九年级学生数学运算能力培养的实践研究

九年级学生数学运算能力培养的实践研究

LIU Yang,北京大学附属中学

LIU Yang，北京大学附属中学

LI Xuedan，北京市顺义牛栏山第一中学

LI Xuedan，北京市顺义牛栏山第一中学

内容提要：本研究结合《义务教育数学课程标准(2011 年版)》及《普通高中数学课程标准(2017年版 2020 年修订)》，参考了 PISA 测评理论的部分内容，确定本次实践研究将着力从算理分析和算法对比两个方向提升九年级学生的数学运算素养水平。选取笔者所在学校九年级学生共 171 人参与实践研究，在 2021 年 9 月至 12 月期间参加了持续开展的数学运算讨论课程。2022 年 1 月，使用全区统一调研试卷作为评价工具，对学生的数学运算能力素养水平进行了相关测试。共收集到有效数据 171 份，随后借助 Excel 365 及 SPSS 23.0 对测评数据进行了整体分析、相关性分析和测评维度分析。

根据实践及测评结果，本文提出以下三点建议，帮助教师提升学生的数学运算素养水平：(1)激发学生学习运算的兴趣；(2)帮助学生更好地明晰算理；(3)提升学生的算法选择能力。

主题词:数学运算 能力培养 实践研究 完成时间:2022年 3 月

摘要

本研究通过文献分析、理论实践以及数据收集与统计分析，对培养学生的数学运算能力开展了实践研究。作者首先收集并分析了相关研究背景文献，以了解相关实践研究的发展现状。本研究以《义务教育数学课程标准（2011年版）》和《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》为依据，并参考了PISA评价理论的部分内容，围绕算法分析与算法比较两个方向，重点提升九年级学生的数学运算素养水平。

作者所在学校共有171名九年级学生参与本次实践研究，其中实验组A有57名学生，实验组B有58名学生，对照组C有56名学生。2021年9月至12月，两个实验组的学生参加了数学运算持续讨论课程。2022年1月，在区级期末统一研究中，使用统一研究试卷作为评价学生数学运算素养水平的工具。共收集到171名学生的有效数据，并使用Excel 365和SPSS 23.0，从综合、相关和维度等方面对评价数据进行了分析。

评价结果显示：（1）实验组和对照组学生的初始数学运算能力水平基本相同，没有显著差异，但经过长期实践，学生的运算能力水平有所提高。（2）通过持续的针对性讨论与研究提升学生数学运算能力水平的程度与性别没有显著相关性，但与学生参与相关讨论的次数呈中等程度的正相关。（3）大多数九年级学生能够达到高中课程标准中数学运算素养的一级要求；持续分析和比较算法与逻辑，在一定程度上能够提高学生达到二级要求的能力。要达到三级要求，还需要进一步研究。

基于实践研究和评价结果，本研究提出了几项建议，以帮助教师提升学生的数学运算素养水平：（1）通过典型问题适度激发学生的探索热情，激发学生学习运算的兴趣，调动其主观能动性，并鼓励他们积极参与。（2）提升数学运算能力不能仅仅依靠刷题，还需要着重选择更具典型性的问题，帮助学生理清算法。（3）在理清算法的同时，也应关注培养学生良好数学思维品质的方法，并通过分析问题、选择最优运算方法来提升其算法选择能力。

九年级学生数学运算能力培养的实践研究

提要　本研究主要通过文献分析、理论实践、收集统计分析等方法，对学生数学运算能力的培养进行了实践研究。笔者首先通过收集和分析相关研究背景的文献，确定了相关实践研究的发展现状；结合《义务教育数学课程标准(2011 年版)》及《普通高中数学课程标准(2017年版 2020 年修订)》，参考PISA测评理论的部分内容，确定本次实践研究着力从算理分析和算法对比两个方向提升九年级学生的数学运算素养水平。选取笔者所在学校九年级的学生共 171 人参与实践研究，设立实验组 A(57 人)、实验组 B(58 人)和对照组 C(56 人)，两个实验组的学生在 2021 年 9 月至 12 月期间参与了持续开展的数学运算讨论课程。2022年 1 月，借助全区期末统一调研的机会，使用统一调研试卷作为评价工具，对学生的数学运算能力素养水平进行了相关测试。共收集到有效数据 171 份，随后借助 Excel 365 及 SPSS 23.0 对测评数据进行了整体分析、相关性分析和测评维度分析。

相关测评结果表明：(1)实验组和对照组学生数学运算能力水平的初始状态基本一致，无显著性差异。经过较长时间的实践，可以看到学生的运算能力水平有所提升；(2)持续开展针对性讨论研究后，学生数学运算能力水平的提升程度与性别没有显著相关性，而与学生参与相关讨论的次数呈中等程度的正相关；(3)九年级学生经过学习，大部分人可以达到高中课程标准中数学运算素养水平一的要求；通过持续分析算理和进行算法对比学习，可以在一定程度上提升学生达到数学运算素养水平二的能力，而如何达到水平三的要求，仍需进一步研究。

根据实践及测评结果，本文提出以下几条建议，帮助教师提升学生的数学运算素养水平：(1)激发学生学习运算的兴趣，调动学生的主观能动性，增强学生的参与意识，并通过典型问题适度激发学生的探讨热情，这些都有助于引导学生主动参与数学运算学习，提高其学习运算的兴趣；(2)数学运算能力的提升不能仅依靠练习题目，还需要在选题上多下功夫。选择更具典型性的题目，可以帮助学生更好地明晰算理；(3)在明晰算理的同时，还要讲究方法，着力培养学生良好的数学思维品质；通过分析题目，选择更优的运算思路，设计合理的运算程序，提升学生的算法选择能力。

一、研究背景

（一）数学运算素养培养的目标要求贯穿基础教育

在《义务教育数学课程标准（2011年版）》中，数学运算能力已被列为描述学生数学能力的十个核心词之一；之后，《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》又将数学运算列为六大数学核心素养之一。这表明，对学生运算素养的培养、提升和评价贯穿整个基础教育过程。

在《义务教育数学课程标准(2011 年版)》中认为“运算能力主要是指能够根据法则和运算律正确地进行运算的能力。培养运算能力有助于学生理解运算的算理,寻求合理简洁的 运算途径解决问题。”[1]

在《普通高中数学课程标准(2017 年版2020 年修订)》中将数学运算列为六大数学 core competencies 之一,其中将数学运算这一 core competencies 界定为“在明晰运算对象的基础上,依据运算法则解决数学问题的素养。”[2]

显然，在这一层面上，义务教育阶段提出的“运算能力”与高中阶段课程标准中界定的“数学运算素养”在核心内涵上是一脉相承的。

当然，高中阶段明确指出，学生要“通过高中数学课程的学习，进一步发展数学运算能力；有效借助运算方法解决实际问题；通过运算促进数学思维发展，形成规范化思考问题的品质，

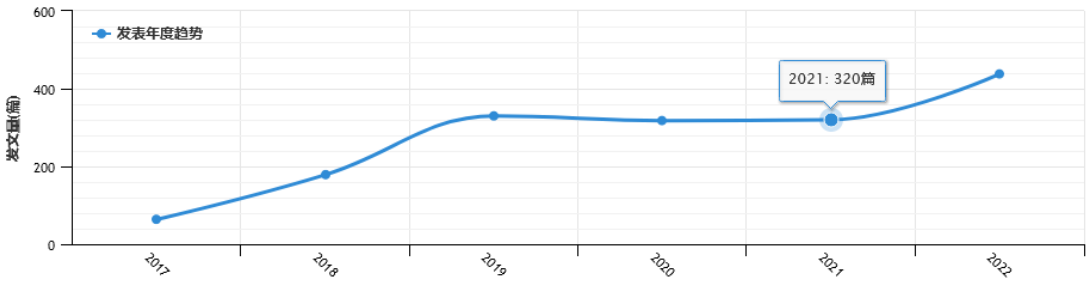
培养一丝不苟、严谨求实的科学精神。”在这个层面上，处于义务教育阶段的学生显然还需要更多的发展和成长。

其中，九年级作为义务教育阶段的最后一年，更应该着力发展学生的数学运算能力，向高中阶段要求的数学运算素养标准靠拢，从而为学生的成长奠定更加坚实的基础。

（二）运算素养培养的实践研究有待深入

通过中国知网论文发布数据趋势分析功能可以发现（图1-1），自《普通高中数学课程标准（2017年版）》发布以来，国内以运算素养为主题的相关研究论文从2018年的179篇迅速增长到2019年的330篇，并持续保持较高的研究热度，2021年发表相关论文320篇。由此可见，国内基础教育领域持续关注运算素养研究。

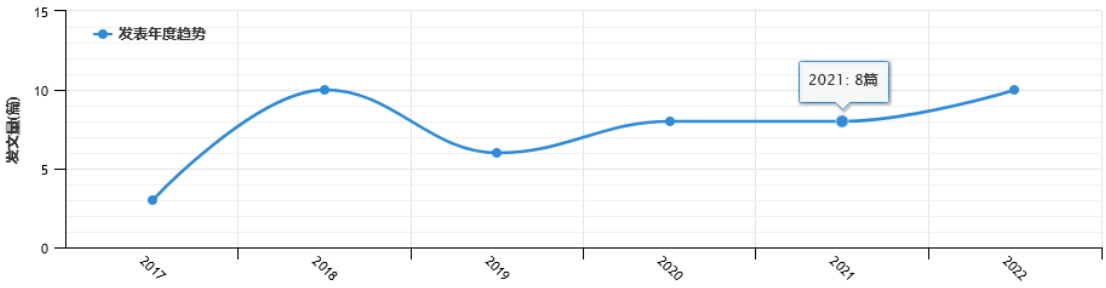
图1-1



深入分析2021年的320篇论文可以发现，其中除学位论文70篇之外，以“核心素养”作为主要主题进行筛选时有129篇论文，而分别以“数学运算”“运算素养”“运算能力”“数学运算素养”为主要主题进行筛选，只能在2021年检索到 10~80 篇不等的结果。这表明，虽然有大量论文可以用“运算素养”作为主题检索到，但这些论文并没有将“运算素养”作为主要研究主题，而是较为宽泛地研究“核心素养”这一整体，真正聚焦运算素养的研究论文相对较少。

进一步以“运算素养”“培养”“实践研究”为主题进行检索，2021年共检索到相关论文8篇，其中5篇为硕士毕业论文，均为研究高中运算素养的相关研究；其余论文为一线教师发表于各级期刊的相关研究，涉及高中学段2篇、小学1篇，没有涉及初中阶段运算素养培养的研究。

图1-2



从统计图 1-2 可见，尽管数学运算素养培养的实践研究呈上升趋势，但相关研究更多由高校研究生主持开展，一线教育工作者参与较少。此外，相关研究的持续时间往往受研究者学业限制，难以长期开展，相关研究有待进一步深入。

（三）一线教师开展持续性的实践研究具有一定优势

许多实践研究需要在较长时间内进行持续的追踪观察。基于实践研究的这一特点，

处于教学一线的教师更适合开展相关工作，并在实践过程中获得第一手数据。此类研究的难点主要在于构建相关理论，以设计相应的实践活动，并指导实践研究的开展。

由于对运算素养相关理论的研究已经比较充分，关于如何培养学生的数学运算素养也已取得一些初步成果，因此，一线教师可以通过学习此类研究，构建相关的实践活动框架，并开展相关的实践研究。

本文笔者就是基于此开展的相关实践研究工作。

二、相关理论

(一) 相关界定

1.《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》中对数学运算素养水平的界定

《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》对数学运算素养水平进行了三个水平的界定，具体要求如表2-1所示。

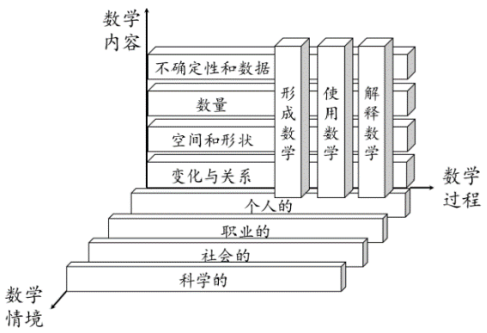
表 2-1

水平	数学运算
水平一	能够在熟悉的数学情境中了解运算对象，提出运算问题。 能够了解运算法则及其适用范围，正确进行运算；能够在熟悉的数学情境中，根据问题的特征形成合适的运算思路，解决问题。 在运算过程中，能够体会运算法则的意义和作用，能够运用运算验证简单的数学结论。 在交流的过程中，能够用运算的结果说明问题。
水平二	能够在相关情境中确定运算对象，提出运算问题。 能够针对运算问题，合理选择运算方法、设计运算程序，解决问题。 能够理解运算是一种演绎推理；能够在综合运用运算方法解决问题的过程中，体会程序思想的意义和作用。 在交流过程中，能够借助运算探讨问题。
水平三	在综合情境中，能够将问题转化为运算问题，确定运算对象和运算法则，明确运算方向。 能够针对运算问题构造运算程序，解决问题。 能够用程序思想理解和表达问题，理解程序思想与计算机解决问题之间的联系。 在交流过程中，能够用程序思想理解和解释问题。

2. 国际学生评估项目(PISA)的相关界定[3]

国际学生评估项目(PISA)测评体系由三个维度构成，分别是数学内容、数学过程以及数学情境，数学素养测评的理论框架由这三个维度构成的一级指标及其下属的具体分类共同组成。为直观呈现上述理论框架，特制作下图 2-1 理论框架结构图。

图 2-1 PISA2012 数学素养理论框架结构图



从图 2-1 中可以看到，PISA2012数学素养理论框架共包含3个维度，分别是数学内容维度、数学过程维度和数学情境维度。当然，从数学情境的角度来看，PISA测试的特点与我们的日常教学仍有较大差异；与《高中课程标准（2020年修订）》中运算素养相关内容较好融合的是其数学内容维度和数学过程维度。

其中，数学内容的 4 个方面中，“数量”部分与数学运算素养息息相关；从数学过程维度来看，其主要涉及的形成数学、使用数学、解释数学三个过程，大致可以与《高中课程标准（2020年修订）》中给出的三个水平界定相对应。

3. 义务教育阶段提升学生数学运算能力水平的策略

在相关研究著作中 [4,5]，作者提出了多种培养学生数学运算能力的策略。通过对比总结，作者认为培养和提升学生运算能力至少可以从以下几个方面着手：

(1) 激发学生学习运算的兴趣；(2) 增加板书，示范规范的运算流程，培养学生养成良好的运算习惯；(3) 重视数学基础知识的教学与积累，明确算理；(4) 讲究方法，培养学生良好的数学思维品质，合理选择算法；(5) 增强学生的符号意识；(6) 适当地、合理地使用学习辅助工具。

（二）本次实践研究的理论框架

综合前述讨论，并结合第一作者所在学校的学情，考虑到九年级学生的学业特点和实际需求，本次实践研究着重从以下几个维度刻画和描述学生的数学运算素养水平。

1. 从数学运算内容维度描述

九年级学生需要学习的、与运算直接相关的内容包括一元二次方程、二次函数和反比例函数三大部分；学习过程中也需要初一年级和初二年级“数与代数”部分运算内容的支持。因此，本次实践研究中，数学运算能力培养教学的知识载体主要是一元二次方程、二次函数和反比例函数这三部分内容。

2. 从数学运算过程维度描述

解决数学问题的过程实际上相当复杂，解题过程中的表现体现了学生数学运算素养所能达到的水平。对此，《高中课程标准（2020年修订）》给出了三个水平的描述，但高中课程标准所要求的水平显然是针对高中学生提出的。考虑到九年级学生的发展特点，笔者认为，对于这一年龄段的学生来说，水平三的要求相对过高，因此本次实践研究重点关注培养学生达到“水平一”和“水平二”。

3. 数学运算培养策略

结合九年级教育教学的特点，本次实践研究将着重从算理和算法两个角度出发，尝试培养学生的数学运算素养。算理和算法是数学运算的基础，而作为解题基础的算理，是发展学生数学运算能力的重要前提。在九年级复习备考阶段，也需要通过复习相关数学概念、运算规律、运算性质等，帮助学生重新熟悉相关算理。以算理分析为研究视角，可以事半功倍。

另一方面，算法是运算的方法。在九年级的教育教学中，要帮助学生解决“如何计算”的问题，就一定不能回避对算法的梳理。面对数学问题时，选择不同的算法，解决问题的复杂程度也会有所差异。通过在算法学习中对题目不同解法的对比与总结，可以帮助九年级学生进一步理解算理与算法的关系，并在解题时选择恰当的视角，使用合理的算法解决问题。

因此，在本次实践研究中，将重点关注：

(1) 数学运算的算理分析；

(2) 数学运算算法的对比；

并检验从这两个角度出发对学生进行引导，是否可以有效提高学生的数学运算能力，从而提升学生的数学运算素养水平。

三、实践设计

（一）实践对象的确定

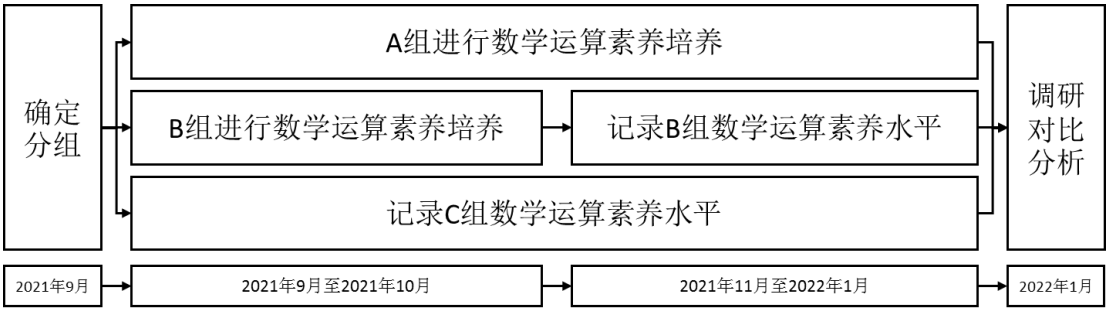
本次实践研究的对象是从第一作者所在学校2022届学生中抽取的，以被抽取的这部分同学参与海淀区数学统一调研的成绩作为研究对象。实际上，选择2022届毕业年级学生参与区统一调研的成绩作为研究对象有以下几个有利因素。

第一，在确定参与实践研究的学生名单时，第一作者已经在本年级任教一年，熟悉年级中各层次水平学生的实际表现；第二，第一作者随本年级学生进入毕业年级教学，在实践研究过程中作为毕业年级的任课教师，第一作者可以较好地把控实践过程，也便于开展访谈等研究活动；第三，根据相关教学安排，初中毕业年级学生在九年级第一学期将学习二次函数等重要的知识内容，在这个过程中有利于通过实践培养学生在数学运算方面的能力；第四，毕业年级学生有更强的动力去改进自身不足，提升个人解题能力，故参与相关实践活动的积极性更有保障；第五，学生运算能力的评价可以借助编制相对合理的区级九年级统一调研完成。

(二) 实践流程

参与本次实践研究的学生共分为 2 个实验组和 1 个对照组，共有180名同学参与，所有同学均匀分布在年级各行政班级中，无显著分布差异，相关实践流程如下：

图 3-1



根据图 3-1 所示流程，本次实践研究基本分为四个阶段：

1. 准备阶段：从2021年8月开始，至2021年9月开学第一周结束，目标是确定实验组和对照组的参与学生。确定方法是将所有学生八年级第二学期期中和期末调研成绩标准分的加权平均值（期中占40%，期末占60%）按从高到低排序，之后采用系统抽样法，筛选选出A、B两个实验组各60位同学，以及一个包含60名同学的实验对照组 C。之后通过说明会征询相关同学的参与意见，最终确定参与实践研究的学生名单。

2. 实施阶段 1，从2021年9月中旬持续到2021年10月底，主要实践工作为：

(1) 实验组 A 和实验组 B 每周各利用一天的中午参与实践研究，形式为围绕运算相关内容开展课堂讨论，讨论围绕运算算理分析和运算算法对比展开，并包括综合应用的讨论。配合学校九年级教学的具体进度，选择合适的载体展开讨论；

(2) 对照组 C 不参与相关实践活动讨论

（3）收集反映实验组和对照组学生运算能力水平的相关调研成绩数据。

3. 实施阶段 2:从 2021 年 11 月中旬开始持续到 2021 年 12 月底,主要实践工作为 ：

(1) 实验组 A 继续参与每周一次的实践研究课，形式仍为围绕运算相关内容开展课堂讨论，继续围绕运算算理分析和运算算法对比展开，包括综合应用的讨论。进度在配合学校九年级教学具体进度的同时，适当选择合适的中考复习内容作为载体展开讨论；(2) 实验组 B 和对照组 C 不参与这一阶段的实践活动讨论；(3) 继续收集反映实验组和对照组学生运算能力水平情况的相关调研成绩数据。

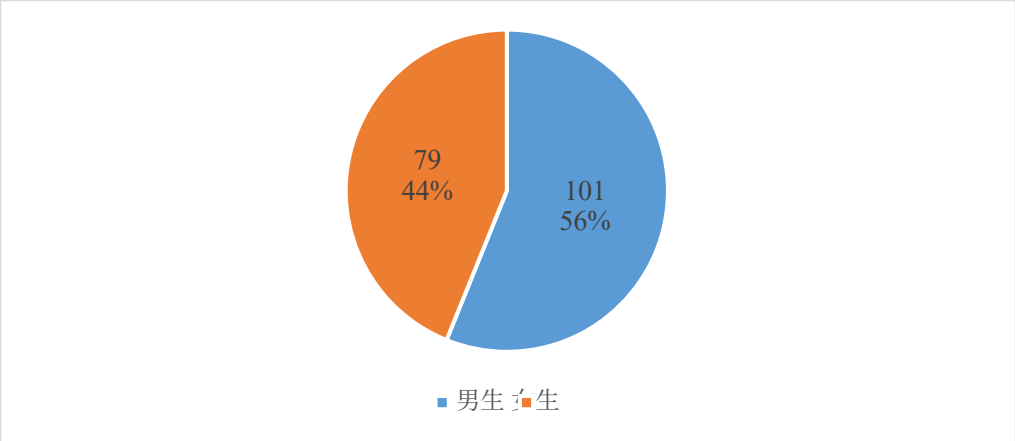
4. 反馈分析阶段：2022 年 1 月，借助 2022 年学区九年级期末数学调研试卷中直接考查数学运算素养的题目，收集参与实践研究的实验组 A、B 以及对照组 C 相关学生的答题数据，对各组学生数学运算能力素养水平的差异变化进行评价。

四、实践与调研过程

（一）确定实验组与对照组

2021年9月开学后，根据第一作者所在学校毕业年级学生分班名单，调取所有学生八年级第二学期期中和期末调研成绩，转换为标准分后进行加权平均计算（期中占40%，期末占60%），得到入围标准。将所有学生按入围标准从高到低排序，之后采用系统抽样法，筛选实验组 A、实验组 B、对照组C各60名同学作为实践候选参与者，共180人。所有180名实践参与者均来自平行班级，涉及毕业年级全部16个班级，其中男生101人，女生79人，相对占比如下图 4-1 所示。

图 4-1



考虑到该年级学生总数中男生占 61%、女生占 39%，可以认为抽样结果与学生的实际比例基本一致。对三个分组学生的入围标准分分布进行皮尔逊相关性分析，其中实验组 A 、实验组 B 和对照组 C 的分组编号分别为 1、 2 和 3，相关分析结果整理如下表 4-1 所示。

表 4-1 各分组入围标准分相关性分析

		各分组	入围标准分
各分组	皮尔逊相关性	1	-0.100
	显著性（双侧）		0.183
	N	180	180
入围标准分	皮尔逊相关性	-0.100	1
	显著性（双侧）	0.183	
	N	180	180

从表 4-1 可知，各分组学生入围标准分的 Pearson 相关系数为 -0.100，显著性（双侧）水平为 0.183。这表明两个实验组和一个对照组的学生在入围本次实践研究时，数学运算素养水平不存在显著性差异，可以在之后进行观察比较。之后，我们与实验组 A 和实验组 B 的学生进行了沟通，确认相关学生的个人参与意愿，并明确告知学生每次相关实践活动均为自愿参与。其中，实验组 A 的 60 名候选学生中有 8 名选择不参与，其中 5 名同意收集不含其个人敏感信息的相关调研数据用于研究；实验组 B 的 60 名候选学生中有 10 名选择不参与，其中 8 名同意收集不含其个人敏感信息的相关调研数据用于研究；对照组 C 的 60 名学生中有 4 人拒绝提供相关调研数据用于研究，其他 56 名学生授权收集不含个人敏感信息的相关调研数据用于研究。最终参与实践研究的学生情况统计如下表 4-2 所示。

表 4-2 各组最终参与本研究的学生情况统计

序号	组别	参与人数	参与率	同意收集数据	收集率	退出人数
1	实验组 A	52	87%	57	95%	3
2	实验组 B	50	83%	58	96%	2
3	实验组 C	56	93%	56	93%	4

(二) 实践过程

本次实践研究的每次讨论课仅允许实验组学生参加，但不强制要求实验组所有学生参与。学生可以根据个人情况自愿参加每次讨论，唯一的强制要求是每次讨论课上所有到场学生都必须完成签到。各次讨论课的签到记录见表 4-3。

表 4-3 各次讨论课个人签到情况汇总统计

课次	知识板块	讨论重点	实验组A签到人数	实验组 B 签到人数
1	方程与不等式	运算算理分析	47	41
2	方程与不等式	算法思路对比	36	33
3	方程与不等式综合	运算综合	32	34
4	函数	运算算理分析	32	29
5	函数	算法思路对比	31	27
6*	函数综合	运算综合	33	30
7	函数综合	运算综合	32	33
8	数与式	运算算理分析	36	—
9	数与式	算法思路对比	33	—
10	方程与不等式	算法思路对比	33	—
11	方程与不等式综合	运算综合	35	—
12	函数综合	运算综合	33	—
13	函数综合	运算综合	37	—

* 代表附录 1 中具体内容示例对应的课次

由表 4-3可知，13次专题讨论的内容设计围绕数与式、方程与不等式、函数这三个初中阶段涉及学生数学运算素养的主要知识板块展开，并根据本年级教学进度，配套选取各次讨论课的主要内容。从表中可以看出，在本次实践研究的实施阶段1 中，由于学生可以自由决定是否参与某一次讨论课，实验组 A 和实验组 B 的讨论课参与人数均呈现出不同程度的下降。最后两次讨论（课次 6 和课次 7）中，实验组 B 的参与人数小幅回升；与几名学生交流后确认，这是由于 11 月期中考试备考所致。同时，在实验组 A 的学生中可以看到， 11 月期中考试之后，参与讨论课的人数有更明显的回升。访谈部分同学后确认，他们感觉讨论课对成绩有帮助，因此自愿

多 参与

参与讨论课活动。13次专题讨论的具体实践情况如下:

2021年9月开学第一周，实验组 A 和实验组 B 开始参与相关实践研究。实验组 B 于 9 月 9 日星期四中午 12:30 至 13:10 进行了第一次专题讨论，实验组A 于 9 月 10 日星期五中午 12:30 至 13:10 进行了第一次讨论。每次讨论课中，两个实验组讨论的主题相同，实施教师为同一位教师。根据实践计划，各次专题讨论的重点均围绕运算算理分析和运算思路对比展开，直至 2021 年 10 月 29 日星期五为止；九年级期中考试前共进行了 7 次专题讨论。

2021 年 11 月期中考试之后，实验组 B 的学生不再参与后续实践研究。实验组 A 的学生于 11 月 12 日星期五中午 12:30 至 13:10 开始继续每周一次的专题讨论，至 2021 年 12 月 24日共开展专题讨论 6 次（其中，2021 年 12 月 17 日的专题讨论因学生备考 18 日的中考英语听说口语第一次测试而取消），之后实验组A 的运算专题讨论实践停止。

五、调研对实践的反馈与分析

2022 年 1 月17日获取到学区九年级期末数学调研试卷学生小题得分统计表。根据学区发布的此次期末调研双向细目表及学生实际答题情况，将表 5-1 所列题号对应的问题作为本次实践研究中用于评价学生数学运算素养的题目，具体问题见附录 2。

表 5-1 九年级第一学期期末数学调研考察运算能力题目统计

题号	分值	题型	试题类型	知识板块	能力板块	素养水平
1	2	选择题	基础性试题	函数	运算能力	数学运算水平一
13	2	填空题	基础性试题	方程与不等式	运算能力	数学运算水平一
17	5	解答题	基础性试题	方程与不等式	运算能力	数学运算水平一
18	5	解答题	基础性试题	方程与不等式	运算能力	数学运算水平一
19-1	3	解答题	基础性试题	函数	运算能力	数学运算水平一
19-2*	2	解答题	基础性试题	函数	运算能力	数学运算水平二
22-1	2	解答题	基础性试题	方程与不等式	运算能力	数学运算水平一
22-2*	4	解答题	基础性试题	方程与不等式	运算能力	数学运算水平二
26-1	1	解答题	基础性试题	函数	运算能力	数学运算水平一
26-2**	3	解答题	发展性试题	函数	推理能力 运算能力	数学运算水平二
26-3**	2	解答题	发展性试题	函数	抽象概括能力 运算能力	数学运算水平三

* 标记的问题为根据学生答题情况与题目描述进行二次划分的结果，区数据中未分开描述 ** 标记的题目可选择不同的思路视角，借助推理和抽象概括规避大量运算过程

(一) overall analysis

本次调研直接涉及数学运算能力的题目共 7 题 9 问，满分 31 分，整份调研试卷满分 100 分。阅卷时全区统一采用评分标准，各题设立评分组，采取电脑随机双评机制，阅卷误差为 0 分；当双评出现不同分数时，由评分组组长进行仲裁，从而确保学生分数的准确性。从学区反馈的学生小题分数据中筛选出所有参与实践研究的学生数据，整理后可以得到基本信息的统计表 5-2 和表 5-3。

表 5-2 参与实践研究学生本次调研总成绩情况

	均值	中位数	众数	标准差	最高分	最低分
实验组 A	82.56	84	90	9.46	97	43
实验组 B	70.91	74.75	89	17.97	96.5	10
对照组 C	73.49	80.50	83,81	18.04	99	25

整体情况	75.64	81	89	16.38	99	10

表 5-3 参与实践研究学生本次调研运算能力考题得分情况

	均值	中位数	众数	标准差	最高分	最低分
实验组 A	25.51	26	26	3.16	31	14
实验组 B	21.25	23	25	6.57	31	1
对照组 C	22.30	25.25	26	6.82	31	2
整体情况	23.01	25	26	6.01	31	1

虽然从表 5-2 的各项基本数据来看，本次调研中实验组 B 的成绩与对照组 C 的成绩存在明显差距，但通过相关性检验却发现，两组的考试成绩与分组之间并无显著性差异，如表 5-4 所示。

表 5-4 实验组 B 与对照组 C 成绩相关性检验

		分组	调研标准分分布
分组	皮尔逊相关性	1	0.084
	显著性（双侧）		0.377
	N	114	114
调研标准分分布	皮尔逊相关性	0.084	1
	显著性（双侧）	0.377	
	N	114	114

实际上，通过分析表 5-3 可以进一步看出，两组学生成绩原始分上的差距至少并非由学生运算能力水平的差距导致；实验组B和对照组 C 的学生运算能力水平相同。在此基础上，将所有学生本次测验的成绩均转换为标准分，之后展开进一步分析。

(二) 相关性分析

1. 分组相关性分析

将实验组 A 纳入分析序列后，对实验组 A（序号 1）、实验组 B（序号 2）和对照组 C（序号 3）进行成绩标准分的皮尔逊相关性分析，得到表 5-5。

表 5-5 各分组调研成绩标准分相关性分析

		各分组	调研标准分
各分组	皮尔逊相关性	1	-0.205**
	显著性（双侧）		0.007
	N	171	171
调研标准分	皮尔逊相关性	-0.205**	1
	显著性（双侧）	0.007	
	N	171	180

** 在 0.01 水平（双侧）上显著相关

从表 5-5 中可以看出，各分组的成绩与其分组情况在 0.01 水平上显著相关，相关系数为 -0.205，属于弱相关。由此可以得出，对教师而言，学生运算能力的培养需要持续一段时间，才可能产生一些效果。这种数学素养的培养并不能一蹴而就，而是需要持之以恒。对于学生来说，这一情况可能更为明显。

2. 参与讨论次数的相关性分析

对于实验组 A 和实验组 B，通过人为限制参与讨论的次数（实验组 A 最多可参加 13 次讨论，实验组 B 最多可参加 7 次讨论），并通过随机因素确定参与次数（学生自愿决定是否参与某一次讨论），可以获得精确到个人的参与讨论次数统计情况（表 4-3 为个人参与情况汇总结果）。以此为基础，分析学生个人参与讨论次数与其期末调研运算能力水平标准分之间的皮尔逊相关性，得到表 5-6A 和表 5-6B。

表 5-6A 实验组 A 学生参与讨论次数与运算能力水平标准分相关性分析

		参与次数	运算能力标准分
参与次数	皮尔逊相关性	1	0.502**
	显著性（双侧）		0.000
	N	57	57
运算能力标准分	皮尔逊相关性	0.502**	1
	显著性（双侧）	0.000	
	N	57	57

** 在 0.01 水平（双侧）上显著相关

表 5-6B 实验组 A 学生参与讨论次数与运算能力水平标准分相关性分析

		参与次数	运算能力标准分
参与次数	皮尔逊相关性	1	0.630**
	显著性（双侧）		0.000
	N	58	58
运算能力标准分	皮尔逊相关性	0.630**	1
	显著性（双侧）	0.000	
	N	58	58

** 在 0.01 水平（双侧）上显著相关

从表 5-6A 和表 5-6B 中可知，实验组 A 和实验组 B 的学生参与讨论次数与其在调研中展现出的运算能力水平标准分在 0.01 水平（双侧）上显著相关，相关系数分别为 0.502 和 0.630，均达到了中等程度正相关的水平。由此可以得出，从学生层面来说，要提升自身运算能力，更需要主动、有意识地参与，并持之以恒，才可能见到成效。

3. 影响学生参与讨论次数的相关性分析

从前述分析可以看出，学生有意识地主动参与运算能力讨论，对提升自身的运算能力水平有积极的促进作用。但我们也应看到，学生这种主动、有意识的参与行为与其性别等固有因素并无明显关系。对此，笔者进行了相应的相关性分析，如表 5-7 所示。

表 5-7 实验组学生参与讨论次数与性别的相关性分析

		性别
实验组 A	皮尔逊相关性	0.114
	显著性（双侧）	0.397
	N	57
实验组 B	皮尔逊相关性	0.016
	显著性（双侧）	0.906
	N	58

如表 5-7 所示，实验组 A 和实验组 B 学生参与讨论的次数与其性别之间的 Pearson 相关系数分别为 0.114 和 0.016；显著性（双侧）水平分别为 0.397 和 0.906。这表明，学生的性别差异与其是否更多地参与讨论之间并无显著相关性。这说明影响学生参与讨论的因素与性别无关。那么，哪些因素会影响学生主动参与相关讨论呢？笔者对实验组学生的入围成绩标准分、参与讨论次数和调研成绩标准分进行了相关性分析，结果如表 5-8 所示。

表 5-8 实验组学生参与讨论次数、调研成绩与入围成绩的相关性分析

		入围成绩标准分
参与讨论次数	皮尔逊相关性	0.433**
	显著性（双侧）	0.000
	N	115
调研成绩标准分	皮尔逊相关性	0.898**
	显著性（双侧）	0.000
	N	115

** 在 0.01 水平（双侧）上显著相关

从表 5-8 可以看出，入围本次实践研究时学生的成绩标准分与其参与讨论次数之间的相关系数为 0.433，显著性水平为 0.000，在 0.01 水平（双侧）上显著相关，具有中等水平的相关性。而相关结果也表明，这些学生入围时的成绩和参与期末调研时的成绩高度正相关，相关系数为 0.898。虽然不能对影响学生参与讨论次数的因素给出结论，但调研成绩对学生学习的主动性有一定的积极推动作用。

(三) 各评价维度分析

1. 期末调研运算能力内容维度结果分析

表 5-9 各组内容维度（知识板块）结果分析

分组	知识板块	总分	平均分	得分率	满分率	零分率
实验组 A	方程与不等式	18	17.09	94.9%	70.18%	0%
	函数	13	8.42	64.8%	5.26%	0%
实验组 B	方程与不等式	18	13.86	77.0%	32.76%	3.45%
	函数	13	7.39	56.8%	1.72%	0%
对照组 C	方程与不等式	18	14.41	80.1%	44.64%	3.57%
	函数	13	7.89	60.7%	1.79%	0%
整体	方程与不等式	18	15.12	84%	49.12%	2.34%
	函数	13	7.9	60.8%	2.92%	0%

从上表 5-9 中得到的数据可以看出，两个知识板块的得分率最高达到 84%，为方程与不等式部分；得分率较低的是函数部分的 60.8%。之所以存在较大的差距，与两个知识板块间所考察的数学运算素养水平之间存在直接关系。其中，方程与不等式对应的题目为第13题、第17题、第18题和第22 题，共18分；其中只有第 22 题第 2 问的 4 分对应的数学运算素养为水平二，其余14 分均属于运算素养水平一。相比之下，函数部分涉及第 1 题、第19题和第26题，共13分；其中只有第 1 题、第19题第 1 问和第26题第 1 问考察的数学运算素养水平为水平一，共6分；第19题第 2 问和第26题第 2 问对应数学运算素养水平二，共5分；第26题第三问对应数学运算素养水平三，占 2 分。由此可见，九年级学生的数学运算素养水平大多只能达到水平一，经过一定的培养可以有所提高，但需要长期坚持培养，才能取得较为明显的效果。

2. 期末调研运算能力素养水平维度结果分析

表 5-10 各组数学运算素养水平维度结果分析

分组	数学运算素养水平	总分	平均分	得分率	满分率	零分率
实验组 A	水平一	20	19.3	96.6%	68.42%	0.00%
	水平二	9	5.9	65.7%	7.02%	1.75%
	水平三	2	0.3	14%	10.53%	82.46%
实验组 B	水平一	20	17.1	85.7%	44.83%	1.72%
	水平二	9	4.0	44.2%	3.45%	10.34%
	水平三	2	0.1	6.9%	6.59%	93.10%
对照组 C	水平一	20	17.4	87.2%	50.00%	0.00%
	水平二	9	4.7	52.4%	3.57%	10.71%
	水平三	2	0.1	7.1%	7.14%	92.86%
整体	水平一	20	17.96	89.8%	54.39%	5.85%
	水平二	9	4.86	54.0%	4.68%	7.60%
	水平三	2	0.19	9.4%	8.19%	89.5%

从表 5-10 可以看出，持续较长时间的专题讨论对于提升学生数学运算素养水平一和水平二都取得了比较令人满意的效果。实验组 A 的学生在解答数学运算素养水平二的题目时，满分率达到 7.02%，明显高于实验组 B 和对照组 C；零分率只有 1.75%，远低于实验组 B 和对照组 C 的 10%。这表明，通过分析算理和对比算法，学生在处理数学运算素养水平二的题目时有明显提升

六、结论与展望

(一) 研究结论

通过本次实践研究，可以得到以下结论：

1. 对数学运算能力的培养，需要长期坚持。通过持续分析算理、比较算法，可以提升学生的数学运算素养水平。如果教师能够激发学生对数学运算的兴趣能让学生更主动地参与数学运算相关学习研究，从而更好地提升学生的数学运算素养水平；2。通过相关性分析可以发现，学生参与实践讨论的次数越多，其数学运算素养水平越高，两者呈现出较为明显的正相关关系，相关系数在 0.502 到 0.630 之间。这表明，学生越主动地投入精力参与相关学习活动，就越有助于自身提升；3. 通过对运算能力内容维度的深入分析可以发现，九年级学生的数学运算素养水平仍处于较低水平。大部分学生经过学习可以达到水平一，但在水平二和水平三层面上仍需进一步提高，这也应是后续高中学习中相关教师需要进一步关注的内容；4。学生数学运算能力水平与学生性别无显著相关性，但具有一定的持续性，呈现出强者恒强的趋势。因此，数学运算作为六个核心素养之一，在解题中所处的位置决定了在学生的数学学习中，较强的数学运算能力可以促进学生数学学业水平的提高。

(二) 数学运算能力培养建议

根据本次实践研究的结果，笔者认为，相关教师从以下方面着手，可以更高效地帮助学生提升数学运算能力水平，培养数学运算素养：

1. 激发学生学习运算的兴趣，调动学生的主观能动性，激发学生的参与意识，以典　　型适度设置问题以激发学生的探讨热情，都有助于引导学生主动参与数学运算学习，提高学生学习运算的兴趣；2. 提升数学运算能力不能仅依靠练习题目，还需要在选题上多下功夫，使题目更具典型性，从而帮助学生更好地明晰算理；3. 明晰算理的同时，还要讲究方法，着力培养学生良好的数学思维品质。通过分析题目，选择更优的运算思路，设计合理的运算程序，提升学生的算法选择能力。

七、研究反思与展望

本次实践研究还存在许多问题，可以在之后的相关研究中加以改进。

1. 实验组和对照组的设置有待改进。目前的设置中，后半个学期只剩下一个实验组A，应增设另一个参与后半学期研究的实验组，以完善整个实践研究的设计；2. 本次实践研究中，对学生数学运算能力水平的评价数据收集不足，仅收集并对比了八年级第二学期和九年级第一学期各两次大考的调研结果作为评价数据，缺乏实践过程中的其他数据支持，无法观察学生数学运算能力水平提升的过程。今后的研究需要加以改进，收集更多过程性数据，例如在讨论课中设置相应的反馈环节，及时收集过程性数据；3. 使用区调研成绩作为评价数据来源，虽然保证了数据的可靠性，但受教学进度所限，这些调研无法全面反映学生的数学运算素养水平。毕竟，九年级第一学期期末调研的重点在于方程与不等式和函数部分，对数与式部分的关注略显不足。此外，此次区调研更多考查了数学运算素养水平一和水平二，对水平三的考查并不充分；同时，调研中其他方向的考题也分散了学生的精力，使学生无法专注于完成运算部分的调研。鉴于此，仍有必要在未来编制专门用于测量学生数学运算素养水平的调研试卷；4. 本次研究更多关注从技术层面提升学生的数学运算能力水平，未能有效涉及学生的情感态度价值观维度，今后需要在其他研究中加以完善。

八、参考文献

［1］教育部. 义务教育数学课程标准(2011 年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2011
［2］教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020［3］黄友初. 数学素养的内涵、测评与发展研究[M].北京:科学出版社,2016［4］北京市海淀区教师进修学校. 海淀区义务教育学业标准与教学指导[M].北京:北京师 范大学出版社,2018［5］张庆辰. 新课标下初中生数学运算能力的培养策略研究[D].延边大学,2019.04

九、附录

附录 1:运算素养培养专题讨论示例(第 6 课时)

一、教学目标:

1、能用不同的方式解决不等式问题中的比大小问题；2、能有意识地将不等式问题中的比大小问题转化为函数问题；3、能借助函数观点解决不等式中的比大小问题；4、在解决比大小问题的过程中，能根据实际情况选择合适的思路解决问题；5、感悟数学知识之间的联系，认识函数的重要性，进一步体会化归与转化思想、数形结合思想、分类讨论等数学思想，从中提升数学抽象、逻辑推理和数学运算素养。

二、教学重、难点:

重点：比较不同代数式大小的思路。难点：能将不等式问题中的比大小问题转化为函数问题。

三、典例分析:

例 1:若$a > b$,比较$-3.5b + 1$与$-3.5a + 1$的大小关系;

解：1. 借助不等式的性质比较大小$\because a > b.\therefore -3.5a < -3.5b$ (不等式性质 3)$.\therefore -3.5a + 1 < -3.5b + 1$ (不等式性质 1) 2. 借助做差与 0 比较大小

$-3.5a + 1 -(-3.5b + 1) = -3.5a + 1 + 3.5b - 1$

$= -3.5a + 3.5b = 3.5(b - a)\because a > b.\therefore b - a < 0.\therefore$原式$= 3.5(b - a) < 0$ (乘法法则) 故$-3.5a + 1 < -3.5b + 1$3. 借助函数观点比较大小 令$y = -3.5x + 1$

则当$x = a$时，有$y_a = -3.5a + 1$; 当$x = b$时，有

$y_b = -3.5b + 1\because$一次函数$y = -3.5x + 1$中，y随x增大而减小 又$\because a > b.\therefore y_a < y_b$即$-3.5a + 1 < -3.5b + 1$

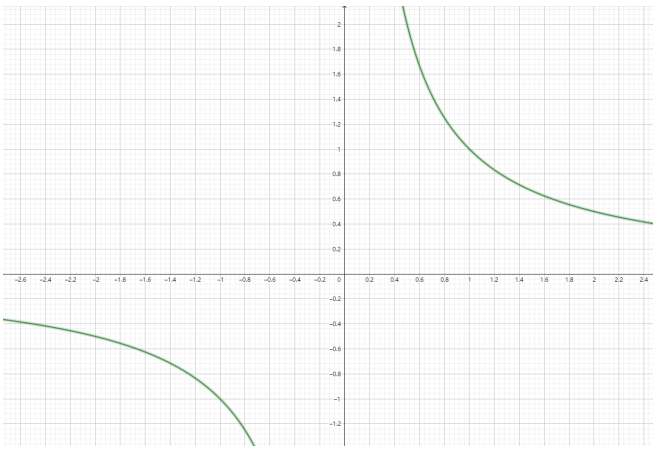
【设计意图】展示不同大小比较方法的特点并进行对比，锻炼学生基本的运算素养。特别是采用“不等式的性质变形”和“作差与0比较”这两种方法时，要让学生明确每一步所

依据的算理，这有助于培养学生的数学运算能力与逻辑推理能力。对比借助函数图象比较大小的思路，其中对数形结合的运用也能为学生打开思路，有利于后续问题的探究。

例 2：（2019 年北京中考）用三个不等式 a>b、ab>0、$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$中的两个不等式作为题设，余下的一个不等式作为结论组成一个命题，组成真命题的个数为（ ）

A.0 B.1 C.2 D.3

解：1.若 a>b,ab>0,则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;真命题：
理由:∵$a>b$,$ab>0$,∴$\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$ (不等式性质 2)∴$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$; 2.若$ab>0$,$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,则$a>b$,真命题；理由:∵$ab>0$,∴$\frac{1}{ab}\times ab<\frac{1}{b}\times ab$,(不等式性质2)∴$a>b$. 3.若$a>b$,$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,则$ab>0$,真命题；理由:∵$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,∴$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}<0$,即$\frac{b-a}{ab}<0$,∵$a>b$,
∴$b-a<0$,∴$ab>0$ (乘法法则)∴组成真命题的个数为3个;



解法 2：令$y=\frac{1}{x}$

则当$x=a$时，有$y_a=\frac{1}{a}$;

当$x=b$时，有$y_b=\frac{1}{b}$

由图象容易得出，

1 若 a>b,ab>0,则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，是真命题；
2 若$ab>0$,$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则$a>b$，是真命题；
3 若$a>b$,$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则$ab>0$，是真命题；

【设计意图】学生通过利用不等式性质和作差法比较大小，进一步熟悉并锻炼数学运算能力；之后再通过函数观点进行判断，借助函数图像和数形结合的思想，通过简单的逻辑推理，更容易地判断命题的真假。由此，学生可以发现，从不同角度解题，运算量的大小和难度各不相同，因此需要从不同角度出发尝试解决问题，并在尝试过程中发现相对更优的运算思路。

例3：如果 a,b∈ R，且$a > b$，试比较：a^2与 b^2的大小；

解法 1：作差比较大小

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$\because a > b$

$\therefore a - b > 0$

$\therefore a^2 - b^2$的正负性与$a + b$的正负性保持一致

当$a > b > 0$时，$a + b > 0$，故$a^2 - b^2 > 0$，即$a^2 > b^2$；

当$a > 0 > b$时，根据加法法则，$a + b$的正负性由a与$|b| = -b$的大小关系决定。

当$a > -b$时，$a + b > 0$，故$a^2 - b^2 > 0$，即$a^2 > b^2$；

当$a = -b$时，$a + b = 0$，故$a^2 - b^2 = 0$，即$a^2 = b^2$；

当$0 < a < -b$时，$a + b < 0$，故$a^2 - b^2 < 0$，即$a^2 < b^2$；

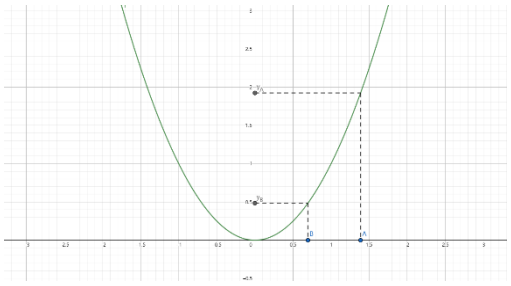
当$0 \geq a > b$时，$a + b < 0$，故$a^2 - b^2 < 0$，即$a^2 < b^2$；

综上所述，

当$a > b > 0$时，$a + b > 0$，故$a^2 - b^2 > 0$，即$a^2 > b^2$；当$b < 0$且$a > -b$时，$a + b > 0$，故$a^2 - b^2 > 0$，即$a^2 > b^2$；当$b < 0$且$a = -b$时，$a + b = 0$，故$a^2 - b^2 = 0$，即$a^2 = b^2$；当$b < 0$且$b < a < -b$时，$a + b < 0$，故$a^2 - b^2 < 0$，即$a^2 < b^2$。

解法 2：令$y = x^2$，

则当$x = a$时，有$y_a = a^2$；当$x = b$时，有$y_b = b^2$。由二次函数图像可知，对称轴为$x = 0$∵，二次项系数大于 0，∴在对称轴两侧，y随$|x|$的增大而增大



$\because a > b$

$\therefore$当$a > |b|$时，$a + b > 0$，故$a^2 - b^2 > 0$，即$a^2 > b^2$；当$b < 0$且$a = -b$时，$a + b = 0$，故$a^2 - b^2 = 0$，即$a^2 = b^2$；当$b < 0$且$a < |b|$时，$a + b < 0$，故$a^2 - b^2 < 0$，即$a^2 < b^2$。

【设计意图】学生首先会运用作差法比较大小，这一过程能锻炼学生的数学运算能力，有助于提升其对分类讨论思想的认识和数学运算素养。鉴于作差法比较繁琐，教师引导学生观察式子结构特征，思考更为直观的方法，让学生学会将不等式问题中的比较大小问题分别转化为反比例函数、二次函数等函数的单调性问题，体会化归与转化思想、数形结合的

思想，同时提升逻辑推理和数学抽象素养。

四、反思提升（本节课你的收获与不足）

1.思考：如何比较两个数（代数式）的大小？（本节课涉及的方法）

（1）利用不等式的性质进行变形；（2）作差法：作差后，通过因式分解、配方等手段判断差的符号，从而得出结论；（3）利用函数的单调性及图像法。

其中，比较法（作差法、作商法）是最基本的方法。本节课根据题目式子的结构特征，可以抽象出对应的函数，利用函数的单调性、对称性（二次函数）等性质比较大小，简单直观，不易出错！

总结：

本节课我们学习了从不同视角解决不等式比大小问题的基本思路和方法。通过对比，我们可以发现，在不同的条件下，选择恰当的思路进行运算，其复杂程度以及推理运算的难度有着明显的差异。在这个过程中，可以深刻体会化归与转化思想、数形结合思想、分类讨论思想等一系列数学思想方法。

特别是在一定条件下，借助联想并构造合适的函数，从函数观点去看不等式中的比大小问题，可以明显起到简化运算的作用，进而通过函数的性质，可以相对更简单地解决有关问题。

【设计意图】巩固本节课内容——利用不同的运算思路解决代数式比大小的问题。特别是将有关不等式问题中的比大小问题转化为函数问题，在特定条件下可以有效简化运算。希望学生逐渐养成反思的好习惯，并学会在反思中成长进步。

五、检测反馈：

1、已知点$(\sqrt{2}+1,y_1)$和$(\sqrt{3}-1,y_2)$在二次函数$y=x^2-2x+a$的图象上,试比较y_1和y_2的大小.

2、如果$a,b\in R$,且$a>b$,试用不同的方法比较:

【设计意图】了解学生在课堂上的学习成果。

附录 2:2021-2022 学年度学区第一学期期末学业水平调研九年级数学试卷

仅包括表 5-1 中列出的本次实践研究所使用的题目

1.在平面直角坐标系 xOy 中，下列函数的图象经过点 的是

（A） （B） （C） （D）

13.若关于 x 的方程有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是_____.

17.解方程：.

18.已知是方程的一个根，求代数式的值.

19.在平面直角坐标系xOy中，抛物线经过点.

(1)求该抛物线的表达式；(2)将该抛物线向上平移_____个单位后，所得抛物线与轴只有一个公共点。

22.已知关于的一元二次方程.

(1)求证：方程总有两个实数根；(2)若，且此方程的两个实数根的差为3, 0米的值。

26.在平面直角坐标系中，点在抛物线上.

（1）求该抛物线的对称轴；（2）已知，当 时，的取值范围是，求，的值；（3）在（2）的条件下，是否存在实数，当 时，的取值范围是，若存在，直接写出 的值；若不存在，请说明理由。