (g,\omega)$: $G \ltimes \Omega \rtimes H \to G \ltimes \Omega$，以及由下式定义的截面 ν: $G \ltimes \Omega \rtimes H \to \alpha^* s^*_{G\ltimes\Omega}\sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$

$$\nu\colon (g,\omega,h) \mapsto \gamma(g)(c(g\cdot\omega\cdot h) - c(\omega\cdot h))(\hat{\varphi}(\xi)(\omega))(h\cdot T_{s(h)} - T_{\sigma(\omega)}).$$

几乎不变性 T 确保 ν 定义良好且连续。结合 $\gamma \in C_c(G)$ 的紧支撑与 $c \circ s_{\Omega \rtimes H}$相对于 $r_{\Omega \rtimes H}$: $\Omega \rtimes H \to \Omega$的适当支集，截面 ν 相对于 α具有适当支集。根据引理 2.20 应用于局部同胚 α: $G \ltimes \Omega \rtimes H \to G \ltimes \Omega$ 和连续截面 ν: $G \ltimes \Omega \rtimes H \to \alpha^* s_{G\ltimes\Omega}^* \sigma^* \mathcal{K}(\mathcal{E})$，截面 $\nu_* = \eta$: $G \ltimes \Omega \to s_{G\ltimes\Omega}^* \sigma^* \mathcal{K}(\mathcal{E})$ 是连续的。由此完成了几乎不变性的证明，因此这一对 $(\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T)$ 是一个 Kasparov 循环。□

现在我们可以定义 étale 对应的诱导函子。

定义 6.7 (诱导函子)。 设 Ω: $G \to H$ 是一个第二可数豪斯多夫 étale 对应。诱导函子 $\mathrm{Ind}_\Omega \mathrm{KK}^H \to \mathrm{KK}^G$ 定义如下。

- 一个 H-C*-代数 $B \in \mathrm{KK}^H$ 被映射到 $\mathrm{Ind}_\Omega B \in \mathrm{KK}^G$。
- 一个类 $[E,T] \in \mathrm{KK}^H(B,C)$ 被映射到类 $[\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T] \in \mathrm{KK}^G(\mathrm{Ind}_\Omega B, \mathrm{Ind}_\Omega C)$，其中 c: $\Omega \to \mathbb{R}$ 是 Ω 的任意一个截断函数。

回顾命题 6.3，Ω 至少有一个截断函数。值得庆幸的是，选用哪个函数并不重要。

命题 *6.8*（诱导函子的良定义性）。设 Ω: $G \to H$ 是一个第二可数豪斯多夫 *étale* 对应，且 $B, C \in KK^H$。对每个截断函数 c: $\Omega \to \mathbb{R}$，映射 $(E,T) \mapsto (\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T)$: $\mathbb{E}^H(B,C) \to \mathbb{E}^G(\mathrm{Ind}_\Omega B, \mathrm{Ind}_\Omega C)$ 保持 *Kasparov* 循环的同伦。此外，该映射与截断函数的选取无关。

证明。 固定一个截断函数 c，并假设 (E_0,T_0) 和 (E_1,T_1) 通过 Kasparov 循环 $(F,S) \in \mathbb{E}^H(B, C([0,1],C))$ 同伦。我们希望找到从 $(\mathrm{Ind}_\Omega E_0, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T_0)$ 到 $(\mathrm{Ind}_\Omega E_1, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T_1)$ 的同伦。在将 $\mathrm{Ind}_\Omega C([0,1],C)$ 认作 $C([0,1], \mathrm{Ind}_\Omega C)$ 后，我们可以取如下 Kasparov 循环作为该同伦：

$$(\mathrm{Ind}_\Omega F, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} S) \in \mathbb{E}^G(\mathrm{Ind}_\Omega B, \mathrm{Ind}_\Omega C([0,1],C)).$$

因此，对于每个截断函数 c，$[E,T] \mapsto [\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T]$: $\mathrm{KK}^H(B,C) \to \mathrm{KK}^G(\mathrm{Ind}_\Omega B, \mathrm{Ind}_\Omega C)$ 定义良好。

现在假设 c_0 和 c_1 是两个不同的截断函数。对于任意 $\xi \in \mathrm{Ind}_\Omega B$，算子 $\xi(\omega) \cdot (\mathrm{Ind}_{\Omega,c_0} T(\omega) - \mathrm{Ind}_{\Omega,c_1} T(\omega))$ 对每个 $\omega \in \Omega$ 都是紧算子，并且根据引理 6.5 随 ω 连续变化。由命题 4.11，该截面定义了一个紧算子，因此 $\mathrm{Ind}_{\Omega,c_0} T$ 和 $\mathrm{Ind}_{\Omega,c_1} T$ 是紧扰动。因此，Kasparov 循环 $(\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_{\Omega,c_0} T)$ 和 $(\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_{\Omega,c_1} T)$ 同伦，所以 $[\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T] \in \mathrm{KK}^G(\mathrm{Ind}_\Omega B, \mathrm{Ind}_\Omega C)$ 与截断函数 c 无关。□

定理 6.9 (诱导函子)。 设Ω: $G \to H$ 是一个第二可数 *Hausdorff étale* 对应。那么 Ind_Ω: $\mathrm{KK}^H \to \mathrm{KK}^G$ 定义了 *Kasparov* 群之间的同态，并保持 *Kasparov* 积和单位类。换言之，Ind_Ω 是一个加性函子。

证明。 赋值 $(E,T) \mapsto (\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T)$ 保持 Kasparov 循环的直和，因此定义了 Kasparov 群之间的同态。 $B \in \mathrm{KK}^H$ 处的单位类由 Kasparov 循环 $(B,0) \in \mathbb{E}^H(B,B)$ 表示，它被映射到 $[\mathrm{Ind}_\Omega B, 0] \in \mathrm{KK}^G(\mathrm{Ind}_\Omega B, \mathrm{Ind}_\Omega B)$ 的单位类。为证明 Ind_Ω 保持 Kasparov 积，我们将证明：若 $(E_1,T_1) \in \mathbb{E}^H(A,B)$、$(E_2,T_2) \in \mathbb{E}^H(B,C)$ 且 $(E,T) \in (E_1,T_1) \#_B (E_2,T_2)$，则

$$(\mathrm{Ind}_\Omega E, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T) \in (\mathrm{Ind}_\Omega E_1, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T_1) \#_{\mathrm{Ind}_\Omega B} (\mathrm{Ind}_\Omega E_2, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T_2).$$

令 $\varphi\colon A \to \mathcal{L}(E)$ 和 $\varphi_1\colon A \to \mathcal{L}(E_1)$ 为 E 和 E_1 的结构映射。我们需要证明：

- 对每个齐次的 $\xi_1 \in \mathrm{Ind}_\Omega E_1$，由 $\xi_2 \mapsto \xi_1 \otimes \xi_2$ 在识别 $\mathrm{Ind}_\Omega E_1 \otimes_{\mathrm{Ind}_\Omega B} \mathrm{Ind}_\Omega E_2 \cong \mathrm{Ind}_\Omega E$ 下给出的算子 $\theta_{\xi_1} \in \mathcal{L}(\mathrm{Ind}_\Omega E_2, \mathrm{Ind}_\Omega E)$ 满足

$$\begin{aligned} &\theta_{\xi_1}(\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T_2) - (-1)^{\deg(\xi_1)}(\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T)\theta_{\xi_1} &&\in \mathcal{K}(\mathrm{Ind}_\Omega E_2, \mathrm{Ind}_\Omega E), \\ &\theta_{\xi_1}(\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T_2)^* - (-1)^{\deg(\xi_1)}(\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T)^*\theta_{\xi_1} &&\in \mathcal{K}(\mathrm{Ind}_\Omega E_2, \mathrm{Ind}_\Omega E). \end{aligned} \tag{6.4}$$

- 对于每个 $\eta \in \mathrm{Ind}_\Omega A$,

$$\mathrm{Ind}_\Omega(\varphi)(\eta)\left[\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T_1 \otimes 1, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T\right]\mathrm{Ind}_\Omega(\varphi)(\eta^*) \geq 0 \bmod \mathcal{K}(\mathrm{Ind}_\Omega E). \tag{6.5}$$

根据命题 4.11 我们可以将 $\mathcal{K}(\mathrm{Ind}_\Omega E_2, \mathrm{Ind}_\Omega E)$ 与 $\mathrm{Ind}_\Omega \mathcal{K}(E_2, E)$识别，因此要证明 (6.4) 中的算子是紧的，只需证明它们定义了连续截面 $\Omega \to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E})$。根据 T 和 T_2的联络条件，截面 $\Omega \rtimes H \to r^*\sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$ 由下式给出

$$(\omega, h) \mapsto c(\omega \cdot h)\left(h \cdot \left(\theta_{h^{-1}\cdot\xi_1(\omega)}(T_2)_{s(h)} - (-1)^{\deg(\xi_1)}T_{s(h)}\theta_{h^{-1}\cdot\xi_1(\omega)}\right)\right)$$

是定义良好的且连续。相对于 $(\omega, h) \mapsto \omega\colon \Omega \rtimes H \to \Omega$，根据截断函数 c的适当性条件，它具有适当支集。根据引理2.20，截面 $\Omega \to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$

$$\begin{aligned} \omega \mapsto &\sum_{h \in H^{\sigma(\omega)}} c(\omega \cdot h)\left(h \cdot \left(\theta_{h^{-1}\cdot\xi_1(\omega)}(T_2)_{s(h)} - (-1)^{\deg(\xi_1)}T_{s(h)}\theta_{h^{-1}\cdot\xi_1(\omega)}\right)\right) \\ &= (\theta_{\xi_1}(\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T_2))(\omega) - (-1)^{\deg(\xi_1)}((\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T)\theta_{\xi_1})(\omega) \end{aligned}$$

定义良好且连续。因而，(6.4)中的第一个算子是紧算子。对 T^* 而非 T 应用相同的论证可知，第二个算子也是紧算子。为证明(6.5)，考虑算子

$$R := \mathrm{Ind}_\Omega(\varphi)(\eta)\left[\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T_1 \otimes 1, \mathrm{Ind}_{\Omega,c} T\right]\mathrm{Ind}_\Omega(\varphi)(\eta^*).$$

为验证 $R \gtrsim 0$，我们声称，只需对 Ω 的某个开覆盖中的每个 U，找到有界连续截面 $k_U\colon U \to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$ 和 $p_U\colon U \to \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E})$，使得对每个 $U \in \mathcal{U}$ 和 $\omega \in U$，都有 $R(\omega) = p_U(\omega) + k_U(\omega)$，且 $p_U(\omega) \geq 0$。这是因为由命题 4.11 和 4.12，限制$\mathcal{L}(\mathrm{Ind}_\Omega E) \to \Gamma_b(U, \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E}))$ 诱导了 C*-代数的一个嵌入

$$\overline{C_0(\Omega/H)\mathcal{L}(\mathrm{Ind}_\Omega E)}/\mathcal{K}(\mathrm{Ind}_\Omega E) \hookrightarrow \prod_{U \in \mathcal{U}} \Gamma_b(U, \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E}))/\Gamma_b(U, \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})).$$

在更大的 C*-代数中，可以检验 R 模紧算子意义下的正性，而这恰好就是我们所声称的充分条件。令 $\mathcal{U}$ 为 Ω 的切片$U \subseteq$构成的开覆盖。令 $a = \mathrm{Ind}_\Omega(\varphi)(\eta)$，使得对于 $\omega \in \Omega$ 有 $a_\omega = \varphi_{\sigma(\omega)}(\eta(\omega))$，并令 $U \in \mathcal{U}$。根据 T和 T_1的正性条件，截面 $R_1 := a[\sigma^*T_1 \otimes 1, \sigma^*T]a^*\colon \Omega \to \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E})$

$$\begin{aligned} R_1\colon \Omega &\to \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E}) \\ \omega &\mapsto a_\omega[(T_1)_{\sigma(\omega)} \otimes 1, T_{\sigma(\omega)}]a_\omega^* \end{aligned}$$

可在 U 上写成一个有界连续截面 $k\colon U \to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$ 与一个正的有界连续截面 $p_U\colon U \to \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E})$ 之和。现在我们的目标是证明，截面 $R - R_1\colon \Omega \to \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E})$ 的值落在紧算子丛中，并且其到该丛中的映射是连续的。我们将用 $\sim$ 表示，$\Gamma_b(\Omega\ \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E}))$ 中两个截面的差属于 $\Gamma_b(\Omega\ \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E}))$。设

$$R_2 := a[\mathrm{Ind}_{\Omega,c} T_1 \otimes 1, \sigma^*T]a^*\colon \Omega \to \mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E}).$$

根据引理 6.5，截面 $\mathrm{Ind}_{\Omega,c}T$ 和 σ^*T 是紧扰动，因此 $R\sim R_2$。根据 T的 Fredholm 性质，有 $[a^*,\sigma^*T]\sim 0$和$[a,\sigma^*T]\sim 0$。令 $b:=\mathrm{Ind}_\Omega(\varphi_1)(\eta)$，于是可计算：

$$\begin{aligned}R-R_1&\sim R_2-R_1\\&=a\left[(\mathrm{Ind}_{\Omega,c}T_1-\sigma^*T_1)\otimes 1,\sigma^*T\right]a^*\\&\sim\left[a((\mathrm{Ind}_{\Omega,c}T_1-\sigma^*T_1)\otimes 1)a^*,\sigma^*T\right]\\&=\left[b(\mathrm{Ind}_{\Omega,c}T_1-\sigma^*T_1)b\otimes 1,\sigma^*T\right].\end{aligned}$$

根据引理 6.5，截面 $b(\mathrm{Ind}_{\Omega,c}T_1-\sigma^*T_1)b\colon\Omega\to\mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E}_1)$ 仍然是逐点紧的，并且连续地取值于紧算子丛 $\sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)$。对于任意次数为 1 的 $\nu\in\Gamma_b(\Omega,\sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E}_1))$，分次交换子 $[\nu\otimes 1,\sigma^*T]=(\nu\otimes 1)\sigma^*T+\sigma^*T(\nu\otimes 1)$ 满足 $[\nu\otimes 1,\sigma^*T]\sim 0$。这是因为对于任意次数相反的齐次$e,f\in\sigma^*E_1$，由 T 是 E_1 的连接可得

$$\begin{aligned}(\Theta_{e,f}\otimes 1)\sigma^*T&=\theta_e\theta_f^*(\sigma^*T)\\&\sim(-1)^{\deg(f)}\theta_e(\sigma^*T_2)\theta_f^*\\&\sim(-1)^{\deg(e)+\deg(f)}(\sigma^*T)\theta_e\theta_f^*\\&=-\sigma^*T(\Theta_{e,f}\otimes 1).\end{aligned}$$

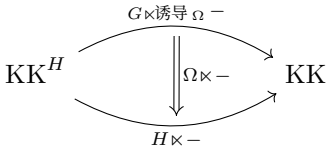
因此，$R-R_1\sim 0$，于是 R 可写成所需的和 p_U+k_U，定义在 U 上，其中 $p_U\colon U\to\mathcal{L}(\sigma^*\mathcal{E})$ 为正，且 $k_U\colon U\to\sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$ 连续且紧。由此可得 $R\gtrsim 0$，因此 $\mathrm{Ind}_{\Omega,c}T$ 是 $\mathrm{Ind}_{\Omega,c}T_1$ 与 $\mathrm{Ind}_{\Omega,c}T_2$ 的 Kasparov 积。□

注 6.10. 为了证明 $\mathrm{Ind}_\Omega\colon \mathrm{KK}^H\to\mathrm{KK}^G$ 保持 Kasparov 乘积，我们也可以援引 [Laf07] 附录中的定理 A.2.2。该定理指出，任意 $\alpha\in\mathrm{KK}^H(B,C)$ 都可以分解为有限串元素，这些元素由等变 $*$-同态诱导，或是由等变 $*$-同态诱导的可逆元素的逆。因此，只需验证：对于 KK^H 中的元素 α 和 β，只要α 或 β 由等变 $*$-同态诱导，就有 $\mathrm{Ind}_\Omega(\alpha\circ\beta)=\mathrm{Ind}_\Omega(\alpha)\circ\mathrm{Ind}_\Omega(\beta)$。

命题 6.11 (交叉积关于 étale 对应在 KK 中的自然性)。设 Ω: $G\to H$ 是一个第二可数豪斯多夫 *étale* 对应，并设 $[E,T]\in\mathrm{KK}^H(B,C)$ 是一个 *Kasparov* 循环。则下图在 KK 中交换。

$$\begin{array}{ccc}G\ltimes\mathrm{Ind}_\Omega B & \xrightarrow{G\ltimes\mathrm{Ind}_\Omega[E,T]} & G\ltimes\mathrm{Ind}_\Omega C\\ \downarrow{\scriptstyle[\Omega\ltimes B,0]} & & \downarrow{\scriptstyle[\Omega\ltimes C,0]}\\ H\ltimes B & \xrightarrow{H\ltimes[E,T]} & H\ltimes C\end{array}\tag{6.6}$$

换言之，将 H-C^*-代数 B 映射到 *Kasparov* 循环$[\Omega\ltimes B,0]\in\mathrm{KK}(G\ltimes\mathrm{Ind}_\Omega B,H\ltimes B)$ 的赋值构成一个自然变换：



证明。 图表（6.6）在对应层面上通过同构

$$\Phi\colon G \ltimes \operatorname{Ind}_\Omega E \otimes_{G\ltimes \operatorname{Ind}_\Omega C} \Omega \ltimes C \cong \Omega \ltimes E$$
$$\Psi\colon \Omega \ltimes B \otimes_{H\ltimes B} H \ltimes E \cong \Omega \ltimes E$$

由引理 5.5。此外，对于每个 $R \in \mathcal{L}(\operatorname{Ind}_\Omega E)$，算子

$$\psi(R) := \Phi(G \ltimes R \otimes 1)\Phi^{-1} \in \mathcal{L}(\Omega \ltimes E)$$

将 $\lambda \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$ 映射到截面 $\omega \mapsto R_\omega\lambda(\omega) \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{E})$。令 $c\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 为 Ω 的截断函数： $G \to H$。由 Φ 可立即得到

$$[\Omega \ltimes E, \psi(\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T)] = [G \ltimes \operatorname{Ind}_\Omega E, G \ltimes \operatorname{Ind}_{\Omega,c} T] \otimes_{G\ltimes \operatorname{Ind}_\Omega C} [\Omega \ltimes C, 0].$$

剩下要证明的是

$$[\Omega \ltimes E, \psi(\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T)] = [\Omega \ltimes B, 0] \otimes_{H\ltimes B} [H \ltimes E, H \ltimes T].$$

归结为验证 $\psi(\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T)$ 是一个 $H \ltimes T$-连接。对于每个$\mu \in \Omega \ltimes B$，设 $T_\mu \in \mathcal{L}(H \ltimes E, \Omega \ltimes E)$ 由 $\nu \mapsto \Psi(\mu \otimes \nu)$ 给出。最终，我们需要验证算子

$$S_\mu := T_\mu(H \ltimes T) - \psi(\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T)T_\mu \qquad \in \mathcal{L}(H \ltimes E, \Omega \ltimes E)$$
$$S'_\mu := T_\mu(H \ltimes T)^* - \psi(\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T)^*T_\mu \qquad \in \mathcal{L}(H \ltimes E, \Omega \ltimes E)$$

是紧的。我们将通过证明 $S^*_\mu S_\mu \in \mathcal{L}(H \ltimes E)$ 是紧的，来证明 S_μ 是紧的。为简化记号，对于 $\omega \in \Omega$，我们记 $b_\omega := \varphi_{\sigma(\omega)}(\mu(\omega))$，其中$\varphi\colon B \to \mathcal{L}(E)$ 是 $E\colon B \to C$ 的结构映射。暂且假设 $\mu \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{B}) \subseteq \Omega \ltimes B$，并考虑如下情况：

- 由下式给出的 Hilbert $H \ltimes \mathcal{K}(E)$-模 $\Omega \ltimes \mathcal{K}(E)$ 中的元素 $\zeta \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E}))$

$$\zeta(\omega) := b_\omega T_{\sigma(\omega)} - \operatorname{Ind}_{\Omega,c} T(\omega)b_\omega \in \mathcal{K}(E_{\sigma(\omega)}),$$

  适当 H-等变对应 $E\colon \mathcal{K}(E) \to C$ 的交叉积的结构映射 $\beta\colon H \ltimes \mathcal{K}(E) \to \mathcal{K}(H \ltimes E)$。

注意， ζ 由引理6.5 及 T 的 Fredholm性质可知是连续的，这蕴含 $\omega \mapsto [b_\omega, T_{\sigma(\omega)}]\colon \Omega \to \sigma^*\mathcal{K}(\mathcal{E})$ 是连续的。我们断言

$$\beta(\langle\zeta, \zeta\rangle) = S^*_\mu S_\mu.$$

尽管我们可以直接计算元素 $\nu \in \Gamma_c(H, s^*\mathcal{E}) \subseteq H \ltimes E$ 上的 S_μ 和 $\beta(\langle\zeta, \zeta\rangle)$，但对于 S^*_μ，我们没有这样的闭式表达式。相反，这个等式源于一项冗长但直接的计算：对于每个 ν_1， $\nu_2 \in \Gamma_c(H, s^*\mathcal{E})$，我们都有

$$\langle S_\mu(\nu_1), S_\mu(\nu_2)\rangle = \langle\beta(\langle\zeta, \zeta\rangle)(\nu_1), \nu_2\rangle \in \Gamma_c(H, s^*B).$$

我们得出，当 $\mu \in \Gamma_c(\Omega\ \sigma^*\mathcal{B})$ 时，$S^*_\mu S_\mu$ 因而 S_μ 是紧的。由于 S_μ在 μ中连续变化，因此对于所有 $\mu \in \Omega \ltimes B$， S_μ 都是紧的。类似地，S'_μ 也是紧的，因此我们已验证 $\psi(\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T)$ 是一个 $H \ltimes T$-连接。由此， $[\Omega \ltimes E, \psi(\operatorname{Ind}_{\Omega,c} T)]$ 是沿图表 (6.6) 两条路径得到的 Kasparov 积。□

注 6.12. 如注 6.10 中所述，我们本可以援引 [Laf07，定理 A.2。2], 它表明，只需验证 $\Omega \ltimes -$ 在等变的
$*$-同态。这由引理 5.5.

定义 6.13 (归纳自然变换)。 设 $\Omega\colon G \to H$ 是一个第二可数豪斯多夫 étale 对应。归纳自然变换

$$\alpha_\Omega\colon K_*(G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega -) \Rightarrow K_*(H \ltimes -)\colon \mathrm{KK}^H \rightrightarrows \mathbf{Ab}_*$$

将一个 H-C*-代数 B 映射为映射 $K_*(\Omega \ltimes B)\colon K_*(G \ltimes \mathrm{Ind}_\Omega B) \to K_*(H \ltimes B)$。

假设 $\Omega\colon G \to H$ 是适当的。那么 $C^*(\Omega)\colon C^*(G) \to C^*(H)$ 是适当的，并在 K 理论中诱导出映射 $K_*(C^*(\Omega))\colon K_*(C^*(G)) \to K_*(C^*(H))$。令 $f_\Omega \in \mathrm{KK}^G(C_0(G^0), \mathrm{Ind}_\Omega C_0(H^0))$ 为由适当的 G- 等变连续映射 $\overline{\rho}\colon \Omega/H \to G^0$ 诱导的元素。根据命题 5.4，我们可以用 Ind_Ω、α_Ω 和 f_Ω 表示 $K_*(C^*(\Omega))$，具体如下

$$K_*(C^*(\Omega)) = \alpha_\Omega(C_0(H^0)) \circ K_*(f_\Omega)\colon K_*(C^*(G)) \to K_*(C^*(H)).$$

7. 对应复合的相容性

命题 7.1. 设 $\Omega\colon G \to H$ 和 $\Lambda\colon H \to K$ 是豪斯多夫 *étale* 对应，且 A 是一个 K-巴拿赫空间。那么存在一个 G-等变等距同构 $\varphi_A\colon \mathrm{Ind}_\Omega \mathrm{Ind}_\Lambda A \cong \mathrm{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A$，其定义如下：

$$\begin{aligned}
\varphi_A\colon \mathrm{Ind}_\Omega \mathrm{Ind}_\Lambda A &\to \mathrm{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A \subseteq \Gamma_b(\Omega \times_H \Lambda, \sigma^*_{\Omega\times_H\Lambda}\mathcal{A}) \\
\xi &\mapsto \varphi_A(\xi) \\
&\quad [\omega,\lambda]_H \mapsto \xi(\omega)(\lambda) \\
\varphi_A^{-1}\colon \mathrm{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A &\to \mathrm{Ind}_\Omega \mathrm{Ind}_\Lambda A \subseteq \Gamma_b(\Omega, \sigma^*_\Omega \mathrm{Ind}_\Lambda \mathcal{A}) \\
\eta &\mapsto \varphi_A^{-1}(\eta) \\
&\quad \omega \mapsto \varphi_A^{-1}(\eta)(\omega) \\
&\qquad \lambda \mapsto \eta([\omega,\lambda]_H)
\end{aligned}$$

证明。 显然，只要这两个映射都良定义，它们就互为逆映射，且是等距的并且 G-等变。我们通过将两个空间视为一个更大的巴拿赫空间中的子空间，并证明同时属于这两个空间的元素在各自空间中都有稠密线性张成，来说明其良定义性。令 $f\colon \Omega \times_{H^0} \Lambda \to K^0$ 为如下映射：它将 $(\omega,\lambda) \in \Omega \times_{H^0} \Lambda$ 映为 $\sigma_\Lambda(\lambda)$。我们可以将 $\mathrm{Ind}_\Omega \mathrm{Ind}_\Lambda A$ 和 $\mathrm{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A$ 视为巴拿赫空间 B 中的子空间，该空间由 $\Omega\times_{H^0}\Lambda \to f^*\mathcal{A}$ 上的有界截面构成。对于 $\xi \in \mathrm{Ind}_\Omega \mathrm{Ind}_\Lambda A, \eta \in \mathrm{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A$ 及 $(\omega,\lambda) \in \Omega \times_{H^0} \Lambda$，我们定义线性等距映射 $\iota_1\colon \mathrm{Ind}_\Omega \mathrm{Ind}_\Lambda A \hookrightarrow B$ 和 $\iota_2\colon \mathrm{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A \hookrightarrow B$，如下：

$$\begin{aligned}
\iota_1(\xi)(\omega,\lambda) &:= \xi(\omega)(\lambda), \\
\iota_2(\eta)(\omega,\lambda) &:= \eta([\omega,\lambda]_H).
\end{aligned}$$

考虑切片 $U \subseteq \Omega$ 以及 $V \subseteq \Lambda$，其中 $\rho_\Lambda(V) \subseteq \sigma_\Omega(U)$。我们利用命题 4.3中的等变延拓构造如下图表。

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma_c(V, \sigma^*_\Lambda \mathcal{A}) & \xrightarrow[\cong]{\alpha} & \Gamma_c(V\circ U, \sigma^*_{\Omega\times_H\Lambda}\mathcal{A}) & \xhookrightarrow{\mathrm{ext}} & \mathrm{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ext}} & & & & \searrow^{\iota_2} \\
\Gamma_c(\sigma_\Omega(U), \mathrm{Ind}_\Lambda \mathcal{A}) & \xrightarrow[\cong]{\beta} & \Gamma_c(U, \sigma^*_\Omega \mathrm{Ind}_\Lambda \mathcal{A}) & \xhookrightarrow{\mathrm{ext}} & \mathrm{Ind}_\Omega \mathrm{Ind}_\Lambda A \xhookrightarrow{\iota_1} B
\end{array} \tag{7.1}$$

注意，对于每个 $\xi \in \Gamma_c(V, \sigma^*_\Lambda \mathcal{A})$，其 K-等变扩张 $\mathrm{ext}(\xi) \in \mathrm{Ind}_\Lambda A$ 的支撑包含于 $\rho_\Lambda(\mathrm{supp}\ \xi) \subseteq \sigma_\Omega(U)$，作为一个截面 $H^0 \to \mathrm{Ind}_\Lambda \mathcal{A}$。映射 α 通过同胚 $[u,v]_H \mapsto v$：$V\circ U \to V$ 定义；对于每个 $\xi \in \Gamma_c(V, \sigma^*_\Lambda \mathcal{A})$ 和 $[\omega,\lambda]_H \in \Omega \times_H \Lambda$，我们有

$$\alpha(\xi)([\omega,\lambda]_H) = \begin{cases} \xi(h^{-1}\cdot\lambda) & \text{there is } h \in H^{\sigma_\Omega(\omega)} \text{ with } \omega\cdot h \in U, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

映射 β通过同胚 $\sigma_\Omega\colon U \to \sigma_\Omega(U)$ 定义；对于 $\xi \in \Gamma_c(V,\sigma_\Lambda^*\mathcal{A})$ 和 $(\omega,\lambda) \in \Omega \times_{H^0} \Lambda$，我们有

$$\beta(\mathrm{ext}(\xi))(\omega)(\lambda) = \begin{cases} \sum_{k\in K^{\sigma_\Lambda(\lambda)}} k\cdot\xi(\lambda\cdot k) & \omega \in U, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们可以计算 $\iota_2(\mathrm{ext}(\alpha(\xi)))$ 和 $\iota_1(\mathrm{ext}(\beta(\mathrm{ext}(\xi))))$ 在 $(\omega,\lambda) \in \Omega\times_{H^0}\Lambda$ 处的值，得到

$$\begin{cases} \sum_{k\in K^{\sigma_\Lambda(\lambda)}} k\cdot\xi(h^{-1}\cdot\lambda\cdot k) & \text{there is } h\in H^{\sigma_\Omega(\omega)} \text{ with } \omega\cdot h\in U, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，图（7.1）可交换。形如 $V\circ U$ 的切片构成 $\Omega \times_H \Lambda$的一个开覆盖，因此，根据命题 4.3，形如 $\mathrm{ext}(\alpha(\xi))$ 的元素在 $\mathrm{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A$中具有稠密线性张成。遍历所有切片 $V \subseteq \Lambda$， K-等变延拓 $\mathrm{ext}(\xi)$ of$\xi \in \Gamma_c(V,\sigma_\Lambda^*\mathcal{A})$ 在 $\mathrm{Ind}_\Lambda A$中具有稠密线性张成。现在假设 $\sum_{i=1}^n \mathrm{ext}(\xi_i)$ 近似于 $\eta \in \Gamma_c(\sigma_\Omega(U), \mathrm{Ind}_\Lambda \mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Ind}_\Lambda A$。我们可以取 $\gamma \in C_c(\sigma_\Omega(U))$，使得$\gamma = 1$ 在 $\mathrm{supp}\ \eta$上成立，并定义 $\gamma\xi_i \in \Gamma_c(V\cap\rho_\Lambda^{-1}(\sigma_\Omega(U))\ \sigma_\Lambda^*\mathcal{A})$ 为 $v \mapsto \gamma(\rho_\Lambda(v))\xi_i(v)$。于是$\sum_{i=1}^n \mathrm{ext}(\gamma\xi_i)$ 近似于 η。这表明，对于固定切片 $U \subseteq \Omega$，在所有满足$\rho_\Lambda(V) \subseteq \sigma_\Omega(U)$的切片 $V \subseteq \Lambda$ 上， H-等变延拓 $\mathrm{ext}(\xi)$ of $\xi \in \Gamma_c(V,\sigma_\Lambda^*\mathcal{A})$ 在 $\Gamma_c(\sigma_\Omega(U), \mathrm{Ind}_\Lambda \mathcal{A})$中具有稠密线性张成。现在令 U变化，形如 $\mathrm{ext}(\beta(\mathrm{ext}(\xi)))$ 的元素在 $\mathrm{Ind}\Omega\mathrm{Ind}_\Lambda A$中具有稠密线性张成。由此可得 $\iota_1(\mathrm{Ind}\Omega\mathrm{Ind}_\Lambda A) = \iota_2(\mathrm{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A)$，因此 φ_A 和 φ_A^{-1} 定义了 $\mathrm{Ind}\Omega\mathrm{Ind}\Lambda$ 与 $\mathrm{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A$之间的等距同构。□

命题 7.2。设 $\Omega\colon G \to H$和 $\Lambda\colon H \to K$是豪斯多夫 *étale* 对应，并且设 $c_\Omega\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 和 $c_\Lambda\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ 是 $\Omega\Omega$ 和 Λ的截断函数。则存在一个截断函数 $c\colon \Omega \times_H \Lambda \to \mathbb{R}$，它对于 $\Lambda\circ\Omega$ 在 $[\omega,\lambda]_H \in \Omega \times_H \Lambda$ 处由下式给出

$$c([\omega,\lambda]_H) = \sum_{h\in H^{\sigma(\omega)}} c_\Omega(\omega\cdot h)c_\Lambda(h^{-1}\cdot\lambda).$$

证明。 我们必须检查 c 是良定义的、连续的，并满足求和条件和适当性条件。求和条件是显然的，良定义性也随之得到。为检查连续性，我们首先检查连续映射

$$c_\Omega \times c_\Lambda\colon (\omega,\lambda) \mapsto c_\Omega(\omega)c_\Lambda(\lambda)\colon \Omega\times_{H^0}\Lambda \to \mathbb{R}$$

相对于局部同胚 $q\colon \Omega\times_{H^0}\Lambda \to \Omega\times_H\Lambda$具有适当支集。设 $\Omega\times_H\Lambda$ $V\subseteq$为紧集，并设 $\Omega\times_{H^0}\Lambda$ $W\subseteq$为满足 $q(W) = V$ 的紧集。我们有 $q^{-1}(V) = W\cdot H$，且 $\mathrm{supp}(c_\Omega\times c_\Lambda) = \mathrm{supp}\, c_\Omega \times_{H^0} \mathrm{supp}\, c_\Lambda$，因此

$$\begin{aligned} q^{-1}(V)\cap\mathrm{supp}(c_\Omega\times c_\Lambda) &= W\cdot H\cap(\mathrm{supp}(c_\Omega)\times_{H^0}\mathrm{supp}(c_\Lambda)) \\ &= \left(W\cdot(\Omega\rtimes H)^{\pi_\Omega(W)}_{\mathrm{supp}(c_\Omega)}\right)\cap\Omega\times_{H^0}\mathrm{supp}(c_\Lambda). \end{aligned}$$

集合 $W\cdot(\Omega\rtimes H)^{\pi_\Lambda(W)}\mathrm{supp}(c_\Omega)$ 是紧的，因为 c_Ω 是一个截断函数，而 W 是紧的。由于 $\Omega^\times{}_{H^0}\mathrm{supp}(c_\Lambda)$ 是闭的， $q^{-1}(V)\cap\mathrm{supp}(c_\Omega\times c_\Lambda)$ 是紧的，因此 $c_\Omega\times c_\Lambda$ 关于 $q\colon \Omega\times_{H^0}\Lambda \to \Omega\times_H\Lambda$ 具有适当支集。函数$c\colon \Omega\times_H\Lambda \to \mathbb{R}$ 是通过对局部同胚 $q\colon \Omega\times_{H^0}\Lambda \to \Omega\times_H\Lambda$ 的各个纤维上的 $c_\Omega\times c_\Lambda$ 的值求和得到的，因此根据引理 2.20，它是连续的。

对于 $c\colon \Omega\times_H\Lambda \to \mathbb{R}$ 的适当性条件，我们可以证明 $(\Omega\times_H\Lambda\rtimes K)^V_{\mathrm{supp}\, c}$是紧的，因为 $V\subseteq\Omega\times_H\Lambda$是任意给定的紧子集。考虑 $\Omega\times_{H^0}\Lambda$ 中由下式给出的集合 $W'\subseteq$

$$W' = W\cdot H\cap(\mathrm{supp}\, c_\Omega\times_{H^0}\Lambda) = W\cdot(\Omega\rtimes H)^{\pi_\Omega(W)}_{\mathrm{supp}\, c_\Omega},$$

该集合是紧的，因为 W 是紧的，而 c_Ω 是一个截断函数。于是存在一个由下式给出的连续满射

$$W' \times_\Lambda (\Lambda \rtimes K)^{\pi_\Lambda(W')}_{\operatorname{supp} c_\Lambda} \to (\Omega \times_H \Lambda \rtimes K)^V_{\operatorname{supp} c}$$
$$((\omega, \lambda), (\lambda, k)) \mapsto ([\omega, \lambda]_H, k).$$

由于 c_Λ 是一个截断函数，因此 $(\Omega \times_H \Lambda \rtimes K)^V_{\operatorname{supp} c}$ 是紧的，故 c 是一个截断函数。□

命题 7.3. 设 $\Omega\colon G \to H$ 和 $\Lambda\colon H \to K$ 是第二可数豪斯多夫 *étale* 对应。则由命题 7.1 与每个 $A \in \mathrm{KK}^K$ 相关联，并诱导出一个自然同构

$$\varphi_{\Omega,\Lambda}\colon \operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda \cong \operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega}\colon \mathrm{KK}^K \rightrightarrows \mathrm{KK}^G.$$

证明。 设 $(E, T) \in \mathbb{E}^K(A, B)$ 是一个 K-等变 Kasparov 循环，设 $c_\Omega\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 和 $c_\Lambda\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ 是 Ω 和 Λ 的截断函数，并设 $c\colon \Omega \times_H \Lambda \to \mathbb{R}$ 是在 $[\omega, \lambda]_H \in \Omega \times_H \Lambda$ 处给出的截断函数

$$c([\omega, \lambda]_H) = \sum_{h \in H^{\sigma(\omega)}} c_\Omega(\omega \cdot h) c_\Lambda(h^{-1} \cdot \lambda).$$

于是，KK^G 中的诱导元素为

$$\operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda [E, T] = [\operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda E, \operatorname{Ind}_{\Omega, c_\Omega} \operatorname{Ind}_{\Lambda, c_\Lambda} T],$$
$$\operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} [E, T] = [\operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} E, \operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega, c} T].$$

识别 φ_E：命题7.1 中的 $\operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda E \cong \operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} E$ 与识别 φ_A 和 φ_B相容。此外，通过 φ_E 进行共轭会将 $\operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega, c} T$ 映射为 $\operatorname{Ind}_{\Omega, c_\Omega} \operatorname{Ind}_{\Lambda, c_\Lambda} T$。因此，

$$\mathrm{KK}^G(\varphi_A) \otimes_{\operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A} \operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} [E, T] = \operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda [E, T] \otimes_{\operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda B} \mathrm{KK}^G(\varphi_B). \quad \square$$

注7.4。这恢复了 Le Gall 的结果：豪斯多夫 étale 群胚之间的 Morita 等价 $G \sim_M H$诱导出等变Kasparov范畴 [之间的等价 $\mathrm{KK}^G \simeq \mathrm{KK}^H$，参见 LG99，定理 7.5]。我们的等价与 Le Gall 的等价自然同构。此外，对于任意 étale Hilsum–Skandalis态射 $\Omega\colon G \to H$（见例3.13），诱导函子 $\operatorname{Ind}_\Omega\colon \mathrm{KK}^H \to \mathrm{KK}^G$ 与 Le Gall 的函子 $\varphi^*\colon \mathrm{KK}^H \to \mathrm{KK}^G$ 自然同构；后者由相关的广义态射 $\varphi\colon G \to H$ [构造，参见 LG99，定义 7.1]。根据复合的相容性（另见 LG99，定理 7.2]），我们只需考虑 étale 同态 $\varphi\colon G \to H$这一特殊情形，因为任意 étale Hilsum–Skandalis态射都可以分解为一个 étale 同态与一个 étale 同态的逆。通过对 Ω_φ 使用截断函数，$\operatorname{Ind}^{\Omega_\varphi}$ 和 φ^* 的构造在例6.2中重合。

命题 7.5。 设 $\Omega\colon G \to H$ 和 $\Lambda\colon H \to K$ 为豪斯多夫 *étale* 对应，设 A为一个 K-C^*-代数，并考虑 G-等变 $*$-同构$\varphi_A\colon \operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda A \to \operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A$ 来自命题 7.1。则下列对应图在同构意义下可交换。

$$\begin{array}{ccc} G \ltimes \operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda A & \xrightarrow{\Omega \ltimes \operatorname{Ind}_\Lambda A} & H \ltimes \operatorname{Ind}_\Lambda A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (G \ltimes \varphi_A, G \ltimes \operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A)}\cong & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Lambda \ltimes A} \\ G \ltimes \operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} A & \xrightarrow{(\Lambda\circ\Omega) \ltimes A} & K \ltimes A \end{array}$$

证明。 我们首先构造一个 Hilbert $K \ltimes A$-模的同构

$$\Phi\colon \Omega \ltimes \operatorname{Ind}_\Lambda A \otimes_{H \ltimes \operatorname{Ind}_\Lambda A} \Lambda \ltimes A \cong (\Lambda \circ \Omega) \ltimes A$$

使得对于每个 $\xi \in \Gamma_c(\Omega \sigma_\Omega^* \operatorname{Ind}_\Lambda \mathcal{A})$ 和 $\eta \in \Gamma_c(\Lambda, \sigma_\Lambda^* \mathcal{A})$，我们都有 $\Phi(\xi \otimes \eta) \in \Gamma_c(\Omega \times_H \Lambda, \sigma^* \mathcal{A})$，其在 $[\omega, \lambda]_H \in \Omega \times_H \Lambda$ 处由下式给出

$$\varphi(\xi, \eta)\colon [\omega, \lambda]_H \mapsto \sum_{h \in H^{\sigma(\omega)}} (\xi(\omega \cdot h)(h^{-1} \cdot \lambda))\eta(h^{-1} \cdot \lambda).$$

截面 $\varphi(\xi, \eta)$ 根据引理 2.20 是连续且紧支撑的，因为它是通过对商映射 $q\colon \Omega \times_{H^0} \Lambda \to \Omega \times_H \Lambda$ 上的纤维求和得到的，而该商映射作用于连续紧支撑截面

$$(\omega, \lambda) \mapsto (\xi(\omega)(\lambda))\eta(\lambda)\colon \Omega \times_{H^0} \Lambda \to \pi_\Lambda^* \sigma_\Lambda^* \mathcal{A}.$$

赋值 $(\xi, \eta) \mapsto \varphi(\xi, \eta)$ 保持 $\Gamma_c(K, s^* \mathcal{A})$ 的右作用，并且保持内积，即对于每个 $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma_c(\Omega \sigma_\Omega^* \operatorname{Ind}_\Lambda \mathcal{A})$ 和 $\eta_1, \eta_2 \in \Gamma_c(\Lambda, \sigma_\Lambda^* \mathcal{A})$，我们有

$$\langle \varphi(\xi_1, \eta_1), \varphi(\xi_2, \eta_2) \rangle = \langle \xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle.$$

因此，我们得到一个内积以及一个保右 $K \ltimes A$-模的映射$\Phi\colon \Omega \ltimes \operatorname{Ind}_\Lambda A \otimes_{H \ltimes \operatorname{Ind}_\Lambda A} \Lambda \ltimes A \to (\Lambda \circ \Omega) \ltimes A$，使得对于每个 $\xi \in \Gamma_c(\Omega \sigma_\Omega^* \operatorname{Ind}_\Lambda \mathcal{A})$ 和 $\eta \in \Gamma_c(\Lambda, \sigma_\Lambda^* \mathcal{A})$，$\Phi(\xi \otimes \eta) = \varphi(\xi, \eta)$。为证明 Φ 是满射，设$U \subseteq \Omega$ 和 $V \subseteq \Lambda$ 为切片，且设 $\xi \in \Gamma_c(U, \sigma_\Omega^* \operatorname{Ind}_\Lambda \mathcal{A})$ 和 $\eta \in \Gamma_c(V, \sigma_\Lambda^* \mathcal{A})$。那么 $\Phi(\xi \otimes \eta)$ 支撑于 $V \circ U \subseteq \Omega \times_H \Lambda$，并满足

$$\Phi(\xi \otimes \eta)([u, v]_H) = (\xi(u)(v))\eta(v)$$

对于 $u \in U$ 和 $v \in V$ 满足 $\sigma_\Omega(u) = \rho_\Lambda(v)$。根据命题2.12，此类截面的稠密线性张成于 $\Gamma_c(V \circ U, \sigma^* \mathcal{A})$，因为它们在 $C_0(V \circ U)$的逐点作用下封闭，并且对于每个 $[u, v]_H \in V \circ U$，集合

$$\{(\xi(u)(v))\eta(v) \mid \xi \in \Gamma_c(U, \sigma_\Omega^* \operatorname{Ind}_\Lambda \mathcal{A}),\ \eta \in \Gamma_c(V, \sigma_\Lambda^* \mathcal{A})\}$$

在 $A_{\sigma_\Lambda(v)}$ 中具有稠密线性张成。令 U 和 V 变化，子空间 $\Gamma_c(V \circ U, \sigma^* \mathcal{A})$ 张成 $\Gamma_c(\Omega \times_H \Lambda, \sigma^* \mathcal{A})$。因此， Φ 具有稠密像，故为 Hilbert $K \ltimes A$-模的同构。原对应图是交换的，因为直接计算可验证，对于 $\xi \in \Gamma_c(\Omega \sigma_\Omega^* \operatorname{Ind}_\Lambda \mathcal{A})$、 $\eta \in \Gamma_c(\Lambda, \sigma_\Lambda^* \mathcal{A})$ 和 $\nu \in \Gamma_c(G, s^* \operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda \mathcal{A})$，有

$$(G \ltimes \varphi_A)(\nu) \cdot \Phi(\xi \otimes \eta) = \Phi(\nu \cdot \xi \otimes \eta). \qquad \square$$

注记 7.6. 给定 étale 群胚 G 的 étale 闭子群胚 H，存在一个 étale 对应 $\Omega = G_{H^0}\colon G \to H$，它可分解为经过 Morita 等价 $\Lambda = G_{H^0}\colon G \ltimes \Omega/H \to H$。对于一个 H-C*-代数 B，诱导代数 $\operatorname{Ind}_H^G B$ 与 $\operatorname{Ind}_\Omega B$ 一致（见 [Bön20]），并且借助例 5.3，我们可以作出如下识别： $G \ltimes \operatorname{Ind}_\Omega B \cong (G \ltimes \Omega/H) \ltimes \operatorname{Ind}_\Lambda B$ 和 $\Omega \ltimes B \cong \Lambda \ltimes B$。根据命题 7.5，交叉积对应 $\Lambda \ltimes B$ 继承了 Λ 的可逆性，因此 $\Omega \ltimes B$ 成为从 $G \ltimes \operatorname{Ind}_H^G B$ 到 $H \ltimes B$ 的印迹双模，从而恢复了 Green 印迹定理 [Gre78] 的一个版本。

推论 7.7. 设 $\Omega\colon G \to H$和 $\Lambda\colon H \to K$是第二可数豪斯多夫 *étale* 对应，并考虑自然同构 $\varphi_{\Omega,\Lambda}\colon \operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda \cong \operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega}\colon \mathrm{KK}^K \rightrightarrows \mathrm{KK}^G$，其来自命题 7.3。则下列自然变换图表

可交换。

$$\begin{array}{ccc} K_*(G \ltimes \operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda -) & \xRightarrow{\alpha_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda} & K_*(H \ltimes \operatorname{Ind}_\Lambda -) \\ \cong\Big\Downarrow{\scriptstyle K_*(G \ltimes \varphi_{\Omega,\Lambda})} & & \Big\Downarrow{\scriptstyle \alpha_\Lambda} \\ K_*(G \ltimes \operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} -) & \xRightarrow{\alpha_{\Lambda\circ\Omega}} & K_*(K \ltimes -) \end{array}$$

给定一个 étale 对应 Ω： $G \to H$，我们在命题 C*5.4 中说明了如何从交叉积 Ω 以及 -等变对应 (Ω): () Ind()恢复 C^*(Ω)： $C^*(G) \to C^*(H)$ 。当 Ω 适当时，由等变适当连续映射 : Ω诱导。我们证明，关联的等变 -同态Ω: C_0(G^0) $\to$ Ind$_\Omega$ C_0(H^0) 也保持 étale 对应的复合。

命题 7.8。 设 Ω: $G \to H$和 $\Lambda\colon H \to K$是适当的第二可数豪斯多夫 *étale* 对应，并考虑 G-等变的 $*$-同构

$$\varphi_{C_0(K^0)}\colon \operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda C_0(K^0) \to \operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} C_0(K^0)$$

由命题 *7.1*，则下图交换。

$$\begin{array}{ccc} C_0(G^0) & \xrightarrow{\overline{\rho}^*_\Omega} & \operatorname{Ind}_\Omega C_0(H^0) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{\rho}^*_{\Lambda\circ\Omega}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \operatorname{Ind}_\Omega(\overline{\rho}^*_\Lambda)} \\ \operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} C_0(K^0) & \xleftarrow[\cong]{\varphi_{C_0(K^0)}} & \operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda C_0(K^0) \end{array}$$

证明。 考虑以下识别

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_\Omega C_0(H^0) &\cong C_0(\Omega/H), \\ \operatorname{Ind}_\Omega \operatorname{Ind}_\Lambda C_0(K^0) &\cong C_0(\Omega \times_H (\Lambda/K)), \\ \operatorname{Ind}_{\Lambda\circ\Omega} C_0(K^0) &\cong C_0((\Omega \times_H \Lambda)/K). \end{aligned}$$

在这些识别下，Ind$_\Omega$($\overline{\rho}^*_\Lambda$) 由适当映射 $[\omega, [\lambda]_K]_H \mapsto [\omega]_H$: Ω $\times_H$ (Λ/K) $\to$ Ω/H 诱导，而 $\varphi_{C_0(K^0)}$ 由同胚诱导

$$[[\omega, \lambda]_H]_K \mapsto [\omega, [\lambda]_K]_H\colon (\Omega \times_H \Lambda)/K \to \Omega \times_H (\Lambda/K).$$

这些 G-等变适当映射连同 $\overline{\rho}_\Omega$ 和 $\overline{\rho}_{\Lambda\circ\Omega}$ 在拓扑空间层面构成交换图，因此 $*$-同态图交换。□

The 本节的结果意味着分解 式

$$K_*(C^*(\Omega)) = \alpha_\Omega(C_0(H^0)) \circ K_*(f_\Omega)\colon K_*(C^*(G)) \to K_*(C^*(H))$$

第6 节末所述的内容与 étale 对应的复合相容。

参考文献

[Alb15] Suliman Albandik。《群胚的余极限构造》。2015年。博士学位论文——哥廷根乔治-奥古斯特大学。[AKM22] Celso Antunes、Joanna Ko 和 Ralf Meyer。群胚对应的双范畴。《纽约数学杂志》，28：1329–1364，2022年。[BCH94] Paul Baum、Alain Connes 和 Nigel Higson。适当作用的分类空间与群 C*代数的 K理论。载于 C*代数：*1943–1993*（德克萨斯州圣安东尼奥，*1993*年），第167卷《当代数学》，第240–291页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1994年。[Bön20] Christian Bönicke。丰群胚的下降原理与 Baum-Connes 猜想。《数学进展》，372：107314，73页，2020年。

[BDGW23] Christian Bönicke、Clément Dell'Aiera、James Gabe 和 Rufus Willett。动态渐近维数与 Matui 的 HK 猜想。伦敦数学会会刊（第3辑），126(4)：1182–1253，2023年。 [BP24] Christian Bönicke 和 Valerio Proietti。关于 étale 群胚 Baum–Connes 猜想的范畴方法。J. Inst. Math. Jussieu，第1–46页，2024年。[BEM12] Alcides Buss、Ruy Exel 和 Ralf Meyer。作为群胚作用的逆半群作用。半群论坛，85(2)：227–243，2012年。 [BHM18] Alcides Buss、Rohit D. Holkar 和 Ralf Meyer。群胚 C*代数的泛性质 I。伦敦数学会会刊（第3辑），117(2)：345–375，2018年。 [BS05] Mădălina Buneci 和 Piotr Stachura。带有 Haar 系统的局部紧群胚的态射。2005年。预印本，arXiv:math/0511613v2。[CEL13] Joachim Cuntz、Siegfried Echterhoff 和 Xin Li。自同构半群作用的交叉积的 K理论。《季刊数学杂志》，64(3)：747–784，2013年。 [CEOO04] J. Chabert、S. Echterhoff 和 H. Oyono-Oyono。下降函子、Künneth 公式与 Baum-Connes 猜想。《几何与泛函分析》，14(3)：491–528，2004年。 [CEL15] Joachim Cuntz、Siegfried Echterhoff 和 Xin Li。关于由 Ore 半群左正则表示生成的 C* 代数的 K 理论。《欧洲数学会杂志》（ JEMS ），17(3)：645–687，2015年。[EGLN15] G. A. Elliott、G. Gong、H. Lin 和 Z. Niu。关于有限分解秩单纯可约 C*代数的分类，II。2015年。预印本，arXiv:1507.03437v3。[FD88] J. M. G. Fell 和 R. S. Doran。 *代数、局部紧群与 Banach *代数丛的表示。第1卷，《纯数学与应用数学》第125卷。Academic Press, Inc.，波士顿，MA，1988年。群与代数的基本表示理论。[Gre78] Philip Green。扭曲协变代数的局部结构。数学学报，140(3-4)：191–250，1978年。 [Hol14] Rohit Dilip Holkar。群胚 C*代数的 C*对应的拓扑构造。2014年。博士学位论文，哥廷根乔治-奥古斯特大学。[Hol17a] Rohit Dilip Holkar。拓扑对应的复合。《算子理论杂志》，78(1)：89–117，2017年。 [Hol17b] Rohit Dilip Holkar。群胚 C*代数的 C*对应的拓扑构造。《算子理论杂志》，77(1)：217–241，2017年。 [Kas95] G. G. Kasparov。 K理论、群 C^*代数与高阶特征（概述）。载于《诺维科夫猜想、指标定理与刚性》第1卷（奥伯沃尔法赫，1993年），《伦敦数学会讲义丛书》第226卷，第101–146页。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[Kir95] Eberhard Kirchberg。精确 C*代数、张量积与纯无穷代数的分类。载于《国际数学家大会论文集》第1、2卷（苏黎世，1994年），第943–954页。Birkhäuser，巴塞尔，1995年。 [Laf07] Vincent Lafforgue。Banach 代数、群胚的双变 K 理论与 Baum–Connes猜想。附 Hervé Oyono-Oyono 的附录。《J. Inst. Math. Jussieu》，6(3)：415–451，2007年。[LG94] Pierre-Yves Le Gall。等变 Kasparov 理论与群胚。1994年。博士学位论文——巴黎第七大学。[LG99] Pierre-Yves Le Gall。等变 Kasparov 理论与群胚。I。《K理论》，16(4)：361–390，1999年。[Li20] Xin Li。每个可分类的单纯 C*代数都有一个 Cartan 子代数。数学发明，219(2)：653–699，2020年。[Li21] Xin Li。半群 C*代数与部分交叉积的 K理论。《数学物理通讯》，2021年。[Mat12] Hiroki Matui。全不连通空间上 étale 群胚的同调与拓扑全群。伦敦数学会会刊（第3辑），104(1)：27–56，2012年。 [Mey08] Ralf Meyer。双变 K 理论及其他三角范畴中的同调代数。II。《第比利斯数学杂志》，1：165–210，2008年。[MN06] Ralf Meyer 和 Ryszard Nest。通过范畴局部化研究 Baum-Connes 猜想。《拓扑学》，45(2)：209–259，2006年。 [MN10] Ralf Meyer 和 Ryszard Nest。双变 K 理论及其他三角范畴中的同调代数。I。载于《三角范畴》，《伦敦数学会讲义丛书》第375卷，第236–289页。剑桥大学出版社，剑桥，2010年。[Mil22] Alistair Miller。通过群胚对应和谱序列研究 étale 群胚 C* 代数的 K理论。2022年。博士学位论文——伦敦玛丽女王大学。[Mil24a] Alistair Miller。由群胚同调理论中的同构得到的 K理论同构。2024年。预印本，arXiv:2401.17240。

[Mil24b] Alistair Miller. 充足群胚同调与 étale 对应。《非交换几何杂志》，2024年，已先行在线发表。[MRW87] Paul S. Muhly、Jean N. Renault 和 Dana P. Williams。群胚 C*-代数的等价与同构。《算子理论杂志》，17(1):3–22，1987年。[MW08] Paul S. Muhly 和 Dana P. Williams。群胚交叉积的 *Renault* 等价定理，载于第 3 卷，《纽约数学杂志》*NYJM* 专著。纽约州立大学奥尔巴尼大学，纽约州奥尔巴尼，2008年。[Phi00] N. Christopher Phillips。核纯无穷简单 C*-代数的分类定理。《数学文献》，5:49–114，2000年。[PY22] Valerio Proietti 和 Makoto Yamashita。动力系统的同调与 K理论 I：无挠充足群胚。《遍历论与动力系统》，42 2660，2022年 8 2630( ): – 。[TWW17] Aaron Tikuisis、Stuart White 和 Wilhelm Winter。核 C*-代数的拟对角性。《数学年刊》（第 *2* 辑），185(1):229–284，2017年。[Tu99a] Jean-Louis Tu。可平均叶状结构的 Baum-Connes 猜想。*K*理论，17(3):215–264，1999年。[Tu99b] Jean-Louis Tu。双曲叶状结构的 Novikov 猜想。*K*理论，16(2):129–184，1999年。[Tu04] Jean-Louis Tu。非 Hausdorff 群胚、适当作用与 K理论。《数学文献》，9:565–597，2004年。[Wil07] Dana P. Williams。交叉积C*-代数，载于第 134 卷，《数学概览与专著》。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2007年。

ALISTAIR MILLER，数学与计算机科学研究所，南丹麦大学，Cam- pusvej 55，欧登塞 M - DK-5230，丹麦，MIL@SDU.DK