arXiv:2303.02138v2 [quant-ph] 2 Jun 2023

Quantum 效用——实用量子优势的定义与评估

Nils Herrmann,* Daanish Arya、Florian Preis† 和 Stefan Prestel*Quantum Brilliance GmbHColorado Tower Industriestr. 4 70565 Stuttgart, Germany*

Marcus W. Doherty、Angus Mingare 和 Jason C. Pillay *Quantum Brilliance Pty Ltd60 Mills RoadActon ACT 2601, Australia*（日期：2023年6月5日）

人们已提出多种基准测试，以全面衡量量子计算的性能。虽然有些基准测试关注最终用户的视角（例如面向应用的基准测试），但尚未讨论量子处理器的物理占用空间所体现的实际工业价值。不同用例对尺寸、重量、功耗或数据隐私有不同要求，同时还要求在保真度、速度、问题规模或精度方面达到特定门槛。本文旨在将这些特征纳入一个称为 *quantum utility*的概念，以展示量子计算机在各种应用中的有效性和实用性；在这些应用中，量子计算机相较于尺寸、重量和成本相近的经典机器实现了量子优势——即速度更快、精度更高或能耗更低。为逐步实现量子效用，本文提出了分级分类方案——即 *application readiness levels* （ARL）——以及扩展分类标签。随后，本文将这些方法示范性地应用于量子化学、量子模拟、量子机器学习和数据分析领域的不同量子应用，并进行简要讨论。

I. 引言

近年来，有人宣称量子计算机已实现量子优势 [1–4] ——即量子计算机能够在合理的时间内解决经典设备无法解决的问题 [1]。这是计算科学领域的一个关键转折点，因为它预示着量子计算机将进入广泛应用的时代。目前所有声称实现超多项式加速的量子优势 [5], ，都依赖于随机电路采样[6]或高斯玻色采样方法 [7]。这些可以视为极其小众、实际相关性存疑的应用场景。尽管如此，它们表明，并不存在阻止实现量子优势的基本物理定律。

在过去探索如何实现真正量子优势的过程中，人们很少考虑量子处理器在尺寸、重量和功耗方面的物理需求，以及由此产生的成本（尺寸、重量、功耗与成本），甚至完全没有考虑。只有将这些因素纳入考量，用户才能判断哪种计算平台适合特定应用，并能为其带来益处。因此，社区若能更加关注这些因素，或将推动量子计算得到广泛应用。为此，我们提出“实用量子优势”的想法——称为量子效用——将设备在尺寸、重量、功耗与成本方面的规格要求纳入考量。

* nils.herrmann@quantum-brilliance.com

† f.preis@quantum-brilliance.com

在量子计算的通用性能基准中，IBM 提出了最早的指标之一——量子体积[8, 9] ，并被多家量子计算公司采用。该指标综合考虑设备的多种属性，例如量子比特数量、电路编译、相干误差与非相干误差、门并行性、设备连通性和计算效率，并以单一数值量化量子计算机的能力。除了用量子体积衡量量子计算机的质量和规模之外，随后还引入了每秒线路层操作数（CLOPS）的概念 [10]。CLOPS 基于量子体积电路，测定每秒可执行的电路层数。

尽管量子体积能够提供有关机器性能的信息，但其适用范围仅限于评估正方形电路的性能，而这无法充分涵盖人们感兴趣的各种算法，例如量子傅里叶变换、量子相位估计、Deutsch-Jozsa算法、Grover算法、Shor算法 [11]或许多变分量子算法[12]。通常，这些算法以浅层或深层矩形电路的形式实现。因此，量子体积方案的概念被泛化为所谓的体积基准测试 [13, 14]。

需要特别指出的是，这些基准测试与参考文献 [6] 一样，依赖于用于展示量子优势的随机电路采样理论框架 [1, 15] 。正如参考文献 [16, 17], 所指出的，随机化电路对相干误差不太敏感，而相干误差会在结构化电路中被放大。尽管这一事实可以

在随机化编译中加以利用 [18] ，但在基准测试中并不理想，因为许多量子算法（例如包含许多重复模块的变分量子本征求解器 [19] ）都属于结构化量子程序。

尽管随机量子线路可以模拟变分电路的某些特征，但随机电路采样的应用潜力目前仍不明朗。因此，人们提出了若干面向应用的基准测试方案。

Q-Score 被提出作为一种方法，用于定义量子计算机可用于运行最大割算法的最大量子比特数。这体现了处理器能够解决的问题规模 [20]。

参考文献 [21] 中介绍的基准测试套件包含三类：教程类（例如 Deutsch-Jozsa）、子程序类（例如量子傅里叶变换）和功能类（例如变分量子本征求解器）。这里通过每个电路的平均结果保真度和量子执行时间来衡量性能。所得指标按照体积基准测试的方式（电路的宽度和深度）展示，并与体积背景进行比较。由于该基准测试套件不包含完整的应用，例如分子的电子结构模拟，因此测得的执行时间对于估算应用运行时间的参考价值有限。即使是功能基准测试，也无法体现近期应用的完整混合特性；这类应用需要在经典与量子计算资源之间进行多次往返，在多轮迭代中优化电路以适配特定硬件拓扑，并进行误差缓解。

最近，有人提出了一套基准测试方案[22]，重点关注端到端应用性能，目前涵盖机器人路径规划和车辆选项规划问题。

此前讨论的所有基准测试都有一个共同难题：难以在大规模情况下验证结果是否成功，因为随着量子电路宽度增加，将其与经典计算进行比较会变得越来越困难。在某些特殊情况下，例如 Shor算法，可以通过乘法高效验证质因数分解的结果。借助所谓的镜像线路[17], ，这种方法或许可以泛化到更常见的电路。具体而言，在给定电路 C 后附加一层泡利门，再接上该电路的准逆电路 $\tilde{C}^{-1}$ ，理论上后者应当能够抵消 C 的作用，但不包括后续添加的泡利操作。

在以下部分中，我们提出一个框架，用于系统评估量子增强应用及相关量子算法的成熟度和商业价值，以推动其应用。在第二节中，我们介绍量子效用的概念，并定义应用就绪等级（ARL）——一种相应的测量体系。此外，我们还提出对性能基准的扩展，并讨论量子应用开发过程中逐步提升 ARL 的标准。在第三节中，我们将将量子效用框架应用于量子化学、量子模拟、量子机器学习（QML）和数据分析领域的选定量子应用。

II. 实用的QUANTUM优势

量子计算常被誉为一项突破性技术，将对计算科学产生巨大影响（例如，参见 [23–25]）。尤其是，未来的量子设备或许能够执行任何现有经典设备都无法完成的计算——这通常被称为量子霸权 [1, 6, 15] ，或者近来更常称为量子优势 [2, 26, 27]。可以合理地认为，这种优势不会突然出现，而是会随着时间推移逐渐显现。在这条发展道路上，一个自然的里程碑是商用量子设备的问世：在执行实际应用时，它们能够在速度、准确度和能耗方面胜过经典设备。

在本节中，我们将基于实用量子优势的理念展开讨论。在 II A 小节中，我们将严格定义并区分量子效用和量子主导这两个术语。II C 小节还将引入一个简单的概念——应用就绪等级（ARL），用于从效用角度描述和评估量子应用。

A. 定义

在本研究中，我们根据定义 1、2 和 3，分别引入或重新定义量子效用、量子主导和量子优势这几个术语：

定义 1量子效用是指某项实际应用

（*i*）所需计算时间更短，或
（*ii*）所需功耗更低，或（*iii*）能够得出更准确的结果

在量子设备或经典/量子混合架构上实现时，相较于最佳的尺寸、重量和成本相近的经典设备。

定义 2 ***Quantum*** 主导 是指某项实际应用在量子设备或经典/量子混合架构上满足定义 *1* 中的要求 *(i)–(iii)*，且相较于任何其他经典设备均如此。

定义 3 ***Quantum advantage*** 是一个统称，指量子效用或量子主导。

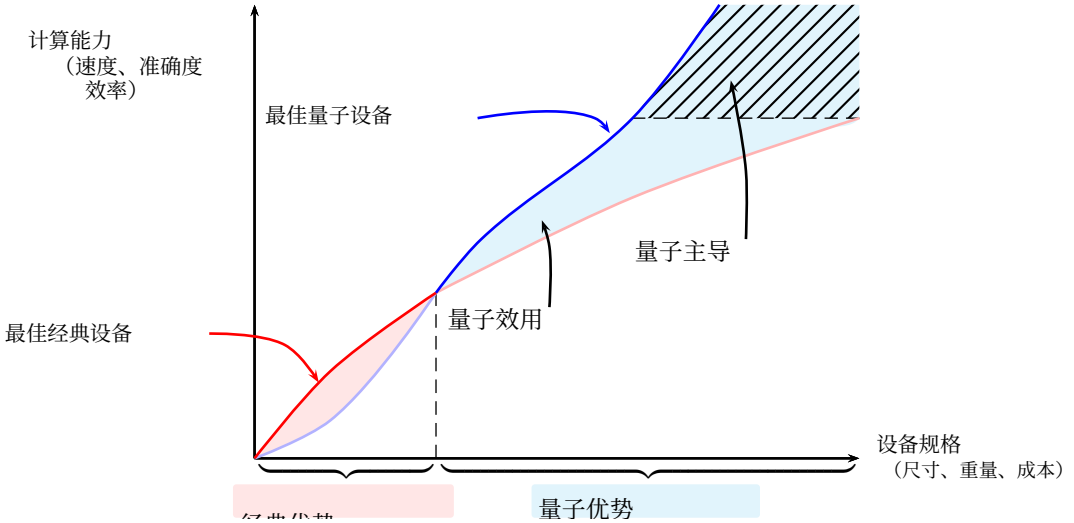


图1：计算能力（以速度、准确度或功率效率衡量）相对于设备规格（以尺寸、重量和成本衡量）的抽象示意图，展示了最佳经典设备（红线）和最佳量子设备（蓝线），与参考文献 [28] 类似。与表示经典优势的浅红色区域相比，表示量子优势的浅蓝色区域又分为量子效用和量子主导，具体取决于是否有比最佳量子设备更大型（性能更优）的经典设备可用。

图 1 以最佳性能的经典设备和量子设备的抽象计算能力与抽象物理设备规格为依据，说明了这些定义。曲线所示的设备优势分为经典设备优势和量子设备优势两个区域。根据定义1和定义2，量子设备优势区域进一步划分为量子效用和量子主导区域。具体而言，只要量子设备的表现优于设备规格相同的经典竞争方案，就达到了量子效用。

虽然量子主导仍是大多数量子计算公司的主要目标，但对于目前正在研发的中等规模设备而言，量子效用或许是更现实的目标。此外，要实现真正的优势，未必需要达到量子主导——尤其是对于具有严格 SWaP-C约束的应用（例如移动设备或边缘端应用）。即使量子计算永远无法实现量子主导，只要满足 SWaP-C约束，量子效用仍可能带来价值巨大的改进。因此，量子效用标志着一个至关重要的里程碑：量子技术制造商及其客户都将从中受益，量子应用也由此首次展现出商业意义。

B. 性能基准

受绿色指数（TGI）的启发 [29] ，我们建议为量子计算采用类似的能源效率衡量指标，以便用户比较不同的量子计算架构。人们认为，仅凭计算能力来衡量性能并不可持续。TGI使企业能够在选择所使用的高性能计算系统时，做出兼顾环境因素的决策。TGI采用每瓦性能指标，即每瓦的每秒浮点运算次数（FLOPS）。FLOPS通常通过LINPACK基准测试的性能来衡量。迄今为止，尚无量子基准测试将环境因素纳入考量，但有关可持续量子计算的想法开始受到关注，例如 [30, 31] 以及量子能源倡议。

更一般而言，性能可用任意基准评分表示，例如电路保真度或成功执行的量子门操作次数，再除以总运行时间。此处可将运行时间乘以设备的平均功耗，从而得到基准分母中的总能耗，因此会对功耗较高的设备予以惩罚：

$$\text{Score}_1 = \frac{\text{Performance}}{\text{Runtime} \times \text{Power}} \tag{1}$$

在汽车或航空航天行业的许多部署场景中，尺寸和重量也是至关重要的衡量指标。对设备进行同类比较，可以让汽车等行业的利益相关者决定是否用量子等效设备替换现有处理器。在经典计算领域，Sun Microsystems 引入了空间、功耗和性能指标，并在其基准测试的分母中加入体积这一额外因素，以考虑计算设备的尺寸：

$$\text{Score}_2 = \frac{\text{Performance}}{\text{Volume} \times \text{Runtime} \times \text{Power}} \tag{2}$$

为了评估上一小节介绍的量子效用，我们必须将所有维度纳入未来基准：数量、质量、速度、实用性，以及物理、经济和生态影响。我们建议量子计算行业采用经典计算行业制定的能效标准。硬件供应商应披露量子计算机的功耗、体积和重量（包括控制系统以及维持量子比特相干性所需的全部基础设施），此外还应披露保真度、量子比特数量、T1 和 T2时间。

C. 应用就绪等级及其评估

继 NASA 于 80 年代末提出技术就绪等级（TRL）之后， 2013[32] 发布了一项国际标准。此后，TRL 一直是追踪和评估新兴技术成熟度的广泛认可工具。类比 TRL，我们提出了一套五级方案，称为应用就绪等级（ARL），用于追踪量子应用在追求量子效用过程中的成熟度（参见定义 1）。图 2 和图 3 分别以示意路线图的形式展示了各个 ARL 阶段的退出策略和里程碑，以及相关定义。

任何量子应用的想法或概念都归为 ARL–1。在此级别，无须对算法进行正式描述（例如以量子电路的形式描述）。ARL–1 是一个入门标签，旨在为进一步的研究和开发铺路，即使该应用还仅仅停留在构想阶段。经过更深入的研究并实现可运行的概念验证后，如果该应用能够展现出相较于规模相近的经典竞争算法（可能经过缩小规模）的一定优势，便可进入 ARL–2。在此阶段，该应用可进入高级分析阶段，研究其资源随问题特定变量变化的正式扩展关系。在我们自己的研究中（参见第 III 节），我们发现，按照量子应用的核心特征进行扩展分类可能会有所助益。我们将在第 III 节使用这种扩展分类方案的标签，汇总于表 I。这些标签包括

表 I：用于分析 ARL–2 应用的其他分类标签。

类别	标签
可扩展性	$\mathcal{O}$ 的扩展 (i) 测量电路的数量， （ii）每个电路的门深度，以及 （iii）每个电路的测量次数
可编译性	•原生门 • 非本征单量子比特和/或双量子比特门 • 通用多量子比特门 • 经典控制
连通性	• 线性 • 循环 • 最近邻 • 全连接
鲁棒性	• 噪声作为资源 •变分电路 • 非变分电路
可并行性	• 基于量子比特 • 基于电路的 • 基于测量次数

•可扩展性：对于一组特定于问题的变量（例如所需量子比特的数量），了解随着问题规模增大，某项 Quantum 应用对资源的要求会如何增加至关重要。因此，全面的扩展性研究应对以下各项进行形式化的扩展分析：(i) 需要执行的量子电路总数；(ii) 每个电路中需要执行的连续量子门操作数量，即门深度；以及 (iii) 为以足够的准确度对量子态进行采样所需的测量次数。

•可编译性：使用真实量子硬件时，必须将算法门编译为可用的硬件原生门。根据原始算法门（以及可用的原生门），这项任务的难度可能高低不一。一般而言，可以区分以下几类算法：仅使用原生门的算法；使用非原生单量子比特门和双量子比特门的算法；需要通用多量子比特门的算法；以及涉及一定程度经典控制的算法，例如条件式电路中途测量或经典预言机。

•连通性：给定的量子硬件可能只能对特定的量子比特对或量子比特组进行纠缠。为了充分利用受限的量子比特拓扑，需要以最优方式将算法量子比特映射到实际的物理量子比特上。根据给定量子电路的连通性要求，编译门深度可能会大幅增加。通常，可以区分需要线性、循环、最近邻（二维或三维空间中）或全连接的算法。

• 鲁棒性：目前开发的所有量子计算机都会受到噪声影响。给定量子应用对这种噪声的鲁棒性可能至关重要。通常，可以区分以下几类应用：将噪声作为资源使用的应用、涉及经过训练的参数化电路且能够在一定程度上适应噪声的应用，以及假设执行完美或近乎完美的通用非变分电路。

• 可并行性：由于量子计算具有概率性，任何量子应用本质上都

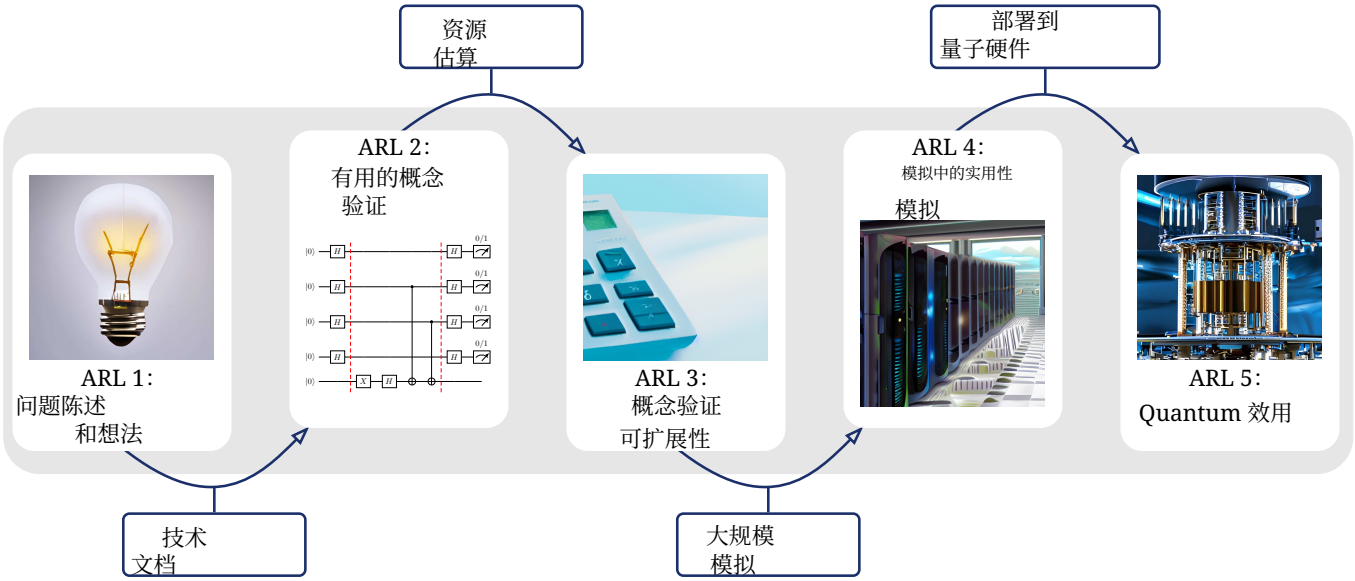


图 2：示意性路线图，详细展示了在追求量子效用的过程中，各应用就绪级别（参见图 3）的推进过程及其退出策略（见定义 1）。



图 3：在追求量子效用（简称“效用”，见定义 1）的过程中，用于分类和评估量子应用成熟度的应用就绪等级（ARL）里程碑与定义。

具备可并行性。然而，并行化程度取决于底层量子电路。一般而言，可以区分基于量子比特的并行性和基于电路的并行性：前者是指可将量子电路拆分为需要更少量子比特的较小电路，后者则是指一个特定应用涉及同时测量多个电路，以及纯粹基于采样次数的并行性：将给定的量子应用部署到多个量子处理单元，以提高获得的采样率。

一旦根据

这些扩展分类标签对应用进行了适当评估，就可以推算特定量子硬件所需的资源。如果推算结果显示其优于经典竞争方案，该应用便达到 ARL–3。此后，可通过模拟（如果可行）或实际进行量子计算，分别验证这些理论推算，从而达到 ARL–4 和 ARL–5。ARL–4 进一步分为无噪声模拟（ARL–4a）和含噪声模拟（ARL–4b）。然而，最终目标——量子效用——只有在应用达到 ARL–5 时才能实现。

III. 实际评估

本节从 ARL 和扩展分类标签（参见 IIC 小节）的角度，对量子化学、量子模拟、量子机器学习和数据分析领域中选定的量子应用进行实际评估。

所有结果的摘要见表 II。以下各小节将详细介绍对各项应用的具体考察。

1. *Quantum chemistry and quantum simulation*

在量子计算机上模拟量子系统的想法与这一领域本身一样古老，而且通常被归功于费曼[44]。量子化学领域尤其关注电子结构研究，该研究在材料科学、药物发现和化学工程等领域有广泛应用[45]。

变分量子本征求解器（VQE）[19] 旨在高效估算分子系统的基态能量。因此，它求解变分优化问题

$$\min_{\theta} \langle \Psi(\theta)|\hat{H}|\Psi(\theta)\rangle = \min_{\theta} \langle \Psi_0|\hat{U}^{\dagger}(\theta)\hat{H}\hat{U}(\theta)|\Psi_0\rangle \ , \quad (3)$$

其中，假定 $\hat{U}(\theta)\ |\Psi_0\rangle$ 是目标基态波函数的精确表示，H 表示分子电子哈密顿量。VQE 领域已取得众多进展（例如，参见[46–81]）。全面综述请参阅 [45, 82]。

表 II 列出了可扩展性、可编译性、连通性、鲁棒性和可并行性的相应最佳情况。在 VQE 方面，诸如显式双重分解[80] 或满秩优化[76]等先进的项分组技术，据称能够在测量电路数量呈线性标度的情况下获得合理的能量，$\mathcal{O}(N)$，相对于量子比特数量而言 N。所有这些测量均可独立进行，因此能够在多个量子处理器（量子处理器）上同时执行，使 VQE 具备基于电路的可并行性。人们已经开发出具有线性深度标度的电路拟设（例如 k-UpCCGSD[53] 或硬件高效拟设（HEA）[55]）。对于 HEA，只需要设备原生门和线性量子比特拓扑结构。众所周知，测量次数与 VQE 系统尺寸无关，而是随目标期望值准确度的平方倒数进行标度。[45]

就整体应用就绪等级而言，变分量子本征求解器目前处于第 3 级，因为已有多项资源估算（例如，参见文献 [45, 83, 84]）表明，在特殊情况下可能具有效用。与此同时，尚无报告显示经典（理想或含噪）模拟能够证明这种效用。在假设采用线性规模电路的情况下，变分量子本征求解器能否与各种已得到充分研究的经典量子化学方法竞争，仍值得商榷。

最近，Xia 和 Kais 提出了一种量子受限玻尔兹曼机（QRBM）方法，用于解决电子结构问题 [33]。他们提出的 QRBM 基于 Carleo 和 Troyer 的原创工作 [85]，可视为变分量子本征求解器框架的直接竞争者。与变分量子本征求解器不同，他们的 QRBM 完全采用经典能量估算。其核心想法是将量子计算机用作采样设备，使其测得的概率分布能够复现最优分子波函数的振幅。

在该方法中，可见神经网络层和隐藏神经网络层构成的经典受限玻尔兹曼机结构中的每个节点，都映射到一个独立的量子比特。由于可见层中的所有节点都需要与隐藏层中的所有节点相连，因此，当有 n 个可见层节点和 m 个隐藏层节点时，总电路深度随 $\mathcal{O}(nm)$ 增长。此外，这种高连通度要求两层之间采用全连接的量子比特拓扑。由于该算法依赖特定的测量后状态，要以最佳方式执行算法，就需要通过电路中途测量进行经典控制。

与变分量子本征求解器不同，量子受限玻尔兹曼机的优势在于只涉及一个测量电路，但在最坏情况下，如果需要对每一种可能的 n_p 粒子基态进行采样，则针对 n_p 个粒子、n 个轨道（= 个可见层），需要 $\mathcal{O}\binom{n}{n_p}$ 次测量。此外，由于只有一个电路，增加量子处理器只能提高该电路的总采样率。总体而言，量子受限玻尔兹曼机凭借其入门论文达到了 ARL–2；该论文 [33] 详细介绍了一个可运行的概念验证实现。

提取量子多体系统基态的另一种方法，是在虚时间中演化哈密顿量（经过维克旋转 $\tau = it$[86]）。由于相应的演化算符 $e^{-H\tau}$ 不是酉算符，虚时间演化可能是模拟开放量子系统 [87]的有效工具。在近期发表的论文 [34], 中，McArdle 等人提出了一种变分量子虚时间演化算法（Var-QiTE）。其核心想法是将虚时间演化后的状态 $|\psi(\tau)\rangle$ 替换为等效的参数化状态 $|\phi(\theta(\tau))\rangle$。随后，作者对经过维克旋转的薛定谔方程应用变分原理，从而

表 II：根据应用就绪级别（ARL，参见图 2 和图 3）及扩展分类标签（见表 I）对选定的量子应用进行分类。如果有多个量子电路/算法可用，则仅显示最优的扩展标签。

应用	ARL	可扩展性			可编译性	连通性	鲁棒性	可并行性
		#量子电路	深度	#测量次数				
量子化学和量子模拟								
VQE[19]	3	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(1)$	原生门	线性	变分	基于电路的
量子受限玻尔兹曼机[33]	2	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(nm)$	$\mathcal{O}\binom{n}{n_p}$	经典控制	全连接	变分	基于测量次数
VarQiTE[34]	2	$\mathcal{O}(tq(q+p))$	$\mathcal{O}(q)$	$\mathcal{O}(1)$	非原生门	全连接	变分	基于电路的
二分类和多分类								
量子核[35]	2	$\mathcal{O}\binom{\lvert T\rvert}{2}$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(2^N)$	非原生门	线性	非变分	基于电路的
量子变分电路[35, 36]	2	$\mathcal{O}(\lvert T\rvert)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(1)$	非原生门	线性	变分	基于电路的
重复上传[37]	2	$\mathcal{O}(\lvert T\rvert)$	$\mathcal{O}(L)$	$\mathcal{O}(1)$	非原生门	循环	变分	基于电路的
生成建模								
量子电路玻尔兹曼机[38, 39]	2	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(2^N)$	原生门	线性	变分	基于测量次数
QNBM[40]	2	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(E)$	$\mathcal{O}(2^{n_{\text{out}}})$	经典控制	全连接	变分	基于测量次数
量子神经网络								
QCNN[41]	2	$\mathcal{O}(\lvert T\rvert)$	$\mathcal{O}(N\lceil\log_{1/r} N\rceil)$	$\mathcal{O}(1)$	经典控制	全连接	变分	基于电路的
QGNN[42]	2	$\mathcal{O}(\lvert T\rvert)$	$\mathcal{O}(p)$	$\mathcal{O}(1)$	非原生门	全连接	变分	基于电路的
数据分析								
NISQ-TDA[43]	2	$\mathcal{O}(n_v)$	$\mathcal{O}(V)$	$\mathcal{O}(2^V)$	经典控制	全连接	非变分	基于电路的

N: 量子比特数量
ε: 精度
n: 可见层数
m: 隐藏层的数量
n_p: 粒子的数量
t: 特罗特时间步数
p: 哈密顿量中的项数
q: 拟设参数数量
$|T|$: 训练集的大小
L 重复上传层的数量
E: 图的边数
n_{out}: 输出层节点数
r: 池化层的缩减率
V: 图顶点的数量
n_v: 采样向量的数量

推导出参数演化的解析方程，

$$\sum_j A_{ij}\dot{\theta}_j = C_j, \tag{4}$$

他们提供了简单的量子电路来计算A_{ij} 和 C_j。给定 t 个特罗特时间步、一个含有 p 项的 N量子比特哈密顿量，以及一个具有q 个参数的拟设 $\phi(\vec{\theta}(\tau))$，其算法需要 $\mathcal{O}(tq(q+p))$ 个电路来评估矩阵 A 和向量 C。每个电路的深度为 $\mathcal{O}(q)$；与 VQE 类似，测量次数不随系统尺寸变化。值得注意的是，每个特罗特时间步中的所有电路都可以独立实现，因此该算法具有基于电路的并行性。然而，该算法按原样需要全连接性，并使用非原生门。作者通过量子化学中的玩具示例展示了该方法的有效性，结果达到 ARL–2 分类。

2. *Quantum machine learning*

在计算领域，机器学习（ML）指一类算法或计算范式，在这类方法中，数据被用于迭代改进性能，而无需显式定义逻辑 [88]。机器学习处理的任务可能包括优化、分类和数据生成。

作为一种以数据为中心的方法，该模型必须能够捕捉训练数据的复杂性。仅用简单训练的模型，很难将结果外推到更大的数据集，或泛化 到更大的数据集，因此必须采取措施，确保机器学习模型经过充分训练，具有足够的通用性 [89]。

必须收集足够多的数据点，才能准确捕捉所有可能的输入数据中特征的泛化——这可能会使训练机器学习模型所需的数据点数量大幅增加。解决后一个问题还需要足够强大的硬件，以便在合理的时间内完成训练过程，同时具备足够快的时钟速度和足够的内存来存储参数及中间计算结果。

近年来，随着机器学习领域取得飞跃式进展（见 [90, 91]），许多问题已通过共同努力得以解决，例如构建越来越大的数据集（如 [92]），或在超级计算集群上进行训练（如 [93]）。不过，这些进展仍要求人们能够访问这些数据集，并拥有性能足够强大的集群；鉴于可用的时间和资源有限，这可能成为训练和运行机器学习模型的一大障碍。

这些问题可以借助量子机器学习（QML）模型来解决。与经典对应方法相比，这类模型只需较少的训练数据即可实现泛化[94]。此外，量子机器学习算法在使用相同数量参数的同时，能够达到相同或更高的预测准确率。这在很大程度上是因为量子比特可访问的特征空间由可遍历的希尔伯特空间决定，而该空间的维度随量子比特数量呈指数增长，远高于相同数量经典比特所决定的特征空间 [95]。更不用说，量子机器学习方法在描述量子数据方面，相较于经典方法还具有额外优势[96]。随着机器学习（ML）领域日趋成熟，量子机器学习仍是一个新兴领域，具有许多改进机会。

– 二分类和多分类 –

机器学习算法要解决的核心任务之一是二分类或多分类。给定一个 d 维数据集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，并假设存在一个映射 $m : \Omega \mapsto \{c_i\}$，可将数据集标记为类别标签 c_i，目标是仅根据 Ω 中所有数据点的一个给定子集，构造一个最优近似映射 $\tilde{m}$。

在经典支持向量机（SVM）方法中[97],，会在数据空间中优化一个分离超平面，以区分标签不同的元素。这依赖于计算内积$\langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle$，在 $\mathbb{R}^d$ 中，对于 $\vec{x}_i,\ \vec{x}_j \in \Omega$。一般而言，在数据集元素原始的（线性）特征空间中，可能很难找到此类分离超平面。因此，在更一般的情况下，会使用特征映射 ϕ，借助核$\langle \phi(\vec{x}_i) | \phi(\vec{x}_j) \rangle$实现复杂的非线性表示。

量子核（QK）的潜在优势已得到广泛讨论[36, 98]。其总体想法是，相对简单的编码电路可能会到达底层复杂高维希尔伯特空间中的非平凡状态，而这些状态难以通过经典方式计算。在直接的QK方法中，[35], 可利用量子设备计算内积$\langle 0 | \hat{U}(\vec{x}_i)^\dagger \hat{U}(\vec{x}_j) | 0 \rangle$。目标内积随后与测得全零状态的概率 p 直接相关，即 $|\langle 0 | \hat{U}(\vec{x}_i)^\dagger \hat{U}(\vec{x}_j) | 0 \rangle|^2 = p(0 \ldots 0)$。随后可将所得核矩阵用于后续的经典支持向量机，以寻找分离超平面。

与QK方法不同，后者仍使用经典计算机来估计分离超平面，而量子变分分类器（QVC）方法 [35, 36]旨在通过优化参数化训练电路，直接在量子设备上找到分离超平面。QK方法依赖于准确、近乎完美的量子执行，而QVC方法或许能够——至少在一定程度上——补偿训练过程中的噪声。训练集中的每个数据点都需要单独的编码电路，因此量子电路总数会随 $|T|$线性增长。为提高整体效率，可在不同的量子处理器上并行测量所有这些量子电路。

作为本次评估中的最后一种分类算法，我们来考察采用数据重上传 [37] 的通用单量子比特分类方法。其核心想法是通过反复将数据“上传”到量子比特寄存器中，绕过不可克隆定理 [99–101] 。具体做法是交替使用固定的编码门和参数化的训练门。原始论文 [37], 对比了有纠缠和无纠缠的单量子比特及多量子比特分类电路，其中，带纠缠的多量子比特方案准确率最高。所需的测量次数仅取决于对单个量子比特进行态层析的测量，因此随着所有与问题相关的系统尺寸增加，其规模保持恒定。

总之，所评估的三种分类算法均达到 ARL–2，因为已有报告显示，概念验证模拟取得了有利结果（相较于缩小规模的经典竞争方案） [35–37, 98]。文献中仍缺少针对特定量子硬件的详细资源分析，而这正是迈向 ARL–3 所必需的。一项可能尤为棘手的问题是，测量电路的数量可能与训练数据集的基数相对应 T，而在某些问题中，训练数据集可能包含数百万个数据点。因此（考虑到近期的研究发现 [94]），将寻找分类应用中的量子效用这一工作重点放在训练数据极为有限的问题上，是合理的。

– 生成建模 –

生成模型是机器学习算法，它们从输入数据集中提取此前未见过的、具有定义性的特征，并输出类型相似的全新数据。更准确地说，生成模型试图仅凭目标分布中的一部分数据样本来近似未知的概率分布。据称，无监督生成式建模任务是最早有望带来量子效用的应用之一（例如，参见 [40, 102–104]）。

量子电路玻尔兹曼机和量子神经元玻恩机（分别简称 QCBM 和 QNBM） [38–40]均用于生成建模。这两种方法背后的主要理论概念相当直观：每个对应于状态 $|x\rangle$ 的比特串 x，都映射到目标概率分布的某个特定（离散）测量结果。一个变分

参数化量子电路随后经过训练，使测得的比特串概率 $|\langle x|\psi\rangle|^2$ （根据玻恩规则——这也是其名称的由来）与目标分布相匹配。

对于量子电路玻尔兹曼机 [38, 39], ，可以使用一种标准的硬件高效拟设，它只需要硬件原生门和线性量子比特连通性。后者随量子比特数量 N呈线性扩展，并且至少在原理上能够学习 2^N 输出的概率分布。然而，对这类分布进行采样还需要数量呈指数级增长的测量次数 $\mathcal{O}(2^N)$ 。

最近，Gili等人将以量子神经元 [105] 形式表示的非线性激活函数引入量子电路玻尔兹曼机框架 [40]。从概念上说，他们的量子电路类似于多层神经网络结构，每层可以包含任意数量的节点。每个节点（输入、隐藏和可见节点）由一个独立的量子比特表示，而量子比特连通性则由底层网络中的层连接决定。相连的网络节点必须在相应的量子比特拓扑中彼此连通。为实现非线性激活，采用了“重复运行直至成功”类型的量子电路，其中运用电路中途测量的经典控制功能。

总体而言，QCBM 和 QNBM 方法目前都处于 ARL–2，因为已有报告显示，相较于缩小规模的经典竞争方法，它们在概念验证模拟中表现良好 [38–40]。目前尚无针对特定问题和特定量子硬件的详细资源估算，无法据此推进至 ARL–3。

– 量子神经网络 –

量子卷积神经网络（QCNN） [41] 是一类量子神经网络，它引入了可训练（参数化）的卷积层和条件池化层，并通过条件中途测量来减少活跃量子比特的数量。对于任意输入态 ρ_{in} ，若其编码至 N 个量子比特中，则 QCNN 共包含 $\log_1(N)$ 层（由连续的r卷积层和池化层构成），其量子比特缩减率 r 表示每个池化层消除的量子比特比例。

与其他量子神经网络不同，量子卷积神经网络已知能够高效训练 [41] ，且不会出现贫瘠高原 [106]。假设编码、卷积和池化层的子电路均呈线性扩展，其总电路深度的扩展规律为 $\mathcal{O}(N\lceil\log_{1/r} N\rceil)$ 。另一方面，假设引入足够多的池化层，将量子电路压缩到最终测量的量子比特数量相同，则所需的测量次数与问题规模无关。池化层数量足够多时，所需的量子比特拓扑会超出三维最近邻连通性，实际上需要全连接。

以监督学习问题为例，量子卷积神经网络涉及 $\mathcal{O}(|T|)$ 个不同的量子电路，可同时在多个并行的量子处理器上进行测量。

克服量子神经网络训练困难的另一种方法，是 Verdon 等人在近期预印本 [42]中提出的量子图神经网络（QGNN）形式体系。Albrecht 等人最近已在中性原子量子计算机上测试了类似方法。[107]许多值得关注的问题都可由二次哈密顿量描述，这类哈密顿量具有自然的图结构，其中每个顶点代表一个量子比特，每条边表示一种成对相互作用。QGNN 的目标是获得对特征图的低维学习表示，该特征图描述了问题哈密顿量。在原始论文[42], 中，作者从 QGNN 的一般表示入手，继而提出了若干具体拟设¨，方法是对训练参数施加由特定问题的物理性质所决定的条件。例如，通过施加对节点置换的不变性，作者展示了一种量子图卷积神经网络（ QGCNN），结果表明它是 QAOA 拟设的一种通用形式。作者还探讨了其他问题，包括学习哈密顿动力学、图聚类以及确定图同构。

与量子卷积神经网络类似，量子图神经网络需要 $\mathcal{O}(|T|)$ 个电路来训练网络，其中 $|T|$ 是训练集的尺寸；这些电路可分别在独立的量子处理器上并行执行。对于约束更多的 ans¨atze，每个电路的深度随哈密顿量项数 $\mathcal{O}(p)$ 增长。一般而言，二次哈密顿量涉及所有量子比特对之间的相互作用，因此训练电路需要全连接。作者通过数值实现展示了量子图神经网络的四种潜在应用（包括上述提及的应用），从而达到 ARL–2 分类。

3. Data analysis

拓扑数据分析（TDA）用于分析复杂的高维数据。其目标是将此类数据结构简化为一组规模较小的局部和全局特征值，这些特征值具有可解释的分析价值 [43]。本质上，它涉及估算给定数据图的持续同调 [108] ，其中包含图的贝蒂数随时间变化的模式。据称，拓扑数据分析有许多应用领域 [43] ，范围涵盖天体物理学 [109], 、神经科学 [110], 、遗传学 [111], 以及深度神经网络分析 [112]。

在经典计算机上，拓扑数据分析可能是一项极其困难的任务[113]。人们已经开发出容错量子算法，未来或许能在真实硬件上 [113] 相较经典竞争方案实现指数级优势。最近，Akhalwaya 等人发表了一种在量子计算的含噪中等规模量子时代处理拓扑数据分析的新方法，称为 NISQ-TDA [43]。在他们的方法中，拓扑数据分析问题被重新表述为使用切比雪夫方法进行随机矩阵秩估算——

计 [114, 115]。完整的量子算法处理 N 个数据点需要 N 个量子比特，并涉及：(i) 生成一个零均值随机初始态；(ii) 使用 $\log_2 N$ 个辅助量子比特执行计数算法；(iii) 对所有相连的数据点（位于所用距离阈值范围内）控制的辅助量子比特应用 CCNOT 门，并进行电路中途测量；以及 (iv) 应用经 Jordan-Wigner 映射的边界算子。据称，对于支持电路中途测量的量子设备，在固定多项式次数下，总电路深度随数据图顶点数量 V线性增长 [43]。由于最终测量需要估算投影量子态的范数，所需测量次数会随所分析的数据图顶点数量呈指数级增长。研究未报告针对运行特定经典计算要求高的拓扑数据分析问题的量子设备进行的具体资源估算，例如运行时间。因此，NISQ-TDA 被归类为 ARL–2，但展现出有望推进至 ARL–3 的特征。

IV. 结论

本文介绍了实用量子优势这一一般概念，并将其命名为量子效用 （参见定义 1）；同时还介绍了如何通过应用就绪等级 （ARL，参见图 2 和图 3）对其进行评估。

从本质上说，量子效用代表一个里程碑，它既与实际应用相关，也与运行该应用的量子设备相关。为了评估给定应用在特定量子设备上追求量子效用时的成熟度，IIC 小节引入了应用就绪等级（ARL）。这些等级深受 NASA 技术就绪等级（TRL）的启发 [32]，定义了一个五级体系，用于突出应用向量子效用迈进的进展，具体包括（ARL–1）概念化、（ARL–2）概念验证、（ARL–3）可扩展性验证、（ARL–4）模拟中的实用性，以及最终的（ARL–5）量子效用。此外，文中还提供了扩展分类标签（参见表 I），通过详细说明量子应用在可扩展性、门可编译性、量子比特连通性、抗噪声性以及并行扩展至多个量子单元方面的要求，以简洁且信息丰富的方式简化效用研究。

为展示 ARL 分类方案，第三节综述了量子化学、量子模拟、量子机器学习和数据分析领域中的不同量子应用。针对每项应用，本文评估了其当前的 ARL，以及在相应最佳情形下的扩展分类标签。所有结果汇总于表 II，并在后续小节中作了简要讨论。

迄今为止，所综述的应用中只有 VQE 达到了 ARL–3。这是因为文献中鲜少报告详尽的资源估算，例如完整的算法量子处理器计时；尤其是在量子效用所针对的同类设备比较中，更是如此。不过，考虑到这些应用展现出的良好可扩展性和算法特征，可以合理地认为，其中许多应用能够并且将会轻松进阶至 ARL–3 或更高等级。

本文可视为一份“动员令”，呼吁量子产业、研究人员、算法开发者及所有感兴趣的人，在各自的开发工作中追求、思考并以实现量子效用为目标。尤其是移动或边缘应用，在采用尺寸、重量和成本适宜、可部署于边缘端的量子硬件时，或许能提供一个更加切实的目标。我们坚信，这类应用将跻身最早展示真正量子优势的应用之列，并为真正无处不在的量子计算铺平道路。

[1] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. S. L. Brandao, D. A. Buell, B. Burkett, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, R. Collins, W. Courtney, A. Dunsworth, E. Farhi, B. Foxen, A. Fowler, C. Gidney, M. Giustina, R. Graff, K. Guerin, S. Habegger, M. P. Harrigan, M. J. Hartmann, A. Ho, M. Hoffmann, T. Huang, T. S. Humble, S. V. Isakov, E. Jeffrey, Z. Jiang, D. Kafri, K. Kechedzhi, J. Kelly, P. V. Klimov, S. Knysh, A. Korotkov, F. Kostritsa, D. Landhuis, M. Lindmark, E. Lucero, D. Lyakh, S. Mandr`a, J. R. McClean, M. McEwen, A. Megrant, X. Mi, K. Michielsen, M. Mohseni, J. Mutus, O. Naaman, M. Neeley, C. Neill, M. Y. Niu, E. Ostby, A. Petukhov, J. C. Platt, C. Quintana, E. G. Rieffel, P. Roushan, N. C. Rubin, D. Sank, K. J. Satzinger, V. Smelyanskiy, K. J. Sung, M. D. Trevithick, A. Vainsencher, B. Villalonga, T. White, Z. J. Yao, P. Yeh, A. Zalcman, H. Neven, and J. M. Martinis, “量子霸权使用可编程超导处理器，*Nature*，第574卷，第505页，2019年。 [在线]。获取地址：https://doi.org/10 1038 41586 019 1666 5 。/s - - - H.-S. Zhong、H. Wang、Y.-H. Deng、M.-C. Chen、L.-C. Peng、Y.-H. Luo、J. Qin、D. Wu、X. Ding、Y. Hu、P. Hu、X.-Y. Yang、W.-J. Zhang、H. Li、Y. Li、X. Jiang、L. Gan、G. Yang、L. You、Z. Wang、L. Li、N.-L. Liu、C.-Y. Lu 和 J.-W. Pan，《利用光子实现量子计算优势》， *Science*，第370卷，第1460页，2020年。 [在线]。获取地址：https: // www.science.org/doi/abs/10 1126 8770 。/science.abe

[3] H.-S. Zhong、Y.-H. Deng、J. Qin、H. Wang、M.-C. Chen、L.-C. Peng、Y.-H. Luo、D. Wu、S.-Q. Gong、H. Su、Y. Hu、P. Hu、X.-Y. Yang、W.-J. Zhang、H. Li、Y. Li、X. Jiang、L. Gan、G. Yang、L. You、Z. Wang、L. Li、N.-L. Liu、J. J. Renema、C.-Y. Lu 和 J.-W. Pan，《利用受激压缩光进行相位可编程高斯玻色采样》， *Phys. Rev. Lett.*，第127卷，第180502页，2021年。 [在线]。获取地址：https:

//link.aps.org/doi/
10 1103 127 180502 。/
[4] PhysRevLett. . L. S. Madsen、F. Laudenbach、M. F. Askarani、F. Rortais、T. Vincent、J. F. F. Bulmer、F. M. Miatto、L. Neuhaus、L. G. Helt、M. J. Collins、A. E. Lita、T. Gerrits、S. W. Nam、V. D. Vaidya、M. Menotti、I. Dhand、Z. Vernon、N. Quesada 和 J. Lavoie，《利用可编程光子处理器实现量子计算优势》，*Nature*，第606卷，第75页，2022年。[在线]。获取地址：https: //doi.org/10.1038/s41586-022-04725-x [5] J. Preskill，《量子计算与纠缠前沿》，arXiv:1203.5813，2012年。[在线]。获取地址：https://arxiv.org/abs/1203 5813 。S.
[6] Aaronson 和 L. Chen，《量子霸权实验的计算复杂性理论基础》，载于*Proceedings of the 32nd Computational Complexity Confer-ence* 17 ，丛书 CCC '。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik，2017年。[在线]。获取地址：https://dl.acm.org/doi/
10 5555 3135595 3135617 。/。S.
[7] Aaronson 和 A. Arkhipov，《线性光学的计算复杂性》，载于*Proceedings of the Forty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing* 11 ，丛书 STOC '。美国纽约州纽约：计算机协会，2011年，第333页。[在线]。获取地址：https://doi.org/10.1145/1993636。1993682[8] N. Moll、P. Barkoutsos、L. S. Bishop、J. M. Chow、A. Cross、D. J. Egger、S. Filipp、A. Fuhrer、J. M. Gambetta、M. Ganzhorn、A. Kandala、A. Mezzacapo、P. M¨uller、W. Riess、G. Salis、J. Smolin、I. Taver-nelli 和 K. Temme，《使用变分算法在近期量子设备上进行量子优化》，*Quantum Sci. Technol.*，第3卷，第030503页，2018年。[在线]。获取地址：https://doi.org/
10 1088 2058 9565 822 。/ - /aab A.
[9] Cross、L. Bishop、S. Sheldon、P. Nation 和 J. Gambetta，《使用随机化模型电路验证量子计算机》，*Phys. Rev. A*，第100卷，第032328页，2019年。[在线]。获取地址：https: //doi.org/
10 1103 100 032328 。/PhysRevA. . A.
[10] Wack、H. Paik、A. Javadi-Abhari、P. Jurcevic、I. Faro、J. M. Gambetta 和 B. R. Johnson，《质量、速度和规模：衡量近期量子计算机性能的三个关键属性》，arXiv:2110.14108，2021年。[在线]。获取地址：https: //doi.org/ 10 48550 2110 14108 。/
[11] arXiv. . M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，*Quantum Computation and Quantum Information* 。剑桥大学出版社，2000年。[12] M. Cerezo、A. Arrasmith、R. Babbush、S. C. Benjamin、S. Endo、K. Fujii、J. R. McClean、K. Mitarai、X. Yuan、L. Cincio 和 P. J. Coles，《变分量子算法》，*Nat. Rev. Phys.*，第3卷，第625页，2021年。[在线]。获取地址：https: //doi.org/
10 1038 42254 021 00348 9 。/s - - - R. Blu
[13] me-Kohout 和 K. C. Young，《量子计算机基准测试的体积框架》，*Quantum*，第4卷，第362页，2020年。[在线]。获取地址：https://doi.org/ 10 22331 2020 11 15 362 。/q- - -
[14] - D. Mills 、 S. Sivarajah 、 T. L. Scholten 和 R. Duncan，《应用导向的量子计算全栈整体基准测试》，*Quantum*，第5卷，第415页，2021年。[在线]。获取地址：https://doi.org/10.
22331 2021 03 22 415 /q- - - - S. Boixo、S. V. Isakov、V. N.
[15] Smelyanskiy、R. Babbush、N. Ding、Z. Jiang、M. J. Bremner、J. M. Martinis 和 H. Neven，"近期开设备中量子霸权的表征"，*Nat. Phys.*，第14卷，第595页，2018年。[在线]。可获取：https://doi.org/10.1038/s41567-018-0124-x
[16] R. Kueng、D. M. Long、A. C. Doherty 和 S. T. Flammia，"将实验与容错阈值进行比较"，*Phys. Rev. Lett.*，第117卷，第170502页，2016年。[在线]。可获取：https: //link.aps.org/doi/
10 1103 117 170502 . /
[17] PhysRevLett. . T. Proctor、K. Rudinger、K. Young、E. Nielsen 和 R. Blume-Kohout，"测量量子计算机的能力"，*Nat. Phys.*，第18卷，75，2022年10 1038p. 。[在线]。可获取：https://doi.org/ . / s41567-021-01409-7[18]J. J. Wallman 和 J. Emerson，"通过随机化编译进行可扩展量子计算的噪声整形"，*Phys. Rev. A*，第94卷，第052325页，2016年。[在线]。可获取：https://link.aps.org/doi/10.1103/ PhysRevA. 94 052325 .
[19] A. Peruzzo 、 J. McClean 、 P. Shadbolt 、 M.-H. Yung 、 X.-Q. Z hou、P. J. Love、A. Aspuru-Guzik 和 J. L. O'brien，"光子量子处理器上的变分本征值求解器"，*Nat. Commun.*，第5卷，第1页，2014年。[在线]。可获取：https: //doi.org/ 10 1038 5213 . /
[20] ncomms S. Martiel、T. Ayral 和 C. Allouche，"以应用为中心、硬件无关且可扩展的方式对量子协处理器进行基准测试"，*IEEE Trans.* ，第卷，第页。*Quantum Eng.* 2, 1, 2021 [ ] 在线。可获取：https://doi.org/
10 1109 2021 3090207 . /TQE. . T. Lubinski、
[21] S. Johri、P. Varosy、J. Coleman、L. Zhao、J. Necaise、C. H. Baldwin、K. Mayer 和 T. Proctor，"面向应用的量子计算性能基准"，arXiv:2110.03137，2021年。[在线]。可获取：https://doi.org/
10 48550 2110 03137 . /arXiv. . J.
[22] R. Finˇzgar、P. Ross、J. Klepsch 和 A. Luckow，"Quark：用于量子计算应用基准测试的框架"，载于*2022 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)* 2022 226 [ ] ，第页。在线。可获取：https: //doi.org/
10 1109 53715 2022 00042 . /QCE . . M. W.
[23] Doherty，"量子加速器：量子计算机的新轨迹"，*Digitale Welt*，第5卷，第74页，2021年。[在线]。可获取：https: //doi.org/
10 1007 42354 021 0342 8 . /s - - - S. S. Gill、A.
[24] Kumar、H. Singh、M. Singh、K. Kaur、M. Usman 和 R. Buyya，"量子计算：分类体系、系统综述和未来方向"，*Softw. Pract. Exp.*，第52卷，第66页，2022年。[在线]。可获取：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10. 1002 3039 /spe.
[25] R. Rietsche、C. Dremel、S. Bosch、L. Steinacker、M. Meckel 和 J.-M. Leimeister，"量子计算"，*Electron. Mark.*，第32卷，2525，2022年10 1007p. 。[在线]。可获取：https://doi.org/ . / s12525-022-00570-y[26] J. F. F. Bulmer、B. A. Bell、R. S. Chadwick、A. E. Jones、D. Moise、A. Rigazzi、J. Thorbecke、U.-U. Haus、T. V. Vaerenbergh、R. B. Patel、I. A. Walmsley 和 A. Laing，"高斯玻色采样中量子优势的边界"，*Sci. Adv.*，第8卷，第eabl9236页，2022年。[在线]。可获取：https: //www.science.org/doi/abs/
10 1126 9236 . /sciadv.abl
[27] Y. Wu、W.-S. Bao 和 S. Cao，"强量子

计算优势：使用超导量子处理器”， *Phys. Rev. Lett.*，第127卷，第180501页，2021年。 [在线]。可获取：https://link.aps.org/ doi/ 10 1103 127 180501 . /PhysRevLett. . T. Nguyen、D. [28] Arya、M. W. Doherty、N. Herrmann、J. Kuhlmann、F. Preis、P. Scott 和 S. Yin，“ 用于大规模并行量子计算的软件 ”，arXiv:2211.13355，2022 年。 [在线]。可获取：https: //arxiv.org/abs/ 2211 13355 . B. [29] Subramaniam 和 W.-c. Feng，“绿色指数：评估高性能计算系统系统级能源效率的度量指标”，载于 *2012 IEEE 26th International Parallel and Distributed Processing Symposium Workshops & PhD Forum* 2012 1007 ，第页。 [在线]。可获取：https://doi.org/ 10 1109 2012 123 . / IPDPSW. . A. Auffeves，“量子技术需要一项量子能源倡议”， [30] *PRX Quantum* 3, 020101, ，第卷，第页。 [在线]。可获取：https://link.aps.org/doi/ . 10 1103 3 020101 / PRXQuantum. . M. Fellous-Asiani、J. H. Chai、Y. Thonnart、H. K. Ng、R. S. Whitney 和 A. Auffeves，“优化可扩展全栈量子计算机的资源效率”， [31] arXiv:2209.05469，2022年。 [在线]。可获取：https: // arxiv.org/abs/2209.05469[32]国际标准化组织， *ISO 16290:2013: Space systems – Definition of the Technology Readiness Levels (TRLs) and their criteria of assessment* 。瑞士日内瓦韦尔涅：国际标准化组织，2013年。 [在线]。可获取：https://www.iso.org/standard/56064.html [33] R. Xia 和 S. Kais，“用于电子结构计算的量子机器学习”， *Nat. Commun.*，第9卷，第4195页，2018年。 [在线]。可获取：https: //doi.org/10.1038/s41467-018-06598-z [34] S. McArdle、T. Jones、S. Endo、Y. Li、S. C. Benjamin 和 X. Yuan，“虚时间演化的基于变分试探态的量子模拟”， *Npj Quantum Inf.* 5, 75, 2019 [ ] ，第卷，第页。在线。可获取：https://doi.org/ 10 1038 41534 019 0187 2 . /s - - - M. Schuld 和 N. Killoran，“ 特征希尔伯特空间中的量子机器学习 ”， [35] *Phys. Rev. Lett.*，第122卷，第040504页，2019年。 [在线]。可获取：https: //link.aps.org/doi/ 10 1103 122 040504 . /PhysRevLett. . V. Havlˇcek、A. D. Corcoles、K. Temme、A. W. Harrow、A. Kandala、J. M. Chow 和 J. M. Gambetta，“利用量子增强特征空间进行监督学习”， [36] *Nature*，第567卷，第209页，2019年。 [在线]。可获取：https://doi.org/ 10 1038 41586 019 0980 2 . /s - - - A. Perez-Salinas、A. Cervera-Lierta、E. Gil-Fuster 和 J. I. Latorre，“用于通用量子分类器的数据重上传”， [37] *Quantum* 4, 226, ，第卷，第页。 [在线]。可获取：https://doi.org/ . / q- 2020 02 06 226 - - - M. Benedetti、D. Garcia-Pintos、O. Perdomo、V. Leyton-Ortega、Y. Nam 和 A. Perdomo- Ortiz，“虚时间演化的基于变分试探态的量子模拟”， [38] *Npj Quantum Inf.* 5, 45, 2019 [ ] ，第卷，第页。在线。可获取：https://doi.org/ 10 1038 41534 019 0187 2 . /s - - - K. Gili 、 M. Hibat-Allah 、 M. Mauri 、 C. Ballance 和 A. Perdomo-Ortiz，“量子电路玻恩机能够泛化吗？”， [39] *Quantum Sci. Technol.*，第8卷，第3期，第035021页，2023年。 [在线]。可获取：https://dx.doi.org/10.1088/2058-9565/acd578 [40]K. Gili、M. Sveistrys 和 C. Ballance，《将非线性激活函数引入量子生成模型》， *Phys. Rev. A*，第107卷，第012406页，2023年。 [在线]。可获取：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.107. 012406[41] I. Cong、S. Choi 和 M. D. Lukin，《量子卷积神经网络》， *Nat. Phys.*，第15卷，第1273页，2019年。 [在线]。可获取：https://doi.org/10. 1038 41567 019 0648 8 /s - - - G. Verdon、T. McCourt、E. [42] Luzhnica、V. Singh、S. Leichenauer 和 J. Hidary，《量子图神经网络》，arXiv:1909.12264，2019年。 [在线]。可获取：https://arxiv.org/abs/ 1909 12264 。I. Y. Akhalwaya、S. Ubaru、 [43] K. L. Clarkson、M. S. Squil- lante、V. Jejjala、Y.-H. He、K. Naidoo、V. Kalantzis 和 L. Horesh，《迈向含噪量子计算机上的量子优势》，arXiv:2209.09371，2022年。 [在线]。可获取：https://arxiv.org/abs/ 2209 09371 。R. P. Feynman， [44] 《用计算机模拟物理》， *Int. J. Theor. Phys.*，第21卷，第467页，1982年。 [在线]。可获取：https://doi.org/ 10 1007 02650179 。/BF J. Tilly、H. [45] Chen、S. Cao、D. Picozzi、K. Setia、Y. Li、E. Grant、L. Wossnig、I. Rungger、G. H. Booth 和 J. Tennyson，《变分量子本征求解器：方法与最佳实践综述》， *Phys. Rep.*，第986卷，第1页，2022年。 [在线]。可获- 取：https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S 0370157322003118 [46] J. Romero、R. Babbush、J. R. McClean、C. Hempel、P. J. Love 和 A. Aspuru-Guzik，《使用幺正耦合簇拟设进行量子计算分子能量的策略》， *Quantum Sci. Technol.* ，第4卷，第014008页，2018年。 [在线]。可获取：https://dx.doi.org/ 10 1088 2058 9565 3 4 。/ - /aad e W. [47] Mizukami、K. Mitarai、Y. O. Nakagawa、T. Yamamoto、T. Yan 和 Y.-y. Ohnishi，《用于量子计算机的轨- 道优化幺正耦合簇理论》， *Phys. Rev. Res.*，第2卷，第033421页，2020年。[在线]。可获取：https: //link.aps.org/doi/ 10 1103 2 033421 。/ [48] PhysRevResearch. . G.-L. R. Anselmetti、D. Wierichs、C. Gogolin 和 R. M. Parrish，《用于费米子系统的局域、表达能力强且保持量子数的 vqe 拟设》，，第卷，第页。在线。可获取：https://dx.doi.org/ 10 1088 1367 2630 2 3 。/ - /ac cb B. T. [49] Gard、L. Zhu、G. S. Barron、N. J. Mayhall、S. E. Economou 和 E. Barnes，《用于变分量子本征求解算法的高效保对称态制备电路》， *Npj Quantum Inf.*，第6卷，第10页，2020年。 [在线]。可获取：https: //doi.org/ 10 1038 41534 019 0240 1 。/s - - - R. [50] Wiersema、C. Zhou、Y. de Sereville、J. F. Carrasquilla、Y. B. Kim 和 H. Yuen，《探索哈密顿量变分拟设中的纠缠与优化》， *PRX Quantum* 1, 020319, ，第卷，第页。 [在线]。可获取：https://link.aps.org/doi/ . 10 1103 1 020319 /PRXQuantum. . P. K. Barkoutsos、 [51] J. F. Gonthier、I. Sokolov、N. Moll、G. Salis、A. Fuhrer、M. Ganzhorn、D. J. Egger、M. Troyer、A. Mezzacapo、S. Filipp 和 I. Tavernelli，《用于电子结构计算的量子算法：粒子-空穴哈密顿量和优化波函数展开》， *Phys. Rev. A* ，第98卷，第022322页，2018年。 [在线]。可获取：

https://link.aps.org/doi/ 10 1103 98 022322 。/PhysRevA. .
[52] D. Wecker、M. B. Hastings 和 M. Troyer，《迈向实用量子变分算法的进展》，*Phys.*，第卷，第页。在线。*Rev. A* 92, 042303, 2015 [ ] 可获取：https://link.aps.org/doi/ 10 1103 92 042303 。/PhysRevA. .
[53] J. Lee、W. J. Huggins、M. Head-Gordon 和 K. B. Whaley，《用于量子计算的广义幺正耦合簇波函数》，*J. Chem. Theory*，第卷，第页。在线。*Comput.* 15, 311, 2019 [ ] 可获取：https://doi.org/ 10 1021 8 01004 。/
[54] acs.jctc. b A. Peruzzo、J. McClean、P. Shadbolt、M.-H. Yung、X.-Q. Zhou、P. J. Love、A. Aspuru-Guzik 和 J. L. O'Brien，《光子量子处理器上的变分本征值求解器》，*Nat. Commun.*，第5卷，第4213页，2014年。 [在线]。可获取：https: //doi.org/ 10 1038 5213 。/
[55] ncomms A. Kandala、A. Mezzacapo、K. Temme、M. Takita、M. Brink、J. M. Chow 和 J. M. Gambetta，《用于小分子和量子磁体的硬件高效变分量子本征求解器》，*Nature*，第549卷，第242页，2017年。 [在线]。可获取：https: //doi.org/ 10 1038 23879 。/nature R. A. Lang、
[56] I. G. Ryabinkin 和 A. F. Izmaylov，《采用贝克-坎贝尔-豪斯多夫展开精确二次截断的电子哈密顿量幺正变换》，*J. Chem. Theory*，第卷，第页。在线。*Comput.* 17, 66, 2021 [ ] 可获取：https://doi.org/ 10 1021 0 00170 。/
[57] acs.jctc. c Z.-J. Zhang、T. H. Kyaw、J. S. Kottmann、M. Degroote 和 A. Aspuru-Guzik，《互信息辅助自适应变分量子本征求解器》，*Quantum Sci. Technol.* 6, 035001, 2021 [ ] *Quantum*，第卷，第页。在线。可获- 取：https://dx.doi.org/ 10 1088 2058 9565 4 。/ - /abdca I. G.
[58] Ryabinkin、T.-C. Yen、S. N. Genin 和 A. F. Izmaylov，《量子比特耦合簇方法：量子计算机上量子化学的系统方法》，*J. Chem. Theory Comput.*，第14卷，第6317页，2018年。 [在线]。可获取：https: //doi.org/ 10 1021 8 00932 。/acs.jctc. b Y. S. Yordanov、V.
[59] Armaos、C. H. W. Barnes 和 D. R. M. Arvidsson-Shukur，《基于量子比特激发的自适应变分量子本征求解器》，*Commun.*，第卷，第页。在线。可获取：https://doi.org/ 10 1038 42005 021 00730 0 。/s - - - Y. Zhang、L.
[60] Cincio、C. F. A. Negre、P. Czarnik、P. J. Coles、P. M. Anisimov、S. M. Mniszewski、S. Tretiak 和 P. A. Dub，《具有降低的电路复杂度的变分量子本征求解器》，*Quantum Inf.* 8, 96, 2022 [ ] *Npj*，第卷，第页。在线。可获取：https://doi.org/10.1038/s41534-022-00599-z
[61] I. G. Ryabinkin、R. A. Lang、S. N. Genin 和 A. F. Izmaylov，《具有高效生成元筛选的迭代量子比特耦合簇方法》，*J. Chem. Theory*，第卷，第页。在线。*Comput.* 16, 1055, 2020 [ ] 可获取：https://doi.org/ 10 1021 9 01084 。/
[62] acs.jctc. b H. L. Tang、V. Shkolnikov、G. S. Barron、H. R. Grimsley、N. J. Mayhall、E. Barnes 和 S. E. Economou，《Qubit-ADAPT-VQE：一种用于在量子处理器上构建硬件高效拟设的自适应算法》，*PRX Quantum*，第2卷，第020310页，2021年。 [在线]。可获取：https://link.aps.org/ doi/ 10 1103 2 020310 。/PRXQuantum. . H. R.
[63] Grimsley、S. E. Economou、E. Barnes 和 N. J. Mayhall，《一种用于精确量子计算机上的分子模拟》，*Nat.*，第 p 卷。在线获取：https://doi.org/ 10 1038 41467 019 10988 2 。/s - - - M. Ostaszewski、E. Grant 和 M. Benedetti，“ 参数化量子电路的结构优化”， *Quantum*，第 5 卷，第 391 页，2021年。 [在线]。获取地址：https://doi.org/10.22331/q-2021-01-28-391[65] P. Jordan 和 E. Wigner，“ Uber das paulische ¨Aquiv- alenzverbot”， *Z. Phys.*，第 47 卷，第 631 页，1928年。 [在线]。获取地址：https://doi.org/ 10 1007 01331938 。/BF S. B. Bravyi 和
[66] A. Y. Kitaev，“费米子量子计算”， *Ann. Phys.*，第 298 卷，第 210 页，2002年。[在线]。获取地址：https://www.sciencedirect.com/ 000349 1602902548 science/article/pii/S[67] J. T. Seeley、M. J. Richard 和 P. J. Love，“用于电子结构量子计算的 Bravyi-Kitaev变换”， *J. Chem. Phys.*，第 137 卷，第 224109 页，2012年。 [在线]。获取地址：https://doi.org/10。 1063 1 4768229 /。Z. Jiang、
[68] A. Kalev、W. Mruczkiewicz 和 H. Neven，“通过三叉树实现最优的费米子到量子比特映射及其在约化量子态学习中的应用”，*Quantum*，第 4 卷，第 276 页，2020年。 [在线]。获取地址：https://doi.org/ 10 22331 2020 06 04 276 。/q- - - - Y. Shee、P.-K.
[69] Tsai、C.-L. Hong、H.-C. Cheng 和 H.-S. Goan，“用于电子结构量子模拟的量子比特高效编码方案”， *Phys. Rev. Res.*，第 4 卷，第 023154 页，2022年。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/ 10 1103 4 023154 。/
[70] PhysRevResearch。J. Cotler 和 F. Wilczek，“量子重叠层析”，*Phys. Rev. Lett.*，第 124 卷，100401，2020年，10 页。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/。 1103 124 100401 /
[71] PhysRevLett。C. Hadfield，“用于能量估计的自适应泡利影子”，arXiv:2105.12207，2021年。 [在线]。获取地址：https://arxiv.org/abs/ 2105 12207 。C. Hadfield、S. Bravyi、R.
[72] Raymond 和 A. Mezzacapo，“使用局部偏置经典影子测量量子哈密顿量”，arXiv:2006.15788，2020年。 [ ] 2006 15788 在线。获取地址：
[73] https://arxiv.org/abs/。P. Gokhale、O. Angiuli、Y. Ding、K. Gui、T. Tomesh、M. Suchara、M. Martonosi 和 F. T. Chong，“通过划分为对易族来最小化变分量子本征求解器中的态制备次数”，arXiv:1907.13623，2019年。 [在线]。获取地址：https://arxiv.org/abs/ 1907 13623 。
[74] P. Gokhale 和 F. T. Chong，“$o(n^3)$ 变分量子本征求解器分子哈密顿量的测量成本”，arXiv:1908.11857，2019年。 [在线]。获取地址：https://arxiv.org/abs/ 1908 11857 。I.
[75] Hamamura 和 T. Imamichi，“使用纠缠测量高效评估量子可观测量”，*Npj Quantum Inf.*，第 6 卷，第 56 页，2020年。 [在线]。获取地址：https://doi.org/ 10 1038 41534 020 0284 2 。/
[76] s - - - T.-C. Yen 和 A. F. Izmaylov，“采用 Cartan 子代数方法高效测量量子可观测量”，*PRX Quantum*，第 2 卷，第 040320 页，2021年。[在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/ 10 1103 2 040320 。/PRXQuantu
[77] m。O. Oumarou、M. Scheurer、R. M. Parrish、E. G. Hohenstein 和 C. Gogolin，“通过正则化压缩双因子分解加速化学量子计算”，arXiv:2212.07957，2022年。

[ ] 2212 07957 在线。获取
[78] 地址：https://arxiv.org/abs/。M. Motta、E. Ye、J. R. McClean、Z. Li、A. J. Minnich、R. Babbush 和 G. K.-L. Chan，“用于电子结构量子模拟的低秩表示”，*Npj Quantum Inf.*，第 7 卷，83，2021年，10 1038p。 [在线]。获取地址：https://doi.org/。/ s41534-021-00416-z[79]I. D. Kivlichan、J. McClean、N. Wiebe、C. Gidney、A. Aspuru-Guzik、G. K.-L. Chan 和 R. Babbush，“具有线性深度和连通性的电子结构量子模拟”， *Phys. Rev. Lett.*，第 120 卷，第 110501 页，2018年。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/
10 1103 120 110501 。/PhysRevLett。
[80] W. J. Huggins、J. R. McClean、N. C. Rubin、Z. Jiang、N. Wiebe、K. B. Whaley 和 R. Babbush，“近期量子计算机上量子化学的高效抗噪测量”，*Npj Quantum Inf.* 7， 23，2021 [ ] ，第 p 卷。在线。获取地址：https://doi.org/ 10 1038 41534 020 00341 7 。/
[81] s - - - T.-C. Yen、V. Verteletskyi 和 A. F. Izmaylov，“使用幺正变换通过一系列单量子比特测量测量所有相容算符”，*J.*，第 p 卷。在线。获取地址：https://doi.org/
Chem. Theory Comput. 16， 2400，2020 [ ]
10 1021 0 00008 。/acs.jctc。c D.
[82] A. Fedorov、B. Peng、N. Govind 和 Y. Alexeev，“VQE 方法：简要综述与最新进展”，*Mater. Theory*，第 6 卷，第 2 页，2022年。 [在线]。获取地址：https://doi.org/ 10 1186 41313 021 00032 6 。/s - - - J.
[83] F. Gonthier、M. D. Radin、C. Buda、E. J. Doskocil、C. M. Abuan 和 J. Romero，“测量是化学领域近期实用量子优势的障碍：资源分析”，*Phys. Rev. Res.*，第 4 卷，第 033154 页，2022年。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/
10 1103 4 033154 。/
[84] PhysRevResearch。K. Dalton、C. K. Long、Y. S. Yordanov、C. G. S mith、C. H. W. Barnes、N. Mertig 和 D. R. M. Arvidsson-Shukur，“变分量子化学要求门错误概率低于容错阈值”，arXiv:2211.04505，2022年。 [在线]。获取地址：https://arxiv.org/abs/
2211 04505 。G. Carleo 和 M.
[85] Troyer，“使用人工神经网络解决量子多体问题”， *Science*，第 355 卷，第 602 页，2017年。 [在线]。获取地址：https://www.science.org/doi/abs/
10 1126 2302 。/science.aag P.
[86] J. Love，“使用虚时间冷却”，*Phys. Rev. A.*，第 p 卷。在线。获取地址：https://doi.org/10.1038/s41567-019-0709-z [87] H. Kamakari、S.-N. Sun、M. Motta 和 A. J. Minnich，“使用量子虚时间演化对开放量子系统进行数字量子模拟”，*PRX Quantum*，第 3 卷，第 010320 页，2022年。 [在线]。获取地址：https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.3. 010320[88]C. Janiesch、P. Zschech 和 K. Heinrich，“机器学习与深度学习”，*Electron. Mark.*，第 31 卷，第 685 页，2021年。 [在线]。获取地址：https://doi.org/10. 1007 12525 021 00475 2 /s - - - M. Mohri、A.
[89] Rostamizadeh 和 A. Talwalkar，《机器学习导论》，第 nd 版。马萨诸塞州剑桥：麻省理工学院出版社，2018年。 *Foundations of Machine Learning* 2 D. Silver、A.
Huang、C. J. Maddison、A. Guez、L. Sifre、G. van den Driessche、J. chrittwieser、I. Antonoglou、V. Panneershelvam、M. Lanctot、S. Dieleman、D. Grewe、J. Nham、N. Kalchbrenner，
I. Sutskever、T. Lillicrap、M. Leach、K. Kavukcuoglu、T. Graepel，and D. Hassabis，《使用深度神经网络和树搜索掌握围棋》，*Nature*，第529卷，第484页，2016年。 [在线]。可访问：https://doi.org/
10 1038 16961 。/nature A. Ramesh，P.
[91] Dhariwal，A. Nichol，C. Chu，and M. Chen，《利用 CLIP 潜变量进行分层文本条件图像生成》，arXiv:2204.06125，2022年。
[ ] 2204 06125 在线。可访问：
[92] https://arxiv.org/abs/。J. Deng，W. Dong，R. Socher，L.-J. Li，K. Li，and L. Fei-Fei，《ImageNet：大型分层图像数据库》，载于 *2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* 2009 248 ，，第页。[在线]。可访问：https://doi.org/10.1109/CVPR. 2009.5206848[93]S. Smith，M. Patwary，B. Norick，P. LeGresley，S. Rajbhandari，J. Casper，Z. Liu，S. Prabhumoye，G. Zerveas，V. Korthikanti，E. Zhang，R. Child，R. Y. Aminabadi，J. Bernauer，X. Song，M. Shoeybi，Y. He，M. Houston，S. Tiwary，and B. Catanzaro，《使用 DeepSpeed 和 Megatron 训练 Megatron-Turing NLG 530B：大规模生成式语言模型》，arXiv:2201.11990，2022年。 [在线]。可访问：https://arxiv.org/abs/
2201 11990 。M. C. Caro，H.-Y. Huang，M.
[94] Cerezo，K. Sharma，A. Sornborger，L. Cincio，and P. J. Coles，《少量训练数据下量子机器学习的泛化》， *Nat. Commun.*，第13卷，第4919页，2022年。 [在线]。可访问：https://doi.org/
10 1038 41467 022 32550 3 。/s - - - N.
[95] Mishra，M. Kapil，H. Rakesh，A. Anand，N. Mishra，A. Warke，S. Sarkar，S. Dutta，S. Gupta，A. P. Dash，R. Gharat，Y. Chatterjee，S. Roy，S. Raj，V. K. Jain，S. Bagaria，S. Chaudhary，V. Singh，R. Maji，P. Dalei，B. K. Behera，S. Mukhopadhyay，and P. K. Panigrahi，《量子机器学习：综述与现状》，载于 *Data Management Analytics and Innovation* ，。新加坡：施普林格新加坡，2021年，第101页。 [在线]。可访问：https://doi.org/
10 1007 978 981 15 5619 7 8 。/ - - - - H.-Y.
[96] Huang，M. Broughton，J. Cotler，S. Chen，J. Li，M. Mohseni，H. Neven，R. Babbush，R. Kueng，J. Preskill，and J. R. McClean，《从实验中学习的量子优势》， *Science*，第376卷，第1182页，2022年。 [在线]。可访问：https://www.science.org/doi/abs/
10 1126 7293 。/science.abn V. N. Vapnik，
[97] *The Nature of Statistical Learning Theory* 1995 。施普林格纽约，纽约，。[98] S. Mensa，E. Sahin，F. Tacchino，P. K. Barkoutsos，and I. Tavernelli，《用于药物发现虚拟筛选的量子机器学习框架：展望量子优势》，arXiv:2204.04017，2022年。 [在线]。可访问：https://arxiv.org/abs/ 2204 04017 。
[99] J. L. Park，《量子力学中的跃迁概念》， *Found. Phys.*，第1卷，第23页，1970年。 [在线]。可访问：https://doi.org/
10 1007 00708652 。/BF W. K.
[100] Wootters and W. H. Zurek，《单个量子态不可克隆》， *Nature*，第299卷，第802页，1982年。
[ ] 10 1038 299802 0 在线。可访
[101] 问：https://doi.org/。/ a D. Dieks，《通过 EPR 装置进行通信》，*Phys. Lett. A*，第92卷，第271页，1982年。 [在线]。可访问：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/
0375960182900840
[102] M. Benedetti，D. Garcia-Pintos，O.
Perdomo，V. Leyton-Ortega，Y. Nam，and A. Perdomo-Ortiz，

《一种用于浅层量子电路基准测试与训练的生成建模方法》，*Npj Quantum Inf.* 5, 45, 2019 [ ]，第卷，第页。在线。可访问：https://doi.org/ 10 1038 41534 019 0157 8 。/s - - - C. Zoufal, A.

[103] Lucchi, and S. Woerner，《用于学习和加载随机分布的量子生成对抗网络》，*Npj Quantum Inf.*，第5卷，第1页，2019年。 [在线]。可访问：https://doi.org/ 10 1038 41534 019 0223 2 。/s - - - J.

[104] Tian, X. Sun, Y. Du, S. Zhao, Q. Liu, K. Zhang, W. Yi, W. Huang, C. Wang, X. Wu, M.-H. Hsieh, T. Liu, W. Yang, and D. Tao，《量子神经网络在生成式学习领域的最新进展》，arXiv:2206.03066，2022年。 [在线]。可访问：https://arxiv.org/abs/ 2206 03066 。

[105] Y. Cao, G. G. Guerreschi, and A. Aspuru-Guzik，《量子神经元：量子计算机上机器学习的基本构件》，arXiv:1711.11240，2017年。 [在线]。可访问：https://arxiv.org/abs/ 1711 11240 。

[106] A. Pesah, M. Cerezo, S. Wang, T. Volkoff, A. T. Sornborger, and P. J. Coles，《量子卷积神经网络中不存在贫瘠高原》，*Phys.*，第卷，第页。*Rev. X* 11, 041011, 2021 [ ] 在线。可访问：https://link.aps.org/doi/ 10 1103 11 041011 。/

[107] PhysRevX. . B. Albrecht, C. Dalyac, L. Leclerc, L. Ortiz-Gutierrez, S. Thabet, M. D'Arcangelo, J. R. K. Cline, V. E. Elfving, L. Lassabli`ere, H. Silv´erio, B. Ximenez, L.-P. Henry, A. Signoles, and L. Henriet，《中性原子量子处理器上的图机器学习量子特征映射》，*Phys. Rev. A*，第107卷，第042615页，2023年4月。 [在线]。可访问：https://link.aps.org/doi/ 10 1103 107 042615 。/PhysRevA. .

[108] R. Ghrist，《条形码：数据的持久拓扑》，*Bull. Amer. Math. Soc.*，第45卷，61，2008 10 1090p.。 [在线]。可访问：http://dx.doi.org/。/ S0273-0979-07-01191-3

[109] A. Cole 和 G. Shiu，《持久同调与非高斯性》，*J. Cosmol. Astropart. Phys.*，第 2018 年卷，25 页，2018年。 [在线]。可访问：https: //dx.doi.org/ 10 1088 1475 7516 2018 03 025 。 / - / / / C. Giusti、

[110] E. Pastalkova、C. Curto 和 V. Itskov，《团拓扑揭示神经相关性的内在几何结构》，*Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*，第 112 卷，13455 页，2015 年。 [在线]。可访问：https: //www.pnas.org/doi/abs/ 10 1073 1506407112 。/pnas. R.

[111] Rabadan、Y. Mohamedi、U. Rubin、T. Chu、A. N. Alghalith、O. Elliott、L. Arn´es、S. Cal、A. J. Obaya、A. J. Levine 和 P. G. C´amara，《利用拓扑数据分析识别癌症中的相关基因改变》，*Nat. Commun.*，第 11 卷，3808 页，2020年。 [在线]。可访问：https: //doi.org/ 10 1038 41467 020 17659 7 。/s - - -

[112] G. Naitzat、A. Zhitnikov 和 L.-H. Lim，《深度神经网络的拓扑》，*J. Mach. Learn. Res.*，第 21 卷，1 页，2020年。 [在线]。可访问：http: //jmlr.org/papers/v21/20-345.html

[113] S. Lloyd、S. Garnerone 和 P. Zanardi，《用于数据拓扑与几何分析的量子算法》，*Nat. Commun.*，第 7 卷，10138 页，2016 年。 [在线]。可访问：https://doi.org/ 10 1038 10138 。/ncomms S.

[114] Ubaru 和 Y. Saad，《估计大型矩阵数值秩的快速方法》，载于 *Proceedings of The 33rd International Conference on Machine Learning*，M. F. Balcan 和 K. Q. Weinberger 编，第 48 卷，2016 年，468 页。 [在线]。可访问：https://proceedings.mlr.press/v48/ubaru16.html

[115] S. Ubaru、Y. Saad 和 A.-K. Seghouane，《利用谱密度快速估计近似矩阵秩》，*Neural Comput.*，第 29 卷，1317，2017 10 1162p. . [在线]。可访问：https://doi.org/ . / NECO a 00951