arXiv:2303.02163v1 [cs.IT] 3 Mar 2023

# 带权偏序块度量码

Wen Ma JinquanLuo*

摘要：加权偏序块度量是 Panek 等人（[14]）提出的加权偏序集度量，以及 Feng 等人（[7]）为线性错误块码提出的度量的推广。这类度量包含许多经典度量，例如汉明度量、Lee度量、偏序度量、pomset 度量、偏序块度量、pomset分组度量等。本文着重研究如何从给定的码构造加权偏序块度量下的新码，并确定最小距离和覆盖半径等基本性质。

关键词：加权偏序分块度量、序理想、覆盖半径、装填半径 s

## 1 引言

设 $\mathbb{F}_q^n$ 为有限域 $\mathbb{F}_q$上的 $n$元组空间。编码理论的大部分研究都是基于由 $\mathbb{F}_q^n$上的汉明重量确定的度量展开的。自20世纪90年代以来，对赋予非汉明度量的码的研究逐渐兴起。1995年，Brualdi、Graves 和 Lawrence 引入了偏序度量，该度量由 $\mathbb{F}_q^n$ 坐标位置集合上的偏序关系定义（[2]）。偏序度量是汉明度量的一种推广，因为取平凡偏序时即可得到后者。这一研究方向成果丰硕，因为在此背景下出现了许多不同寻常的性质，例如 MDS 码和完美码的相对丰盛，令人颇感兴趣（[10], [14]）。在过去二十年里，偏序度量下的码研究在编码理论的不同领域取得了诸多进展。

Feng、Xu 和 Hickernell（[7]）通过划分 $\mathbb{F}_q^n$ 的坐标位置集合引入了分组度量，并研究了 MDS 分组码。2008 年，Alves、Panek 和 Firer 将偏序集结构与分块结构结合起来，得到了一种称为偏序块度量（[1]）的进一步推广。偏序集分组码和空间的一个特例是块维数为一的空间，这类空间由 Niederreiter 于 1991 年（[12]）以及 Rosenbloom 和 Tafasman 于 1997 年（[16]）引入。后来，Dass、Sharma 和 Verma 得到了一个

*作者就职于华中师范大学数学与统计学院及湖北省数学科学重点实验室，中国武汉。电子邮箱：mawen95@126.com（W.Ma），luojinquan@mail.ccnu.edu.cn（J.Luo）

偏序集分组码的 Singleton型界（[4]）。达到此界的码称为最大距离可分偏序集分组码。Niederreiter-Rosenbloom-Tsfasman分组度量（简称 NRT 分块度量）是偏序块度量的一个特例，此时偏序集为一条链（[14]）。

由于向量 $v$ 在 $\mathbb{F}_q^n$ 中的支撑是一个集合，它在 $\mathbb{F}_q^n$ 上诱导出序理想和度量，因此偏序集度量码无法容纳 Lee 度量结构，因为相对于 Lee 重量，向量的支撑不是集合，而是多重集。为了处理 Lee 度量，Irrinki 和 Selvaraj（[17],[18],[19]）为 $\mathbb{Z}_m$ 上的码引入了一类更一般的度量，称为 pomset 度量。在 $\mathbb{Z}_2^n$ 和 $\mathbb{Z}_3^n$ 上，pomset 度量实际上就是偏序度量。此外，当 pomset 由反链诱导时，它就是 Lee 度量。

最近，在 [13] 和 [15], 中，Panek 和 Pinheiro 提出了并研究了适用于有限域字母表的加权偏序集权重，它是偏序度量和 pomset 度量的推广。特别地，它推广了汉明度量和 Lee 度量。

在这项工作中，我们将加权偏序集度量与误差分组度量结合起来，得到一种更进一步的推广，称为加权偏序分块度量。它不仅涵盖了上述所有可加度量，还涵盖了一些分组度量，例如偏序块度量、分组度量、pomset分组度量等。

众所周知，在经典汉明度量（[9]）下，通过修改或组合已有的码，可以得到许多有趣且重要的码。将两个有序集结合起来也有几种不同的方式（[5]）。可以赋予所得码的偏序集结构将对最小距离和覆盖半径产生影响。

本文其余部分的组织如下。第 2 节给出偏序集以及 $\mathbb{F}_q^n$ 上的加权偏序分块重量的一些定义、记号和基本事实。第 3 节中，当 $P$ 为链时，我们研究（$P$，$\pi$，$w$）-码的堆积半径和覆盖半径。当 $w$ 取为汉明重量时，我们的结论将与 NRT 分组度量下的结果一致。第 4 节中，我们给出从给定的（$P$，$\pi$，$w$）-码构造新码的几种不同方式。我们引入标记映射的直和与直积的概念，以及可以赋予所得码的新偏序集分块结构。我们重点讨论其对最小距离和覆盖半径的影响。

## 2 预备知识

下文将给出本文其余部分中使用的有关偏序集的一些基本定义和记号。关于偏序集的更多细节，请参见 [5]。

设 $P$为一个集合。 $P$上的偏序关系是定义在 $P$上的二元关系 $\leq_P$，满足对于任意 $x$、$y$、$z \in P$，有 $x \leq_P x$ （自反性）， $x \leq_P y$ 且 $y \leq_P x$ 蕴含 $x = y$ （反对称性）， $x \leq_P y$ 且 $y \leq_P z$ 蕴含

$x \leq_P z$ （传递性）。赋予了序关系 $\leq_P$ 的集合 $P$ 称为偏序集。若偏序集 $P$ 中的任意两个元素都可比较，则称其为链。链的对立概念是反链，即当且仅当 $x = y$时，偏序集 $P$ 为反链，其中 $x \leq y$ 属于 $P$。若子集 $Q$ 为 $P$ 的子集，并且对于 $x \in Q$、$y \in P$和 $y \leq_P x$，都有 $y \in Q$，则称 $Q$ 为 $P$ 的一个理想。对于 $P$的子集 $E$，由 $E$生成的理想记为 $\langle E \rangle_P$，是包含 $E$的 $P$ 的最小理想。我们更倾向于将由 $\{i\}$ 生成的理想记为 $\langle i \rangle$ ，而不是$\langle \{i\} \rangle$。我们用 $\langle i \rangle^*$ 表示差集 $\langle i \rangle - \{i\} = \{j \in P : \ j < i\}$。

从任意两个给定的偏序集构造新偏序集的方法有几种。设 $P$和 $Q$ 是两个偏序集。

- 不交并： $P$和 $Q$ 的不交并记作 $P \uplus Q$ ，它是在底集 $P \cup Q$上定义序关系后形成的偏序集：

$$x \leq y \text{ in } P \cup Q \Leftrightarrow (x, y \in P \text{ and } x \leq_P y) \text{ or } (x, y \in Q \text{ and } x \leq_Q y).$$

- 线性和： $P$和 $Q$ 的线性和记作 $P \oplus Q$ ，它也是一个偏序集，其序关系按以下方式定义在 $P \cup Q$ 上：

$$x \leq y \text{ in } P \cup Q \Leftrightarrow (x, y \in P \text{ and } x \leq_P y) \text{ or } (x, y \in Q \text{ and } x \leq_Q y) \text{ or } (x \in P \text{ and } y \in Q)。$$

- 笛卡尔积：记 $P \times Q = \{(i, j) : \ i \in P, j \in Q\}$。在底集 $P \times Q$ 上定义序关系 $\leq$如下：

$$(x, y) \leq (x', y') \text{ in } P \times Q \Leftrightarrow x \leq_P x' \text{ and } y \leq_Q y'.$$

那么， $P \times Q$ 是一个具有上述序关系的偏序集，称为 $P$和 $Q$的笛卡尔积，记作 $P \otimes Q$。

- 字典序积：以另一种方式在底层集合 $P \times Q$ 上重新定义序关系 $\leq$ ：

$$(x, y) \leq (x', y') \text{ in } P \times Q \Leftrightarrow (x <_P x') \text{ or } (x = x' \text{ and } y \leq y').$$

于是， $P \times Q$ 在此序关系下构成一个偏序集，称为 $P$ 和 $Q$的字典序积，记作 $P \star Q$。

接下来，我们介绍两种从旧偏序集构造新偏序集的方法。设 $P$ 是一个偏序集。

• 删点：删除元素 $z \in P$，即可从 $P$ 得到一个新的偏序集 $P^-$，其序关系定义如下：

$$x \leq y \in P^- \Leftrightarrow x \leq y \in P.$$

• 扩展：通过在 $P$ 中添加一个元素 $z$，我们得到一个新的偏序集 $P^+$，其序关系定义如下：

$$x \leq y \in P^+ \Leftrightarrow (x \leq y \text{ in } P) \text{ or } (x = y = z).$$

注 2.1. 根据删余偏序集和扩展偏序集的定义，我们得到如下结论。

(1) 当偏序集 $P$ 是链（反链）时，$P^-$ 是链（反链）。

(2) 偏序集 $P^+$ 永远不可能是链。

权重和度量的定义可以推广到一般环上。特别地，我们将其限制在有限域上，因为在编码理论领域中，有限域是研究最为广泛的主题。

设 $\mathbb{F}_q$ 为阶为 $q$ 的有限域，$\mathbb{F}_q^n$ 为 $\mathbb{F}_q$ 上的 $n$ 维向量空间。

定义 1. 映射 $d: \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{F}_q^n$ 上的一个度量，当它满足以下条件时：

(1)（非负性）对所有 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{F}_q^n$，$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq 0$，且 $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$；
(2)（对称性）对所有 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{F}_q^n$，$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$；(3)（三角不等式）对所有 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{F}_q^n$，$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leq d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + d(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$。

定义 2. 映射 $w: \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{F}_q^n$ 上的一个权重，当它满足以下条件时：

(1) 对所有 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{F}_q^n$，$w(\boldsymbol{u}) \geq 0$，且 $w(\boldsymbol{u}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$；(2) 对所有 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{F}_q^n$，$w(\boldsymbol{u}) = w(-\boldsymbol{u})$；(3) $w(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \leq w(\boldsymbol{u}) + w(\boldsymbol{v})$。

不难证明，若 $w$ 是 $\mathbb{F}_q^n$ 上的权重，则由 $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = w(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$ 定义的映射 $d_w$ 是 $\mathbb{F}_q^n$ 上的度量。有关权重和度量的详细讨论，请参见 [6] 和 [8]。

设 $\pi: [s] \to \mathbb{N}$ 是一个映射，使得 $n = \sum_{i=1}^{s} \pi(i)$。称映射 $\pi$ 为偏序集 $P$ 的标记，并称有序对 $(P, \pi)$ 为偏序集上的分块结构。记 $\pi(i)$ 为 $k_i$。对于所有 $1 \leq i \leq s$，取 $V_i$ 作为 $\mathbb{F}_q$-向量空间 $\mathbb{F}_q^{k_i}$。定义 $V$ 为直和

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

它与 $\mathbb{F}_q^n$ 同构。每个 $\boldsymbol{u} \in V$ 都可以唯一分解为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} + \cdots + \boldsymbol{u_s}$$

其中，对于 $1 \le i \le s$，$\boldsymbol{u_i} = (u_{i_1}, \ldots, u_{ik_i}) \in V_i$。

设 $w$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的权重，且 $P$ 是一个偏序集。给定 $\boldsymbol{u} \in V$，定义

(1) $W_i^P(\boldsymbol{u})$ = 最大值 $\{w(u_{ij})\colon\ 1 \le j \le k_i\}$ 对于 $1 \le i \le s$;

(2) $M_w$ = 最大值 $\{w(\alpha)\colon\ \alpha \in \mathbb{F}_q\}$;

(3) $m_w = \min\{w(\alpha)\colon\ 0 \ne \alpha \in \mathbb{F}_q\}$。

$\boldsymbol{u} \in V$ 的块支撑或 $\pi$-支撑是集合

$$supp_\pi^P(\boldsymbol{u}) = \{i \in [s] : \boldsymbol{u_i} \ne \boldsymbol{0}\}.$$

我们用 $I_{\boldsymbol{u}}^P$表示由 $supp_\pi^P(\boldsymbol{u})$ 生成的理想，并用 $M_{\boldsymbol{u}}^P$表示理想 $I_{\boldsymbol{u}}^P$ 中极大元的集合。 $\boldsymbol{u}$ 的 $(P, \pi, w)$-权重定义为

$$\overline{w}_{w,(P,\pi)}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i \in M_{\boldsymbol{u}}^P} W_i(\boldsymbol{u}) + \sum_{i \in I_{\boldsymbol{u}}^P \setminus M_{\boldsymbol{u}}^P} M_w.$$

对于 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$，定义它们的 $(P, \pi, w)$-距离为

$$d_{w,(P,\pi)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}).$$

$(P, \pi, w)$-权重 $\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}$ 以及 $(P, \pi, w)$-距离 $d_{w,\ (P,\pi)}$ 也分别称为加权偏序分块重量和加权偏序块距离。

二元组 $\left(V, d_{w,\ (P,\pi)}\right)$ 称为加权偏序块空间。定义在 $\mathbb{F}_q$ 上、长度为 $n$ 的 $(P, \pi, w)$-码 $C$ 是 $\left(\left(V, d_{w,\ (P,\pi)}\right)\right.$的一个子集。线性 $(P, \pi, w)$-码是 $V$ 的一个子空间。码 $C$ 的最小 $(P, \pi, w)$-距离为

$$d_{w,(P,\pi)}(C) = \min\left\{d_{w,(P,\pi)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) : \boldsymbol{u} \ne \boldsymbol{v} \in C\right\}$$

是 $C$ 的最小（$P$、 $\pi$、 $w$）-距离。当权重 $w$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上被视为汉明重量 $w_H$时，我们用 $d_{(P,\pi)}(C) = d_{w_H,\ (P,\ \pi)}(C)$ 表示它。线性（$P$、 $\pi$、 $w$）-码是 $V$ 的子空间。

注 2.2. 值得注意的是，这种度量结合并推广了编码理论中的若干经典度量。例如，

(1) 当 $w$ 上的 $\mathbb{F}_q$ 权重为汉明重量时，$(P,\pi,w)$-权重便化为 Alves 等人引入的偏序集分块重量（见 *[1]*）。

(2) 类似地，Panek 引入的 Niederreiter-Rosenbloom-Tafasman 分块重量（NRT 分块重量）（见 *[14]*），当 $P$ 取为一条链且 $w$ 取为汉明重量时，便成为 $(P,\pi,w)$-重量的一个特例。(3) 当标记 $\pi$ 对所有 $i\in[s]$ 都满足 $\pi(i)=1$ 时，$(P,\pi,w)$-重量便化为 Panek 等人引入的加权偏序集权重（见 *[13]* 和 *[15]*）。(4) 当两个条件同时成立时（对所有 $i\in[s]$，$\pi(i)=1$，$w$ 为汉明重量且 $P$ 为反链序），$(P,\pi,w)$-重量便化为通常的汉明重量。

(5) 当两个条件同时成立时（对所有 $i\in[s]$，$\pi(i)=1$，$w$ 为 Lee 重量且 $P$ 为反链序），$(P,\pi,w)$-重量便化为通常的 Lee 重量。

## 3 堆积半径和覆盖半径

本节将汉明度量下定义的半径概念（见 [9]）推广到加权偏序分块度量的情形。我们始终假设 $w$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个权重，$P=([s],\leq)$ 是一个偏序集，$s\pi\colon[s]\to\mathbb{N}$ 是偏序集 $P$ 的一个标记，且 $V=\bigoplus_{i=1}^{}\mathbb{F}_q^{k_i}$ 与 $\mathbb{F}_q^n$ 同构。

定义 3. 设 $w$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个权重。对于 $u\in V$，以 $u$ 为中心、半径为 $r$ 的 $(P,\pi,w)$-球是集合

$$B_{w,(P,\pi)}(u,r)=\{v\in V:d_{w,(P,\pi)}(u,v)\leq r\}.$$

当考虑 $\mathbb{F}_q$ 上的权重 $w$ 为汉明重量时，我们用 $B_{(P,\pi)}(u,r)$ 表示以 $u$ 为中心、半径为 $r$ 的 $(P,\pi,w)$-球。

定义 4. 设 $C$ 是一个 $(P,\pi,w)$-码。覆盖半径 $\tilde{\rho}(C)$ 是满足以下条件的最小整数 $l$：$V$ 是以 $C$ 的码字为中心、半径为 $l$ 的球的并集，即:

$$\tilde{\rho}(C)=\max_{\boldsymbol{v}\in V}\min_{\boldsymbol{u}\in C}d_{w,(P,\pi)}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).$$

定义 5. 设 $C$ 是一个线性 $(P,\pi,w)$-码，且 $\boldsymbol{v}\in V$。由 $\boldsymbol{v}$ 确定的 $C$ 的陪集定义为 $\boldsymbol{v}+C=\{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}:\boldsymbol{u}\in C\}$。陪集的权重是陪集中所有向量的最小权重，而陪集中具有最小权重的任意向量称为陪集首。

注 3.1. 对于线性 $(P,\pi,w)$-码 $C$，有 $\tilde{\rho}(C)$ 是具有最大权重的陪集的权重。

定义 6. 若码 $C$的 $(P,\pi,w)$-球（半径为 $r$，中心位于 $C$ 的码字处）两两不相交，且它们的并集为 $V$，则称码 $C$为 $r$-完美 $(P,\pi,w)$-码。

定义 7. 码 $C$ 的堆积半径 $\rho(C)$ 是以码字为中心的球两两不相交时所能取的最大半径。若码 $C$ 是 $\rho(C)$-完美的，则称其为完美码。

在本节余下部分中，我们始终假设 $P$ 是链。不失一般性，可假设 $P$的序关系为 $1 < \cdots < s$。

引理 3.1. 设 $w$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的权重，且 $r = s + iM_w$ 满足 $s \in [M_w]$ 和 $i \geq 0$ 为整数。则 $B_{w,\ (P,\pi)}(\mathbf{0}, r) \subseteq B_{(P,\pi)}(\mathbf{0}, i+1)$，且等号成立当且仅当 $s = M_w$。

证明。令 $\boldsymbol{u} \in B_{w,(P,\pi)}(\mathbf{0}, r)$。则 $\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\boldsymbol{u}) \leq r = s + iM_w \leq (i+1)M_w$。因此 $\boldsymbol{u_j} = \mathbf{0}$ 对于$j \geq i+2$，故 $\boldsymbol{u} \in B_{(P,\pi)}(\mathbf{0}, i+1)$。

假设 $B_{w,(P,\pi)}(\mathbf{0}, r) = B_{(P,\pi)}(\mathbf{0}, i+1)$。取 $\boldsymbol{u} \in B_{(P,\pi)}(\mathbf{0}, i+1)$，使得 $u_{i+1,1} = \alpha$，其中$\alpha \in \mathbb{F}_q$ 满足 $w(\alpha) = M_w$。则 $\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\boldsymbol{u}) = M_w + iM_w$。因此 $s = M_w$。

反过来，假设 $s = M_w$。对于 $\boldsymbol{u} \in B_{(P,\pi)}(\mathbf{0}, i+1)$，我们有 $\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\boldsymbol{u}) \leq (i+1)M_w = r$。因此 $\boldsymbol{u} \in B_{w,(P,\pi)}(\mathbf{0}, r)$，故 $B_{(P,\pi)}(\mathbf{0}, i+1) \subseteq B_{w,(P,\pi)}(\mathbf{0}, r)$。 □

当 $w$ 取为 $\mathbb{F}_q$ 上的汉明重量时，$(P,\pi,w)$-权重可化为 NRT 分块重量。已知线性 $(n, K)$ 码 $C$ 在 NRT 分块度量下的堆积半径为

$$\rho(C) = d_{(P,\pi)}(C) - 1$$

（见 [14], 定理 5）。

根据引理 3.1，我们立即得到以下结果。

定理 1. 线性 $(P,\pi,w)$-码 $C$的堆积半径满足

$$\rho(C) \geq \left(d_{(P,\pi)}(C) - 1\right) M_w.$$

进一步地，$\rho(C) = \left(d_{(P,\pi)}(C) - 1\right) M_w$ 当且仅当 $d_{w,(P,\pi)}(C) = m_w + \left(d_{(P,\pi)}(C) - 1\right) M_w$。此外

设 $C$ 是一个 $(P,\pi,w)$-码，记 $C_i = \{\boldsymbol{u_i} : \boldsymbol{u} \in C\}$，其中 $i \in [s]$。

定理 2. 设 $C$ 是一个线性 $(P,\pi,w)$-码。令

$$r=\begin{cases} s & \text{if } C_s \neq \mathbb{F}_q^{k_s}; \\ \min\left\{l:(C_{l+1},\ldots,C_s)=\mathbb{F}_q^{k_{l+1}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}_q^{k_s}\right\} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

*Then*

$$(r-1)M_w<\tilde{\rho}(C)\leq rM_w.$$

证明。假设 $C_s\neq\mathbb{F}_q^{k_s}$。则存在 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{F}_q^n$ 使得 $\boldsymbol{v_s}\in\mathbb{F}_q^{k_s}\backslash C_s$。于是，对任意 $\boldsymbol{u}\in C$，都有 $(s-1)M_w+m_w\leq d_{w,\ (P,\pi)}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$，这意味着 $(s-1)M_w<\tilde{\rho}(C)\leq sM_w$。

假设 $r=\min\left\{l:(C_{l+1},\ldots,C_s)=\mathbb{F}_q^{k_{l+1}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}_q^{k_s}\right\}$。取 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{F}_q^n$ 使得 $\boldsymbol{v_r}\in\mathbb{F}_q^{k_r}\setminus C_r$，则 $d_{w,\ (P,\pi)}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\geq(r-1)M_w+m_w$，这意味着 $\tilde{\rho}(C)\geq(r-1)M_w+m_w$.。另一方面，对任意 $\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_r},\boldsymbol{v_{r+1}},\ldots,\boldsymbol{v_s})\in\mathbb{F}_q^n$，存在 $\boldsymbol{u}\in C$ 使得 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u_1},\ldots,\boldsymbol{u_r},\boldsymbol{v_{r+1}},\ldots,\boldsymbol{v_s})$。因此

$$d_{w,(P,\pi)}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\boldsymbol{u_1}-\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{u_l}-\boldsymbol{v_l},\boldsymbol{0},\ldots,\boldsymbol{0})\leq rM_w.$$

□

# 4 码构造

在本节中，我们给出几种从给定的构造新的 $(P,\pi,w)$-码的不同方法。

## 4.1 构造 1

设 $P,Q$ 为两个偏序集，且 $w$ 为 $\mathbb{F}_q$上的一个权重。设 $\pi_1\colon[s]\to\mathbb{N}$，使得 $n_1=\sum_{i=1}^{t}\pi_1(i)$ 是 $P$的一个标记，并设 $\pi_2\colon[t]\to\mathbb{N}$，使得 $\sum_{i=1}^{}\pi_2(i)=n_2$ 是 $Q$的一个标记。设 $C_1\subseteq\left(\mathbb{F}_q^{n_1},d_{w,\ (P,\pi_1)}\right)$ 为一个 $(P,\pi,w)$-码，且 $C_2\subseteq\left(\mathbb{F}_q^{n_2},d_{w,\ (Q,\pi_2)}\right)$ 为一个 $(Q,\pi_2,w)$-码。$C_1$ 与 $C_2$ 的直和定义为

$$\mathcal{C}=C_1\oplus C_2=\{(\boldsymbol{u'},\boldsymbol{u''}):\boldsymbol{u'}\in C_1,\ \boldsymbol{u''}\in C_2\}.$$

将标记映射 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 的直和定义为 $\pi=\pi_1\oplus\pi_2\colon[s+t]\to\mathbb{N}$，使得

$$\pi(i)=\begin{cases}\pi_1(i) & \text{if } i\leq s;\\ \pi_2(i-s) & \text{if } i>s.\end{cases}$$

假设 $\mathcal{L}=P\uplus Q$（或 $\mathcal{L}=P\oplus Q$）。对于 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u'},\boldsymbol{u''})\in\mathcal{C}$，其中 $\boldsymbol{u'}\in C_1$ 和 $\boldsymbol{u''}\in C_2$，定义

$$W_i^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u})=\begin{cases}W_i^P(\boldsymbol{u'}) & \text{if } i\leq s;\\ W_{i-s}^Q(\boldsymbol{u''}) & \text{if } i>s.\end{cases}$$

使用以上引入的记号，我们得到以下结果。

命题 4.1. (1) 码 $\mathcal{C} \subseteq \left(\mathbb{F}_q^{n_1+n_2}, d_{w,\ (P\uplus Q,\pi_1\oplus\pi_2)}\right)$ 是一个 $(P \uplus Q, \pi_1 \oplus \pi_2, w)$-码，满足

$$d_{w,(P\uplus Q,\pi_1\oplus\pi_2)}(\mathcal{C}) = \min\left\{d_{w,(P,\pi_1)}(C_1), d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2)\right\}.$$

(2) 码 $\mathcal{C} \subseteq \left(\mathbb{F}_q^{n_1+n_2}, d_{w,\ (P\oplus Q,\pi_1\oplus\pi_2)}\right)$ 是一个 $(P \oplus Q, \pi_1 \oplus \pi_2, w)$-码，使得

$$d_{w,(P\oplus Q,\pi_1\oplus\pi_2)}(\mathcal{C}) = d_{w,(P,\pi_1)}(C_1).$$

证明。取 $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u'}, \boldsymbol{u''})$ 和 $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v'}, \boldsymbol{v''})$，其中 $\boldsymbol{u'}, \boldsymbol{v'} \in C_1$ 和 $\boldsymbol{u''}, \boldsymbol{v''} \in C_2$ 分别成立。根据加权偏序分块重量的定义可得

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \sum_{i\in M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}} W_i^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) + \sum_{i\in I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}\backslash M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}} M_w.$$

考虑偏序集 $\mathcal{L} = P \uplus Q$ 下的加权偏序分块度量，我们有 $I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}} = I^P_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}} \cup I^Q_{\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v''}}$ 和 $M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}} = M^P_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}} \cup M^Q_{\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v''}}$。因此

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) &= \sum_{i\in I^P_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}}} W_i^P(\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}) + \sum_{i\in I^P_{\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v''}}} W_i^Q(\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v''}) \\
&\quad + \sum_{i\in I^P_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}}\backslash M^P_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}}} M_w + \sum_{i\in I^Q_{\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v''}}\backslash M^Q_{\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v''}}} M_w \\
&= \overline{\omega}_{w,(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}) + \overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v''}).
\end{aligned}$$

若 $\mathcal{L} = P \oplus Q$，则

| | $\boldsymbol{u''} \neq \boldsymbol{v''}$ | $\boldsymbol{u''} = \boldsymbol{v''}$ |
|---|---|---|
| $I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}$ | $P \cup I^Q_{\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v''}}$ | $I^P_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}}$ |
| $M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}$ | $M^Q_{\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v''}}$ | $M^P_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}}$. |

因此

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \begin{cases} sM_w + \overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v''}) & \text{if } \boldsymbol{u''} \neq \boldsymbol{v''}; \\ \overline{\omega}_{w,(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}) & \text{if } \boldsymbol{u''} = \boldsymbol{v''}. \end{cases}$$

结果随即得证。 □

引理 4.1. 设 $C_1$ 是一个线性 $(P, \pi_1, w)$-码，$C_2$ 是一个线性 $(Q, \pi_2, w)$-码。设 $\boldsymbol{u'}$、$\boldsymbol{u''}$ 分别是 $C_1$、$C_2$ 的陪集首。则

(1) $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u'}, \boldsymbol{u''}) \in \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{L} = P \uplus Q$ 时是 $\mathcal{C}$ 的陪集首。(

2) $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u'}, \boldsymbol{u''}) \in \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{L} = P \oplus Q$ 时是 $\mathcal{C}$ 的陪集首。

证明。设 $\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{u'}+\boldsymbol{x'},\boldsymbol{u''}+\boldsymbol{x''}) \in \boldsymbol{u}+\mathcal{C}$，其中 $(\boldsymbol{x'},\boldsymbol{x''}) \in \mathcal{C}$。

若 $\mathcal{L}=P \uplus Q$，则

$$\overline{\omega}_{w,\ (\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{v})=\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi_1)}(\boldsymbol{u'}+\boldsymbol{x'})+\overline{\omega}_{w,\ (Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u''}+\boldsymbol{x''}) \geq \overline{\omega}_{w,\ (P,\pi_1)}(\boldsymbol{u'})+\overline{\omega}_{w,\ (Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u''})=\overline{\omega}_{w,\ (\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u})$$

这意味着 $\boldsymbol{u}$ 是 $\boldsymbol{u}+\mathcal{C}$ 的陪集首。

若 $\mathcal{L}=P \oplus Q$，则有

| | $\boldsymbol{u''}+\boldsymbol{x''} \neq \boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{u''}+\boldsymbol{x''}=\boldsymbol{0}$ |
|---|---|---|
| $I_{\boldsymbol{v}}^{\mathcal{L}}$ | $P \cup I_{\boldsymbol{u''}+\boldsymbol{x''}}^{Q}$ | $I_{\boldsymbol{u'}+\boldsymbol{x'}}^{P}$ |
| $M_{\boldsymbol{v}}^{\mathcal{L}}$ | $M_{\boldsymbol{u''}+\boldsymbol{x''}}^{Q}$ | $M_{\boldsymbol{u'}+\boldsymbol{x'}}^{P}$. |

因此

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{v})=\begin{cases} sM_w+\overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u''}+\boldsymbol{x''}) \geq sM_w+\overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u''})=\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}) & \text{if } \boldsymbol{u}^{''}+\boldsymbol{v}^{''} \neq \boldsymbol{0}; \\ \overline{\omega}_{w,(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}) \geq \overline{\omega}_{w,(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u'}) & \text{if } \boldsymbol{u''}+\boldsymbol{x''}=\boldsymbol{0}. \end{cases}$$

注意，$\boldsymbol{u''}+\boldsymbol{x''}=\boldsymbol{0}$ 意味着 $\boldsymbol{u''}=-\boldsymbol{x''} \in C_2$，因此 $\boldsymbol{u''}=\boldsymbol{0}$。所以

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{v}) \geq \overline{\omega}_{w,(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u'})=\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}).$$

于是结论成立。 □

定理3. 设 $C_1$ 是一个线性$(P,\pi_1,w)$-码，$C_2$ 是一个线性$(Q,\pi_2,w)$-码。那么

(1) 当 $\mathcal{L}=P \uplus Q$ 时，$\tilde{\rho}(\mathcal{C})=\tilde{\rho}(C_1)+\tilde{\rho}(C_2)$。
(2) 当 $\mathcal{L}=P \oplus Q$ 时，$\tilde{\rho}(\mathcal{C})=sM_w+\tilde{\rho}(C_2)$。

证明. 设 $\mathcal{L}=P \oplus Q$。我们首先证明 $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \geq sMw+\tilde{\rho}(C_2)$。设 $\boldsymbol{u'}$ 是 $C_1$ 的一个陪集首，满足$\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi_1)}(\boldsymbol{u'})=\tilde{\rho}(C_1)$；再设 $\boldsymbol{u''}$ 是 $C_2$ 的一个陪集首，满足 $\overline{\omega}_{w,\ (Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u''})=\tilde{\rho}(C_2)$。由引理 4.1可知，$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u'},\boldsymbol{u''})$ 是 $\mathcal{C}$的一个陪集首。因此，对任意 $\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$，有

$$d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{c})=\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{c}) \geq \overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u})=sM_w+\tilde{\rho}(C_2)$$

这意味着 $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \geq sM_w+\tilde{\rho}(C_2)$。

反之，设 $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{z'},\boldsymbol{z''}) \in \mathbb{F}_q^{n_1+n_2}$。那么 $\boldsymbol{z'}=\boldsymbol{u'}+\boldsymbol{x'} \in \boldsymbol{u'}+C_1$，其中 $\boldsymbol{u'}$ 是$C_1$ 的陪集首；并且 $\boldsymbol{z''}=\boldsymbol{u''}+\boldsymbol{x''} \in \boldsymbol{u''}+C_2$，其中 $\boldsymbol{u''}$ 是 $C_2$的陪集首。记作 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u'},\boldsymbol{u''})$。取 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x'},\boldsymbol{x''}) \in \mathcal{C}$，我们有

$$d_{w,\ (\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})=\overline{\omega}_{w,\ (\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})=\overline{\omega}_{w,\ (\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})=\overline{\omega}_{w,\ (\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u})=sM_w+\overline{\omega}_{w,\ (Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u''}) \leq sM_w+\tilde{\rho}(C_2)。$$

因此，对于任意 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{F}_q^{n_1+n_2}$，$\min\limits_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}} d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}) \leq sM_w+\tilde{\rho}(C_2)$，从而 $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \leq sM_w+\tilde{\rho}(C_2)$。

$\mathcal{L}=P \uplus Q$ 的情形可以用相同的方法证明。 □

构造 2

设 $C_1 \subseteq \left(\mathbb{F}_q^n, d_{w,\ (P,\pi_1)}\right)$ 是一个（$P, \pi_1, w$）-码，且 $C_2 \subseteq \left(\mathbb{F}_q^n, d_{w,\ (Q,\pi_2)}\right)$ 是一个（$Q, \pi_2, w$）-码，其中$s \quad tn = \sum \pi_1(i) = \sum \pi_2(i)$。令 $\pi$ 为标记 $\pi_1$ 和 $\pi_2$的直和。令 $\mathcal{L} = P \uplus Q$（或 $\mathcal{L} = P \oplus Q$）。$i=1 \quad i=1$（$\boldsymbol{u'} \mid \boldsymbol{u'} + \boldsymbol{u''}$）构造得到（$\mathcal{L}, \pi, w$）-码

$$\mathcal{C} = \{(\boldsymbol{u'}, \boldsymbol{u'} + \boldsymbol{u''}) : \boldsymbol{u'} \in C_1, \boldsymbol{u''} \in C_2\}.$$

使用上述引入的记号，我们有以下结果。

命题 4.2。（1）码 $\mathcal{C} \subseteq \left(\mathbb{F}_q^{2n}, d_{w,\ (P \uplus Q,\pi)}\right)$ 是一个（$P \uplus Q, \pi, w$）-码，满足

$$d_{w,(P \uplus Q,\pi)}(\mathcal{C}) \geq \min\left\{d_{w,(P,\pi_1)}(C_1), d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2)\right\}$$

*or*

$$d_{w,(P \uplus Q,\pi)}(\mathcal{C}) \geq \min\left\{d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2), d_{w,(P,\pi_1)}(C_1) + d_{w,(Q,\pi_2)}(C_1), d_{w,(P,\pi_1)}(C_1) + d_{w,(Q,\pi_2)}(C_1 + C_2)\right\}.$$

（2）码 $\mathcal{C} \subseteq \left(\mathbb{F}_q^{2n}, d_{w,\ (P \oplus Q,\pi)}\right)$ 是一个（$P \oplus Q, \pi, w$）-码，满足

$$d_{w,(P \oplus Q,\pi)}(\mathcal{C}) \geq d_{(w,(P,\pi_1)}(C_1)$$

*or*

$$d_{w,(P \oplus Q,\pi)}(\mathcal{C}) = \min\left\{d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2), d_{w,(Q,\pi_2)}(C_1), d_{w,(Q,\pi_2)}(C_1 + C_2)\right\} + sM_w$$

（其中 $C_1 + C_2 = \{\boldsymbol{u'} + \boldsymbol{u''} : \ \boldsymbol{u'} \in C_1, \boldsymbol{u''} \in C_2\}$）。

证明。 设 $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u'}, \boldsymbol{u'} + \boldsymbol{u''})$ 和 $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v'}, \boldsymbol{v'} + \boldsymbol{v''})$，其中 $\boldsymbol{u'}, \boldsymbol{v'} \in C_1$ 和 $\boldsymbol{u''}, \boldsymbol{v''} \in C_2$。则

$$d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \sum_{i \in M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}} W_i(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) + M_w \left| I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}} \setminus M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}} \right|.$$

若 $\mathcal{L} = P \uplus Q$，则

| | $\boldsymbol{u'} = \boldsymbol{v'}$ | $\boldsymbol{u''} = \boldsymbol{v''}$ | $\boldsymbol{u'} + \boldsymbol{u''} = \boldsymbol{v'} + \boldsymbol{v''}$ | $\boldsymbol{u'} + \boldsymbol{u''} \neq \boldsymbol{v'} + \boldsymbol{v''}$ |
|---|---|---|---|---|
| $I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}$ | $I^{Q}_{\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{u''}}$ | $I^{P}_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}} \cup I^{Q}_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}}$ | $I^{P}_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}}$ | $I^{P}_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}} \cup I^{Q}_{\boldsymbol{u'}+\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v'}-\boldsymbol{v''}}$ |
| $M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}$ | $M^{Q}_{\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v''}}$ | $M^{P}_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}} \cup M^{Q}_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}}$ | $M^{P}_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}}$ | $M^{P}_{\boldsymbol{u'}-\boldsymbol{v'}} \cup M^{Q}_{\boldsymbol{u'}+\boldsymbol{u''}-\boldsymbol{v'}-\boldsymbol{v''}}$. |

因此

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \begin{cases} \overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u''} - \boldsymbol{v''}) & \text{if } \boldsymbol{u'} = \boldsymbol{v'}; \\ \overline{\omega}_{w,(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u'} - \boldsymbol{v'}) + \overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u'} - \boldsymbol{v'}) & \text{if } \boldsymbol{u''} = \boldsymbol{v''}; \\ \overline{\omega}_{w,(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u'} - \boldsymbol{v'}) & \text{if } \boldsymbol{u'} + \boldsymbol{u''} = \boldsymbol{v'} + \boldsymbol{v''}; \\ \overline{\omega}_{w,(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u'} - \boldsymbol{v'}) + \overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u'} + \boldsymbol{u''} - \boldsymbol{v'} - \boldsymbol{v''}) & \text{if } \boldsymbol{u'} + \boldsymbol{u''} \neq \boldsymbol{v'} + \boldsymbol{v''}. \end{cases}$$

因此

$$d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) \geq \min\left\{d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2), d_{w,(P,\pi_1)}(C_1) + d_{w,(Q,\pi_2)}(C_1), d_{w,(P,\pi_1)}(C_1) + d_{w,(Q,\pi_2)}(C_1 + C_2)\right\}$$

如果不存在满足 $\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''$ 的 $\boldsymbol{u}'$、$\boldsymbol{v}' \in C_1$ 和 $\boldsymbol{u}''$、$\boldsymbol{v}'' \in C_2$。否则，我们有

$$d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) \geq \min\left\{d_{w,(P,\pi_1)}(C_1), d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2)\right\}.$$

如果 $\mathcal{L} = P \oplus Q$，那么

| | $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{v}'$ | $\boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{v}''$ | $\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''$ | $\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'' \neq \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''$ |
|---|---|---|---|---|
| $I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}$ | $P \cup I^{Q}_{\boldsymbol{u}''-\boldsymbol{u}''}$ | $P \cup I^{Q}_{\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{v}'}$ | $I^{P}_{\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{v}'}$ | $P \cup I^{Q}_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''-\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}''}$ |
| $M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}$ | $M^{Q}_{\boldsymbol{u}''-\boldsymbol{v}''}$ | $M^{Q}_{\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{v}'}$ | $M^{P}_{\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{v}'}$ | $M^{Q}_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''-\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}''}$. |

因此

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \begin{cases} \overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u}''-\boldsymbol{v}'') + sM_w & \text{if } \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{v}'; \\ \overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{v}') + sM_w & \text{if } \boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{v}''; \\ \overline{\omega}_{w,(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{v}') & \text{if } \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''; \\ \overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''-\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}'') + sM_w & \text{if } \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'' \neq \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''. \end{cases}$$

由此

$$d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) = \min\left\{d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2), d_{w,(Q,\pi_2)}(C_1), d_{w,(Q,\pi_2)}(C_1 + C_2)\right\} + sM_w$$

如果不存在满足 $\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''$ 的 $\boldsymbol{u}'$、$\boldsymbol{v}' \in C_1$ 和 $\boldsymbol{u}''$、$\boldsymbol{v}'' \in C_2$。 □

定理 4. 设 $C_1$ 是一个线性 $(P, \pi_1, w)$-码，$C_2$ 是一个线性 $(Q, \pi_2, w)$-码。那么

(1) 码 $\mathcal{C}$ 是线性 $(P \uplus Q, \pi, w)$-码，满足 $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \leq \tilde{\rho}(C_1) + \tilde{\rho}(C_2)$。(2) 码 $\mathcal{C}$ 是线性 $(P \oplus Q, \pi, w)$-码，满足 $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \leq \tilde{\rho}(C_2) + sM_w$。

证明。令 $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'') \in \mathbb{F}_q^{2n}$，其中 $\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'' \in \mathbb{F}_q^n$。则 $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{a}'$ 和 $\boldsymbol{v}'' = \boldsymbol{\beta}' + \boldsymbol{b}'$，其中 $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}' \in C_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}'$ 是 $C_1$ 中相应陪集的两个陪集首。于是

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'') = (\boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{\beta}' + \boldsymbol{b}') = (\boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{\beta}' + \boldsymbol{a}' + (\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{a}')).$$

假设 $\boldsymbol{\beta}' + (\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{a}') = \boldsymbol{\gamma}'' + \boldsymbol{c}''$ 其中 $\boldsymbol{c}'' \in C_2$ 且 $\boldsymbol{\gamma}''$ 是 $C_2$ 中相应陪集的陪集首。那么

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{\gamma}'' + \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{c}'') = (\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\gamma}'') + (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{c}'').$$

记 $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'+\boldsymbol{c}'') \in \mathcal{C}$ 和 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\gamma}'')$，我们有

$$d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{c})=\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{c})=\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}).$$

若 $\mathcal{L}=P \uplus Q$，则

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u})=\overline{\omega}_{w,(P,\pi_1)}\left(\boldsymbol{\alpha}'\right)+\overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}\left(\boldsymbol{\gamma}''\right) \leq \tilde{\rho}(C_1)+\tilde{\rho}(C_2).$$

若 $\mathcal{L}=P \oplus Q$，则

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u})=\overline{\omega}_{w,(P,\pi_1)}\left(\boldsymbol{\alpha}'\right)+\overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}\left(\boldsymbol{\gamma}''\right) \leq sM_w+\tilde{\rho}(C_2).$$

由此可得该结果。 □

## 4.3 构造 3

设 $\mathcal{L}$ 是一个底集为 $[s]$ 的偏序集，且 $\pi$ 是偏序集 $\mathcal{L}$ 的标记映射，满足 $\sum_{i=1}^{s}\pi(i)=n$。设 $\mathcal{C} \subseteq \left(\mathbb{F}_q^n, d_{w,(\mathcal{L},\pi)}\right)$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 $(\mathcal{L}, \pi, w)$-码。

$\mathcal{C}$ 的扩展码 $\widehat{\mathcal{C}}$ 定义如下：

$$\widehat{\mathcal{C}}=\left\{(\boldsymbol{u}, u_{s+1}) : \boldsymbol{u} \in \mathcal{C},\ u_{s+1} \in \mathbb{F}_q \text{ with } u_{11}+\cdots+u_{1\pi(1)}+\cdots+u_{s1}+\cdots+u_{s\pi(s)}+u_{s+1}=0\right\}.$$

考虑通过在 $\mathcal{L}$ 中添加一个元素 $s+1$ 来扩展偏序集 $\mathcal{L}^+$，以及偏序集 $\mathcal{L}^+$ 的标记映射 $\pi^+$：$[t] \to \mathbb{N}$，使得对于 $i \leq s$，$\pi^+(i)=\pi(i)$，且 $\pi^+(s+1)=1$。定义

$$W_i^{\mathcal{L}^+}\left(\boldsymbol{u}^+\right)=\begin{cases} W_i^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u}) & \text{if } i \leq s; \\ w(u_{s+1}) & \text{if } i=s+1. \end{cases}$$

以下结果可通过常规方法证明。

注 4.1. 扩展码 $\widehat{\mathcal{C}} \subseteq \left(\mathbb{F}_q^{n+1}, d_{w,(\mathcal{L}^+,\pi^+)}\right)$ 是一个满足以下条件的 $(\mathcal{L}^+, \pi^+, w)$-码：

$$d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) \leq d_{w,(\mathcal{L}^+,\pi^+)}(\widehat{\mathcal{C}}) \leq d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C})+M_w.$$

定理 5. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个线性 $(\mathcal{L}, \pi, w)$-码。$(\mathcal{L}^+, \pi^+, w)$-码 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的覆盖半径满足 $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \leq \tilde{\rho}(\mathcal{C}) \leq \tilde{\rho}(\mathcal{C}) + M_w$。

## 4.4 构造 4

设 $\mathcal{L}$ 为一个偏序集，其底集为 $[s]$，并设 $\pi$ 为偏序集 $\mathcal{L}$ 的标记映射，满足$\sum_{i=1}^{s}\pi(i)=n$。设 $T \subseteq [s]$ 为任意一组 $t$ 块。设 $\mathcal{C}$ 为定义在 $\mathbb{F}_q$上的一个 $\left[n, K, d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C})\right]$ 码。在 $T$ 上删去$\bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{C}$，得到一个长度为 $n-\sum_{i\in T}\pi(i)$、定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的码，称为 $\mathcal{C}$ 的删余码，记作 $\mathcal{C}_T$。

本节中，我们固定某个 $i \in [s]$对应的 $T = \{i\}$。对于 $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_s}) \in \mathbb{F}_q^n$，定义

$$\boldsymbol{u}^* = (\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_{i-1}}, \boldsymbol{u_{i+1}}, \ldots, \boldsymbol{u_s}).$$

删余码 $\mathcal{C}^*$ 由下式给出

$$\mathcal{C}^* = \{\boldsymbol{u}^* : \boldsymbol{u} \in \mathcal{C}\}.$$

考虑通过从 $[s]$ 中删除 $i$ 得到的 $\mathcal{L}$ 的删余偏序集 $\mathcal{L}^-$，以及 $\mathcal{L}^-$ 的标记映射 $\pi^- \colon [s]\backslash\{i\} \to \mathbb{N}$，使得对于 $j \in [s] \setminus \{i\}$，$\pi^-(j) = \pi(j)$，我们得到以下结果。

命题 4.3. 删余码 $\mathcal{C}^* \subseteq \left(\mathbb{F}_q^{n-1}, d_{w,(\mathcal{L}^-,\pi^-)}\right)$ 是一个 $(\mathcal{L}^-, \pi^-, w)$-码，满足

$$d_{w,(\mathcal{L}^-,\pi^-)}(\mathcal{C}^*) \leq d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}).$$

证明. 设 $\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^* \in \mathcal{C}^*$，其对应向量分别为 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}$。由删余偏序集的定义可知

| | $i \in M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}$ | $i \in I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}} \setminus M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}$ | $i \notin I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}$ |
|---|---|---|---|
| $I^{\mathcal{L}^-}_{\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{v}^*}$ | $I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}} \setminus \{i\}$ | $I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}} \setminus \{i\}$ | $I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}$ |
| $M^{\mathcal{L}^-}_{\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{v}^*}$ | $M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}} \setminus \{i\}$ | $M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}$ | $M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}$. |

Thus

$$\begin{aligned} d_{w,(P^-,\pi^-)}(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) &= \overline{\omega}_{w,(\mathcal{L}^-,\pi^-)}(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{v}^*) = \sum_{j \in M^{\mathcal{L}^-}_{\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{v}^*}} W_i(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{v}^*) + \left| I^{\mathcal{L}^-}_{\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{v}^*} \setminus M^{\mathcal{L}^-}_{\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{v}^*} \right| M_w \\ &= \begin{cases} \overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) - W_i(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) & \text{if } i \in M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}; \\ \overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) - M_w & \text{if } i \in I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}} \setminus M^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}; \\ \overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) & \text{if } i \notin I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}. \end{cases} \end{aligned}$$

因此 $d_{w,(P^-,\pi^-)}(\mathcal{C}^*) \leq d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C})$。 □

注 4.2. 根据上述证明，我们有

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L}^-,\pi^-)}(\boldsymbol{u}^*) \leq \overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u})$$

对于任意 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{F}_q^n$，使得 $\boldsymbol{u}^*$ 是 $\boldsymbol{u}$ 在第 $i$ 个块上的删余向量。

定理 6. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{F}_q$上的线性 $(\mathcal{L}, \pi, w)$-码。$\mathcal{C}$ 的删余码 $\mathcal{C}^*$ 满足 $\tilde{\rho}(\mathcal{C}^*) \leq \tilde{\rho}(\mathcal{C})$。

证明. 设 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{F}_q^n$。那么存在 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}$，且 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{F}_q^n$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个陪集首，使得 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{u}$。由注 4.2 可知

$$d_{w,(\mathcal{L}^-,\pi^-)}(\boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u}^*) = \overline{\omega}_{w,(\mathcal{L}^-,\pi^-)}(\boldsymbol{v}^* - \boldsymbol{u}^*) \leq \overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = \overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{\alpha}) \leq \tilde{\rho}(\mathcal{C}).$$

由于 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{F}_q^n$ 是任意的，我们有 $\tilde{\rho}(\mathcal{C}^*) \leq \tilde{\rho}(\mathcal{C})$。 □

## 4.5 构造 5

设 $P$ 和 $Q$ 是两个偏序集，其底集分别为 $[s]$ 和 $[t]$。设 $\pi_1:[s]\to\mathbb{N}$ 是 $P$ 的一个标记映射，使得 $\sum \pi_1(i)=n_1$，并设 $\pi_2:[t]\to\mathbb{N}$ 是 $Q$ 的一个标记映射，使得 $^{i\in[s]}\sum \pi_2(i)=n_2$。假设 $\mathcal{L}=P\otimes Q$（或 $\mathcal{L}=P\star Q$）。则 $\mathcal{L}$ 是一个底集为 $^{i\in[t}[s]\times[t]=\{(i,j):i\in[s],j\in[j]\}$ 且基数为 $st$ 的偏序集。在本节剩余部分中，记 $\pi_1(i)=\alpha_i$，记 $\pi_2(i)=\beta_i$。

Defi设标记映射 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的直积为 $\pi=\pi_1\otimes\pi_2:[s]\times[t]\to\mathbb{N}$，使得 t

$$\pi((i,j))=\alpha_i\beta_j$$

对于 $(i,j)\in[s]\times[t]$。则 $\pi$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个标记映射，使得 $\sum_{(i}\quad \pi((i,j))=n_1n_{2\cdot j)\in\mathcal{L}}$

令 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u_1},\ldots,\boldsymbol{u_s})\in\left(\mathbb{F}_q^{n_1},d_{w,(P,\pi_1)}\right)$，其中 $\boldsymbol{u_i}\in\mathbb{F}_q^{\alpha_i}$ 且 $\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_t})\in\left(\mathbb{F}_q^{n_2},d_{w,(Q,\pi_2)}\right)$，其中 $\boldsymbol{v_i}\in\mathbb{F}_q^{\beta_i}$。定义 $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ 为

$$\{u_{ij}v_{rl}:i\in[s],j\in[\alpha_i],r\in[t],l\in[\beta_l]\}\in\mathbb{F}_q^{n_1n_2}.$$

我们将其写成如下分块矩阵形式:

$$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}G_{1,1}^{\boldsymbol{uv}} & G_{1,2}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & G_{1,t}^{\boldsymbol{uv}}\\ G_{2,1}^{\boldsymbol{uv}} & G_{2,2}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & G_{2,t}^{\boldsymbol{uv}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ G_{s,1}^{\boldsymbol{uv}} & G_{s,2}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & G_{s,t}^{\boldsymbol{uv}}\end{bmatrix}$$

其中，$G_{i,\ j}^{\boldsymbol{uv}}$ 是一个关于 $i\in[s]$ 和 $j\in[t]$的 $\alpha_i\times\beta_j$ 矩阵，即:

$$G_{i,j}^{\boldsymbol{uv}}=\begin{bmatrix}u_{i1}v_{j1} & u_{i1}v_{j2} & \cdots & u_{i1}v_{j\beta_j}\\ u_{i2}v_{j1} & u_{i2}v_{j2} & \cdots & u_{i2}v_{j\beta_j}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ u_{i\alpha_i}v_{j1} & u_{i\alpha_i}v_{j2} & \cdots & u_{i\alpha_i}v_{j\beta_j}\end{bmatrix}.$$

现在，我们给出了 $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ 的一个划分，其中第（$i$，$j$）个块为$G_{i\ ,\ j}^{\boldsymbol{uv}}$，对应于偏序集 $\mathcal{L}$中的元素（$i$，$j$）。令

$$W_{ij}^{\boldsymbol{uv}}=\max\left\{w(u_{i\varsigma}v_{j\mu}):1\le\varsigma\le\alpha_i,1\le\mu\le\beta_j\right\}.$$

对于任意具有 $st$ 个块的 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{F}_q^{n_1n_2}$，$\boldsymbol{u}$ 的 $(\mathcal{L},\pi,w)$-权重为

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u})=\sum_{(i,j)\in M_{\boldsymbol{u}}^{\mathcal{L}}}W_{ij}^{\boldsymbol{u}\otimes\mathbf{1}}+\sum_{(i,j)\in I_{\boldsymbol{u}}^{\mathcal{L}}\setminus M_{\boldsymbol{u}}^{\mathcal{L}}}M_w=\sum_{(i,j)\in M_{\boldsymbol{u}}^{\mathcal{L}}}W_{ij}^{\boldsymbol{u}\otimes\mathbf{1}}+\left|(i,j)\in I_{\boldsymbol{u}}^{\mathcal{L}}\setminus M_{\boldsymbol{u}}^{\mathcal{L}}\right|\cdot M_w.$$

设 $C_1 \subseteq \left(\mathbb{F}_q^{n_1}, d_{w,(P,\pi_1)}\right)$ 是一个 $(P,\pi_1,w)$-码，并设 $C_2 \subseteq \left(\mathbb{F}_q^{n_2}, d_{w,(Q,\pi_2)}\right)$ 是一个 $(Q,\pi_2,w)$-码。$C_1$ 和 $C_2$ 的张量积记为 $\mathcal{C} = C_1 \bigotimes C_2$，定义如下

$$C_1 \bigotimes C_2 = \{\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} : \boldsymbol{u} \in C_1,\ \boldsymbol{v} \in C_2\}.$$

命题 4.4. 设 $C_1$ 是一个线性 $(P,\pi_1,w)$-码，$C_2$ 是一个线性 $(Q,\pi_2,w)$-码。设 $\mathcal{L} = P \otimes Q$ 和 $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$。则有以下结论：

(1) 假设 $P$ 是一个链，序关系为 $1 < 2 < \cdots < s$，且 $Q$ 是一个反链，则

$$d_{(Q,\pi_2)}(C_2)\left(d_{(P,\pi_1)}(C_1) - 1\right)M_w + d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2) \le d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) \le d_{(P,\pi_1)}(C_1)d_{(Q,\pi_2)}(C_2)M_w.$$

(2) 假设 $P$ 和 $Q$ 都是反链，则

$$d_{(P,\pi_1)}(C_1)d_{(Q,\pi_2)}(C_2)m_w \le d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) \le d_{(P,\pi_1)}(C_1)d_{(Q,\pi_2)}(C_2)M_w.$$

(3) 假设 $P$ 是一个链，序关系为 $1 < 2 < \cdots < s$，且 $Q$ 是一个链，序关系为 $1 < 2 < \cdots < t$，则

$$\left(d_{(P,\pi_1)}(C_1)d_{(Q,\pi_2)}(C_2) - 1\right)M_w + m_w \le d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) \le d_{(P,\pi_1)}(C_1)d_{(Q,\pi_2)}(C_2)M_w.$$

证明. 设 $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}$。

(1) 若 $P$ 是链且 $Q$ 是反链，则 $(i,j) \le (i',j') \in \mathcal{L}$ 当且仅当 $i \le i'$ 且 $j = j'$。假设 $d_{(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u}) = \lambda$ 且 $I_{\boldsymbol{v}}^{Q} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r\}$。那么

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} O & \cdots & G_{1,\eta_1}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & G_{1,\eta_2}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & G_{1,\eta_r}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & O \\ O & \cdots & G_{2,\eta_1}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & G_{2,\eta_2}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & G_{2,\eta_r}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & O \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ O & \cdots & G_{\lambda,\eta_1}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & G_{\lambda,\eta_2}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & G_{\lambda,\eta_r}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & O \\ O & \cdots & O & \cdots & O & \cdots & O & \cdots & O \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ O & \cdots & O & \cdots & O & \cdots & O & \cdots & O \end{bmatrix}$$

满足 $G_{\lambda,\ \eta_l}^{\boldsymbol{uv}} \neq O$ 其中 $1 \le l \le r$ 是一个 $\alpha_\lambda \times \beta_{\eta_l}$ 矩阵。于是

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = \sum_{\substack{(i,j)=(\lambda,\eta_l),\\ 1\le l\le r}} W_{ij}^{\boldsymbol{uv}} + (\lambda - 1)j_r M_w = \sum_{\substack{(i,j)=(\lambda,\eta_l),\\ 1\le l\le r}} W_{ij}^{\boldsymbol{uv}} + \left(d_{(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u}) - 1\right)d_{(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{v})M_w.$$

注意

$$\overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=\eta_l, 1\le l\le r} W_j^Q(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=\eta_l, 1\le l\le r} \max\{w(v_{j\mu}) : 1 \le \mu \le \beta_i\}.$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(i,j)=(\lambda,\eta_l),\\ 1\le l\le r}} W_{ij}^{\boldsymbol{uv}} &= \sum_{\substack{(i,j)=(\lambda,\eta_l),\\ 1\le l\le r}} \max\{w(u_{i\varsigma}v_{j\mu}) : 1 \le \varsigma \le \alpha_i, 1 \le \mu \le \beta_j\} \\
&= \sum_{j=\eta_l, 1\le l\le r} \max\{w(u_{\lambda\varsigma}v_{j\mu}) : 1 \le \varsigma \le \alpha_\lambda, 1 \le \mu \le \beta_j\} \\
&\ge \sum_{j=\eta_l, 1\le l\le r} \max\{w(u_{\lambda\varsigma}v_{j\mu}) : 1 \le \mu \le \beta_j\} \\
&= \overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(u_{\lambda\varsigma}\boldsymbol{v}).
\end{aligned}$$

因此

$$d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) \ge d_{(Q,\pi_2)}(C_2)\left(d_{(P,\pi_1)}(C_1) - 1\right) M_w + d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2).$$

另一方面，考虑满足 $\boldsymbol{u} \in C_1$ 使得 $d_{(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u}) = \lambda = d_{(P,\pi_1)}(C_1)$ 且 $d_{(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{v}) = r = d_{(Q,\pi_2)}(C_2)$ 的情形。根据上述讨论，我们得出

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) \le \lambda r M_w.$$

结论随即得出。

(2) 若 $P$ 和 $Q$ 是反链，则 $\mathcal{L}$ 是反链。因此

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) = \sum_{(i,j)\in I^{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}}} W_{ij}^{\boldsymbol{uv}}.$$

结论立即得出。

(3) 如果 $P$和 $Q$都是链，那么 $(i,j) \le (i',j') \in \mathcal{L}$ 当且仅当 $i \le i'$ 和 $j \le j'$。假设$d_{(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u}) = \lambda$ 且 $d_{(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{v}) = \delta$。那么

$$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}
G_{1,1}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & G_{1,\delta}^{\boldsymbol{uv}} & O & \cdots & O \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
G_{\lambda,1}^{\boldsymbol{uv}} & \cdots & G_{\lambda,\delta}^{\boldsymbol{uv}} & O & \cdots & O \\
O & \cdots & O & O & \cdots & O \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
O & \cdots & O & O & \cdots & O
\end{bmatrix} \tag{4.1}$$

满足 $G_{\lambda}^{\boldsymbol{uv}},_{\delta} \neq O$ 是一个 $\alpha_\lambda \times \beta_\delta$ 矩阵。那么

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = W_{\lambda\delta}^{\boldsymbol{uv}} + (\lambda\delta - 1)M_w.$$

因此

$$(\lambda\delta - 1)M_w + m_w \leq \overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) \leq \lambda\delta M_w.$$

于是得到该结论。

□

注 4.3. $Q$ 为链且 $P$ 为反链的情形，与 $P$ 为链且 $Q$为反链的情形是对称的。

注 4.4. 设 $P$ 和 $Q$ 是两条链，且 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 分别是 $P$ 和 $Q$ 的标记映射。当对所有 $i \in [s]$ 都有 $\pi_1(i) = 1$，且对所有 $j \in [t]$都有 $\pi_2(j) = 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned} d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) &= \left(d_{(P,\pi_1)}(C_1)d_{(Q,\pi_2)}(C_2) - 1\right) M_w + m_w \\ &= \left(d_{w,(P,\pi_1)}(C_1) - m_w\right) d_{(Q,\pi_2)}(C_2) + d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2) \\ &= \left(d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2) - m_w\right) d_{(P,\pi_1)}(C_1) + d_{w,(P,\pi_1)}(C_1). \end{aligned}$$

下述推论（已在 [17], 中证明）是命题 4.4 的一个特例。

推论 4.1. 设 $C_1$ 是一个线性 $(P, \pi_1, w)$-码， $C_2$ 是一个线性 $(Q, \pi_2, w)$-码。设 $\mathcal{L} = P \otimes Q$和 $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$。对于 $w$ 为 $\mathbb{Z}_m$ 上的 Lee 重量，其中 $m$ 为素数（即 $\mathbb{Z}_m$ 是一个域）且 $\pi_i$为平凡的情形，我们有

(1) 如果 $P$ 和 $Q$ 是反链，则

$$d_{(P,\pi_1)}(C_1)d_{(Q,\pi_2)}(C_2) \leq d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) \leq d_{(P,\pi_1)}(C_1)d_{(Q,\pi_2)}(C_2) \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

(2) 如果 $P$ 是链且 $Q$ 是反链，则

$$d_{(Q,\pi_2)}(C_2) \left(d_{(P,\pi_1)}(C_1) - 1\right) \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2) \leq d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) \leq d_{(P,\pi_1)}(C_1)d_{(Q,\pi_2)}(C_2) \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

(3) 若 $P$ 和 $Q$是两条链，则

$$\begin{aligned} d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) &= \left(d_{w,(P,\pi_1)}(C_1) - 1\right) d_{(Q,\pi_2)}(C_2) + d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2) \\ &= \left(d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2) - 1\right) d_{(P,\pi_1)}(C_1) + d_{w,(P,\pi_1)}(C_1). \end{aligned}$$

命题4.5. 设 $C_1$ 是一个线性$(P,\pi_1,w)$码， $C_2$ 是一个线性$(Q,\pi_2,w)$码。设 $\mathcal{L}=P\star Q$和 $\pi=\pi_1\otimes\pi_2$。则有以下结论：

(1) 假设 $P$ 是一条链，且 $1<2<\cdots<s$ 和 $Q$ 是一条反链，则

$$\left(d_{(P,\pi_1)}(C_1)-1\right)tM_w+d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2)\le d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C})\le\left(d_{(P,\pi_1)}(C_1)-1\right)tM_w+d_{(Q,\pi_2)}(C_2)M_w.$$

(2) 假设 $P$ 是一条链，其序关系为 $1<2<\cdots<s$，且 $Q$ 是一条链，其序关系为$1<2<\cdots<t$，则

$$m_w+\left(d_{(P,\pi_1)}(C_1)-1\right)tM_w+\left(d_{(Q,\pi_2)}(C_2)-1\right)M_w\le d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C})\le\left(d_{(P,\pi_1)}(C_1)-1\right)tM_w+d_{(Q,\pi_2)}(C_2)M_w.$$

(3) 假设 $P$ 和 $Q$ 都是反链，则

$$d_{(P,\pi_1)}(C_1)d_{(Q,\pi_2)}(C_2)m_w\le d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C})\le d_{(P,\pi_1)}(C_1)d_{(Q,\pi_2)}(C_2)M_w.$$

(4) 假设 $Q$ 是一条链，且 $1<2<\cdots<t$ 和 $P$ 是一条反链，则

$$d_{w,(P,\pi_1)}(C_1)+d_{(P,\pi_1)}(C_1)\left(d_{(Q,\pi_2)}(C_2)-1\right)M_w\le d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C})\le d_{(P,\pi_1)}(C_1)d_{(Q,\pi_2)}(C_2)M_w.$$

证明。(3) 和 (4) 可由命题 4.4 直接得出。令 $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\in\mathcal{C}$。

(1) 若 $P$ 是一条链且 $Q$ 是一条反链，则 $(i,j)\le(i',j')\in\mathcal{L}$ 当且仅当 $i<i'$ 或 $(i,j)=(i',j')$。假设 $d_{(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u})=\lambda$ 且 $I_{\boldsymbol{v}}^{Q}=\{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_r\}$。仿照命题 4.4 的类似讨论，可得

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) &= \sum_{\substack{(i,j)=(\lambda,\eta_l),\\ 1\le l\le r}} W_{ij}^{\boldsymbol{uv}}+(\lambda-1)tM_w\\ &= \sum_{\substack{(i,j)=(\lambda,\eta_l),\\ 1\le l\le r}} W_{ij}^{\boldsymbol{uv}}+\left(d_{(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u})-1\right)tM_w\\ &\ge d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2)+\left(d_{(P,\pi_1)}(C_1)-1\right)tM_w.\end{aligned}$$

(2) 假设 $P$ 和 $Q$ 是链。那么 $\mathcal{L}$ 是一条链，使得 $(i,j)\le(i',j')$ 当且仅当 $i<i'$ 或 $i=i$‘ 且 $j\le j'$。假设 $d_{(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u})=\lambda$ 且 $d_{(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{v})=\delta$。考虑命题 4.4 (3) 的证明中的矩阵(4.1)，我们有

$$\overline{\omega}_{w,\ (\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})=W_{\lambda\delta}^{\boldsymbol{uv}}+(\lambda-1)tM_w+(\delta-1)M_w\ge m_w+\left(d_{(P,\pi_1)}(C_1)-1\right)tM_w+\left(d_{(Q,\pi_2)}(C_2)-1\right)M_w.$$

另一方面，如果 $\lambda=d_{(P,\pi_1)}(C_1)$ 且 $\delta=d_{(Q,\pi_2)}(C_2)$，我们可以得出

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\le\left(d_{(P,\pi_1)}(C_1)-1\right)tM_w+d_{(Q,\pi_2)}(C_2)M_w.$$

□

注记 4.5. 设 $P$ 是一个具有序关系 $1 < 2 < \cdots < s$ 的链，且 $Q$ 是一个反链。设 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 分别是 $P$ 和 $Q$ 的标记映射。当对所有 $i \in [s]$，$\pi_1(i) = 1$，且对所有 $j \in [t]$，$\pi_2(j) = 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned} d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) &= \left(d_{(P,\pi_1)}(C_1) - 1\right) tM_w + d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2) \\ &= \left(d_{w,(P,\pi_1)}(C_1) - m_w\right) t + d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2). \end{aligned}$$

注记 4.6. 设 $P$是一个序关系为 $1 < \cdots < s$ 的链，且 $Q$ 是一个序关系为$1 < \cdots < t$的链。设 $\pi_1$、$\pi_2$ 分别是 $P$、$Q$ 的标记映射。当对所有 $i \in [s]$ 都有 $\pi_1(i) = 1$，且对所有 $j \in [t]$都有 $\pi_2(j) = 1$时，我们有

$$\begin{aligned} d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\mathcal{C}) &= m_w + \left(d_{(P,\pi_1)}(C_1) - 1\right) tM_w + \left(d_{(Q,\pi_2)}(C_2) - 1\right) M_w \\ &= \left(d_{w,(P,\pi_1)}(C_1) - m_w\right) t + d_{w,(Q,\pi_2)}(C_2). \end{aligned}$$

设 $P$是一个序关系为 $1 < \cdots < s$的链。令

$$D_{(P,\pi_1)}(C_1) = \max\left\{d_{(P,\pi)}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{u} \in C_1\right\}.$$

类似地，可以定义 $D_{(Q,\pi_2)}(C_2)$。

当 $w$ 取为汉明重量时，分别用 $R_1$ 和 $R_2$ 表示 $C_1$ 和 $C_2$ 的覆盖半径。

注记 4.7. 设 $C_1$ 是一个线性（$P, \pi_1, w$）码。当 $P$是一个满足 $1 < \cdots < s$的链时，我们有

$$(R_1 - 1)M_w < \tilde{\rho}(C_1) \leq R_1 M_w.$$

定理 7. 设 $C_1$ 是一个线性（$P, \pi_1, w$）码，且 $C_2$ 是一个线性（$Q, \pi_2, w$）码。假设$\mathcal{L} = P \otimes Q$ 且 $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$。则

$$\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \geq \max\left\{s\tilde{\rho}(C_2),\ t\tilde{\rho}(C_1)\right\}.$$

此外，

(1) 假设 $P$是一个序关系为 $1 < 2 < \cdots < s$ 的链，且 $Q$ 是一个反链，则

(a) $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) = stM_w$ 如果 $D_{(P,\pi_1)}(C_1) < s$.

(b) $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \geq R_2(s-1)M_w + R_2 m_w$。

(c) $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \leq (s-1)tM_w + \tilde{\rho}(C_2)$, 当 $D_{(P,\pi_1)}(C_1) = s$ 且 $\alpha_s = 1$。

(2) 假设 $P$ 和 $Q$ 都是链，其序关系分别为 $1 < 2 < \cdots < s$ 和 $1 < 2 < \cdots < t$，那么

(a) $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) = stM_w$，若 $D_{(P,\pi_1)}(C_1) < s$ 或 $D_{(Q,\pi_2)}(C_2) < t$。(b) $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \leq (s-1)tM_w + \tilde{\rho}(C_2)$，若 $D_{(P,\pi_1)}(C_1) = s$，$D_{(Q,\pi_2)}(C_2) = t$ 且 $\alpha_s = 1$。(c) $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \leq (t-1)sM_w + \tilde{\rho}(C_1)$，若 $D_{(P,\pi_1)}(C_1) = s$，$D_{(Q,\pi_2)}(C_2) = t$ 且 $\beta_t = 1$。(d) $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \leq \min\{(s-1)tM_w + \tilde{\rho}(C_2),\ (t-1)sM_w + \tilde{\rho}(C_1)\}$，若 $D_{(P,\pi_1)}(C_1) = s$，$D_{(Q,\pi_2)}(C_2) = t$ 且 $\alpha_s = \beta_t = 1$。(e) $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \geq \max\{(sR_2 - 1)M_w + m_w,\ (tR_1 - 1)M_w + m_w\}$。

~ ~证明。设 $\zeta \in \mathbb{F}_q$ 满足 $w(\zeta) = M_w$。设 $\boldsymbol{h} \in \mathbb{F}_q^{n_2}$是 $C_2$ 的一个陪集首，满足 $\overline{\omega}_{w,\ (Q,\pi_2)}(\boldsymbol{h}) = \tilde{\rho}(C_2)$。取 $\boldsymbol{h} = (\tilde{\boldsymbol{h}}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{h}})^T_{1\times n_1} \in \mathbb{F}_q^{n_1 n_2}$。设 $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}$。假设 $\boldsymbol{u} = (u_{11}, \ldots, u_{1\alpha_1}, \ldots, u_{s1}, \ldots, u_{s\alpha_s})$。那么

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = (u_{11}\boldsymbol{v}, \ldots, u_{1\alpha_1}\boldsymbol{v}, \ldots, u_{s1}\boldsymbol{v}, \ldots, u_{s\alpha_s}\boldsymbol{v})^T_{1\times n_1}$$

因此

$$\begin{aligned} d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) &= \overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) \geq \sum_{i=1}^{s} \overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\tilde{\boldsymbol{h}} - u_{i\alpha_i}\boldsymbol{v}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{s} \overline{\omega}_{w,(Q,\pi_2)}(\tilde{\boldsymbol{h}}) = s\tilde{\rho}(C_2). \end{aligned}$$

因此 $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \geq s\tilde{\rho}(C_2)$。同理，我们可以证明 $\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \geq t\tilde{\rho}(C_1)$

(1) 假设 $P$ 是一个链，且 $Q$ 是一个反链。

- (a)：假设 $D_{(P,\ \pi_1)}(C_1) < s$，则 $\boldsymbol{g} \in \mathcal{C}$ 具有如下形式

$$\begin{bmatrix} G_{1,1} & \cdots & G_{1,t} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{s-1,1} & \cdots & G_{s-1,t} \\ O & \cdots & O \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

其中 $G_{i,\ j}$ 是一个 $\alpha_i \times \beta_j$ 矩阵。取$\boldsymbol{h} \in \mathbb{F}_q^{n_1 n_2}$具有如下形式

$$\begin{bmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{1,t} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{s-1,1} & \cdots & H_{s-1,t} \\ H_{s,1} & \cdots & H_{s,t} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

其中$H_{s,\ r}$是一个$\alpha_s \times \beta_r$，满足$\zeta$是$H_{s,\ r}$的一个元素，其中$1 \le r \le t$。那么对于任意$\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$，有$\overline{\omega}_{w,\ (\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c}) = stM_w$，因此$\min_{\boldsymbol{c}\in C} d_{w,\ (\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{c}) = stM_w$，这意味着$\tilde{\rho}(\mathcal{C}) = stM_w$。

- (b)：令$\boldsymbol{h} \in \mathbb{F}_q^{n_1 n_2}$具有（4.3）的形式。记

$$[H_{s,1} \cdots H_{s,t}] = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n_2} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{\alpha_s 1} & \cdots & h_{\alpha_s n_2} \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

假设$\boldsymbol{h_1} = (h_{11}, \ldots, h_{1n_2}) \in \mathbb{F}_q^{n_2}$使得$\min_{\boldsymbol{c}\in C_2} d_{(Q,\pi_2)}(\boldsymbol{h_1},\boldsymbol{c}) = R_2$。则

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) \ge (s-1)R_2M_w + R_2m_w.$$

- (c)：假设$D_{(P,\pi_1)}(C_1) = s$且$\alpha_s = 1$。令$\boldsymbol{h} \in \mathbb{F}_q^{n_1 n_2}$。

  – 若$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{h}) \le (s-1)tM_w$，则$\min_{\boldsymbol{c}\in C} d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{c}) \le (s-1)tM_w$，因为$\boldsymbol{0} \in \mathcal{C}$。– 若$\overline{\omega}_{w,\ (\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{h}) > (s-1)tM_w$，则$\boldsymbol{v}$具有（4.3）的形式，使得并非所有$H_{sr}$都是$O$，对于$1 \le r \le t$。记

$$[H_{s1} \cdots H_{st}] = (h_1, \ldots, h_{\beta_1}, \ldots, h_{\beta_1+\cdots+\beta_{t-1}+1}, \ldots, h_{n_2}) = \boldsymbol{h_s} \in \mathbb{F}_q^{n_2}.$$

对于$\boldsymbol{h_s} \in \mathbb{F}_q^{n_2}$，存在$\boldsymbol{v} \in C_2$使得$d_{w,\ (Q,\pi_2)}(\boldsymbol{h_s},\boldsymbol{v}) \le \tilde{\rho}(C_2)$。考虑满足$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}}, 1) \in C_1$的$\boldsymbol{0} \ne \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}$，则

$$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v} = (u_1\boldsymbol{v}, \ldots, u_{\alpha_1}\boldsymbol{v}, \ldots, u_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})^T.$$

因此

$$\overline{\omega}_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) \le (s-1)tM_w + \tilde{\rho}(C_2).$$

综上，我们得出

$$\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \le (s-1)tM_w + \tilde{\rho}(C_2).$$

(2) 证明与 (1) 类似，因此略去。

□

定理 8. 设$C_1$是一个线性$(P,\pi_1,w)$-码，且$C_2$是一个线性$(Q,\pi_2,w)$-码。假设$\mathcal{L} = P \star Q$和$\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$。则

$$\tilde{\rho}(\mathcal{C}) \ge \max\left\{s\tilde{\rho}(C_2),\ t\tilde{\rho}(C_1)\right\}.$$

此外，

(1) 如果 $P$ 是满足 $1<2<\cdots<s$ 的链，那么

(a) $\tilde{\rho}(\mathcal{C})=stM_w$ 若 $D_{(P,\pi_1)}(C_1)<s$。特别地，当 $Q$ 为一条链时，我们有 $\tilde{\rho}(\mathcal{C})=stM_w$ 若 $D_{(P,\pi_1)}(C_1)<s$ 或 $D_{(Q,\pi_2)}(C_2)<t$。(b) $\tilde{\rho}(\mathcal{C})\leq(s-1)tM_w+\tilde{\rho}(C_2)$ 若 $D_{(P,\pi_1)}(C_1)=s$, $D_{(Q,\pi_2)}(C_2)=t$ 且 $\alpha_s=1$。(c) $\tilde{\rho}(\mathcal{C})\geq$最大值 $\{(s-1)tM_w+\tilde{\rho}(C_2)\quad t\tilde{\rho}(C_1)\}$.

(2) 如果 $P$是一个反链，且 $Q$ 是一条具有序关系 $1<2<\cdots<t$的链，那么

*(a)* $\tilde{\rho}(\mathcal{C})=stM_w$ *if* $D_{(Q,\pi_2)}(C_2)<t$.

*(b)* $\tilde{\rho}(\mathcal{C})\leq(t-1)sM_w+\tilde{\rho}(C_1)$ *if* $D_{(Q,\pi_2)}(C_2)=t$ *and* $\beta_t=1$.

˜证明。设 $P$ 为一条链，设 $Q$ 为一个反链。设 $\boldsymbol{h}\in\mathbb{F}_q^{n_2}$为 $C_2$ 的陪集首，满足 $\overline{\omega}_{w,\ (Q,\pi_2)}(\tilde{\boldsymbol{h}})=\tilde{\rho}(C_2)$。取 $\boldsymbol{h}=(\tilde{\boldsymbol{h}},\ldots,\tilde{\boldsymbol{h}})^T_{1\times n_1}$。则 $d_{w,\ (\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{0})=(s-1)tM_w+\tilde{\rho}(C_2)$。令$\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\in\mathcal{C}$。假设 $\overline{\omega}_{(P,\pi_1)}(\boldsymbol{u})=\lambda$。于是

$$d_{w,(\mathcal{L},\pi)}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\geq(s-1)tM_w+\tilde{\rho}(C_2).$$

证明的其余部分与定理 7 的证明类似，因此省略。 □

# 5 结论

现在我们说明，本文的结果可以导出若干已有结果。

(1) 当所有块都是平凡的，且 $w$ 取为 $\mathbb{F}_q$上的 Lee 重量时，所得结果与 [17] 中所述的 pomset 度量下的结果一致。

(2) 当 $w$ 取为 $\mathbb{F}_q$上的汉明重量时，我们的结果与偏序块度量情形一致。特别地，当所有块都是平凡的，所得结果与偏序度量情形一致。(3) 若两个条件同时成立（所有块都是平凡的， $w$ 为汉明重量且 $P$ 为反链序），所得结果与 [9] 中所述的经典汉明度量下的结果一致。

# 参考文献

[1] M.M.S. Alves、L. Panek、M. Firer，《错误分块码与偏序度量》，Adv. Math. Commun. 2 (1) (2008) 95-111。

[2] R. Brualdi、J.S. Graves、M. Lawrence，《带偏序度量的码》，Discrete Math. 147 (1) (1995) 57-72。[3] S.H. Cho、D.S. Kim，《冠权空间的自同构群》，European Journal of Combinatorics. 27 (2006) 90-100。[4] B.K. Dass、Namita Sharma、Rashmi Verma，《MDS 与 $I$-完美分块码》，有限域及其应用 62 (2020) 101620。[5] B. A. Davey 和 H. A. Priestley，《格与序导论》，第 2 版。英国剑桥：剑桥大学出版社，2002。[6] M.M. Deza 和 E. Deza，《距离百科全书》。德国柏林：施普林格出版社，2009。[7] K. Feng、L. Xu、F.J. Hickernell，《线性错误块码》，Finie Fields Appl. 12 (4) (2006) 638-652。[8] E. Gabidulin，《编码理论中的度量》，载于《多址信道》，E. Biglieri 和 L. Gyorfi 编。荷兰阿姆斯特丹：IOS出版社，2007。[9] W.C. Huffman，Pless V.：《纠错码基础》。剑桥大学出版社，剑桥（2003）。[10] J.Y. Hyun、H.K. Kim，《最大距离可分偏序码》，Des. Codes Cryptogr. 48 (3) (2008) 247-261。[11] K. Lee，《Rosenbloom-Tsfasman空间的自同构群》，European J. Combin. 24 (2003) 607-612。[12] H. Niederreiter，《有限域上向量空间的一个组合问题》，Discrete Math. 96 (1991) 221-228。[13] L. Panek 和 J.A. Pinheiro，《偏序度量与可加度量的一般方法》，IEEE Trans. Inf. Theory 68 (4) (2020) 6823-6834。[14] L. Panek、M. Firer、M.M.S. Alves，《Niederreiter-Rosenbloom-Tsfasman 分块码的分类》，IEEE Trans. Inf. Theory 56 (10) (2010) 5207-5216。[15] L. Panek、N. Panek，《最优反码、直径完美码、链与权重》，IEEE Trans. Inf. Theory 67 (7) 4255-4262。

[16] M. Yu Rosenbloom，M.A. Tasfasman， $m$-度量下的码，Probl. Pereda. Inf. 33 (1) (1997) 45-52.[17] I. G. Sudha 和 R. S. Selvaraj，具有 pomset 度量的码及其构造，Des. Codes Cryptogr. 86 (4) (2018) 875-892.[18] I. G. Sudha 和 R. S. Selvaraj，某些 pomset 上线性码的 MacWilliams 型恒等式：pomset 的链、直和与序数和，Discrete Math. 343 (2020) 111782.[19] I. G. Sudha，R.S. Selvaraj，pomset 度量下的 MDS 码和 $I$-完美码，IEEE Trans. Inf. Theory 67 (3) (2021) 1622-1629.