arXiv:2303.02122v1 [math.FA] 3 Mar 2023

# Corson 的性质 (C) 与巴拿赫空间的其他序列性质

GONZALO MARTÍNEZ-CERVANTES 和 ALEJANDRO POVEDA

摘要。R. Pol 的一个著名结果指出，巴拿赫空间 $X$ 具有 Corson 的性质 ($\mathcal{C}$)，当且仅当任意凸集 $C \subseteq B_{X^*}$的弱*闭包中的每个点，实际上都属于 $C$的某个可数子集的弱*闭包。然而，这是否又等价于 $B_{X^*}$ 相对于弱*拓扑的可数紧致度，仍是一个开放问题。Frankiewicz、Plebanek 和 Ryll-Nardzewski 在 Martin 公理 + ¬连续统假设下，对 $\mathcal{C}(K)$-空间这一类给出了肯定答案。本文通过证明，在正规迫叠公理（PFA）下，任意巴拿赫空间 $X$都满足以下等价条件，从而对这一结果作了部分推广：

(1) $X$ 具有性质 $\mathcal{E}'$；(2) $X$ 具有弱*序列对偶球；(3) $X$ 具有 Corson 的性质（$\mathcal{C}$）；(4) $(B_{X^*}, w^*)$具有可数紧致度。

这对 Arhangel'skii 的一个早期结果作了部分推广。此外，我们证明每个具有性质 $\mathcal{E}'$ 的巴拿赫空间都具有弱*凸块紧对偶球。

## 1. 引言

若每个交集为空的闭凸子集族中，都包含一个交集为空的可数子族，则称巴拿赫空间 $X$ 具有性质（$\mathcal{C}$）*Corson*。R. Pol 发现，性质（$\mathcal{C}$）是可数紧致度的凸类比：

**定理**（Pol [17]）。巴拿赫空间 $X$ 具有性质（$\mathcal{C}$），当且仅当凸集 $C \subseteq B_{X^*}$ 的弱*闭包中的每个点，都属于 $C$的某个可数子集的弱*闭包。

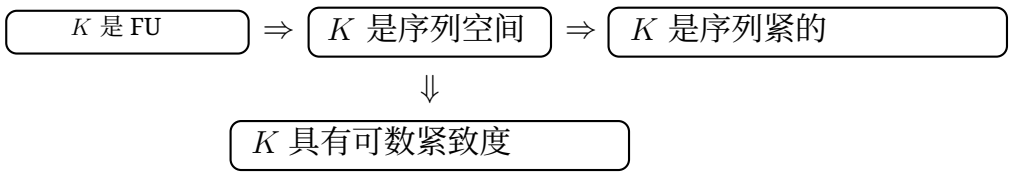
回顾一下，若拓扑空间 $T$ 满足以下条件，则称其具有可数紧致度：对于 $T$ 的每个子空间 $F$，其闭包 $F$ 中的每个点都属于 $F$ 的某个可数子空间的闭包。因此，若巴拿赫空间 $X$ 的对偶球（关于弱*拓扑）具有可数紧致度，则 $X$ 具有 Corson 的性质（$\mathcal{C}$）。一个自然的问题是，反向蕴含是否成立。据我们所知，这个问题尚未解决（见 [11, 14, 12]）。

2010 数学主题分类。 主要分类 57N17、54D55、46A50；次要分类 46B20、46B50。关键词和短语。序列、序列紧、可数紧致度、 Corson 的性质 (C) 、 Fréchet-Urysohn 、天使性质、 Efremov 性质、巴拿赫空间。第一作者部分获得了 Fundación Séneca - ACyT Región de Murcia（资助编号 21955/PI/22）以及 Agencia Estatal de Investigación 和 EDRF/FEDER"建设欧洲的一种方式"（MCIN/AEI/10.13039/501100011033，资助编号 PID2021-122126NB-C32）的支持。第二作者由哈佛大学数学科学与应用中心资助。

可数紧致度和 Corson 的性质（$\mathcal{C}$）都与若干经典的序列性质密切相关。在深入探讨之前，我们先确定记号，并说明所要讨论的一些拓扑概念。手稿中考虑的所有拓扑空间均假定为豪斯多夫空间。符号 $w^*$ 将专用于表示巴拿赫空间的弱*拓扑。回顾一下，若拓扑空间 $T$ 中的每个序列都包含一个收敛子列，则称其为序列紧；而若对于 $T$ 的每个子空间 $F$，其闭包 $F$ 中的每个点都是 $F$ 中某个序列的极限，则称其为 $Fréchet\text{-}Urysohn$ （简称 FU）。因此，每个 FU 紧空间都是序列紧的，并且具有可数紧致度。为便于讨论并遵循该领域的标准术语，我们将具有弱*-FU 对偶球的巴拿赫空间称为具有弱*天使对偶。

本文将特别关注一种介于 FU 性质与具有可数紧致度之间的性质。若拓扑空间 $T$ 的任意序列闭子空间都是闭的，则称其为序列空间。回顾一下，如果一个集合等于其序列闭包，也就是等于该集合中所有序列的极限所组成的集合，就称它是序列闭的。显然，每个 FU 空间都是序列空间，而每个序列紧空间都是序列紧的。众所周知，每个序列空间都具有可数紧致度。然而，对于紧空间这一类，逆命题是否成立，这一问题被称为 *Moore-Mrowka* 问题，在 ZFC 的公理体系下不可判定。一方面，Balogh 证明了，在 [3] 中，若采用正规迫叠公理（PFA），则紧空间具有可数紧致度当且仅当它是序列空间。另一方面，Fedorchuk [10] 给出了一个相容的例子：一个具有可数紧致度但不存在收敛子列的紧空间，因此它不是序列紧的。此后，Dow [8] 以及较近时期的 Dow 和 Eisworth [9]又得到了 Balogh 定理的若干变体，这些变体不依赖于 PFA（因而避开了大基数的使用）。

因此，对于紧空间 $K$，有以下蕴含关系：




下文我们将关注上述性质的凸类比，其中拓扑空间是赋予弱*拓扑的巴拿赫空间的对偶球。若巴拿赫空间 $X$ 具有性质 $\mathcal{E}$，则对于任意凸 子集 $C \subseteq B_{X^*}$，其弱*闭包中的每一点都是 $C$ [16, p 中某个序列的弱*极限 352] 。同理，若 $X$ 具有性质 $\mathcal{E}'$，则对偶球中的每个弱*序列闭凸 集都是弱星闭的 [13]。因此，若 $X$ 具有弱*天使对偶，则它具有性质 $\mathcal{E}$，而这又蕴含性质 $\mathcal{E}'$。同样，若 $X$ 具有弱*序列对偶球，则 $X$具有性质 $\mathcal{E}'$。

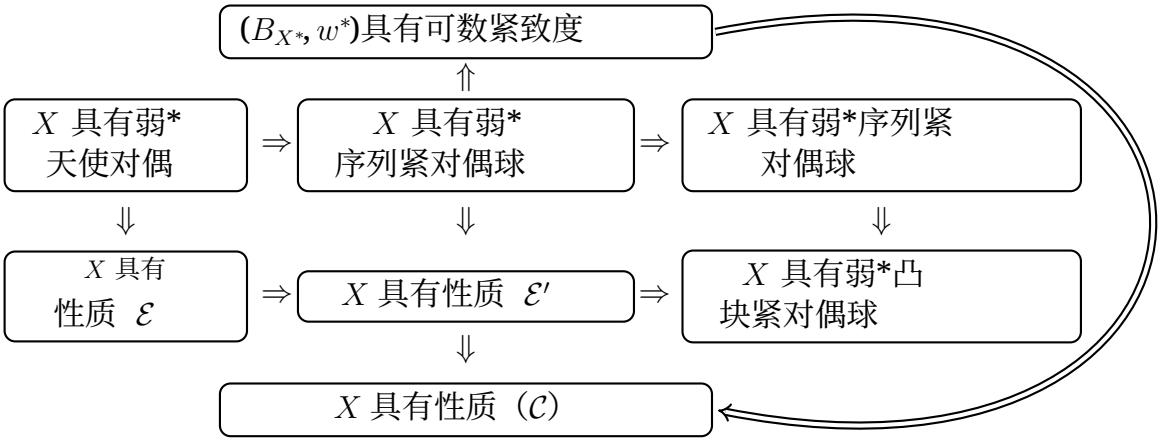
最后一个命题 本文所讨论的性质是序列紧致性的一种凸版本 :

**定义**。 若$(x_n)_n$ 是巴拿赫空间中的一个序列，我们称$(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的凸块子列，若存在由有限子集组成的序列$(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其中各集合属于 $\mathbb{N}$，满足$\max(I_k) <\min(I_{k+1})$，且存在一个序列 $a_n \in [0,1]$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\sum_{n\in I_k} a_n = 1$，从而

$$y_k = \sum_{n\in I_k} a_n x_n.$$

如果巴拿赫空间 $X$ 中的每个有界序列都存在弱*收敛凸块子列，则称该空间具有弱*凸块紧对偶球性质。

由于每个子列都是凸块子列，因此每个具有弱*序列紧对偶球的巴拿赫空间都具有弱*凸块紧对偶球性质。一个简单的论证表明，每个具有性质 $\mathcal{E}'$ 的巴拿赫空间都具有性质（$\mathcal{C}$）（见引理 2）。此外，我们在定理 3 中证明，每个具有性质 $\mathcal{E}'$ 的巴拿赫空间都具有弱*凸块紧对偶球。因此，这些巴拿赫空间性质之间的蕴含关系可用下图概括:




A. Plichko 和 D. Yost 在 [16, 第 352] 页询问性质（$\mathcal{C}$）是否蕴含性质$\mathcal{E}$。J. Moore 在一份未发表的笔记中给出了否定答案，他使用了 Ostaszewski 空间的一种修改（一个高度为 $\omega_1$ 、具有可数紧致度但不是序列的散射紧空间），并使用了 $\diamondsuit$。在 [4]，C. Brech 构造了另一个相容的 $\mathcal{C}$（$K$）-空间实例，该空间具有性质（$\mathcal{C}$），但不具有性质 $\mathcal{E}$。更具体地说，Brech 定义了一个形如 $K = L \cup \{\infty\}$ 的散射紧空间，其中 $K$ 是空间 $L$ 的 Alexandroff 紧化，并且该空间具有如下性质： $\ell_1$（$L$）在 $\mathcal{C}$（$K$）$^* = \ell_1$（$K$）中是弱*序列闭的。因此，Brech 的构造给出了一个具有性质（$\mathcal{C}$）但不满足性质 $\mathcal{E}'$ 的巴拿赫空间实例。

本文证明了逆命题的一致性。更具体地说，我们的主要结果如下。

**定理 1** (PFA)。 对于巴拿赫空间 $X$，以下条件等价：

*(1)* $X$ 具有性质 $\mathcal{E}'$；*(2)* $X$ 具有弱*序列对偶球；*(3)* $X$ 具有 *Corson* 的性质($\mathcal{C}$)；*(4)* $(B_{X^*}, w^*)$ 具有可数紧致度。

将上述定理与 Brech 在 [4] 中的结果结合起来，我们得到蕴含关系 (3) $\implies$ (1) 独立于 ZFC。相反，似乎尚不清楚 (3) $\implies$ (4) 是否能仅由 ZFC 证明。Frankiewicz、Plebanek 和 Ryll-Nardzewski 表明，在 MA+¬CH 下，只要 $X$是一个 $\mathcal{C}(K)$-空间 [11]，这一蕴含关系就成立。关于更多结果以及对此问题的全面讨论，请参见 [14] 。就我们所知，即使额外假设 MA + ¬CH，对于任意 Banach 空间，(3) $\implies$ (4) 是否成立仍是未知的。一般而言，我们不知道上述定理 1 在较弱的 MA + ¬CH 假设下是否仍成立。

定理 1 对 Arhangel'skii 的一个结果作了部分推广 [1]：根据 PFA，如果 $T$ 是 Lindelöff 空间，那么 $\mathcal{C}_p(T)$[1] 的任意紧子空间都具有可数紧致度。特别地，根据 PFA，如果巴拿赫空间 $X$ 在其弱拓扑下是 Lindelöff 空间，那么（$B_{X^*}$， $w^*$）具有可数紧致度。不过，要求 $X$具有弱 Lindelöff 性，远强于 $X$ 具有 Corson 的性质（$\mathcal{C}$）。事实上，一方面，弱 Lindelöff 性蕴含 Corson 的性质（$\mathcal{C}$）[2]。另一方面，有些巴拿赫空间 $X$ 具有 Corson 的性质（$\mathcal{C}$），却不是弱 Lindelöff 空间（参见 [5,例 2]，并注意性质（$\mathcal{C}$）具有三空间性质）。

## 2. 性质 $\mathcal{E}'$ 与凸块子列

我们先从说明性质 $\mathcal{E}'$ 蕴含性质（$\mathcal{C}$）开始本节。

**引理 2** 。 如果巴拿赫空间 $X$ 具有性质 $\mathcal{E}'$，那么 $X$ 具有 *Corson* 的性质($\mathcal{C}$) .

证明。 设 $S \subseteq B_{X^*}$ 为凸集，并定义

$$S_0 := \{x^* \in B_{X^*} \mid \text{there is a countable set } D \subseteq S \text{ such that } x^* \in \overline{D}^{w^*}\}.$$

我们必须证明 $\overline{S}^{w^*} = S_0$。注意到 $S_0$ 是序列闭的，因此，由于 $X$ 具有性质（$\mathcal{E}'$）且 $S \subseteq S_0 \subseteq \overline{S}^{w^*}$，只需证明 $S_0$是凸的。令 $x^*$、$y^* \in S_0$和$0 \leq \lambda \leq 1$。那么，存在 $S$ 中的可数集 $\{x_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{y_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}$，使得$x^* \in \overline{\{x_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$ 且 $y^* \in \overline{\{y_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$。我们断言

$$\lambda x^* + (1-\lambda)y^* \in \overline{\{\lambda x_n^* + (1-\lambda)y_m^* \mid n, m \in \mathbb{N}\}}^{w^*}.$$

[1]也就是说，赋予逐点收敛拓扑的连续函数空间。[2]由于每个凸范数闭集 $F \subseteq X$ 都是弱闭的。

令 $U$ 为 $\lambda x^* + (1-\lambda) y^*$的任意邻域。那么，存在 $x^*$的邻域 $U_1$ 以及 $y^*$ 的邻域 $U_2$，使得

$$\lambda U_1 + (1-\lambda)U_2 := \{\lambda z_1^* + (1-\lambda) z_2^* \mid z_1^* \in U_1,\ z_2^* \in U_2\} \subseteq U.$$

由于 $x^* \in \overline{\{x_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$ 和 $y^* \in \overline{\{y_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$，存在 $n$、$m \in \mathbb{N}$ 使得 $x_n^* \in U_1$和 $y_m^* \in U_2$，因此 $\lambda x_n^* + (1-\lambda) y_m^* \in \lambda U_1 + (1-\lambda) U_2 \subseteq U$，如所要求。□

本节的目标是证明以下结果，该结果是第一作者博士论文的一部分：

**定理 3**。 每个具有性质 $\mathcal{E}'$ 的巴拿赫空间都具有弱*凸块紧对偶球。

给定一个巴拿赫空间 $X$ 和一个集合 $C \subseteq B_{X^*}$，我们将其弱*-序列闭包记为 $S(C)$；即， $S(C)$是 $C$中弱*-收敛序列的极限所组成的集合。显然，对于每个集合 $C \subseteq B_X$，都有 $\overline{C}^{\|\cdot\|} \subseteq S(C)$。注意， $S(C)$可能不是序列闭的。然而，情况甚至可能更糟，因为有界凸集 $C$ 的弱*-序列闭包可能不是范数闭的（见 [2, 例 5.2]）。这一事实促使我们提出以下辅助引理，该引理将在定理 3 的证明中使用。

**引理 4.** 设 $X$ 是具有性质 $\mathcal{E}'$ 的巴拿赫空间，且 $C \subseteq B_{X^*}$ 是一个凸子集。如果 $C$ 的弱*-序列闭包等于 $\overline{C}^{\|\cdot\|}$，那么 $\overline{C}^{w^*} = \overline{C}^{\|\cdot\|}$。

证明。 显然， $\overline{C}^{\|\cdot\|}$ 包含于 $S(C)$ 中。假设 $S(C) = \overline{C}^{\|\cdot\|}$，但 $\overline{C}^{w^*} \neq \overline{C}^{\|\cdot\|}$。那么 $S(C)$ 不是弱星闭的。由于 $X$ 具有性质 $\mathcal{E}'$，存在一个序列 $x_n^* \in S(C)$ 收敛于点 $x^* \notin S(C)$。由等式 $S(C) = \overline{C}^{\|\cdot\|}$ 可知，存在 $y_n^* \in C$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $\|y_n^* - x_n^*\| < \frac{1}{2^n}$。于是， $y_n^* = x_n^* + (y_n^* - x_n^*)$ 弱*收敛于 $x^*$。因此 $x^* \in S(C)$，这与我们的假设矛盾。□

为求完整起见，我们给出以下众所周知结论的证明（例如，参见第 82] 页中 [7, 推论 6 的证明）。

**引理 5.** 设 $X$ 是一个巴拿赫空间， $A \subseteq B_{X^*}$ 是一个范数可分的弱星闭集。那么 $A$ 是弱*可度量化的。

证明。 取 $D = \{x_n^* \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ 为一个可数的范数稠密集，并固定 $x_{i,\ j} \in B_X$ 对每个$i$, $j \in \mathbb{N}$，使得 $\frac{\|x_i^* - x_j^*\|}{2} \leq x_i^*(x_{i,\ j}) - x_j^*(x_{i,\ j})$。若 $x^*, y^* \in A$不同，则可取$x_i^*, x_j^* \in D$，使得 $\|x^* - x_i^*\| < \frac{\|x^* - y^*\|}{8}$且 $\|y^* - x_j^*\| < \frac{\|x^* - y^*\|}{8}$。于是 $\|x_i^* - x_j^*\| > \frac{3\|x^* - y^*\|}{4}$且

$$x^*(x_{i,j}) - y^*(x_{i,j}) > x_i^*(x_{i,j}) - \frac{\|x^* - y^*\|}{8} - x_j^*(x_{i,j}) - \frac{\|x^* - y^*\|}{8} \geq$$
$$\geq \frac{\|x_i^* - x_j^*\|}{2} - \frac{\|x^* - y^*\|}{4} > 0.$$

因此，集合 $\{x_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ 给出了 $A$ 上一个可数的弱星连续函数族，该函数族能够分离 $A$ 中的点。因此， $A$ 弱*可度量化。□

定理 *3* 的证明。设 $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $B_{X^*}$ 中的一个序列。我们必须证明 $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个弱*收敛凸块子列。令 $C$ 为 $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 的凸包。

注意，若 $S(C) = \overline{C}^{\|\cdot\|}$，则由引理 4 可得 $S(C) = \overline{C}^{w^*} = \overline{C}^{\|\cdot\|}$，因此 $\overline{C}^{w^*}$ 范数可分，故由引理 5 可知其弱*可度量化；特别地，$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 包含一个弱*收敛子列。

因此，我们可以假设 $S(C) \neq \overline{C}^{\|\cdot\|}$，即存在 $x^* \in S(C) \setminus \overline{C}^{\|\cdot\|}$。设 $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $C$ 中一个弱*收敛到 $x^*$ 的序列。记

$$y_n^* = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n x_k^*,$$

with

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n = 1,\ 0 \leq \lambda_k^n \leq 1 \text{ and } \lambda_k^n = 0 \text{ for all except finitely many } k \in \mathbb{N}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。不失一般性，我们可以假设 $(\lambda_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都收敛到某个点 $\lambda_k$。此外，利用标准对角线论证可知，我们可以假设每个序列 $(\lambda_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 都是最终单调的。注意，$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \leq 1$。我们断言 $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1$。若 $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$，则 $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k^* \in \overline{C}^{\|\cdot\|}$，并且容易看出 $x^* = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k^*$，这与 $x^* \notin \overline{C}^{\|\cdot\|}$ 矛盾。

因此，$0 \leq \lambda := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $N_n = \{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k^n > \lambda_k\}$。注意到

$$\sum_{k\in N_n} (\lambda_k^n - \lambda_k) = 1 - \sum_{k\in N_n} \lambda_k - \sum_{k\notin N_n} \lambda_k^n \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1 - \lambda > 0. \tag{1}$$

如有必要，取一个子列后，我们假设存在

$$\lambda' = \lim_n \sum_{k\in N_n} (\lambda_k^n - \lambda_k) \geq 1 - \lambda > 0. \tag{2}$$

令 $y_n^+ = \sum_{k\in N_n} \lambda_k^n x_k^*$ 和 $y_n^- = \sum_{k\notin N_n} \lambda_k^n x_k^*$。我们断言，$(y_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ 是范数柯西的，因此范数收敛。固定 $\varepsilon > 0$，并取 $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$，使得 $\sum_{k>k_0} \lambda_k < \frac{\varepsilon}{4}$，对每个 $k \leq k_0$，$(\lambda_k^n)_{n\geq k_1}$ 都是单调的，并且

$$\sum_{k=1}^{k_0} |\lambda_k^n - \lambda_k^m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对每个 $n, m \geq k_1$。于是，

$$\|y_n^- - y_m^-\| \leq \sum_{k=1}^{k_0} |\lambda_k^n - \lambda_k^m| + \sum_{k>k_0,\ k\notin N_n} \lambda_k^n + \sum_{k>k_0,\ k\notin N_m} \lambda_k^m \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\sum_{k>k_0} \lambda_k < \varepsilon$$

对每个 $n, m \geq k_1$ 均成立。因此，$(y_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ 范数收敛；又因为 $y_n^+ = y_n^* - y_n^-$，序列 $(y_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ 弱*收敛到一点 $y^*$。

Set

$$z_n^* = \frac{1}{\sum_{k\in N_n}(\lambda_k^n - \lambda_k)} \sum_{k\in N_n} (\lambda_k^n - \lambda_k) x_k^* = \frac{1}{\sum_{k\in N_n}(\lambda_k^n - \lambda_k)} (y_n^+ - \sum_{k\in N_n} \lambda_k x_k^*)$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。由 (1) 和 (2) 可知， $z_n^*$ 定义良好， $z_n^* \in C$ 且收敛到 $\frac{1}{\lambda'}($ $y^* - \sum_{k\in M} \lambda_k x_k^*)$，其中

$$M = \{k \in \mathbb{N} \mid (\lambda_k^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ is eventually decreasing}\}.$$

对于每个 $n$、$k \in \mathbb{N}$，记 $\beta_k^n = \frac{\lambda_k^n - \lambda_k}{\sum_{k'\in N_n}(\lambda_{k'}^n - \lambda_{k'})}$若 $k \in N_n$，且 $\beta_k^n = 0$若 $k \notin N_n$。那么，$(\beta_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$收敛到零，并且 $z_n^* = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^n x_k^*$。通过对 $z_n^*$作小幅扰动，我们将构造出 $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个凸块子列 $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$，其极限与 $(z_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$相同。

固定 $u_1^* = z_1^*$，并取 $\mathbb{N}$ 的一个有限子集 $I_1$，使得 $u_1^* = \sum_{k\in I_1} \beta_k^1 x_k^*$。固定满足对每个 $n \geq n_1$ 都有 $\sum_{k\in I_1} \beta_k^n < \frac{1}{2}$ 的 $n_1 \in \mathbb{N}$，并取一个有限集 $I_2$，使得 $\max(I_1) < \min(I_2)$，且 $z_{n_1}^* = \sum_{k\in I_1\cup I_2} \beta_k^{n_1} x_k^*$。取 $u_2^* = \frac{1}{\sum_{k\in I_2} \beta_k^{n_1}} \sum_{k\in I_2} \beta_k^{n_1} x_k^*$。注意， $u_2^* \in C$ 并且

$$\|z_{n_1}^* - u_2^*\| < \frac{1}{2} + \sum_{k\in I_2} \beta_k^{n_1} \left( \frac{1}{\sum_{k'\in I_2} \beta_{k'}^{n_1}} - 1 \right) \leq \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{\sum_{k\in I_2} \beta_k^{n_1}} - 1 \right).$$

重复这一论证，我们构造出一个序列 $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $C$、一个递增序列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathbb{N}$ 以及一个有限集序列 $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathbb{N}$，满足 $\max(I_k) < \min(I_{k+1}$，使得

$$\sum_{k\in I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_r} \beta_k^m < \frac{1}{2^r}$$

对每个 $m \geq n_r$,

$$z_{n_r}^* = \sum_{k\in I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_{r+1}} \beta_k^{n_r} x_k^*,$$

$$u_{r+1}^* = \frac{1}{\sum_{k\in I_{r+1}} \beta_k^{n_r}} \sum_{k\in I_{r+1}} \beta_k^{n_r} x_k^*$$

and

$$\|z_{n_r}^* - u_{r+1}^*\| < \frac{1}{2^r} + \sum_{k\in I_{r+1}} \beta_k^{n_r} \left( \frac{1}{\sum_{k'\in I_{r+1}} \beta_{k'}^{n_r}} - 1 \right) \leq \frac{1}{2^r} + \left( \frac{1}{\sum_{k\in I_{r+1}} \beta_k^{n_r}} - 1 \right)$$

$$\leq \frac{1}{2^r} + \left( \frac{2^r}{2^r - 1} - 1 \right) = \frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^r - 1},$$

其中，最后一个不等式由下式得出

$$\sum_{k\in I_{r+1}} \beta_k^{n_r} = 1 - \sum_{k\in I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_r} \beta_k^{n_r} \geq 1 - \frac{1}{2^r} = \frac{2^r - 1}{2^r}.$$

由于 $\|z_{n_r}^* - u_{r+1}^*\|$ 收敛到零，我们得出，$(u_r^*)_{r\in\mathbb{N}}$ 是 $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个凸块子序列，且弱*收敛到与 $(z_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 相同的极限。□

## 3. 从性质（$\mathcal{C}$）到可数紧致度

本节在 PFA 下刻画 Corson 的性质 **(*C*)**（定理 1）：

**引理6** (PFA)。 如果 $X$ 具有 ***Corson*** 的性质$(\mathcal{C})$，那么$(B_{X^*}, w^*)$ 具有可数紧致度。

在引理6的证明中，我们使用以下由 Balogh [3]提出的概念：

**定义7.** 设 $T$是一个非空集合， $L, R \subseteq T^2$ 是两个自反关系。一个由不同点构成的序列 $\langle x_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\rangle \subseteq T$ 称为一条递增 $\omega_1$-序列，对应于关系对 $\langle L, R\rangle$ ，如果

$$\forall \beta \in \omega_1 \ (L(x_\beta) \cap \langle x_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle \subseteq \langle x_\alpha \mid \alpha \leq \beta\rangle \subseteq R(x_\beta) \cap \langle x_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle)^3.$$

**定义8.** 设 $T$ 是一个拓扑空间， $\mathcal{F}$ 是 $T^4$上的一个闭滤子。

若存在 $F \in \mathcal{F}$ 使得 $S \cap F = \emptyset$，则称子空间 $S \subseteq T$ 是 $\mathcal{F}$-小的。若对于每个 $x \in T$， $R(x)$ 都是 $\mathcal{F}$-小的，则称关系$R \subseteq T^2$ 是 $\mathcal{F}$-小值的。

以下 由 Balogh 提出的定理将在引理6的证明中发挥关键作用：

**定理9**。 [3, 定理 1。1] 设 $T$ 是一个可数紧、非紧的 $T_1$-空间，且$\mathcal{F}$是 $T$上的自由闭滤子。假设 $L$, $R \subseteq T^2$ 是一对自反关系，其中 $L$ 是 $\mathcal{F}$-小值的，并且对于每个 $x \in T$， $L(x)$ 是闭的，而 $R(x)$ 是开的。

那么，在PFA下，这一对 $\langle L$， $R\rangle$存在一个递增的 $\omega_1$-序列 .

引理*6*的证明。假设 **(**$B_{X^*}$**,** $w^*$**)** 不具有可数紧致度。那么，存在 $S \subseteq B_{X^*}$ ，它不是弱星闭的，但对于任意可数集 $A \subseteq S$，都有 $\overline{A}^{w^*} \subseteq S$ 。特别地，**(**$S, w^*$**)** 是可数紧的。令 $x^* \in \overline{S}^{w^*} \setminus S$ 并考虑

$$\mathcal{F} = \{\overline{U}^{w^*} \cap S \mid U \text{ is a weak}^*\text{-open convex set in } B_{X^*} \text{ with } x^* \in U\}.$$

注意到 $\mathcal{F}$ 是 **(**$S, w^*$**)** 中的闭滤子，并且$\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B = \emptyset$；即， $\mathcal{F}$ 是一个自由滤子。因此，根据 Hahn-Banach分离定理，对于每个 $y \in S$ ，存在 $B_{X^*}$ 中的弱星开凸邻域 $G$ **(**$y$**)** 和 $U$**(**$y$**)**，它们分别是 $y$ 的邻域，使得 $G$**(**$y$**)**$^{w^*} \cap S$ ~~是 $\mathcal{F}$~~-小的，并且

$$\overline{U(y)}^{w^*} \subseteq G(y).$$

对每个 $y$~~$\in S$~~，设 $L$**(**$y$**)**$: = G$**(**$y$**)**$^{w^*} \cap S$，以及 $R$**(**$y$**)**$: = U$**(**$y$**)** $\cap S$。我们可以针对 $T: = S$ 以及 $\langle L$、 $R\rangle$ 这一对应用定理9，并相应地得到 $S$ 中关于 $\langle L$、 $R\rangle$ 的一个递增 $\omega_1$-序列$\langle x_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ 。因此，根据定义，

$$\overline{\{x_\alpha : \alpha \leq \beta\}}^{w^*} \subseteq \overline{R(x_\beta)}^{w^*} \subseteq G(x_\beta) \subseteq B_{X^*} \setminus \{x_\alpha : \alpha > \beta\} \tag{3}$$

对每个 $\beta < \omega_1$。现在，令 $L = \bigcup_{\beta<\omega_1}$~~co$\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$~~$^{w^*}$。显然， $L$ 是一个凸集，并且对每个可数集 $C \subseteq L$，都有 $\overline{C}^{w^*} \subseteq L$ 。要完成证明，只需说明

[3]这里， $L$**(**$x$**)**（分别地， $R$**(**$x$**)**）是 $\{y \in T \mid (x, y) \in L\}$ （分别地， $\{y \in T \mid (x, y) \in R\}$）的简写。[4]即，在 $T$ 中由闭集组成的滤子。

that $L$ 不是弱星闭的，因为在这种情况下， $X$ 不具有 Corson 的性质（$\mathcal{C}$）。由于每个 $G(x_\beta)$ 都是凸的，由（ 3 ）可得

$$\overline{\mathrm{co}\{x_\alpha : \alpha < \beta\}}^{w^*} \subseteq G(x_\beta)$$

对于每个 $\beta < \omega_1$，因此， $\{G(x_\beta)\colon \ \beta < \omega_1\}$ 是 $L$的弱星开覆盖。然而，同样由 (3) 可知， $L$不存在有限子覆盖。因此， $L$ 不是弱星紧的，尤其不是弱星闭的，证毕。□

现在是证明本节主要结果的时候了:

定理 *1* 的证明。

(1) ⇒ (3)：这是引理 2。(3) ⇒ (4)：这是引理 6。(4) ⇒ (2)：这是 [3]中 Balogh 的主要定理。

(2) ⇒ (1)：显然。

□

## 4. 进一步的评论与问题

关于 Corson 的性质 ($\mathcal{C}$) 是否蕴含性质 $\mathcal{E}$ 的问题，已在 [16,第 352]页提出。引言中我们提到了几个（相容的）反例，它们给出了否定的回答。此外，我们还证明了 Corson 的性质 ($\mathcal{C}$) 蕴含性质 $\mathcal{E}'$是相容的。在 [2]中，构造了一个具有性质 $\mathcal{E}'$但不具有性质 $\mathcal{E}$ 的巴拿赫空间例子，其构造基于连续统假设。不过，下面的问题似乎仍未解决。

**问题 10.** 性质 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}'$ 是否可能在 ZFC 中等价?

此外， [2], 还在连续统假设下构造了另一个具有性质 $\mathcal{E}$ 但其对偶并非弱*天使性质的巴拿赫空间。再一次，似乎尚不清楚这两种性质是否可能在 ZFC 中等价。

最后，关于性质 $\mathcal{E}'$ 和（$\mathcal{C}$），以下问题似乎尚未解决。

**问题 11**。

（*1*）每个具有性质 $\mathcal{E}'$ 的巴拿赫空间都具有弱*序列对偶球吗？（*2*）每个具有 *Corson* 性质$(\mathcal{C})$ 的巴拿赫空间，其对偶球是否具有可数紧致度（相对于弱*拓扑）？

## 致谢

我们感谢 J. Rodriguez 对手稿的反馈和认真审阅，这帮助我们改进了论文。

## 参考文献

[1] A.V. Arhangel'skii，《拓扑函数空间》（俄文版），莫斯科大学出版社（1989）；另有《拓扑函数空间》，克吕维尔学术出版社（1992）。[2]A. Avilés、G. Martínez-Cervantes 和 J. Rodríguez，Johnson-Lindenstrauss 空间的弱*序列性质，《泛函分析杂志》276（2019），3051–3066。[3] Z. Balogh，关于具有可数紧致度的紧豪斯多夫空间，《美国数学会会刊》105（1988），755–764。[4] C. Brech，《Asplund C(K)空间的泛型构造》，博士论文，圣保罗大学和巴黎第七大学（2008）。[5] H.H. Corson，巴拿赫空间的弱拓扑，《美国数学会汇刊》101（1961），1–15。[6] J. Diestel，巴拿赫空间中的序列与级数，施普林格纽约（1984）。[7] J. Diestel 和 J.J. Uhl, Jr.，《向量测度》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1977；前言由 B.J. Pettis 撰写，数学调查丛书第15卷。[8] A. Dow，关于 Moore-Mrówka解的一致性，《拓扑学及其应用》44（1992），125–141。[9] A. Dow、T. Eisworth，连续统假设与 Moore-Mrówka问题，《拓扑学及其应用》195（2015），226–238。[10] V.V. Fedorchuk，一个基数为连续统且没有收敛序列的紧空间，《剑桥哲学学会数学学报》81（1977），177–181。[11] R. Frankiewicz、G. Plebanek、C. Ryll-Nardzewski，介于林德勒夫性质与可数紧致度之间，《美国数学会会刊》129（2000），97–103。[12] J. Kąkol、W. Kubiś 和 M. López-Pellicer，Corson性质(C)与紧致度。载于：《泛函分析专题中的描述拓扑学》。数学进展丛书，第24卷。施普林格，波士顿，马萨诸塞州（2011）。[13] G. Martínez-Cervantes，具有弱*序列对偶球的巴拿赫空间，《美国数学会会刊》146(4)（2018），1825–1832。[14] G. Plebanek 和 D. Sobota，正则概率测度空间中的可数紧致度，《基础数学》229（2015），159–169。[15] A. Plichko，弱*拓扑下对偶巴拿赫空间的三种序列性质，《拓扑学及其应用》190（2015），93–98。[16] A. Plichko、D. Yost，巴拿赫空间的补子空间与非补子空间，《数学摘录》15（2000），第2期，335–371；第三届巴拿赫空间大会（哈兰迪利亚-德拉贝拉，1998）。[17] R. Pol，关于 H.H. Corson问题及若干相关问题，《基础数学》109（1980），143–154。（Martínez-Cervantes）阿利坎特大学，数学系，理学院，03080 阿利坎特，西班牙 ORCID：0000-0002-5927-5215 电子邮件地址：gonzalo.martinez@ua.es（Poveda）哈佛大学，数学科学与应用中心，马萨诸塞州剑桥市 02138，美国 个人网站：https://scholar.harvard.edu/apoveda/home 电子邮件地址：alejandro@cmsa.fas.harvard.edu