课堂上的轨道衰减

Carlos Chaparro[1], Andrea Ferroglia[2,3], Miguel C. N. Fiolhais[1,3,4], Luis Gonz´alez-Urbina[1], Tomasz Milewski[1]

[1] *Science Department, Borough of Manhattan Community College, The City University of New York,199 Chambers St, New York, NY 10007, USA*[2] *Physics Department, New York City College of Technology, The City University of New York, 300 Jay Street, Brooklyn, NY 11201, USA*[3] *The Graduate School and University Center, The City University of New York, 365 Fifth Avenue, New York, NY 10016, USA*[4] *LIP, Departamento de Física, Universidade de Coimbra, 3004-516 Coimbra, Portugal*

本文旨在为低地球轨道卫星的轨道衰减现象提供一个教学框架。轨道衰减动力学的推导将大气阻力视为唯一的耗散机制，并采用适用于本科微积分基础物理和工程课程的教学方法。随后，针对固定尺度高度的等温正压大气模型，对高度随时间变化的非线性一阶微分方程进行数值求解。最后，利用中国空间站天宫一号失控再入的数据验证该模型。

arXiv:2303.02099v1 [physics.ed-ph] 3 Mar 2023

I. 引言

本科物理专业学生学习引力时常有一个误解：他们认为，在地球表面上方100千米处的K´árm´án线之上，几乎就是真空，而这条线划分了地球大气层与外层空间的边界。1956年，西奥多·冯·卡门提出了这条界线，并将太空边缘定义为这样一个高度：在此高度之上，气动升力足以使飞机保持飞行，而不会过热。[1]事实上，卫星、空间站和航天器接近行星时，会与高层大气中的气体分子反复碰撞。这些碰撞发生在远高于K´árm´án线的地方，会导致机械能损失，从而使高度随时间降低，这种现象通常称为轨道衰减。

轨道衰减常被用来使绕地运行的物体返回地球。受控离轨可以非常精准，而非受控再入的轨迹则十分复杂，导致预测结果各不相同，可能的再入轨迹也多种多样。例如，2021年2月，美国国家航空航天局让毅力号火星车着陆于火星的耶泽罗陨石坑。[2] 此次成功着陆是迄今为止最精准的一次。由于与地球的通信存在11分钟延迟，着陆轨迹和指令必须提前编程，这一成就也因此尤为突出。[3] 然而，三个月后，人们的目光都投向了天空，担忧重达21公吨的火箭——长征五号乙（CZ-5B），即CZ-5B Y2航天任务的芯级——将非受控再入。[4] 各航天机构都对再入轨迹和预计溅落地点进行了实时预测，但由于计算涉及大量自由度，预测的不确定性范围始终很大。[5] 因此，直到事件发生前不久，再入的确切时间和地点几乎都无法预测。

用于以数学方式模拟低地球轨道（高度从 180 km 到 2,000 km）大气阻力的模型，会考虑大气密度、太阳活动以及物体的形状和质量等参数。某些复杂模型[6] 还会纳入高超声速流体物理、热辐射、热质传递和激波；其他较简单的方法则只考虑大气模型，以预测大气密度。[7] 例如，Knipp 等人[8] 开发了一种基于电子表格的仿真实验室，可根据不同的大气模型计算卫星轨道。在这一简化框架中，可以根据耗散性大气阻力造成的机械能损失，推断物体在低地球轨道上的轨迹。[9] 随着卫星轨道衰减，较低高度处的大气密度会增加，因此轨道衰减速率也会加快，从而产生自强化反馈效应。

利用经典力学并仅考虑大气阻力的影响，可以准确预测高度降至 180 km 时的轨道衰减。[7] 对于圆轨道上的卫星，即 偏心率较小的情况，在轨道衰减至这一高度的过程中，可认为其轨道始终近似为圆形。在高度高于 180 km 时，大气阻力的影响足够小，因此卫星在长时间内逐渐螺旋下降至地球的过程中，引力可近似保持与速度矢量垂直——轨道衰减可能需要数月，而卫星在该高度完成一周轨道运行约需九十分钟。

本研究旨在本科微积分基础物理课程的背景下，研究圆形低地球轨道上卫星的轨道衰减现象。通过将大气阻力视为唯一的耗散机制，推导轨道衰减动力学。针对等温正压大气模型，对所得的高度随时间变化的非线性一阶微分方程进行数值求解。文中展示了2018年中国空间站天宫一号的轨道衰减数据。[10,11] 本研究中的计算也由纽约市立大学曼哈顿社区学院（BMCC）的本科生在一门大学微积分物理课程中完成，旨在

说明这种方法可作为微积分物理课程中的近似计算活动。

II. 轨道衰减的动力学

在研究轨道衰减之前，应先考虑如图1所示、不存在任何形式的机械能耗散的圆轨道情况。卫星所受的引力 F_g 充当向心力，因此，应用牛顿第二定律以及向心加速度与卫星线速度之间的关系，可将卫星的速度表示为:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}\,, \tag{1}$$

其中， G 为引力常数， M 为地球的质量， r 为轨道半径。根据式（1），系统的守恒机械能为:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{2r}\,, \tag{2}$$

其中， m 为卫星的质量。本研究所用的引力常数、地球的质量、天宫一号的质量以及地球半径的数值列于表I。

G	M	m	R_{E}
$6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$	5.972×10^{24} 千克	8.506×10^{3} 千克	6.378×10^{6} 米

TA表 I. 引力常数、地球质量、天宫一号质量和地球半径的数值。

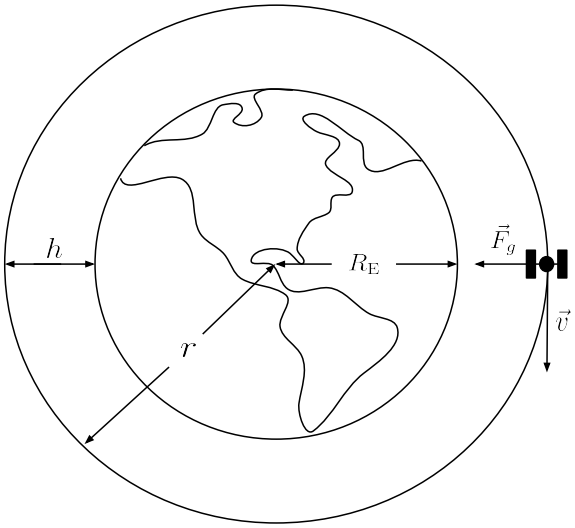


图 1. 地球周围无大气阻力的圆轨道上卫星的示意图（非按比例绘制）。地球半径和卫星高度分别用 R_{E} 和 h表示。

如果卫星处于较低的圆轨道，就必须考虑阻力；如图2所示，阻力的方向与速度矢量相反。这种非保守力的存在会导致机械能随时间损失，因此高度也会降低。阻力导致的耗散功率可写为 as $\mathscr{P} = F_D \cdot \vec{v}$，其中 F_D 是阻力，而卫星机械能的时间导数方程为，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{GMm}{2r}\right) = \vec{F}_D \cdot \vec{v}\,. \tag{3}$$



图2. 轨道衰减过程中卫星绕地球运行的示意图（非按比例绘制）。图中表示了大气阻力导致高度降低的过程，以及作用于卫星的引力和阻力。

阻力的大小可由阻力方程得出,

$$F_{\rm D} = \frac{1}{2}\rho(r) C_{\rm D} A v^2 \,, \tag{4}$$

其中， $\rho(r)$为大气密度， $C_{\rm D}$ 为无量纲阻力系数， A 为卫星的横截面积， v 为卫星相对于空气的速度。需要注意的是，由于相关物体的尺寸和速度较大，大气阻力与速度的平方成正比。因此，不能用斯托克斯定律描述阻力。该定律常见于大学物理课程，描述的是阻力与速度成正比的情况，适用于低速运动的小物体，例如密立根实验中用于测量电子电荷的油滴。

如前所述，如果假设轨道衰减的时间尺度远大于绕行一周的周期，那么可以合理地认为，随着高度降低，卫星的轨迹仍近似为圆形。因此，将式（1）和式（4）代入式（3），可得:

$$\frac{GMm}{2}\frac{\dot{r}}{r^2} = -\frac{1}{2}\rho(r) C_{\rm D} A \left(\frac{GM}{r}\right)^{3/2} \,. \tag{5}$$

对该表达式进行简化后，可得到一个关于卫星轨道半径随时间变化的非线性一阶微分方程,

$$\dot{r} = -k\sqrt{r}\rho(r) \,, \tag{6}$$

其中 $k = \sqrt{GM} A_{\rm eff}/m$ 和 $A_{\rm eff} = C_{\rm D} A$ 为有效横截面积。该方程也可以用卫星高于地球表面的高度 h 来表示,

$$\dot{h} = -k\sqrt{R_{\rm E} + h}\,\rho(h) \,, \tag{7}$$

其中 $R_{\rm E}$ 为地球半径，且 $r = R_{\rm E} + h$。

为了确定卫星高度随时间的变化，必须将大气密度分布作为输入。初步而言，大气密度可描述为具有固定尺度高度的等温正压大气模型。在该模型中，假设温度恒定，压力仅是密度的函数。根据流体静力平衡条件和理想气体定律，可以轻松求得密度随高度的变化关系，[12]

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\frac{h - h_0}{H}\right) \,, \tag{8}$$

其中， ρ_0 是 $h = h_0$ 处的密度， H 是尺度高度。尺度高度定义为，

$$H = \frac{RT}{M_{\text{air}} g}\,, \tag{9}$$

其中， R 为理想气体常数， T 为温度， M_{air} 为空气摩尔质量， g 为重力加速度。在该模型中，高度每增加 H，大气密度就会降低 e 倍。本研究在数值计算天宫一号轨道衰减时，采用以下密度方程，

$$\rho(h) = 6 \times 10^{-10} \exp\left(-\frac{h - 175\ \text{km}}{H}\right)\ \text{kg/m}^3\,. \tag{10}$$

该方程改编自澳大利亚空间天气局的等温正压模型，[7] 经过校准，使高度为175 km时的密度为 6×10^{-10} kg/m^3 。该模型在高度不超过500 km时准确。

III. 天宫一号轨道再入数据与学生活动

2016年3月与地面控制中心失去联系几个月后，天宫一号的轨道开始缓慢衰减，最终于2018年4月2日00:16（协调世界时）再入大气层。[13] 图3展示了天宫一号在2018年期间的轨道数据。[10] 图中显示了远地点（绿色）和近地点（橙色）的高度随2018年日数的变化，以及空间站的平均高度（蓝色）。远地点、平均高度和近地点也与拟合线（灰色）进行了比较；这些拟合线是根据上一节介绍的、尺度高度固定的等温正压大气模型确定的。[7] 理论曲线是使用 Mathematica 中的 NDSolve 函数，通过数值求解微分方程（7）并采用表I所列参数计算得到的。[14]

使用两个自由参数将结果与平均高度数据进行拟合：固定尺度高度为 $H = 29.5$ km，有效截面为 $A_{\text{eff}} = 41.8$ m^2。此外，还分别对远地点和近地点数据进行了拟合——固定尺度高度的拟合值与平均高度的相同，而所得有效截面分别为远地点 62.6 m^{2}和近地点 27.7 m^2 。这些数值的变化可作为平均高度所得有效截面结果的不确定度，从而得到 $A_{\text{eff}} = 41.8^{+20.8}_{-14.1}$ m^2。拟合线对尺度高度的取值极其敏感，即 即使是微小变化，也会导致三种情况下数据与拟合线之间出现显著差异。因此，作为不确定度的保守估计，在尺度高度中纳入了 0.1 km 的不确定度：尺度不确定度变化 0.1 km，会使轨道衰减最后几天的预测高度发生 5%–10% 的变化。值得注意的是，考虑到天宫一号的尺寸为 10 米 × 3 米，有效截面的结果在物理上是合理的。同样，高层大气中约 30 km 的尺度高度也是合理的结果。

拟合参数的数值是在课堂活动中通过反复试验得出的，而非采用 R^2方法，这是因为数据点数量庞大。活动中可以通过比较学生得出的不同结果，逐步缩小最适合数据的参数范围，从而避免这一问题。这项计算还假设天宫一号在轨道衰减过程中大致沿着一系列相继的圆形轨道运行。鉴于远地点与近地点之差始终未超过平均轨道半径的0.3%，这一近似是合理的。此外，在280 km的高度，卫星速度约为7.7 km/s，每90分钟完成一周圆轨道运行——每天总计运行16周。因此，需要运行数十圈甚至数百圈，才能使高度显著降低。图3清楚地显示，计算得到的拟合线与平均高度数据高度吻合。使用澳大利亚空间天气局的可变尺度高度等温正压大气模型[7]，也可以得到类似结果。与本活动所研究的情况相比，该模型尤其适用于更高的高度（最高可达500 km）；在这些高度下，可变尺度高度会带来显著修正。

由于 COVID-19疫情，本活动通过 Zoom 在线开展，参与者是 BMCC 微积分基础大学物理I和II课程的学生。首先用半小时对主题作了总体介绍，随后要求学生推导方程（7）。此时，学生通过 Zoom 的分组讨论室组成了每组两至四人的小组，每组至少有一名成绩优秀的学生，为有需要的同学提供帮助。大多数小组都得出了预期结果，不过，为了巩固相关概念，之后全班一起重新进行了计算。随后，将该方程输入 Mathematica，并使用 NDSolve 进行数值求解，改变有效截面和温度参数的取值，使其拟合数据点。由于大多数学生此前从未使用过 Mathematica，因此整个过程按步骤进行，以便他们能在自己的计算机上复现这些代码行。经过学生多次试算，全班最终一致确定了图3所示的拟合参数值。接下来，大家讨论了该模型是否有效，以及能否用它作出可靠预测。由于长征五号B非受控再入事件曾广受报道，这一话题引起了学生的共鸣。

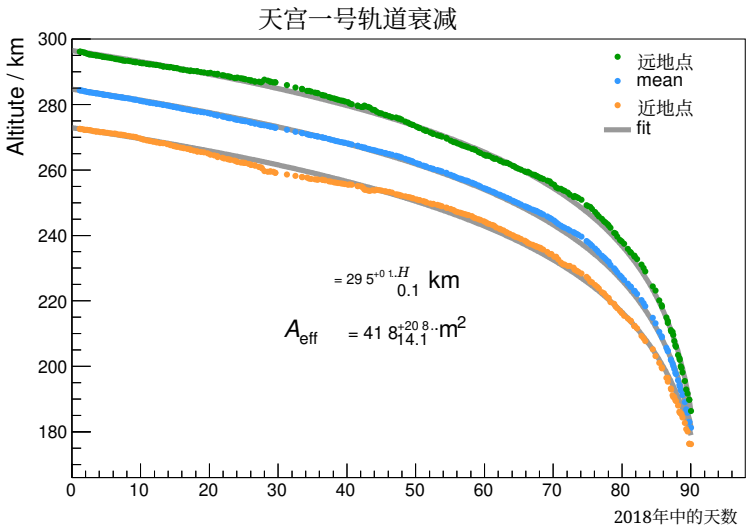


图3。天宫一号轨道衰减数据和最佳拟合线。图中展示了记录的远地点高度（绿色）、近地点高度（橙色）以及平均高度（蓝色）的每日数据。远地点、近地点和平均高度的计算拟合线以灰色表示。

需要指出的是，还可以扩展本活动，以获得螺旋式轨道衰减的图形表示。结合方程（6）以及 $\delta\theta/\delta t \approx v/r$这一事实，可以计算出$r(\theta)$的参数图。尽管这超出了本研究的范围——本研究主要面向社区学院的本科理工科学生——但对于修读分析力学或计算物理学课程的高年级物理学专业学生而言，这项扩展活动或许也很适合。

IV. 结论

BMCC 的基于微积分的《大学物理》课程（PHY215 和 PHY225）的学生推导了轨道衰减过程中卫星高度的微分方程，并假设轨道近似为圆轨道。通过选择不同的温度和有效截面参数组合，学生计算出了该微分方程的数值解，以及与天宫一号轨道衰减数据相拟合的相应拟合线，数据范围截至平均高度为180千米。结果显示，记录数据与拟合线之间具有令人印象深刻的一致性，证明了圆轨道近似以及具有固定尺度高度的等温正压大气模型的有效性。

这项活动尤其成功地帮助学生巩固了万有引力、非保守力和一阶微分方程等概念。本练习中，微分方程的数值解是用 Mathematica 求得的；此外，也可以让学生直接用 MATLAB 或 Python 编写数值方法。这在应用计算物理学课程中尤其有用。

致谢

作者谨向 Luciano Anselmo博士和Carmen Pardini博士致谢，感谢他们提供了本文用于计算天宫一号轨道衰减的数据。

---

[1] T. von K´arm´an, 《航空学中的气动加热——温度屏障》，《高温研讨会论文集——面向未来的工具》，140–142（1956年）。
[2] 《触地！美国国家航空航天局的火星毅力号探测车安全着陆红色星球》，NASA火星探测计划。2021年2月18日。（即将出版。）
[3] 《美国国家航空航天局的下一辆火星探测车已准备好实现迄今最精准的着陆》，毅力号火星探测车。2021年2月18日。（即将出版。）

[4] J. Amos, 《即将坠落地球的大型中国火箭残骸》, BBC新闻, 2021年5月8日。（正在出版。）[5] D. Rice *et al.*, 《“真的无法预测”：中国火箭疾速返回地球；可能的碎片区横跨全球大片区域》, 《今日美国》, 2021年5月8日。（正在出版。）[6] L. C. Scalabrin和I. D. Boyd, 《高超声速非平衡气动热力学非结构化纳维-斯托克斯求解器的开发》, 《第38届AIAA热物理会议论文集》, 加拿大安大略省多伦多, 5203–1–18, 2005年6月6日至9日[7] J. Kennewell, 《卫星轨道衰减计算》, 澳大利亚空间天气局, 111（1999）。[8] DJ. Knipp *et al.*, 《在本科课堂上模拟真实卫星轨道》, 《物理教师》**43**, 452–455（2005）。[9] F. A. Marcos, 《低卫星轨道高度下大气阻力模型的准确性》, 《空间研究进展》**10**, 417–422（1990）。[10] C. Pardini和L. Anselmo, 《从失控到重新进入地球大气层期间对中国空间站天宫一号轨道衰减的监测》, 《空间安全工程杂志》**6**, 265–275（2019）。[11] E. Vellutini *et al.*, 《利用意大利SST地面传感器网络监测天宫一号的最终轨道衰减和再入》, 《空间安全工程杂志》**7**, 487–501（2020）。[12] https://www.tec-science.com/mechanics/gases-and-liquids/barometric-formula-for-an-isothermal-atmosphere/ - 最后访问日期：2022年1月25日。[13] 中国常驻联合国代表团（维也纳）于2017年5月4日致秘书长的普通照会。[14] Wolfram Research, Inc., 《Mathematica》, 11.3版, 尚佩恩, 伊利诺伊州（2018）。