arXiv:2303.02107v3 [physics.plasm-ph] 9 Feb 2024

理想磁流体平衡中压力梯度驱动的电流奇异性的结构

Yi-Min Huang
美国新泽西州 08543，天体物理科学系及普林斯顿等离子体物理实验室

电子邮箱：yiminh@princeton.edu

Yao Zhou
上海，中国 200240，上海交通大学物理与天文学学院、自然科学研究院及教育部李政道研究所

Joaquim Loizu
洛桑联邦理工学院，瑞士等离子体中心，CH-1015 洛桑，瑞士

Stuart Hudson
普林斯顿等离子体物理实验室，新泽西州 08543，美国

Amitava Bhattacharjee
天体物理科学系和普林斯顿等离子体物理实验室，新泽西州 08543，美国

摘要。 在具有连续嵌套磁通面和连续旋转变换的非轴对称理想磁流体平衡中，奇异电流通常出现在有理面上。这些电流包含两个分量：一种是表面电流（在磁通面标记中表现为狄拉克 δ-函数），用于阻止磁岛的形成；另一种是在有理面两侧存在压力梯度时呈代数发散的 Pfirsch–Schlüter电流密度。在邻近有理面的磁通面上，传统处理得到 Pfirsch–Schlüter电流密度的标度为 $J \sim 1/\Delta\iota$，其中 $\Delta\iota$ 是相对于有理面的旋转变换之差。若磁通面之间的距离 s 与 $\Delta\iota$ 成正比，则标度关系 $J \sim 1/\Delta\iota \sim 1/s$ 将导致一个悖论，即 Pfirsch–Schlüter 电流不可积。在本文中，我们通过研究 Hahm–Kulsrud–Taylor 问题来探讨这一问题；该问题是由共振磁扰动产生奇异电流的原型。我们证明，不仅 Pfirsch–Schlüter电流密度发散，抗磁电流密度也按 $\sim 1/\Delta\iota$ 发散。然而，由于有理面处形成了狄拉克 δ-函数电流片，相邻磁通面以 $s \sim (\Delta\iota)^2$ 的方式高度聚集。因此，奇异电流密度$J \sim 1/\sqrt{s}$，使总电流保持有限，从而解决了这一悖论。此外，磁通面的高度聚集导致有理面附近的压力梯度变陡，其中 $\nabla p \sim dp/ds \sim 1/\sqrt{s}$。在一般的非轴对称磁流体平衡中，与 Grad猜想（即在密集分布的有理面周围压力剖面是平坦的）相反，我们的结果表明，压力剖面会在这些有理面周围密集地变陡。

关键词： 提交至： 等离子体物理与受控聚变

1. 引言

由于带电粒子沿磁力线方向的运动远快于其横向运动，具有嵌套磁通面的磁场构型有利于等离子体约束聚变装置。具有嵌套磁通面的聚变装置能够有效地将高温等离子体与装置壁隔离，从而实现良好的约束。托卡马克等轴对称聚变装置可以具有连续的嵌套磁通面。然而，对于仿星器 [1–4], 等本质上具有三维（3D）结构的装置，连续嵌套磁通面的存在并无保证。

尽管如此，许多现有的仿星器磁流体动力学（MHD）平衡求解器，例如 VMEC [5], NSTAB [6, 7], 和 DESC [8], ，都以连续嵌套磁通面的存在为出发点。这些求解器旨在求得满足 MHD力平衡方程的平衡态,

$$-\nabla p + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} = 0 \tag{1}$$

具体而言，可以通过最小化 MHD势能（即磁能与热能之和），或直接将力平衡作为约束条件来实现。这里， p、 $\boldsymbol{B}$和 $\boldsymbol{J} = \nabla \times \boldsymbol{B}$ 是等离子体压力、磁场和电流密度的标准记号。

具有连续嵌套磁通面的环向三维MHD平衡可能会在有理面处产生电流奇异性；在这些位置，磁力线形成闭合回路，而非遍历地充满磁通面。为了解这一问题，注意力平衡方程（1）表明，垂直于磁场的电流密度分量为

$$\boldsymbol{J}_{\perp} = \frac{\boldsymbol{B} \times \nabla p}{B^2}. \tag{2}$$

令

$$\boldsymbol{J} = \frac{J_{\parallel}}{B}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{J}_{\perp}, \tag{3}$$

条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ 意味着

$$\boldsymbol{B} \cdot \nabla \frac{J_{\parallel}}{B} = -\nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\perp} = -\left(\boldsymbol{B} \times \nabla p\right) \cdot \nabla \frac{1}{B^2}, \tag{4}$$

一般而言，若 $\nabla p \neq 0$，则 $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\perp} \neq 0$。在直磁力线坐标系（$\Psi$， θ， φ）中，磁场为

$$\boldsymbol{B} = \nabla\Psi \times \left(\nabla\theta - \iota\nabla\varphi\right),$$

其中， Ψ 为环向磁通函数， θ 为极向角， φ 为环向角，而旋转变换为 $\iota = \iota(\Psi)$。在这些坐标中，磁微分算子 $\boldsymbol{B} \cdot \nabla$ 为

$$\boldsymbol{B} \cdot \nabla f = \frac{1}{\mathcal{J}}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \iota\frac{\partial f}{\partial \theta}\right), \tag{5}$$

其中， $\mathcal{J}$ 是坐标的雅可比行列式。通过使用傅里叶表示

$$J_{\parallel}/B = \sum_{m,n} u_{mn}\left(\Psi\right)\exp\left[i\left(m\theta - n\varphi\right)\right] \tag{6}$$

and

$$\mathcal{J}\nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\perp} = \sum_{m,n} h_{mn}\left(\Psi\right)\exp\left[i\left(m\theta - n\varphi\right)\right], \tag{7}$$

磁微分方程 (4) 可写为

$$\sum_{m,n} i\left(\iota\left(\Psi\right)m-n\right)u_{mn}\left(\Psi\right)\exp\left[i\left(m\theta-n\varphi\right)\right]=-\sum_{m,n}h_{mn}\left(\Psi\right)\exp\left[i\left(m\theta-n\varphi\right)\right].(8)$$

因此， $J_{\|}/B$ 可表示为

$$J_{\|}/B=\sum_{m,n\neq0,0}\left[i\frac{h_{mn}\left(\Psi\right)}{\iota\left(\Psi\right)m-n}+\Delta_{mn}\delta(\iota\left(\Psi\right)m-n)\right]\exp\left[i\left(m\theta-n\varphi\right)\right]+u_{00}\left(\Psi\right),(9)$$

其中， u_{00} 是磁通函数， Δ_{mn} 是待确定的系数 [9, 10]。

方程（9）在有理面处呈现两种奇异性，此处旋转变换 ι 为有理数。令 $x=\iota\left(\Psi\right)m-n$。方程（9）中的第一项称为 Pfirsch–Schlüter 电流，在满足 $\iota=n/m$的有理面处具有 $1/x$型奇异性。第二项是狄拉克 δ函数奇异性，由于 $x\delta\left(x\right)=0$，这种奇异性是允许的。

与电流密度相关的物理量是穿过某个面的总电流。狄拉克 δ函数型奇异性是有理面处的片电流。尽管电流密度趋于无穷大，总电流仍然有限，因为狄拉克 δ 函数是可积的。Pfirsch–Schlüter 电流的 $1/x$型奇异性则会造成更严重的问题。若有理面与相邻磁通面之间的距离正比于 x，那么，由 θ、 $\theta+d\theta$、 $x=\epsilon_1$和 $x=\epsilon_2$围成的恒定-φ 面元所通过的总电流正比于 $\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}dx'/x'$；当 $\epsilon_1\to0$时，该电流将按对数发散。因此，$1/x$型奇异性被认为是不符合物理实际的，应当避免。

如果等离子体压力在全局范围内保持平坦，则可以消除 $1/x$ 型奇异性，但这对磁约束聚变并无意义。Grad 指出，可以通过考虑在每个有理面附近的小范围内压力剖面平坦的情况，构造磁约束 MHD 平衡解。然而，如果旋转变换 $\iota(\psi)$ 连续，磁微分方程 (4) 将处处稠密奇异，因此整个等离子体体积内会存在无穷多个压力平坦区域。Grad 将这种压力分布称为病态分布 [11]。沿着这一思路，Hudson 和 Kraus 构造了类分形压力剖面，其梯度局限于旋转变换足够无理的区域，也就是说，满足丢番图条件 [12, 13] 的区域。另一种做法是允许旋转变换 ι 存在不连续性，从而使有理面不复存在。

$1/x$ 型奇异性带来的核心困难在于，它们似乎会导致发散电流。然而，正如上文所述，这一结论是通过启发式论证得出的，而非经由严格的数学证明。本工作的主要目标是借助一个简单的模型问题——Hahm–Kulsrud–Taylor（HKT）问题 [14, 15]，重新审视这一结论。HKT 问题最初被提出为受迫重联问题，但在理想 MHD 极限下，它也可作为共振磁扰动 [16] 驱动电流奇异性形成的原型。HKT 问题适用于解析求解 [17, 18]，并已使用多种数值代码进行研究，包括 Grad–Shafranov（GS）求解器 [19]、全拉格朗日代码 [20]，以及分段压强平衡代码（SPEC）[21]，研究条件为 $p=0$ [16–18, 22]。本研究将已有的解析解和数值解推广至压力梯度非零的情形。

本文的组织结构如下。第2节给出 HKT问题的 Grad–Shafranov 表述，并提供渐近解析解。第3节将解析解与数值解进行比较。第4节总结全文并讨论未来展望。

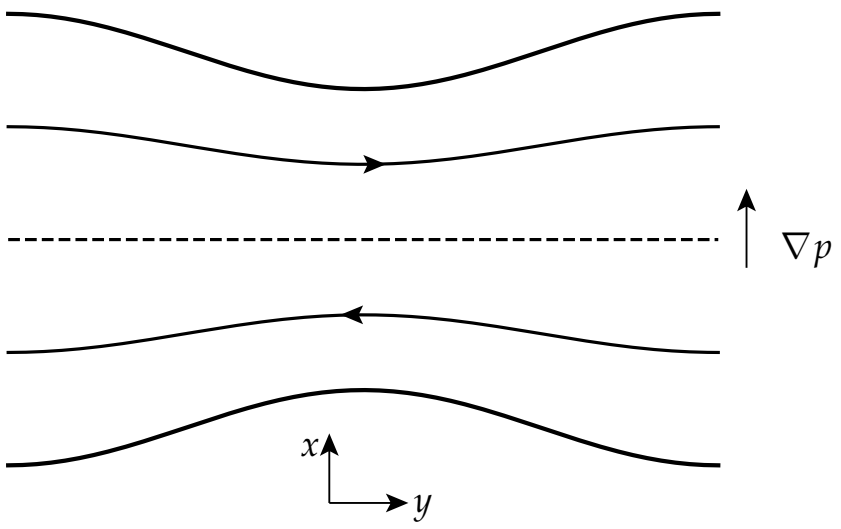


图 1. 具有压力梯度的 Hahm–Kulsrud–Taylor 问题。磁场的面内分量在中平面（虚线）处反向。上、下边界由镜面对称的正弦扰动形成。响应这一扰动，中平面处形成了一个 δ 函数型奇异电流片，并与边界扰动共振。等离子体的压力梯度驱动 Pfirsch–Schlüter电流密度，使其在共振面附近呈代数发散。

2. 具有压力梯度的 Hahm–Kulsrud–Taylor 问题的 Grad–Shafranov 解

2.1. Hahm–Kulsrud–Taylor 问题的 *Grad–Shafranov* 表述

图1所示的 Hahm–Kulsrud–Taylor（HKT）问题描述了一个在平板几何中被两面导电壁包围的磁化等离子体。在导电壁受到扰动之前，初始磁场在具有 $-a \le x \le a$ and $0 \le y \le L$ 的区域内是空间的平滑函数。面内分量沿 y 方向，具有 $B_{y0} = x$；与非均匀的 B_{z0} 分量及压力 p_0 一起，系统处于力平衡状态；即方程

$$\frac{B_{y0}^2 + B_{z0}^2}{2} + p_0 = \text{const} \tag{10}$$

已满足。假设沿 y 方向满足周期边界条件，随后施加具有上下对称性的正弦扰动，使导电壁从 $x = \pm a$ 移动至 $x = \pm\left(a + \delta \cos(ky)\right)$，其中 $k = 2\pi/L$ 为波数。随着系统在理想磁流体力学约束下演化至新的平衡态，电流奇异性将在共振面 $x = 0$ （图 1 中的虚线）处及其周围形成，包括狄拉克 δ 函数型电流片和压力梯度驱动的电流奇异性。

为响应边界扰动，磁通面会调整其几何形状，同时按照理想磁流体力学约束保持它们之间的磁通不变。

新的磁流体力学平衡满足笛卡尔几何中的 Grad–Shafranov方程

$$\nabla^2\psi = -\frac{dP}{d\psi}, \tag{11}$$

其中

$$P = p + \frac{B_z^2}{2}. \tag{12}$$

这里，笛卡尔几何中的磁场以 z 为平移对称方向，可用极向（平面内）磁通函数 ψ 表示为

$$\boldsymbol{B} = B_z\hat{\boldsymbol{z}} + \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla\psi. \tag{13}$$

在平衡态中，面外分量 B_z 和等离子体压力 p 均为 ψ的函数。

由于磁通守恒，磁场由磁通面的几何形状决定。为了描述磁通面的几何形状，我们首先需要选择一个变量来标记它们。设施加边界扰动之前，磁通面沿 x 方向的位置为 x_0 。初始条件 $B_{y0} = x_0$ 给出极向（平面内）磁通函数 $\psi(x_0) = x_0^2/2$。在环形约束装置中，通常使用磁通函数标记磁通面；但对于 HKT问题，使用磁通面的初始位置 x_0 作为标记更为方便，因为同一个 ψ 值可能对应多个磁通面。

采用这种标记方式，磁通面的几何形状由一个从 (x_0, y) 到 (x, y) 的映射描述，该映射通过函数 $x(x_0, y)$ 给出。利用链式法则，我们可以将关于笛卡尔坐标的偏导数表示为关于坐标 (x_0, y) 的偏导数:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\partial x/\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}, \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial x/\partial y}{\partial x/\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}. \tag{15}$$

这里，左侧偏导数的下标表示保持不变的坐标；右侧偏导数是关于 (x_0, y) 坐标的偏导数。除非下标另有说明，以下偏导数默认均是关于 (x_0, y) 坐标的偏导数。

利用这些偏导数关系，面内磁场的笛卡尔分量为

$$B_x = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial x/\partial y}{\partial x/\partial x_0}\frac{d\psi}{dx_0} \tag{16}$$

and

$$B_y = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\partial x/\partial x_0}\frac{d\psi}{dx_0}. \tag{17}$$

面外分量 B_z 由面外磁通量守恒决定，即

$$B_z(x_0) = \frac{B_{z0}(x_0)}{\left\langle \frac{\partial x}{\partial x_0} \right\rangle}. \tag{18}$$

其中， B_{z0} 是磁场的初始 z分量，磁通面平均 $\langle f\rangle$ 定义为

$$\langle f\rangle \equiv \frac{1}{L}\int_0^L f\left(x_0,y\right)dy \tag{19}$$

对于任意函数 $f(x_0,\ y)$，其中 L 是系统沿 y 方向的周期。同样，压力由绝热能量方程确定为

$$p\left(x_0\right)=\frac{p_0\left(x_0\right)}{\left\langle \frac{\partial x}{\partial x_0}\right\rangle^{\gamma}}, \tag{20}$$

其中 $p_0(x_0)$ 是初始压力剖面， γ 是绝热指数。

根据关系式 $\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{B}$，面外电流密度分量为

$$J_z=\nabla^2\psi=\left(\frac{d\psi}{dx_0}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{B_x^2+B_y^2}{2}\right)-\frac{\partial B_x}{\partial y} \tag{21}$$

而极向（面内）分量 $\boldsymbol{J}_p$ 为

$$\boldsymbol{J}_p=\frac{dB_z}{d\psi}\nabla\psi\times\hat{\boldsymbol{z}}=-\frac{dB_z}{d\psi}\boldsymbol{B}_p, \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{B}_p=\hat{}\boldsymbol{z}\times\nabla\psi$ 是磁场的极向（面内）分量。将式 (21) 代入式 (11)，GS方程可写为

$$-\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{B_x^2+B_y^2}{2}+P\right)+\frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{d\psi}{dx_0}=0. \tag{23}$$

2.2. 外区解

对于较小的边界扰动，我们可以根据磁通面沿 x 方向的位移，对 GS方程进行线性化 $\xi(x_0,\ y)\equiv x(x_0,\ y)-x_{0\circ}$ 取 ξ 的最低阶，磁场分量为

$$B_x\simeq\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{d\psi}{dx_0}, \tag{24}$$

$$B_y\simeq\left(1-\partial\xi/\partial x_0\right)\frac{d\psi}{dx_0}, \tag{25}$$

and

$$B_z\simeq B_{z0}\left(x_0\right)\left(1-\left\langle\frac{\partial\xi}{\partial x_0}\right\rangle\right). \tag{26}$$

线性化压力为

$$p\simeq p_0\left(x_0\right)\left(1-\gamma\left\langle\frac{\partial\xi}{\partial x_0}\right\rangle\right). \tag{27}$$

利用式（24–27）以及式（23）中的关系 $\psi=x_0^2/2$ ，线性化 Grad–Shafranov 方程现在写为

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(x_0^2\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+\left(B_{z0}^2+p_0\gamma\right)\left\langle\frac{\partial\xi}{\partial x_0}\right\rangle\right)+x_0^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=0. \tag{28}$$

¯如果采用试探形式 $\xi = \xi(x_0)\cos(ky)$，则 $\langle \partial\xi/\partial x_0 \rangle = 0$，线性化 Grad–Shafranov 方程可化简为

$$\frac{d^2}{dx_0^2}\left(x_0\bar{\xi}\right) - k^2 x_0 \bar{\xi} = 0. \tag{29}$$

方程（29）的通解是两个彼此独立解的线性叠加

$$\bar{\xi} = c_1 \frac{\sinh\left(k\left|x_0\right|\right)}{x_0} + c_2 \frac{\cosh\left(kx_0\right)}{x_0}, \tag{30}$$

¯且边界条件 $\xi(\pm a) = \pm\delta$ 要求

$$\delta = \frac{c_1 \sinh\left(ka\right) + c_2 \cosh\left(ka\right)}{a}. \tag{31}$$

方程（30）中的独立解 $\cosh\left(kx_0\right)/x_0$ 在 $x_0 = 0$处发散。如果坚持认为线性解处处有效，那么必须令 $c_2 = 0$；随后，边界条件（31）确定系数 $c_1 = a\delta/\sinh\left(ka\right)$。然而，这一解在物理上并不可行。由于 $\lim_{x_0\to 0} \sinh\left(k\left|x_0\right|\right)/x_0 = k\,\mathrm{sgn}(x_0)$，磁通面的几何形状在 $x_0 = 0$附近近似为 $x \simeq x_0 + \mathrm{sgn}(x_0)\left(ka\delta/\sinh\left(ka\right)\right)\cos(ky)$。因此，具有 $|x_0| \lesssim ka\delta/\sinh\left(ka\right)$的磁通面会发生重叠，导致一种物理上不允许的状态。我们得出结论：在线性解满足 $|x_0| \lesssim O\left(ka\delta/\sinh\left(ka\right)\right)$ 的内区内，该解并不有效，必须寻求非线性解。

2.3. 内层解

Rosenbluth、Dagazian 和 Rutherford（以下称 RDR）最早为理想内部扭曲不稳定性 [23]发生后形成的分岔平衡，推导出了共振面附近内层的一般非线性解。随后，RDR 解被改用于带有 $p = 0$ [17, 18]的 HKT问题。本文将以往的方法加以推广，以纳入压力梯度效应。

由于内区是一个薄层，我们假设条件 $|\partial x/\partial y| \ll 1$ and$|\partial/\partial y| \ll |\partial/\partial x_0|$ 成立。在这些假设下，GS方程 (23) 的主导平衡为

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{B_y^2}{2} + P\left(x_0\right)\right) = 0. \tag{32}$$

对方程 (32) 积分可得

$$B_y = \frac{1}{\partial x/\partial x_0}\frac{d\psi}{dx_0} = \mathrm{sgn}\left(\frac{d\psi}{dx_0}\right)\sqrt{f(x_0) + g(y)}, \tag{33}$$

其中

$$f\left(x_0\right) = -2P\left(x_0\right) + \mathrm{const} \tag{34}$$

而 $g(y)$ 是一个任意函数，将在稍后通过内层解与外区解的渐近匹配确定。$\mathrm{sgn}(d\psi/dx_0)$ 因子源于避免磁通面相互交叠所需满足 $\partial x/\partial x_0 > 0$ 的要求。不失一般性，我们可以令 $f(0) = 0$，于是 B_y 在 $x_0 = 0$ 处的切向不连续为

$$B_y|_{0^\pm} = \pm\sqrt{g(y)}. \tag{35}$$

这段 势不连续对应于电流密度中的狄拉克 δ函数奇异性。

使用 HKT问题的磁通函数 $\psi = x_0^2/2$ ，再次对方程（33）积分可得 RDR 的内层解

$$x_{\mathrm{RDR}}(x_0, y) = h(y) + \int_0^{x_0} \frac{|x'|}{\sqrt{f(x') + g(y)}} dx', \tag{36}$$

其中，函数 $h(y)$ 描述共振面的几何形状，尚待确定。

2.4. 不可压缩性约束

函数 $f(x_0)$ 和 $g(y)$ 并非相互独立，而是通过式 (34) 隐式关联，正如我们将在下文看到的。首先，在式 (18) 和 (20) 中用 $x_{\mathrm{RDR}}(x_0, y)$ 替换 $x(x_0, y)$，以确定内层中的 B_z 和 p。然后，将得到的 B_z 和 p 代入式 (34)，所得关系

$$\begin{aligned} f(x_0) = & -\frac{B_{z0}(x_0)^2}{|x_0|^2} \left\langle (f(x_0) + g(y))^{-1/2} \right\rangle^{-2} \\ & - 2\frac{p_0(x_0)}{|x_0|^\gamma} \left\langle (f(x_0) + g(y))^{-1/2} \right\rangle^{-\gamma} + \mathrm{const} \end{aligned} \tag{37}$$

给出了 $f(x_0)$ 和 $g(y)$ 之间的关系。

现在我们说明，在 $B_p^2 \sim p \ll B_z^2$ 的强导引场极限下，式 (37) 近似等价于不可压缩约束。根据式 (37)，微分 df 和 dx_0 满足关系

$$\begin{aligned} df = & \frac{2{B_{z0}}^2}{|x_0|^2} \left\langle (f+g)^{-1/2} \right\rangle^{-2} \left(\frac{1}{x_0} dx_0 - \frac{1}{2} \left\langle (f+g)^{-1/2} \right\rangle^{-1} \left\langle (f+g)^{-3/2} \right\rangle df \right) \\ & + \frac{2\left(p_0' + B_{y0}B_{y0}'\right)}{|x_0|^2} \left\langle (f+g)^{-1/2} \right\rangle^{-2} dx_0 \\ & + \left(2\gamma \frac{p_0}{|x_0|^\gamma x_0} - 2\frac{p_0'}{|x_0|^\gamma} \right) \left\langle (f+g)^{-1/2} \right\rangle^{-\gamma} dx_0 \\ & - \gamma \frac{p_0}{|x_0|^\gamma} \left\langle (f+g)^{-1/2} \right\rangle^{-\gamma-1} \left\langle (f+g)^{-3/2} \right\rangle df, \end{aligned} \tag{38}$$

其中我们使用关系式 $p_0' + B_{z0}B_{z0}' + B_{y0}B_{y0}' = 0$ 消去了 B_{z0}'。在强导引场极限下，式（38）右端的第一项占主导地位。作为主阶近似，我们可以忽略方程中的其他项，从而得到关系式

$$\frac{1}{x_0} dx_0 \simeq \frac{1}{2} \left\langle (f+g)^{-1/2} \right\rangle^{-1} \left\langle (f+g)^{-3/2} \right\rangle df. \tag{39}$$

对式（39）积分可得

$$|x_0| \simeq C \left\langle (f+g)^{-1/2} \right\rangle^{-1}, \tag{40}$$

其中 C 是一个常数。最后，将式（40）代入式（36），得到

$$\left\langle \frac{\partial x_{\mathrm{RDR}}}{\partial x_0} \right\rangle = |x_0| \left\langle (f+g)^{-1/2} \right\rangle \simeq C. \tag{41}$$

方程（41）具有简单的物理意义：内层中的等离子体均匀地压缩或膨胀，而常数 C 是压缩比。由于内层

解需要与外区解匹配，而后者不具有压缩性（在线性近似范围内），因此压缩比必须取值为 $C = 1$；也就是说，等离子体近似满足不可压缩性约束。不过需要注意的是，如果边界扰动具有 $m = 0$ 傅里叶分量，不可压缩性约束将不再成立。在这种情况下，常数 C 也需要通过渐近匹配来确定。

2.5. 渐近匹配

为获得完整解，必须将内层解与外区解进行渐近匹配。为简化起见，我们假设处于强导引场极限，并用不可压缩性约束替代关系式（37）

$$|x_0| = \left\langle (f+g)^{-1/2} \right\rangle^{-1}. \tag{42}$$

在此极限下，在主阶近似中，压力梯度对磁通面几何形状的影响可以忽略。此外，由于压力梯度也不影响外区解，下面将要概述的渐近匹配过程与 $p = 0$ [17] 的情形相同。

外区解以磁通面的位移 ξ 表示。因此，为便于匹配，我们将内层解的磁通面位移表示为

$$\xi(x_0, y) = h(y) + \int_0^{x_0} \left(\frac{|x'|}{\sqrt{f(x') + g(y)}} - 1 \right) dx' \tag{43}$$

并考察其在 $x_0 \to \pm\infty$ 时的渐近行为。

由不可压缩性约束 (42)，我们可以推知，当 $x_0 \to \pm\infty$ 时，$f \to x_0^2$。因此，在 $x_0 \to \pm\infty$ 的渐近极限下，我们可以将式 (43) 中的积分拆分为两部分，得到

$$\begin{aligned} \xi(x_0, y) \simeq\ & h(y) + \operatorname{sgn}(x_0) \int_0^{\infty} \left(\frac{x'}{\sqrt{f(x') + g(y)}} - 1 \right) dx' \\ & - \operatorname{sgn}(x_0) \int_{|x_0|}^{\infty} \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + g(y)}} - 1 \right) dx' \\ \simeq\ & h(y) + \operatorname{sgn}(x_0) \left[\int_0^{\infty} \left(\frac{x'}{\sqrt{f(x') + g(y)}} - 1 \right) dx' \right] + \frac{1}{2} \frac{g(y)}{x_0}. \end{aligned} \tag{44}$$

当 $x_0 \to \pm\infty$ 时，内层解的这种渐近行为应与 $x_0 \to 0^{\pm}$ 极限下外区解的行为相匹配，即

$$\xi(x_0, y) \simeq \left[\operatorname{sgn}(x_0) c_1 k + \frac{c_2}{x_0} \right] \cos(ky). \tag{45}$$

将方程（44）和（45）相匹配，得到 $h(y) = 0$ 以及以下两个条件：

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x'}{\sqrt{f(x') + g(y)}} - 1 \right) dx' = c_1 k \cos(ky) \tag{46}$$

and

$$\frac{1}{2}\frac{g(y)}{x_0} \leftrightarrow \frac{c_2}{x_0}\cos(ky). \tag{47}$$

这里，我们在第二个条件中使用记号 $\leftrightarrow$，因为正如后文将看到的，方程（47）无法精确匹配。

匹配条件 (46) 给出一个积分方程，用于确定函数 $g(y)$，如下所示：在方程 (46) 中利用不可压缩性约束 (42)，消去 x' 并用 f 表示，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left((f+g)^{-1/2} - \left\langle (f+g)^{-1/2}\right\rangle\right)\left\langle (f+g)^{-1/2}\right\rangle^{-3}\left\langle (f+g)^{-3/2}\right\rangle df\\ &= 2c_1 k\cos(ky).\end{aligned} \tag{48}$$

然而，要通过解析求解该方程来得到 $g(y)$ 是一项艰巨的任务。通过研究 $g(y)$ 在 $y=0$ 和 $y=\pi/k$ 附近的行为，RDR 提出了函数形式 $g(y) \propto \sin^8(ky/2)$，作为近似解。Loizu 和 Helander 通过对该积分方程 [24] 求数值解，验证了这一猜想。此外，通过将该函数形式拟合到数值解，他们还确定了前面的系数，得到

$$g(y) \simeq \frac{4c_1^2k^2}{3}\sin^8(ky/2). \tag{49}$$

接下来，对于匹配条件 (47)，显然 $g(y)$ 无法与 $\cos(ky)$ 精确匹配。按照 RDR 的做法，我们将 $g(y)$ 展开为傅里叶级数

$$g(y) = \sum_{m=0}^{\infty}\Gamma_m\cos(mky) \tag{50}$$

并且只匹配 $m=1$ 项；由此得到

$$c_2 = -\frac{7c_1^2k^2}{24}. \tag{51}$$

最后，我们利用关系式 (51) 消去边界条件 (31) 中的 c_2，得到关于 c_1 的方程：

$$7k^2\cosh(k/2)c_1^2 - 24\sinh(k/2)c_1 + 12\delta = 0. \tag{52}$$

其解为

$$c_1 = \frac{12\sinh(ka) - \sqrt{144\sinh^2(ka) - 84\delta k^2\cosh(ka)}}{7k^2\cosh(ka)}. \tag{53}$$

此处，方程 (53) 中平方根的符号选取为使得在小扰动极限下，$c_1 \simeq \delta/2\sinh(k/2)$。

现在，我们已得到 c_1、c_2、$h(y)$ 和 $g(y)$。接下来可以求解方程 (42)，得到 $f(x_0)$，从而获得计算 RDR 解（方程 (36)）所需的全部信息。一般而言，从方程 (42) 求解 $f(x_0)$ 需要进行数值处理。然而，在 $|x_0|\to 0$ 的极限下，$f(x_0)$ 的主导阶行为可解析地表示为 [18]

$$f(x_0) \simeq (c_f\,|x_0|)^{8/3}, \tag{54}$$

其中系数 c_f 可用伽马函数 Γ [25] 表示为

$$c_f \equiv \frac{2(3/4)^{1/8}}{\pi^{3/2}}\Gamma(3/8)\Gamma(9/8)\,(c_1k)^{-1/4} \simeq 0.7735\,(c_1k)^{-1/4}. \tag{55}$$

2.6. 压力梯度驱动的电流奇异性

至此，我们的分析表明，压力梯度对磁通面几何形状的影响可以忽略不计。现在我们可以讨论压力梯度对电流密度分布的影响了。我们主要关注共振面附近的电流密度，即内层解。

在强导引场极限下，等离子体近似不可压缩；因此，由方程（18）和（20）可得 $p(x_0) \simeq p_0(x_0)$ 和 $B_z(x_0) \simeq B_{z0}(x_0)$，作为主阶近似。要计算电流密度，需要 $B_z'(x_0)$，但我们不能简单地假设$B_z'(x_0) \simeq B_{z0}'(x_0)$，原因如下：导向磁场较强时，$B_z(x_0)$ 和$B_{z0}(x_0)$ 都接近常数，只是存在不同的微小变化，以满足不同条件下的力平衡；这些不同的微小变化会导致这两个场的导数不同。为了得到 $B_z'(x_0)$ 的近似值，我们对方程（34）关于x_0求导，得到

$$\frac{df}{dx_0} = -2B_z B_z' - 2p' \simeq -2B_{z0}B_z' - 2p_0'. \tag{56}$$

因此，

$$B_z' \simeq \frac{-p_0'}{B_{z0}} - \frac{1}{2B_{z0}}\frac{df}{dx_0}. \tag{57}$$

将式（57）代入式（22），可得极向电流密度

$$\boldsymbol{J}_p = \frac{dB_z}{d\psi}\nabla\psi\times\hat{\boldsymbol{z}} = -\left(\frac{d\psi}{dx_0}\right)^{-1}\frac{dB_z}{dx_0}\boldsymbol{B}_p \simeq \frac{1}{x_0}\left[p_0' + \frac{1}{2}\frac{df}{dx_0}\right]\frac{\boldsymbol{B}_p}{B_{z0}}. \tag{58}$$

在 $x_0 = 0$ 附近，$f \sim |x_0|^{8/3}$ 和 $df/dx_0 \sim |x_0|^{5/3}$。假设 $p_0' \neq 0$，压力梯度项占主导，且极向电流密度按 $J_p \sim p_0'/x_0$ 发散。

接下来，我们计算面外电流密度 $J_z = \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}_p$。$\boldsymbol{B}_p$ 的主导分量为 $B_y \simeq \operatorname{sgn}(x_0)\sqrt{f(x_0) + g(y)}$。因此，面外电流密度

$$J_z \simeq \left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)^{-1}\frac{\partial B_y}{\partial x_0} \simeq \frac{\sqrt{f+g}}{|x_0|}\frac{\operatorname{sgn}(x_0)}{2\sqrt{f+g}}\frac{df}{dx_0} = \frac{1}{2x_0}\frac{df}{dx_0}, \tag{59}$$

它不受压力影响。根据渐近行为（54），J_z 在 $x_0 = 0$ 附近的首阶行为为

$$J_z \simeq \frac{4}{3}c_f^{8/3}|x_0|^{2/3}. \tag{60}$$

因此，面外分量 $J_z \to 0$ 按 $x_0 \to 0$ 变化。

现在，我们将结果置于 Pfirsch–Schlüter电流密度的传统处理框架中。对于 GS方程的一个解，电流密度的垂直分量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_\perp &= \frac{\boldsymbol{B}\times\nabla p}{B^2} = \frac{1}{B^2}\left(B_z\hat{\boldsymbol{z}} + \hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla\psi\right)\times\nabla p \\ &= \frac{1}{B^2}\frac{dp}{d\psi}\left(B_z\boldsymbol{B}_p - B_p^2\hat{\boldsymbol{z}}\right),\end{aligned} \tag{61}$$

而 $\boldsymbol{J}_\perp$ 的散度为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_\perp =& \ (\boldsymbol{B}\times\nabla p)\cdot\nabla\frac{1}{B^2} = \frac{dp}{d\psi}\left(B_z\boldsymbol{B}_p - B_p^2\hat{\boldsymbol{z}}\right)\cdot\nabla\frac{1}{B^2}\\ =& \ \boldsymbol{B}_p\cdot\nabla\left(\frac{B_z}{B^2}\frac{dp}{d\psi}\right).\end{aligned} \tag{62}$$

这里，我们利用了 z 是对称方向，且 p 和 B_z 都是磁通函数。平行电流密度为

$$\begin{aligned}J_\parallel =& \frac{J_zB_z+\boldsymbol{J}_p\cdot\boldsymbol{B}_p}{B} = \frac{1}{B}\left(B_z\nabla^2\psi - \frac{dB_z}{d\psi}B_p^2\right)\\ =& \frac{1}{B}\left(B_z\nabla^2\psi - \frac{dB_z}{d\psi}\left(B^2-B_z^2\right)\right)\\ =& \ -B\frac{dB_z}{d\psi} - \frac{B_z}{B}\frac{dp}{d\psi}.\end{aligned} \tag{63}$$

这里，在最后一步中我们应用了 GS方程 (11)。由方程 (62) 和 (63) 可知，磁微分方程 (4) 确实满足：

$$\boldsymbol{B}\cdot\nabla\frac{J_\parallel}{B} = -\boldsymbol{B}_p\cdot\nabla\left(\frac{B_z}{B^2}\frac{dp}{d\psi}\right) = -\nabla\cdot\boldsymbol{J}_\perp. \tag{64}$$

对于 HKT问题，电流密度的平行分量和垂直分量可由方程 (63) 和 (61) 得到：

$$J_\parallel = -\frac{B}{x_0}\frac{dB_z}{dx_0} - \frac{B_z}{x_0B}\frac{dp}{dx_0} \simeq \frac{B}{B_z}\left(\frac{1}{2x_0}\frac{df}{dx_0} + \frac{p'}{x_0}\frac{B_p^2}{B^2}\right) \tag{65}$$

and

$$\boldsymbol{J}_\perp = \frac{p'}{x_0B^2}\left(B_z\boldsymbol{B}_p - B_p^2\hat{\boldsymbol{z}}\right). \tag{66}$$

或者，我们也可以通过适当的投影，由方程 (58) 和 (59) 得到 $J_\parallel$ 和 $\boldsymbol{J}_\perp$ 。注意，$J_\parallel \propto B_p^2/B^2$ 和 $J_\perp \propto B_p/B$；因此，在强导引场极限下，垂直分量 $J_\perp$ 占主导。

方程 (65) 和 (66) 表明，Pfirsch–Schlüter电流密度 $J_\parallel$ 和抗磁电流密度 $\boldsymbol{J}_\perp$ 都随 p'/x_0发散。若假设沿 z 方向的系统尺寸与沿 y 方向的尺寸 L 相同，则等效的“旋转变换”为

$$\iota(x_0) = \frac{B_{y0}}{B_{z0}} = \frac{x_0}{B_{z0}}. \tag{67}$$

现在，暂且用符号 x表示旋转变换 ι ，Pfirsch– Schlüter 电流密度确实具有一种 $1/x$ 型奇异性；然而，其散度背后的原因并非通常所认为的那样。

在传统观点中，$1/x$型奇异性源于人们认为磁微分算子 $\boldsymbol{B}\cdot\nabla$ 在有理面处变得不可逆，这一点可由采用直磁力线坐标系得到的表达式 (4) 和 (8) 看出。通常假定 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_\perp$ 和直磁力线坐标系都性质良好；因此，根据方程 (9)，会出现 $1/x$型奇异性。相比之下，我们的结果表明，抗磁电流密度$\boldsymbol{J}_\perp$在 $\sim p'/x_0$时发散；同样，根据方程 (62)，$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_\perp$也在 $\sim p'/x_0$时发散。

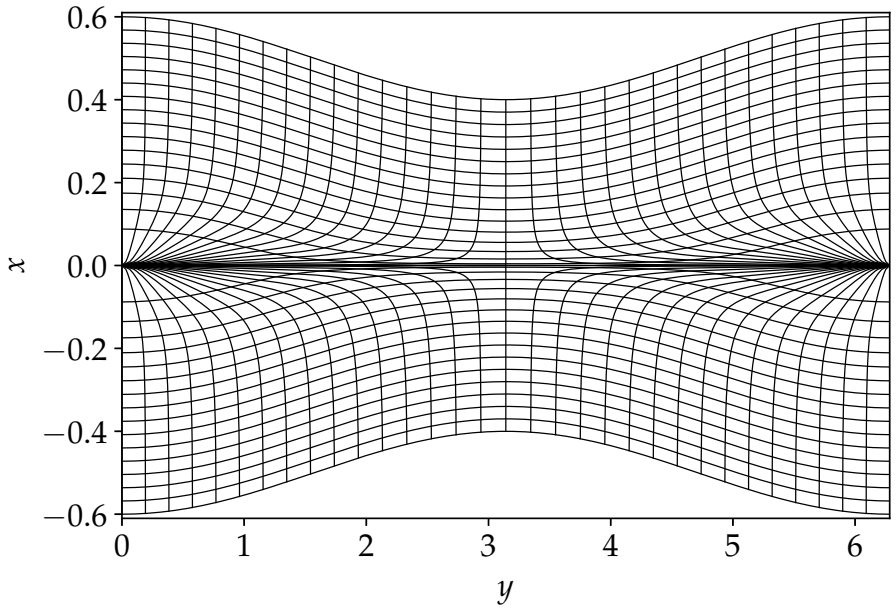


图2。 HKT问题的直磁力线坐标系，其中包含 $L = 2\pi$、 $a = 0.5$ 和 $\delta = 0.1$。该坐标系在共振面处变得不适定。

一个关键之处在于，由于形成了狄拉克 δ函数电流奇异性，极向磁场 $\boldsymbol{B}_p$ 并不会像在共振面处那样趋于零；相反， $\boldsymbol{B}_p \to \pm\sqrt{g(y)}\hat{\boldsymbol{y}}$在 $x_0 \to \pm 0$时成立。因此，磁微分算子 $\boldsymbol{B}\cdot\nabla$ 是可逆的，而磁微分方程 (4) 表明，平行电流密度 $J_\parallel$ 以与$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_\perp$相同的方式发散。‡

我们如何调和这样的事实：算子 $\boldsymbol{B}\cdot\nabla$ 在共振面处是可逆的，但在直磁力线坐标系中却表现为不可逆？要回答这个问题，构造这样一个坐标系将很有帮助。由于初始磁力线是直的，笛卡尔坐标就是直磁力线坐标系。现在，如果我们从拉格朗日视角出发，将最终状态描述为流体元的初始位置 $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 到其最终位置 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ 的映射，那么由于理想磁流体力学冻结约束，初始坐标 (x_0, y_0, z_0) 对最终状态而言也构成直磁力线坐标系。在拉格朗日视角下， $\boldsymbol{x}$ 处的磁场由 $\boldsymbol{x}_0$ 处的初始磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 和映射 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0)$ 根据关系 [20, 26]确定

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{J}^{-1}\boldsymbol{B}_0\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{x}_0}, \tag{68}$$

其中， $\mathcal{J} = \det(\partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{x}_0)$ 是该映射的雅可比行列式。

‡ 严格来说，将算子 $\boldsymbol{B}\cdot\nabla$ 描述为在 $x_0 = \pm 0$处条件可逆或许更为恰当。由于函数 g 在 $y = 0$ 和 L处趋于零，方程 $\pm\sqrt{g(y)}d\varrho/dy = \varsigma$只有在 y 趋近于 0、 L 趋近于 ς时，且函数 $\varsigma/\sqrt{g}$ 可积的条件下才有解。磁微分方程（4）右端的 $-\nabla\cdot\boldsymbol{J}_\perp$ 满足这一条件。

虽然我们的 Grad–Shafranov 表述并非完全采用拉格朗日形式，但在求得解后，我们可以重建流体元从初始状态到最终状态的拉格朗日映射。在这个二维问题中，流体运动局限于一个 x-y 平面内。因此，初始状态和最终状态的 z 坐标相同，即 $z = z_0$。在一个 x-y 平面内，对于最终状态中由 $(x_0,\ y)$ 标记的每个流体元，我们需要找到它的初始位置 $(x_0,\ y_0)$。这个“逆向”拉格朗日映射可以表示为函数 $y_0\,(x_0,\ y)$。根据穿过一个无穷小流体元的磁通守恒

$$B_{z0}\,(x_0)\,dx_0\left[\frac{\partial y_0}{\partial y}dy\right] = B_z\,(x_0)\left[\frac{\partial x}{\partial x_0}dx_0\right]dy \tag{69}$$

并利用方程（18）将 B_{z0} 和 B_z 联系起来，我们可以计算

$$\frac{\partial y_0}{\partial y} = \frac{\partial x/\partial x_0}{\langle \partial x/\partial x_0\rangle} \tag{70}$$

并沿每条恒定-x_0 等值线对其积分，得到 $y_0(x_0, y)$。使用方程（70）中的 RDR 解可得 (36)

$$\frac{\partial y_0}{\partial y} = \frac{|x_0|}{\sqrt{f(x_0)+g(y)}}. \tag{71}$$

在 $x_0 \to 0$ 的极限下，除 $y = 0$ 和 $y = L$ 处之外，处处都有 $\partial y_0/\partial y \to 0$，其中 $\partial y_0/\partial y$ 随 $\sim |x_0|^{-1/3}$ 发散。因此，直磁力线坐标系（x_0, y_0, z_0）在共振面处变得不适定，这也解释了为什么可逆算子 $\boldsymbol{B}\cdot\nabla$ 在这种坐标系中看似不可逆。图2展示了 HKT问题中直磁力线坐标（x_0, y_0, z_0）的一个恒定-z_0 切片，其中 $L = 2\pi$、$a = 0.5$ 和 $\delta = 0.1$，实线为恒定-x_0 或恒定-y_0 坐标曲线。坐标系在共振面处的奇异性十分明显，因为所有恒定-y_0 坐标曲线都向 $y = 0$ 或$y = L$ 汇聚。

现在，关键问题是： $1/x$型电流奇异性会导致无限大的电流吗？幸运的是，答案是否定的，原因可归结为在共振面同时出现的狄拉克 δ 函数奇异性。有限的切向不连续$[\![B_y]\!]_{x_0=0} = 2\sqrt{g(y)}$（其中 $[\![\cdot]\!]$ 表示界面两侧的跃变）源于连续的初始磁场，这是由于磁通面 [16]之间的空间受到挤压所致。正如我们从 RDR 解 (36) 中所推知的，对于足够接近共振面、以至于满足以下条件的磁通面

$$f\,(x_0) \ll g(y) \tag{72}$$

时，从磁通面标记 x_0 到物理距离 s 的映射是二次的：

$$s = |x\,(x_0, y)| \simeq \frac{x_0^2}{\sqrt{g(y)}}. \tag{73}$$

由于 $f(x_0) \sim |x_0|^{8/3}$ 且 $g(y) \simeq \left(4c_1^2k^2/3\right)\sin^8(ky/2)$，其中 $k = 2\pi/L$，对于除 $y = 0$ 和 $y = L$ 以外的所有 y，只要 x_0 足够小，条件 (72) 最终都会得到满足。因此，该映射最终会变为二次映射， $s \sim x_0^2$，不过对于不同的 y，转变为二次映射时的 x_0 会有所不同。由于这种二次映射，极向电流密度 $J_p \sim 1/x_0$ 会变为 $J_p \sim 1/\sqrt{s}$。而且，由于 $\int_0^s ds'/\sqrt{s'}$ 可积，总电流不会发散。

那么，在映射不是二次映射的 $y = 0$和 $y = L$ 处又会怎样呢？由于这些位置的 $g = 0$ 和 $f \sim |x_0|^{8/3}$，方程 (58) 给出 $J_p \sim |x_0|^{1/3}$，因此不会发散。此外，为了

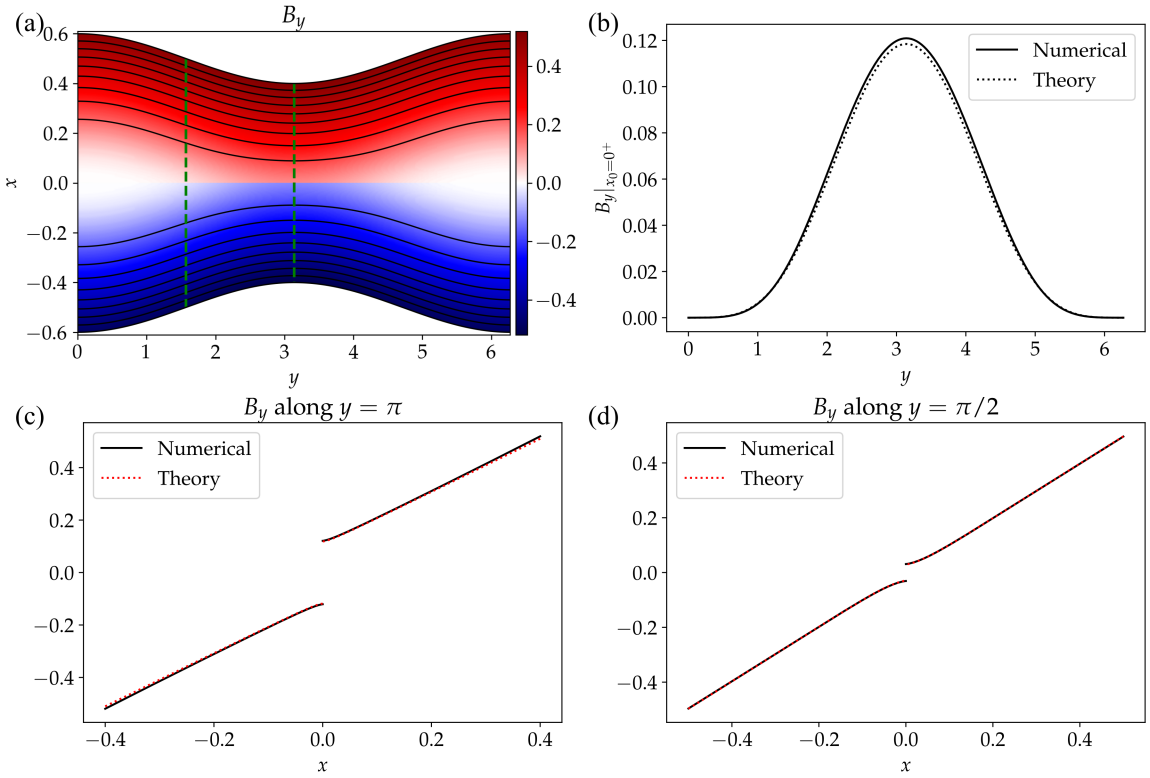


图3. </style}整个区域内的磁场分量 B_y (a)；沿 $x_0 = 0^+$ 的分量；(c) 沿 $y = \pi$ 的分量；(d) 沿 $y = \pi/2$ 的分量。图(a)中的黑色实线表示磁通面，竖直虚线表示图(c)和图(d)中一维切线的位置。图(b–d)中的黑色实线表示数值结果，红色点线表示解析理论的预测。

补偿二次映射造成的强烈挤压， $y = 0$ 和 $y = L$ 附近下游区域中的磁通面必须向外鼓起。因此， $y = 0$ 和 $y = L$处的标度变为 $s \sim |x_0|^{2/3}$；参见文献 [18]。

直观地说，$J \sim 1/\sqrt{s}$ 标度可以理解如下。二次映射 $s \sim x_0^2$会导致压力梯度变陡：

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)^{-1} \frac{\partial p}{\partial x_0} \sim \frac{1}{x_0}\frac{\partial p}{\partial x_0} \sim \frac{1}{\sqrt{s}}\frac{\partial p}{\partial x_0}. \tag{74}$$

由于在磁流体力学平衡中，压力梯度由 $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ 力平衡，因此垂直电流密度 $J_\perp \sim |\nabla p| \sim 1/\sqrt{s}$，且 $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_\perp$ 以相同的方式发散。最后，平行电流密度满足磁微分方程（4），且算子 $\boldsymbol{B} \cdot \nabla$可逆；因此， $J_\parallel \sim 1/\sqrt{s}$ 也如此。 –

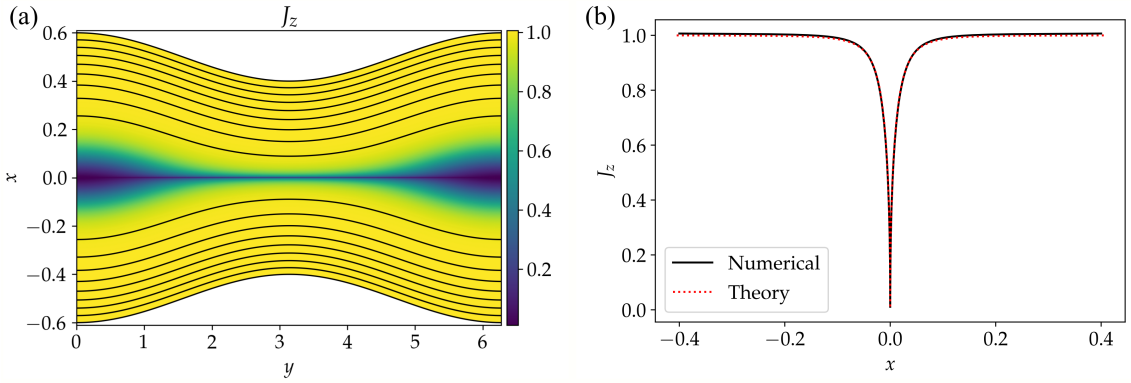


图4. (a) 整个区域内 J_z 的数值解；(b) 图(a)中沿 $y = \pi$ 的一维截线。图(b)中的黑色实线为数值解，红色点线为解析理论的预测结果。

3. 解析解的数值验证

现在，我们将第2节中的解析解与使用 GS求解器得到的数值解进行比较。GS求解器经过了广泛测试，结果表明，对于具有 $p = 0$的 HKT问题，其结果与全拉格朗日求解器 [16] 和 SPEC代码 [18] 的解吻合良好。这里，我们考虑压力剖面为线性的初始平衡

$$p_0 = \bar{p_0} + r x_0 \tag{75}$$

以及一个磁场

$$\boldsymbol{B}_0 = x_0 \hat{\boldsymbol{y}} + \sqrt{B_0^2 - 2 r x_0 - x_0^2}\,\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{76}$$

以下数值计算所采用的参数为：区域尺寸 $a = 1/2$ 和 $L = 2\pi$；导向磁场 $B_0 = 10$；平均压力 $\bar{p_0} = 1$；压力梯度 $r = 1$；扰动幅度 $\delta = 0.1$；绝热指数 $\gamma = 5/3$。

在我们之前的研究中，假设中平面两侧具有镜像对称性，因此只需在区域的一半内求解带有 $x_0 \geq 0$ 的GS方程。在本研究中，由于共振面两侧的压力剖面不对称，我们无法施加镜像对称性。我们将区域划分为由磁通面 $x_0 = 0$ 分隔的两个区域，并采用下降法分别在每个区域内求解GS方程。在两个区域同时进行迭代的过程中，允许 $x_0 = 0$磁通面移动，直至满足力平衡条件 $[\![B^2/2 + p]\!] = 0$。

图3的图(a)展示了整个区域内 B_y 分量的数值解。图(b–d)展示了数值解中选取的几个一维（1D）截面，以及相应的解析解（33）。解析解与数值解吻合良好。磁场在共振面两侧不连续，对应于狄拉克 δ 函数型电流奇异性。

图4比较了 J_z 分量的数值解与使用方程（59）得到的理论预测。此处，理论预测共振面处的 $J_z \to 0$。同样，图5展示了沿选定一维截线的 J_y 数值解与使用方程（58）得到的理论预测之间的比较。在该图中，水平轴 $|x - x_r|$ 表示磁通面与

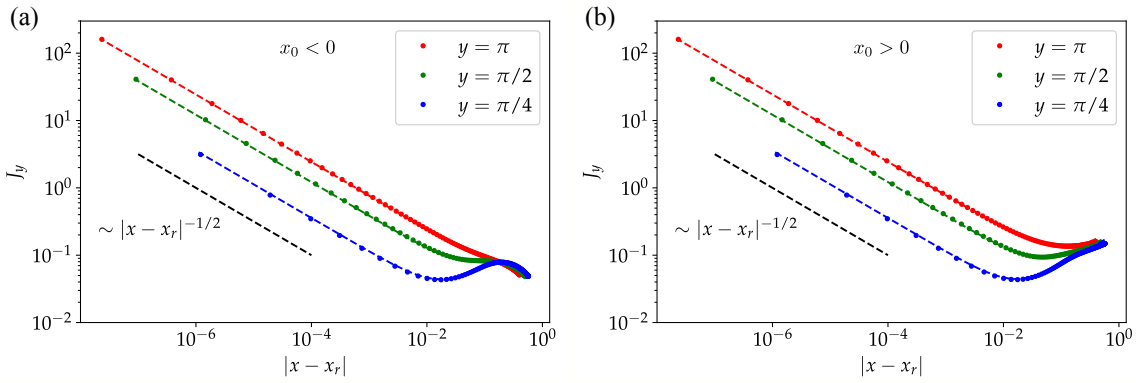


图5. 沿若干一维截线对比 J_y 的数值解与理论预测。实心圆点表示数值解，虚线表示理论预测。图(a)显示包含 $x_0 < 0$ 的区域，图(b)显示包含 $x_0 > 0$的区域。这里，水平轴 $|x - x_r|$ 表示位于x 的磁通面与位于 x_r的共振面之间的距离。正如理论所预测的，在共振面附近， J_y 会在 $|x - x_r|^{-1/2}$ 时发散。

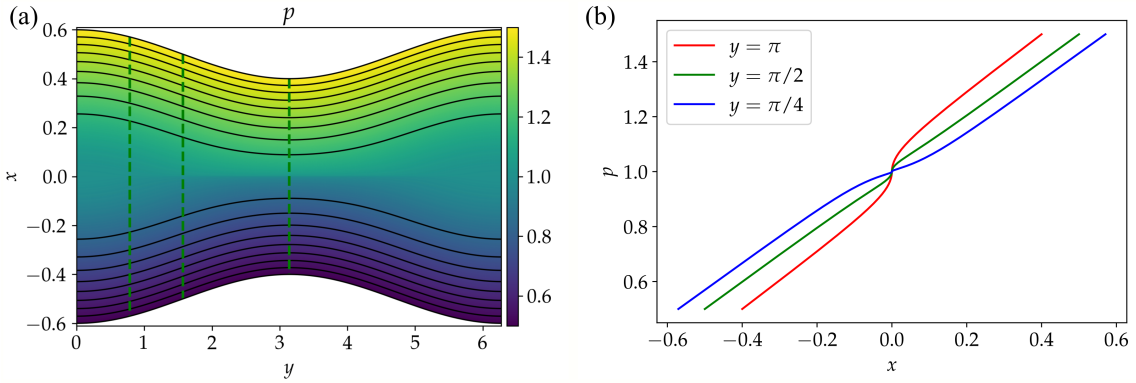


图6. (a) 整个区域内压力 p的数值解；(b) 沿图(a)中虚线的一维截线。

位于 x 处的磁通面与位于 x_r处的共振面之间的距离。正如理论所预测的，靠近共振面时 J_y 会发散，此时 $|x - x_r|^{-1/2}$。

最后，图6展示了整个区域内以及沿选定一维截线的压力 p 数值解。显然，共振面附近磁通面受到挤压，导致压力梯度变陡。考察共振面附近的解表明，正如我们的分析所预期的那样，$\partial p/\partial x \sim |x - x_r|^{-1/2}$。

需要指出的是，尽管解析理论是在强导引场极限下推导的，但我们发现，即使对于如 $B_0 = 2$ 这样的中等导向磁场，理论预测仍然与数值结果接近。

4. 讨论与结论

总之，我们推导出了理想 Hahm–Kulsrud–Taylor（HKT）问题共振面附近压力梯度驱动的电流奇异性的解析理论，并通过数值解验证了该理论。我们的主要发现是，尽管电流密度按 $J \sim 1/\Delta\iota$ 发散，其中 $\Delta\iota$ 是相对于共振面的旋转变换之差，但这种奇异性并不会导致总电流发散。原因在于，共振面与相邻磁通面之间的距离 s 并不与 $\Delta\iota$ 成正比。由于共振面处形成了狄拉克 δ-函数电流片，相邻磁通面被强烈压缩，而距离 $s \sim (\Delta\iota)^2$。因此，电流密度 $J \sim 1/\sqrt{s}$，它是可积的，且总电流有限。

我们的分析还发现，Pfirsch–Schlüter 电流密度 $J_\parallel$ 和抗磁电流密度 $\boldsymbol{J}_\perp$ 均会随 $1/\sqrt{s}$而发散，其中抗磁电流密度是主要分量。磁通面在共振面附近密集聚集，导致压力梯度变陡，因此抗磁电流密度会发散；因此，$\boldsymbol{J}_\perp \sim dp/ds \sim 1/\sqrt{s}$。此外，求解磁微分方程 (4) 得到的平行电流密度 $J_\parallel$ 也会以与垂直分量 $\boldsymbol{J}_\perp$相同的方式发散。值得注意的是，与通常认为压力必须在有理面上变平才能使电流密度可积的观点相反，我们在此表明，尽管压力梯度变陡，电流奇异性仍然是可积的。

我们的分析假设初始压力梯度 dp/dx_0 不会发散，且在 $x_0 = 0$处非零。更一般地，我们可以考虑满足 $J_p \sim dp/dx_0 \sim |x_0|^\alpha$的初始条件，其中 $\alpha > -1$，使得电流密度可积。经过边界扰动后，电流密度 $J \sim dp/ds \sim s^{(\alpha-1)/2}$。由于幂指数 $(\alpha - 1)/2 > -1$，若$\alpha > -1$，则电流密度可积。此外，我们可以考虑初始磁场 $B_{y0} \sim \mathrm{sgn}(x_0)\,|x_0|^\nu$。经过边界扰动后，形成狄拉克 δ-函数电流片要求磁通面之间的距离按 $s \sim |x_0|^{\nu+1}$缩放；因此，电流密度 $J \sim dp/ds \sim s^{(\alpha-\nu)/(\nu+1)}$，且可积。在所有这些情况下，只要初始电流密度可积，扰动态中的电流密度也可积。

尽管我们的结论是通过一个简单的原型问题得出的，但类似的结论或许也适用于更一般的磁场，并有望化解 Pfirsch–Schlüter 电流密度不可积性的悖论。如果确实如此，那么具有连续嵌套磁通面、在有理面上压力梯度不为零的连续压力分布以及连续旋转变换的弱（即非光滑）理想磁流体平衡解并非不可能存在。引用 Grad 的话，这样的平衡或许是病态的，但在数学上仍值得探讨。

致谢

我们感谢 Greg Hammett 博士提供的有益讨论。本研究得到美国能源部合同 DE-AC02-09CH11466 的资助，并获得 Simons Foundation/SFARI（560651，AB）的资助。本研究部分工作是在 EUROfusion 联盟框架内开展的，并获得欧洲原子能共同体 2014–2018 年和 2019–2020 年研究与培训计划根据资助协议第 633053 号提供的资金。本文所表达的观点和意见不一定反映欧盟委员会的立场。YZ 获得上海浦江人才计划资助（资助编号：21PJ1408600）。部分数值计算

每　　使用国家能源研究科学计算中心的计算机完成。

参考文献

[1] Lyman Spitzer。《仿星器概念》。《流体物理》，1(4):253，1958。[2] Allen H. Boozer。什么是仿星器。《等离子体物理》，54(5):1647–1655，1998。[3] Per Helander。非轴对称磁场中的等离子体约束理论。《物理学进展报告》，77(8):087001，2014年7月。[4] Allen H. Boozer。仿星器设计。《等离子体物理学杂志》，81(06)，2015年12月。[5] S. P. Hirshman 和 J. C. Whitson。三维磁流体力学平衡的最速下降矩方法。《流体物理》，26(12):3553，1983。[6] Mark Taylor。用于非线性磁流体力学稳定性的高性能谱代码。《计算物理学杂志》，110(2):407–418，1994年2月。[7] P. R. Garabedian。三维仿星器代码。《美国国家科学院院刊》，99(16):10257–10259，2002年7月。[8] D. W. Dudt 和 E. Kolemen。DESC：仿星器平衡求解器。《等离子体物理》，27(10):102513，2020年10月。[9] John R. Cary 和 M. Kotschenreuther。三维环形等离子体中的压力诱导岛。《流体物理》，28(5):1392，1985。[10] Chris C. Hegna 和 A. Bhattacharjee。三维等离子体平衡中的磁岛形成。《流体物理B：等离子体物理》，1(2):392–397，1989年2月。[11] Harold Grad。等离子体的环形约束。《等离子体流体》，10(1):137–154，1967。[12] S. R. Hudson 和 B. F. Kraus。具有连续磁场的三维磁流体力学平衡。《等离子体物理学杂志》，83(04)，2017年7月。[13] B. F. Kraus 和 S. R. Hudson。具有分形压力剖面的理想磁流体力学平衡理论与离散化。《等离子体物理》，24(9):092519，2017年9月。[14] T. S. Hahm 和 R. M. Kulsrud。强迫磁重联。《等离子体流体》，28(8):2412–2418，1985。[15] R. L. Dewar、A. Bhattacharjee、R. M. Kulsrud 和 A. M. Wright。Hahm-Kulsrud-Taylor平衡模型的磁岛团解。《等离子体物理》，20:082103，2013。[16] Yao Zhou、Yi-Min Huang、Hong Qin 和 A. Bhattacharjee。拓扑约束等离子体中电流奇异性的形成。《物理评论E》，93:023205，2016。[17] Yao Zhou、Yi-Min Huang、A. H. Reiman、Hong Qin 和 A. Bhattacharjee。具有电流奇异性和连续旋转变换的磁流体力学平衡。《等离子体物理》，26(2):022103，2019年2月。[18] Yi-Min Huang、Stuart R. Hudson、Joaquim Loizu、Yao Zhou 和 Amitava Bhattacharjee。共振磁扰动引发的 δ-函数电流片数值研究。《等离子体物理》，29(3):032513，2022。[19] Yi-Min Huang、A. Bhattacharjee 和 Ellen G. Zweibel。势场在简单压缩或膨胀下会形成电流片吗？《天体物理学杂志快报》，699:L144–L147，2009。[20] Yao Zhou、Hong Qin、J. W. Burby 和 A. Bhattacharjee。含内置平流方程的理想磁流体力学变分积分。《等离子体物理》，21:102109，2014。

[21] S. R. Hudson、R. L. Dewar、G. Dennis、M. J. Hole、M. McGann、G. von Nessi 和 S. Lazerson。多区域弛豫磁流体力学平衡的计算。等离子体物理，19(11):112502，2012年11月。[22] Yao Zhou、Yi-Min Huang、Hong Qin 和 A. Bhattacharjee。构造三维线锚定等离子体中的电流奇异性。《天体物理学杂志》，852:3，2018。[23] M. N. Rosenbluth、R. Y. Dagazian 和 P. H. Rutherford。圆柱形托卡马克中内禀m=1 扭结不稳定性的非线性性质。《等离子体流体》，16(11):1894–1902，1973。[24] J. Loizu 和 P. Helander。自发和受迫螺旋共振磁流体力学状态的统一非线性理论。《等离子体物理》，24(4):040701，2017。[25] Milton Abramowitz 和 Irene A. Stegun 编。《数学函数手册：公式、图表和数学表格》。美国国家标准局，第10次印刷（含勘误版），1972。[26]William A. Newcomb。《磁流体力学中的拉格朗日和哈密顿方法》。《核聚变》增刊，第*2*部分，第451–463页，1962年。