arXiv:2303.02179v2 [cond-mat.str-el] 5 Sep 2023

量子计算机上高阶拓扑态的观测

Jin Ming Koh，[1]，* Tommy Tai，[2,3,4]，* 和 Ching Hua Lee [4]，†[1]加州理工学院物理、数学与天文学部，帕萨迪纳，加利福尼亚州 *91125*，美国[2]麻省理工学院物理系，剑桥，马萨诸塞州 *02142*，美国[3]剑桥大学卡文迪许实验室，*J. J.* 汤姆孙大道，剑桥 *CB3 0HE*，英国[4]新加坡国立大学物理系，新加坡 *117542*

可编程量子模拟器，例如超导量子处理器和超冷原子晶格，是一项迅速发展的新兴技术，未来或许能在性能上实现质的飞跃，超越现有经典计算机。然而，除少数突破外，当前含噪中等规模量子（NISQ）设备可行的计算应用范围仍受到门错误、量子退相干以及高质量量子比特数量的显著限制。在这项工作中，我们提出一种方法，将 NISQ 硬件打造为模拟多维凝聚态物质系统的特别适用平台，包括难以在其他环境中实现或探测的三维以上晶格。通过充分利用量子链指数级庞大的希尔伯特空间，我们将高维模型编码为非局域多体相互作用，并可进一步将其系统地转写为量子门。我们在 IBM 基于超导传输子的量子计算机上实现了最高达四维的高阶拓扑态，展示了该方法的强大能力；这些奇异相此前从未在任何量子环境中实现。借助自主研发的电路压缩和误差缓解技术，我们以很高的精度测量了拓扑态动力学及其受保护的中间能隙谱，并通过参考精确对角化数据进行了基准测试。与经典计算机上的精确对角化相比，我们的方法所需的时间和内存随系统尺寸和维度的增长更为有利。

I. 引言

近年来，可编程量子模拟器平台的发展取得了巨大进展，包括基于超导跨蒙和氟铌的处理器 [1–3]，、囚禁离子系统 [4, 5]，、超冷原子晶格 [6]，以及里德堡原子阵列 [7–11]。这些平台中已报告了大量成功演示，尤其是在量子化学 [12–15] 和量子多体动力学 [16–21]领域。这一具有里程碑意义的研究工作背后，是人们期望量子计算平台能够在一系列有用应用中超越传统经典平台，从而实现我们目前尚无法企及的新能力。尽管量子优势已在模拟任务中取得突破，但现有研究聚焦于高度特定的定制问题，尤其是随机量子电路采样 [22, 23]和玻色子采样 [24, 25]，，这限制了其更广泛的适用性。寻找量子平台能够提供独特优势的应用，并推动近期含噪声中等规模量子（NISQ）硬件的能力，仍是重要且及时的目标。

在本工作中，我们提出了一种新方法，将 NISQ 硬件确立为模拟通用多维凝聚态晶格模型的特别适用平台。作为演示，我们利用该方法，在基于超导传输子的量子设备上实现了前所未有规模和复杂度的高维晶格中的高阶拓扑（HOT）相。不同于以往通过合成维度实现拓扑模型的量子模拟器研究 [26–36]，我们在实空间中实现了高阶拓扑晶格，维度最高可达 $d = 4$ 维度（超立方体）。我们方法的核心，是一种映射过程：将高维晶格的单粒子自由度编码到相互作用的一维（1D）模型的多体福克空间中。这使我们能够充分利用量子计算机内在可访问的指数级庞大希尔伯特空间，同时大幅减少直接模拟所需的量子比特数量。

值得指出的是，高维高阶拓扑晶格的经典模拟代价高昂，而我们量子模拟方法的资源复杂度可能优于经典数值方法——例如 精确对角化（ED）。尽管要实现更大规模高阶拓扑系统需要具备超出现有能力的硬件，但随着量子模拟器平台持续快速发展，我们的方法或可为实现量子优势开辟一条途径。

除了量子模拟的背景之外，高阶拓扑物质相在各种凝聚态体系中都具有基础性意义。拓扑绝缘体 [37–45]及其高阶对应物 [46–58]之所以备受瞩目，正是因为著名的体边对应；它彻底改变了凝聚态物理，并为实现稳健的边界态提供了肥沃的土壤，从而带来令人期待的技术应用 [37, 59–62]。与传统拓扑系统不同，高阶拓扑系统在余维更高的角、边和

* 这些作者对本研究的贡献相同。 † phylch@nus.edu.sg

表面上支持受保护的模。在 n^{th}阶高阶拓扑系统中，$d \geq 2$ 维系统具有 $d_c = (d-n)$维中能隙边界模（其中 $n \leq d$），但其他区域均为绝缘体，尤其是体态（图1）。

我们独特的方法尤其将高阶拓扑鲁棒性重新诠释为一种一维的相互作用介导现象，从而引入了一类具有拓扑保护聚集特性的一维多体系统。具体而言，高阶拓扑提供了一种替代机制，可用于实现 d体聚集或排斥 [63–66]，其适用范围超越了库仑排斥等已知机制。进一步将这些受高阶拓扑保护的边界态推广至空间角，为应用开辟了新的途径，例如利用具有难以捉摸的马约拉纳角模 [67–69]的高阶拓扑超导体实现拓扑量子比特。这也补充了在量子材料中寻找高阶拓扑相的研究 [49, 50, 70–76]，，而该研究目前仍处于起步阶段。

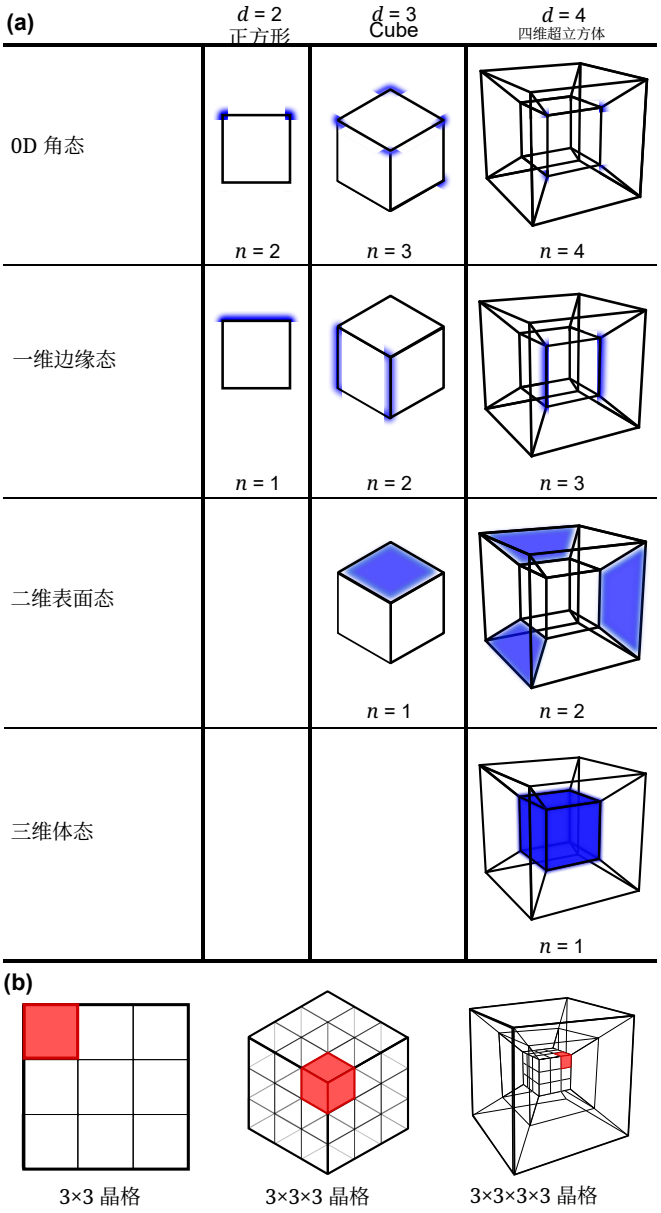

图 1. **高维晶格中的高阶拓扑（HOT）态。(a)** 在不同维度 d 中，n^{th} 阶拓扑态表现为稳健的余维-n 角、边、表面和体态，并受到高阶拓扑不变量的保护。HOT 态指具有 $n > 1$的拓扑态。**(b)** 不同维度超晶格上的高阶拓扑角模示意图。为便于观察，图示晶格尺寸较小；我们在量子硬件上实现的 HOT 态位于尺寸大得多的 16×16、$6 \times 6 \times 6$和 $6 \times 6 \times 6 \times 6$ 晶格中。

II. 结果与讨论

A. 将高维晶格映射到一维量子链

尽管已有研究在数字量子计算机上模拟了小型准一维和二维系统 [77, 78]，，但对高维晶格进行显式模拟仍难以实现。直接模拟每个维度宽度为 L 的 d 维晶格需要 $\sim L^d$ 个量子比特[1]。对于较高维度 d 或较大的晶格尺寸 L，这很快就会超出含噪中等规模量子设备的能力，因为这类设备受到可用量子比特数量、量子比特连通性、门错误和退相干时间的显著限制。

为克服这些硬件限制，我们设计了一种方法，以利用相互作用量子比特链指数庞大的多体希尔伯特空间。其关键启发在于，大多数局域晶格模型只能访问完整希尔伯特空间的一小部分（尤其是非相互作用模型和具有对称性的模型），而一个含有L^d个格点的晶格可以用远少于 L^d 个量子比特来一致地表示。为此，我们引入了一种精确映射，将 d维晶格化为承载 d粒子相互作用的一维链；对于能够访问并操控量子比特寄存器多体希尔伯特空间的量子计算机而言，这种链可被自然地模拟。

1. 一般映射形式

一般而言，我们考虑定义在任意晶格上的通用 d 维 n 带模型 $\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{c}^{\dagger}{}_{\mathbf{k}} \mathcal{H}(\mathbf{k}) \mathbf{c}_{\mathbf{k}}$。

[1] 前置因子取决于占据晶格的粒子的自旋自由度。具体而言，对于无自旋粒子，每个格点只需用 $m = 1$ 个量子比特表示；但对于有自旋费米子和玻色子，则需要 $m > 1$ 个量子比特。

在实空间中，

$$\mathcal{H}=\sum_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\sum_{\gamma\gamma'}h^{\gamma\gamma'}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}c^{\dagger}_{\mathbf{r}\gamma}c_{\mathbf{r}'\gamma'}, \tag{1}$$

其中，我们将能带自由度与子晶格结构 γ 关联起来；对于模型耦合范围之外的 $h^{\gamma\gamma'}{}_{\mathbf{r}\prime}=0$，即对于最近邻模型为相邻格点、对于次近邻模型为次相邻格点、等等，$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ 即。算符$c_{\mathbf{r}\gamma}$ 会湮灭格点 $\mathbf{r}$ 的子晶格 γ 上的粒子激发。

为了利用多体希尔伯特空间中的自由度，我们定义映射，使得原始 d 维晶格上单个粒子从 $(\mathbf{r}',\gamma')$ 跃迁至 $(\mathbf{r}\ \gamma)$，对应于 d 个粒子同时发生跃迁；这些粒子分别属于不同物种，从位置 $(r'_1,\ \ldots,r'_d)$ 跃迁至 $(r_1,\ \ldots,r_d)$，并且在一维相互作用链上从子晶格 γ' 跃迁至 γ。具体而言，该映射表示为

$$\mathbf{c}^{\dagger}_{\mathbf{r}\gamma}\mapsto\prod_{\alpha=1}^{d}\left[\omega^{\alpha}_{r_\alpha\gamma}\right]^{\dagger},\qquad \mathbf{c}_{\mathbf{r}\gamma}\mapsto\prod_{\alpha=1}^{d}\omega^{\alpha}_{r_\alpha\gamma}, \tag{2}$$

其中，r_α 是$\mathbf{r}$的 α^{th} 分量，而 $\{\omega^{\alpha}_{\ell\gamma}\}_{\alpha=1}^{d}$ 表示位于相互作用链上格点ℓ 的子晶格 γ 上的 d 激发种类，从而得到

$$\mathcal{H}\mapsto\mathcal{H}_{1\mathrm{D}}=\sum_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\sum_{\gamma\gamma'}h^{\gamma\gamma'}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\prod_{\alpha=1}^{d}\left[\omega^{\alpha}_{r_\alpha\gamma}\right]^{\dagger}\omega^{\alpha}_{r'_\alpha\gamma'}. \tag{3}$$

在单粒子情形下，交换统计并不重要，因此可以令 $\{\omega^{\alpha}\}$ 彼此对易。这一映射框架适用于任意晶格维数和几何结构，也适用于任意数量的能带或子晶格自由度。由于映射是在二次量子化层面进行的，任何以二次量子化形式表示的单体哈密顿量都可以处理，因此涵盖了人们感兴趣的各种单体拓扑现象。稍作修改后，这一映射还可以扩展到原始 d维晶格哈密顿量中的相互作用项，不过本文不再进一步探讨。

2. 将高阶拓扑晶格映射到一维量子比特链

为便于具体说明，以下我们将哈密顿量专门用于高阶拓扑（HOT）系统，并将详细说明如何通过映射将其编码到量子处理器上。具有高阶拓扑角模的最简单正方晶格 [47, 51, 79] 可由典型的一维 Su-Schrieffer-Heeger（SSH）模型构造 [55, 80]。为了提供足够的拓扑局域化自由度，我们至少需要在每个方向上由两种不同类型的 SSH 链交替排列，构成二维网格

$$\mathcal{H}^{\mathrm{2D}}_{\mathrm{lattice}}=\sum_{(x,y)\in[1,L]^2}\left[u^{x}_{xy}c^{\dagger}_{(x+1)y}+u^{y}_{yx}c^{\dagger}_{x(y+1)}\right]c_{xy}+\mathrm{h.c.}, \tag{4}$$

其中 c_{xy} 是作用于晶格格点 $(x,\ y)$上的湮灭算符，而 $u^{\alpha}_{r_1r_2}$ 取值为 $v^{\alpha}_{r_1r_2}$ 时表示胞内跃迁（奇数 r_2），取值为 $w^{\alpha}_{r_1r_2}$ 时表示胞间跃迁（偶数 r_2），$\alpha\in\{x,y\}$。从概念上讲，二维晶格动量空间可等价地解释为两个粒子的联合构型动量空间，具体而言，是相应一维相互作用链的 $(1+1)$体扇区。我们作如下映射 $c_{xy}\mapsto\mu_x\nu_y$，其中 μ_ℓ 和 ν_ℓ 分别湮灭链上格点 ℓ 处两种不同物种的硬核玻色子。按照式 2的记号，我们令 $\omega^{1}_{\ell}=\mu_\ell$ 和 $\omega^{2}_{\ell}=\nu_\ell$，并将子晶格结构吸收到空间坐标的奇偶性中。由此得到一个由下式描述的有效一维双玻色子链

$$\mathcal{H}^{\mathrm{2D}}_{\mathrm{chain}}=\sum_{x=1}^{L}\sum_{y=1}^{L}\left[u^{x}_{xy}\mu^{\dagger}_{x+1}\mu_x n^{\nu}_{y}+u^{y}_{yx}\nu^{\dagger}_{y+1}\nu_y n^{\mu}_{x}\right]+\mathrm{h.c.}, \tag{5}$$

其中，n^{ω}_{ℓ} 是链上格点 ℓ 处物种 ω 的数算符。按此写法，$\mathcal{H}^{\mathrm{2D}}_{\mathrm{chain}}$ 中的每一项都表示某一特定物种 μ 或 ν对应的有效SSH模型，其他物种不参与跃迁，只是占据在此（因此出现其数算符）。$\mathcal{H}^{\mathrm{2D}}_{\mathrm{chain}}$ 中产生的这些二体相互作用看似复杂，但借助平台的量子特性，可以在量子计算机上轻松实现。为了在量子计算机上实现 $\mathcal{H}^{\mathrm{2D}}_{\mathrm{chain}}$，我们用2个量子比特表示链上的每个格点，并将未占用、μ占用、ν占用以及μ和ν均占用的玻色子态分别关联到量子比特态 $|00\rangle$、$|01\rangle$、$|10\rangle$和 $|11\rangle$。因此，模拟需要 $2L$ 个量子比特；与不进行映射所需的 L^2 个量子比特相比，这大幅减少了所需数量，尤其是对于较大的晶格尺寸。我们在第II C节展示了晶格尺寸为 $L\sim\mathcal{O}(10)$时，在IBM量子计算机上进行的模拟结果。

我们的方法自然可以推广到更高维度。具体而言，一个 d 维高阶拓扑晶格可映射为一条由 d 个物种构成的相互作用一维链，并使用 d 量子比特表示链上的每个格点，从而提供足够的多体自由度，以编码每个格点的 2^d 占据基态。我们写作

$$\mathcal{H}^{d\mathrm{D}}_{\mathrm{lattice}}=\sum_{\mathbf{r}\in[1,L]^d}\sum_{\alpha=1}^{d}u^{\alpha}_{\mathbf{r}}c^{\dagger}_{\mathbf{r}+\hat{\mathbf{e}}_\alpha}c_{\mathbf{r}}+\mathrm{h.c.}, \tag{6}$$

其中，α 枚举发生跃迁的方向，$\hat{}\mathbf{e}_\alpha$ 是沿着 α的单位向量。与之前一样，跃迁系数在胞内值和胞间值之间交替，并且在各个方向上可以不同。简洁地写作，$u^{\alpha}_{\mathbf{r}}=[1-\pi(r_\alpha)]v^{\alpha}_{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}_\alpha)}+\pi(r_\alpha)w^{\alpha}_{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}_\alpha)}$

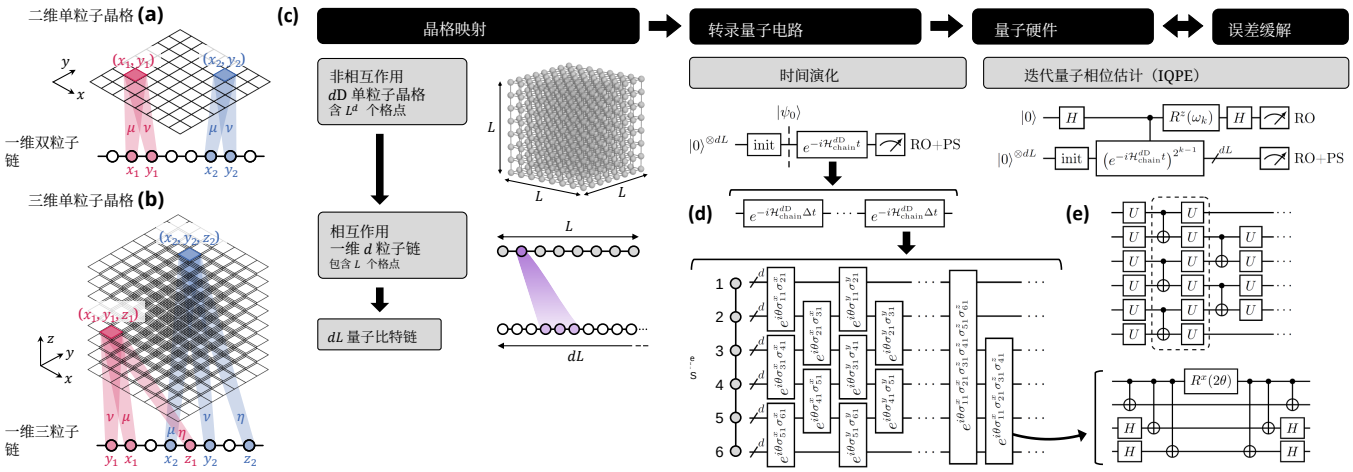

图2。 **在量子硬件上模拟高维晶格模型的方法示意图。(a)–(b)** 将高维晶格映射为一维相互作用链，以便在近期量子设备上进行量子模拟。具体而言，二维单粒子晶格可表示为双物种相互作用链；三维晶格可表示为具有三体相互作用的三物种链。 **(c)** 量子模拟方法概述：首先将高维晶格映射到相互作用链，再映射到量子比特；通过 Trotter 化和 **(d)** 等方法 **(e)** 基于拟设的重新编译，可构建用于动力学时间演化的量子电路，或用于探测谱的迭代量子相位估计（IQPE）电路。量子电路在量子处理器上运行，随后通过读出误差缓解（RO）和后选择（PS）对结果进行后处理，以减轻硬件噪声的影响。映射过程以及量子电路的构建和优化详见 方法 。

奇偶性函数 π，且$\mathbf{r}_\alpha$ 是非α 方向上的空间坐标——本研究所用跃迁参数值的详细信息见补充表1 。使用 d 硬核玻色子物种 $\{\omega^\alpha\}$ 表示d 维度，我们通过$c_{\mathbf{r}} \mapsto \prod_{\beta=1}^{d} \omega_{r_\beta}^{\alpha}$ 映射到相互作用链，得到

$$\mathcal{H}_{\text{chain}}^{d\text{D}} = \sum_{\mathbf{r}\in[1,L]^d} \sum_{\alpha=1}^{d} u_{\mathbf{r}}^{\alpha} \left[\left(\omega_{r_\alpha+1}^{\alpha}\right)^{\dagger} \omega_{r_\alpha}^{\alpha} \prod_{\beta=1}^{d} n_{r_\beta}^{\beta} \right] + \text{h.c.}, \tag{7}$$

其中，ω_ℓ^α 湮灭链上 ℓ 处的 α 物种硬核玻色子，而 n_ℓ^α 是 α 物种的数算符。在上面的 $d = 2$ 正方晶格中，我们有 $\mathbf{r} = (x, y)$ 和 $\{\omega^\alpha\} = \{\mu, \nu\}$。我们将考察的最高维高阶拓扑晶格是 $d = 4$四维超立方体，对于它，$\mathbf{r} = (x, y, z, w)$ 和 $\{\omega^\alpha\} = \{\mu, \nu, \eta, \xi\}$。总的来说，一个 d维晶格哈密顿量具有 $d \times 2^d$个不同的跃迁系数，因为有 d个不同的晶格方向，并且沿每个方向有 2^{d-1} 条不同的边，每条边都包含胞间跃迁和胞内跃迁这两种不同的跃迁振幅。适当调节这些系数，可以使稳健的高阶拓扑模式沿晶格的边界（角、边等）显现出来——各种晶格构型的示意图见图3–6，这些构型已在我们的实验中进行了研究。

因此，等效的相互作用一维链需要 dL 个量子比特才能实现，相较于直接模拟所需的 L^d （不采用映射）$\mathcal{H}_{\text{lattice}}^{d\text{D}}$ 大幅减少了所需资源。我们指出，如此显著的压缩之所以可行，是因为 HOT 本质上是一种方法单粒子现象。有关映射方案的更多详情和优化，请参阅。

B. 在量子硬件上进行模拟

通过我们的映射，一个具有 L^d 个格点的 d维高阶拓扑晶格$\mathcal{H}_{\text{lattice}}^{d\text{D}}$ 被映射到一条相互作用一维链 $\mathcal{H}_{\text{chain}}^{d\text{D}}$ 上，该链包含 dL 个量子比特，可在现有含噪中等规模量子设备上切实实现，用于 $L \sim \mathcal{O}(10)$和$d \leq 4$。虽然 $\mathcal{H}_{\text{chain}}^{d\text{D}}$ 中的相互作用不可避免地较为复杂，但下文将介绍如何在量子硬件上切实模拟 $\mathcal{H}_{\text{chain}}^{d\text{D}}$ 。

我们模拟高阶拓扑时间演化（HOT time-evolution）的一般框架概览如图所示 2。要演化一个初始态 $|\psi_0\rangle$，需要将幺正传播子 $U(t) = \exp\left(-i\mathcal{H}_{\text{chain}}^{d\text{D}} t\right)$ 实现为量子电路，使得该电路产生 $|\psi(t)\rangle = U(t)$，并能在演化结束时测量所需的可观测量。实现 $U(t)$ 的一种标准方法是 Trotter 分解，它在自旋$\mathcal{H}_{\text{chain}}^{d\text{D}}$ 基1/2 中对其进行分解，并将时间演化拆分为许多小步（详情见 方法 ）。然而，这种方法虽然直接，却会产生较深的电路，不适用于当代含噪声中等规模量子硬件。为压缩电路，

我们采用张量网络辅助的重新编译技术 [81–85]。我们利用 $\mathcal{H}^{d\mathrm{D}}_{\mathrm{chain}}$所具有的守粒子数对称性，这些对称性源于 $\mathcal{H}^{d\mathrm{D}}_{\mathrm{lattice}}$ 以及我们映射方式的性质（见 方法），从而提升宽度较大的电路（最多 32 个量子比特）的构建性能和质量。此外，为了在硬件噪声影响下提高数据质量，我们采用了一系列误差缓解技术，特别是读出误差缓解（RO），它能在测量过程中近似校正比特翻转错误 [19, 86], ；还采用后选择（PS）技术，舍弃落在非物理福克空间扇区中的结果 [19, 82, 87],，并对不同机器和量子比特链上的结果取平均（见方法）。

通过量子电路对$|\psi_0\rangle$ 施加实现 U（t）的操作后，我们对模拟量子比特进行末端计算基测量。由此获得 d 维晶格上的位点分辨占据密度 ρ（$\mathbf{r}$）$= \langle c^\dagger_{\mathbf{r}} c_{\mathbf{r}}\rangle = \langle \prod_{\alpha=1}^{d} n^{\alpha}_{r_\alpha}\rangle$，并通过占据保真度评估 $|\psi$（t）$\rangle$ 偏离 $|\psi_0\rangle$的演化程度； $|\psi_0\rangle$的占据密度为 ρ_0（$\mathbf{r}$）

$$0 \le \mathcal{F}_\rho = \left[\sum_{\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r})\rho_0(\mathbf{r})\right]^2 \le 1. \tag{8}$$

与态保真度 $\mathcal{F} = |\langle\psi_0|\psi\rangle|^2$ 相比，占据保真度 $\mathcal{F}_\rho$ 在量子硬件上测量所需的资源要少得多。

除了时间演化之外，我们还可以通过迭代量子相位估计（IQPE），直接探测模拟哈密顿量的能谱 $\mathcal{H}^{d\mathrm{D}}_{\mathrm{chain}}$。[88, 89]——参见 方法。具体而言，为了表征高阶拓扑系统的拓扑性质，我们使用 IQPE 探测在指数级受抑制（对 $L \gg 1$ 而言实际上为零）的能量处是否存在带隙中高阶拓扑模。与量子相位估计相比， [90, 91],IQPE 电路更浅且所需量子比特更少，因此更适合在含噪声中等规模量子硬件上实现。由于我们关注的是高阶拓扑模式，因此以最大局域化边界态作为 IQPE 的初始态。这些态很容易先验构造，先验，且与高阶拓扑本征态有良好的重叠（$> 80\%$ 态保真度）；我们据此考察 IQPE 是否持续收敛至零能量。这些态列于补充表2。

C. 二维HOT正方晶格

作为高阶拓扑晶格中维度最低的一种形式， $d = 2$ 交错方格晶格仅具有一种高阶拓扑模式——零维角模（图1a）。此前，二维晶格上的这类高阶拓扑角模已在各种超材料中实现 [92–101], 但迄今尚未在量子环境中实现。我们与之等效的一维硬核玻色子链，也是相互作用诱导的高阶拓扑的首次展示；在这一体系中，拓扑局域化并非由物理上的 SSH 类耦合或能带极化介导，而是源于其所有相互作用项共同产生的排斥效应。值得强调的是，我们在物理上实现的一维链包含高度非平凡的相互作用项，涉及多个格点——图3f中展示的一个 $L = 6$ 链实例已经包含了大量相互作用，尽管它比我们在量子硬件上模拟的 $L = 10$和 $L = 16$ 系统小得多。显而易见，$2 \times 2^d = 8$ 晶格上的不同耦合对应着8 种独特的相互作用类型，其中大多数是非局域的；但这并不妨碍在量子电路上实现它们。事实上，数字量子模拟器在实现实际上任意相互作用方面具有灵活性，因此能够实现复杂的相互作用哈密顿量项，这对于实现我们的量子设备模拟至关重要。

在我们的实验中，我们考虑三种不同情形：C0，不含拓扑角模；C2，在角 $(x, y) = (1, 1)$ 和 $(L,1)$处具有两个角模；C4，在四个角均具有角模。通过适当调节哈密顿量中的8 个耦合参数（式 4）即可得到这些情形——参数值见补充表 1 [102]。

我们首先展示，在 IBM 旋量子比特量子计算机上，可以测得构型 C0、C2 和 C4 中带隙中高阶拓扑模的正确简并度，如图3a所示。首先，我们使用一条 20量子比特链，在逻辑上编码一个 10×10 高阶拓扑晶格，并额外使用一个辅助量子比特进行迭代量子相位估计读出。每种情形下拓扑角模的数量，都可以通过迭代量子相位估计在量子硬件上测得的指数抑制能量带隙中态（红色）的简并度准确获得——详情见方法。通过数值（经典）对角化验证了这些带隙中模确实是角局域化的，如图3a的插图所示。

接下来，我们展示了在量子硬件上更大的32量子比特链中实现高精度动力学态演化。我们对 C0、C2 和 C4 构型的 16×16高阶拓扑晶格上的各种初态进行时间演化，并测量其最终的[2] 格点分辨占用密度 ρ（x， y）。所得占据保真度图（图 3b–3e）符合预期：局域于拓扑角的态存续时间最长；此外，这些结果也与精确对角化（ED）的参考数据高度吻合。例如，局域于角点（x_0, y_0） $=$(1, 1) 的态在 C2 和 C4 晶格构型中具有稳健性（图 3b），而局域于（x_0， y_0） $=$ (1， L) 角点的态仅在 C4 构型中具有稳健性（图 3c）。测得的格点分辨占用密度 ρ（x， y）也证实了这些保真度衰减趋势：占据保真度较低时，总会伴随从初始位置扩散开来的 ρ（x, y）

[2]每个时间数据点都需要终止时间演化电路并测量（塌缩）系统状态，数据采集持续到 $t = 0.8$ 保真度变化趋势变得明确为止。

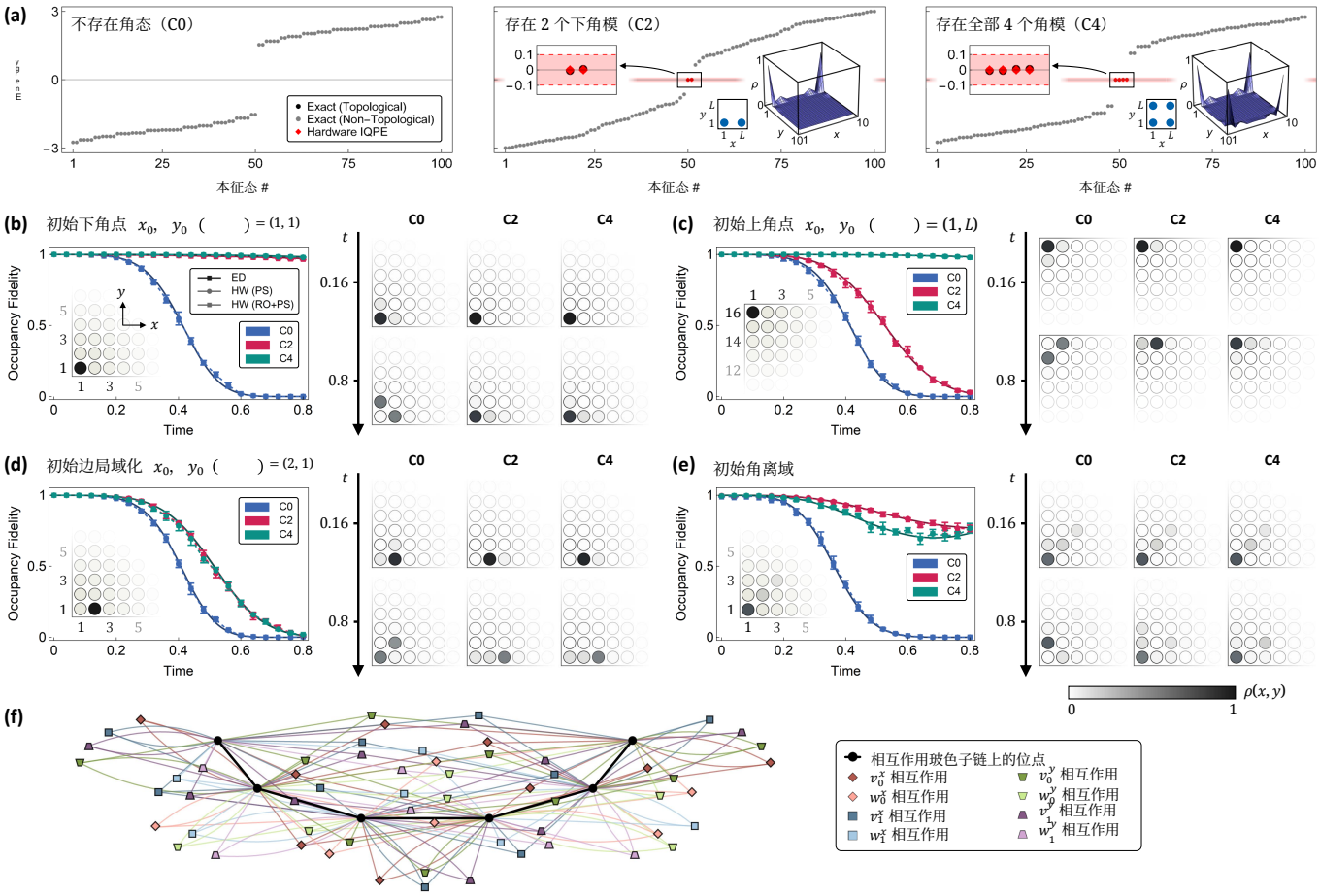

图3。**量子处理器对二维高阶拓扑零模的测量及其在保持态保真度中的作用**。（a）拓扑平庸的 C0 构型以及非平庸的 C2 和 C4 构型在 10×10 晶格上的有序本征能量。通过迭代量子相位估计，在一条20量子比特量子链上加一个辅助量子比特进行测量，结果分别对应于0、2和4个带隙中零模（红色菱形）；红色阴影带表示迭代量子相位估计能量分辨率。角态分布（右侧插图）及其他本征能量（黑色和灰色圆点）通过精确对角化数值获得。将 16×16晶格上的四个初态映射到32量子比特链后进行时间演化——**（b）—（c）**局域于角处，以突出拓扑区别；**（d）**局域于一条边上；**（e）**在角附近离域。左图显示不同晶格构型的占据保真度，分别由精确对角化（ED）和硬件（HW）获得；插图显示初态的位点分辨占据密度 $\rho(x,\ y)$（颜色越深表示密度越高）。右侧网格显示在两个较晚时刻通过硬件测得的占据密度。与稳健角态具有良好重叠的态仅表现出极小的演化。误差条表示在不同量子比特链和设备上重复实验的标准差。总体而言，初态与高阶拓扑本征态之间较大的重叠赋予系统拓扑鲁棒性，从而显著减缓衰减。**（f）**相互作用链哈密顿量示意图，该哈密顿量由母二维晶格映射而来，此处以较小的 6×6 正方晶格为例。相互作用玻色子链的物理位点以黑色表示，其多体相互作用以彩色顶点表示。

态，而高度局域化的态则具有较高的占据保真度。总体而言，初态与高阶拓扑本征态之间的强重叠赋予了其拓扑稳健性，从而显著减缓衰减；这一点从占据保真度 $\mathcal{F}_\rho$ 中显而易见，它们随时间推移始终接近于 1。相比之下，不具备拓扑保护的态，例如 C2 构型中局域于 (1，L) 的态，以及 C0 构型中的所有初态，会迅速去局域化并衰减。

即使初态位于远离晶格角的位置，无法获得充分的拓扑保护，我们的实验运行结果仍然准确。

在图 3d中，位于 $(x_0, y_0) = (2,1)$ 的初始态与角 (1,1)相邻，其保真度的衰减远早于图3b中的角部初态，即使对于 C2 和 C4 拓扑角态构型也是如此。尽管如此，其保真度演化仍与精确对角化参考数据相当吻合。同样，位于角部且具有一定离域性的初始态（图 3e）在角具有拓扑性质时，仍能获得一定程度的稳定性。

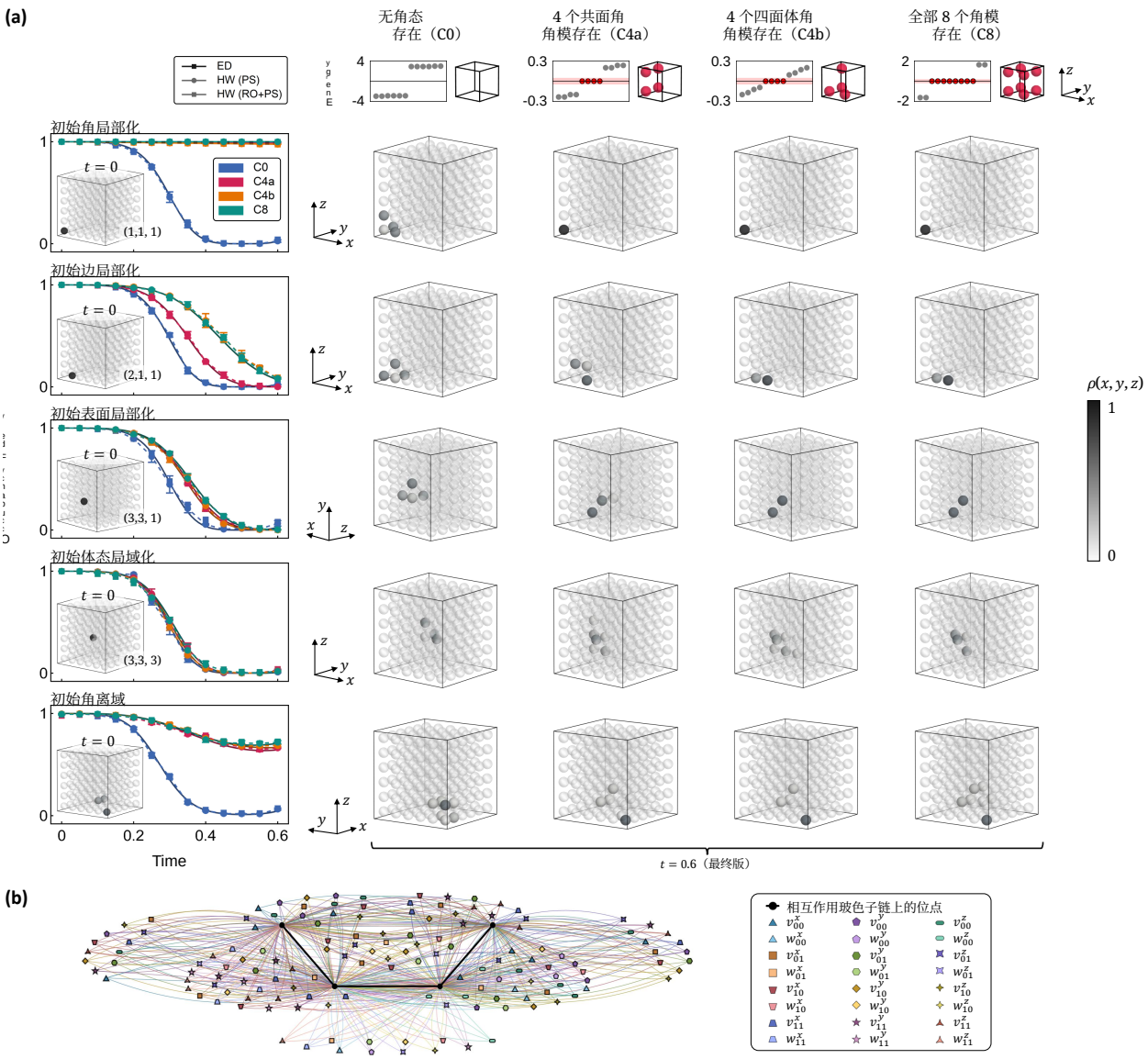

图 4. **交错立方晶格上高阶拓扑角模的量子处理器测量结果。(a)** 标题行展示了拓扑平庸的 C0 构型，以及互不等价的非平庸 C4a、C4b 和 C8 构型的能谱。这些构型分别具有 0、4 和 8 个带隙中零模（红色菱形）；测量采用迭代量子相位估计，在一条包含 18 个量子比特和一个辅助量子比特的链上进行。红色阴影带表示迭代量子相位估计的能量分辨率。右侧示意图展示了拓扑稳健角的位置。后续各行描绘了五种初态的时间演化：初态映射到 $6 \times 6 \times 6$ 晶格上的一条 18 量子比特链，并分别局域于立方体的一个角、边、面或体态中，或离域于一个角的邻近区域。最左侧一列绘出了不同晶格构型的占据保真度，数据来自精确对角化（ED）和硬件（HW）；插图显示初态的位点分辨占据密度 $\rho(x,\ y,\ z)$（颜色越深表示密度越高）。中央网格展示了硬件在较晚时刻（$t\ =\ 0.6$）测得的占据密度，对应于相应的初态（行）和晶格构型（列）。误差棒表示在不同量子比特链和设备上重复实验所得结果的标准差。同样，局域在拓扑角附近的初态表现出更高的占据保真度。**(b)** 实现最小 $4 \times 4 \times 4$ 立方晶格的相互作用链哈密顿量示意图。链上的格点以黑色表示；连接链上多个格点的彩色顶点表示相互作用项。

D. 三维高阶拓扑立方晶格

接下来，我们将研究扩展到三维交错立方晶格，该晶格承载三阶高阶拓扑角模（图1a）。这些难以捉摸的角模必须迄今仅在经典平台上实现 [103–107] 或合成电子晶格中实现 [108]。与二维情形相比，在量子硬件上将三维高阶拓扑晶格（方程6）实现为一维相互作用链（方程7）更为复杂。与正方形晶格相比，交错立方晶格具有更高的维数，这一点体现为相互作用链上多格点相互作用项的密度更大。对于最小

格晶格，这一点体现为相互作用链上多格点相互作用项的密度更大。在图4b 中展示了最小 $4\times4\times4$ 晶格的情况，其中各种 $d=3$体相互作用的组合产生了涌现的角态稳健性（在一维链上表现为最高可达三体的边界聚集）。

在量子硬件上，我们实现了代表 $6\times6\times6$ 立方晶格的18量子比特链，包含四种构型，具体而言，分别是平庸晶格（C0）、两种几何上不等价且具有四个拓扑角的构型（C4a、C4b），以及具有全部 $2^3=8$拓扑角的构型（C8）。与二维高阶拓扑晶格类似，我们首先给出零能拓扑模的简并度（图4a的表头行），并展示通过迭代量子相位估计（IQPE）准确获得的低能谱数据（红色菱形）。

从图4a第一行可以明显看出，局域于拓扑角的初态具有显著的鲁棒性。具体而言，测得的格点分辨占用密度 $\rho(x,y,z)$（最右侧四列）表明，在 C4a、C4b 和 C8 构型中，$(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$ 角初态的局域化得以维持，且测得的占据保真度接近于 1。相比之下，C0构型不具有拓扑角模，其初始角局域态会迅速离域。离开角后，与拓扑角相邻的边缘局域态也获得了轻微但确实存在的稳定性（图4a第二行）；与拓扑平庸的 C0 晶格相比，C4a、C4b 和 C8 构型中 $(x_0,y_0,z_0)=(2,1,1)$ 态的衰减较慢，体现了这一点。对于局域在离拓扑角更远处的态，这种鲁棒性会减弱，例如表面局域态（第三行）；而对于局域在体态中的态（第四行），这种鲁棒性几乎无法察觉，因为它们在所有拓扑构型中都会迅速衰减。略微离域、位于角附近的初态在该角为拓扑角时会受到一定保护，但当该角为平庸角时则不稳定（图4a第五行）。我们再次强调，量子硬件模拟结果与理论精确对角化预测在定量上相符。

E. 四维四维超立方体超晶格——高阶拓扑角与边缘模式

现在，我们转向关键结果——在含噪声中等规模量子计算硬件上模拟四维交错超立方体高阶拓扑晶格。真正的四维晶格难以在大多数实验平台上进行模拟，除少数例外外，[109, 110], 迄今大多数研究都依赖合成维度[27, 58, 111, 112]。相比之下，利用我们的精确映射（方程6 和7），该映射利用量子计算机可访问的指数级庞大多体希尔伯特空间，可在物理一维自旋链上直接模拟超立方体晶格，而空间维度的数量仅受量子比特数限制。超立方体晶胞可视化为两个相互交织的三维立方体（由 x、y、z轴张成），它们位于相邻的 w切片中（图5）。边长为 L 的完整超立方体晶格，则表示为一系列 w 坐标各异的立方体，由内向外依次堆叠，其中内侧和外侧的线框立方体分别对应 $w=1$和 $w=6$ 切片。四维高阶拓扑晶格结构更为复杂，具有多种高阶拓扑角、边缘模和表面模（图1a）；我们目前重点关注四阶（十六极）高阶拓扑角模，以及三阶（八极）高阶拓扑边缘模。

首先，我们在量子处理器上实现了一个 $dL=4\times6=24$ 量子比特链，用以编码我们的 $6\times6\times6\times6$ 高阶拓扑角四维超立方体。现在，4体（8算符）相互作用共有 $d\times2^d=64$ 种类型——其中一半如图 5d所示，该图仅展示了最小$L=4$ 情形。正如我们在第 IIA 节中讨论的那样，这些相互作用各自都是 $d-1$ 密度项与一个跃迁过程的乘积，后者作用于编码四维超立方体上耦合方向的粒子种类。在具有非轴向排列跃迁的一般模型中，这些相互作用可以是多达 d 个跃迁过程的乘积。正如我们接下来将要展示的，尽管相互作用十分复杂，我们硬件模拟中的信噪比（图 5a）仍然相当不错。

在图 5中，我们考察构型 C0、C4、C8 和 C16，它们分别对应拓扑平庸情形，以及分别承载四个、八个和全部十六个高阶拓扑角模的晶格构型，如标题行中的示意图所示。与二维和三维高阶拓扑晶格类似，在量子硬件上测得的格点分辨占据密度 $\rho(x,\ y,\ z,\ w)$ 和占据保真度表明，局域于拓扑角的初态具有很强的鲁棒性；C4、C8 和 C16 情形下高度局域化的末态清楚地展示了这一点（图 5a）。然而，其稳定性如今略低，这在一定程度上是因为状态能够扩散进入更宽广的四维构型空间；时间演化后部分占用格点形成的彩色云团展现了这一点。显然，随着初态从局域于角转为局域于边和表面，其稳定性会降低（图 5b）。

接下来，我们研究一种支持高阶拓扑边缘模的晶格构型（文献中通常称为拓扑铰链态 [48]）。迄今为止，我们只在拓扑角位点观察到了拓扑鲁棒性（图5）；但通过适当调整参数（见补充表1），可以使拓扑模沿着整条边分布。图 6的标题行展示了这一点，其中拓扑模沿着 y-边分布。由于我们的高阶拓扑晶格由交替排列的 SSH 链网格构成，我们预计拓扑边缘的波函数支撑（非零占用率）仅出现在交替位点上，这与中隙零能模的累积占据密度一致。量子硬件上测得的位点分辨占据密度和占据保真度证实了这一点，并表明初始

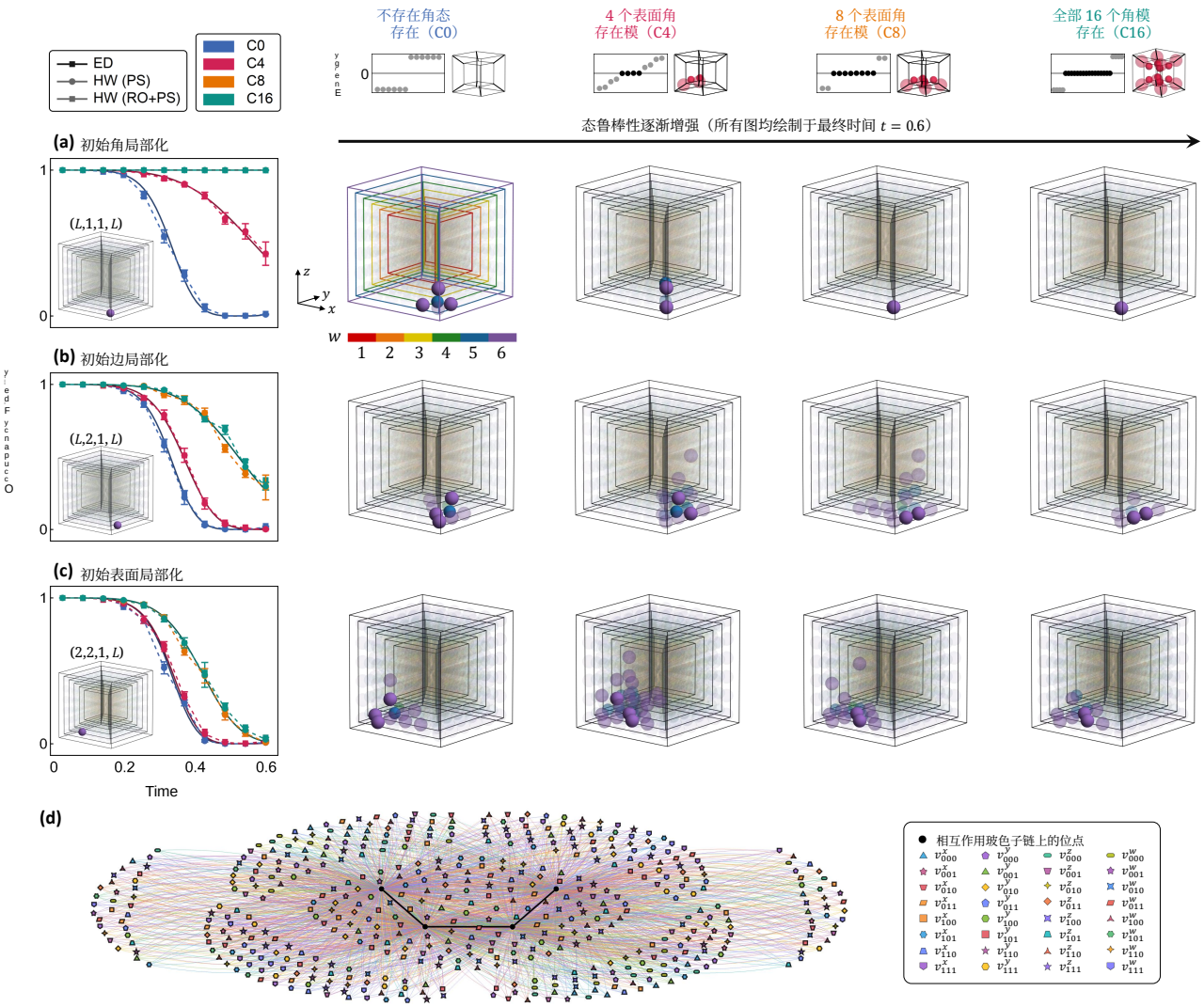

图 5. **量子处理器对四维超立方体晶格上高阶拓扑角模的测量**。A $L = 6$ 四维超立方体晶格示意为六个立方体切片，分别以 w 为索引，并在色彩图上突出显示。首行展示了通过数值计算得到的能谱，分别对应拓扑平庸的 C0 构型和非平庸的 C4、C8 及 C16 构型。这些构型分别具有 0、4、8 和 16 个带隙中零模（黑色圆圈）。右侧示意图展示了拓扑稳健角的位置。后续各行展示了三个初态在 $6 \times 6 \times 6 \times 6$ 晶格上的时间演化，该晶格映射到一条由 24 个量子比特组成的链上；初态分别局域于（**a**）一个角、（**b**）一条边和（**c**）一个面。最左列绘制了通过精确对角化（ED）和量子硬件（HW）获得的各种晶格构型的占据保真度，插图显示了初态的位点分辨占据密度 $\rho(x, y, z, w)$。中央网格显示了在最终模拟时间（$t = 0.6$）于硬件上测得的占据密度，对应于相应的初态（行）和晶格构型（列）。各格点（球体）的颜色表示其 w坐标，颜色饱和度表示该格点的占用率；未占用的格点以半透明显示。误差棒表示在不同量子比特链和设备上重复实验的标准差。与低维对应初态相比，与拓扑角重叠较少的初态稳定性略低，因为这些态会扩散到更宽广的四维构型空间中。（**d**）实现最小 $4 \times 4 \times 4 \times 4$ 四维超立方体晶格的相互作用链哈密顿量示意图。链上的格点以黑色表示；连接链上多个格点的彩色顶点表示相互作用项。为避免图示过于杂乱，仅显示 $v_{\boldsymbol{\pi}}^{\alpha}$ 耦合；哈密顿量中还包含一组相应的 $w_{\boldsymbol{\pi}}^{\alpha}$ 耦合，但未在图中标出。

局域化在具有拓扑波函数支撑的格点上的态稳健得多（图 6a–6b），也就是说，$(x_0, y_0, z_0, w_0) = (1, 3, 1, L)$ 与位于 $(1, y, 1, L)$ 的拓扑模重叠，$y \in \{1, 3, 5\}$ 格点，因此是稳健的；但 $(1, 2, 1, L)$ 则不是。初始态的稳定性随着远离角，占用率会降低；例如，通过比较 $(1,\ 1,\ 1,\ L)$ 和 $(1,\ 3,\ 1,\ L)$ 在图 6a–6b中所示的占据保真度和最终占据云的大小即可看出；这正是拓扑边缘模的衰减 y分布所预期的结果。最后，

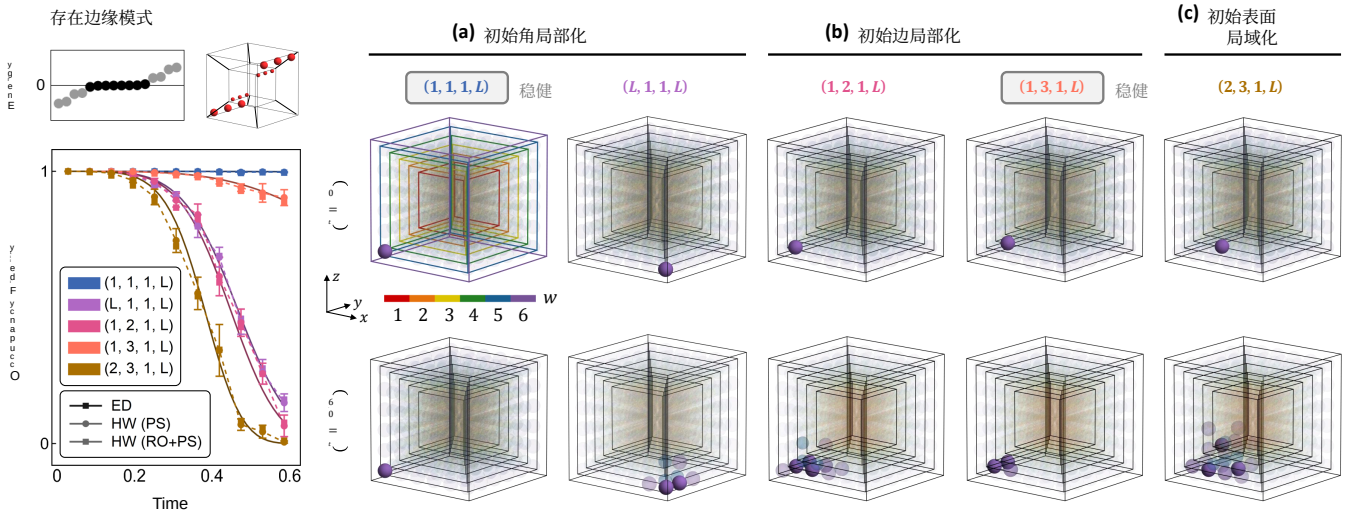

图 6. **量子处理器测量四维超立方体晶格上高阶拓扑边缘（或铰链）模式的鲁棒性**。我们的映射有助于实现任意所需的高阶拓扑模式，不仅限于前述的角态示例。左侧标题行展示了包含拓扑非平凡边缘的超立方体构型的能谱（带隙中态能量以黑色表示）。 accompanying 示意图突出显示了具有拓扑边缘波函数支撑的交替格点。后续各列展示了映射到 24 量子比特链上的 $6 \times 6 \times 6 \times 6$ 晶格的位点分辨占据密度 $\rho(x,\ y,\ z,\ w)$：在量子硬件上于 $t = 0$ （第一行）和最终模拟时间 $t = 0.6$ （第二行）测量所得的三组不同实验结果。（**a**）与非拓扑边缘上的角局域态相比，拓扑边缘上的角局域态更加稳健。（**b**）在拓扑非平凡边缘上，局域于具有拓扑波函数支撑的格点上的态，比局域于不具有该支撑的格点上的态更加稳健。（**c**）远离拓扑边缘的表面局域态扩散成大范围的占据云。左下角总结了各种初态的占据保真度，这些数据通过精确对角化（ED）和硬件（HW）获得。误差线表示在不同量子比特链和设备上重复实验所得结果的标准差。

我们的测量证实，表面局域态不具备拓扑保护（图 6c），因为它们局域在远离拓扑边的位置。值得注意的是，在我们的一维量子比特链上，无需额外困难即可对四维晶格内部进行此类测量；但在其他平台上，即使是电学（拓扑电学）电路，实现这一点也可能面临重大挑战。

F. 资源缩放

我们将一个 d 维高阶拓扑晶格映射到一条相互作用一维链，这种方法大幅减少了模拟所需的量子比特数量，并在实现本文展示的硬件实验中发挥了关键作用。这里，我们进一步说明，在量子计算机上采用这种映射进行模拟，相较于在经典计算机上进行精确对角化[3]，能够节省资源；尤其是在晶格维数 d 和线性尺寸 L较大时。

具体而言，我们考虑以下广义类型的模拟任务：给定初始态 $|\psi_0\rangle$，我们希望将其时间演化至 $|\psi(t)\rangle$，并提取局域可观测量 O 的期望值；也就是说，对于半径为 l 且与 L 无关的固定邻域，$\langle O\rangle$ 仅取决于晶格上的 $\mathcal{O}(l^d)$ 个格点。我们不考虑 $|\psi_0\rangle$ 的态制备资源，因为根据状态[4]的具体定义方式，相关成本可能有很大差异。不过，我们会考虑计算 $\langle O\rangle$ 的测量成本。为确保比较有意义，我们假设构造量子电路时采用一阶泡利基底 Trotter化，因此给定晶格哈密顿量后，电路的制备在算法上是直接明了的。作为基准，对一个维度为 d、长度为 L 且含单个粒子的系统进行精确对角化（ED），通常需要 $\mathcal{O}(L^{3d})$ 的运行时间和 $\mathcal{O}(L^{2d})$ 的稠密经典存储，才能完成此类任务 [113]。

[3]对于晶格维数为 $d > 1$ 且需要演化的初始态（包含任意纠缠）这一一般情形，目前尚不清楚其他经典方法（例如张量网络技术）是否比精确对角化更具资源优势。

[4] 例如，$|\psi_0\rangle$ 以显式态矢量形式提供的 $|\psi_0\rangle$ 可被精确对角化直接处理，但可能需要张量网络方法进行解析，并且难以由量子平台初始化。相反，量子电路预言机可由量子平台直接使用，但经典平台可能需要对其进行代价高昂的仿真。

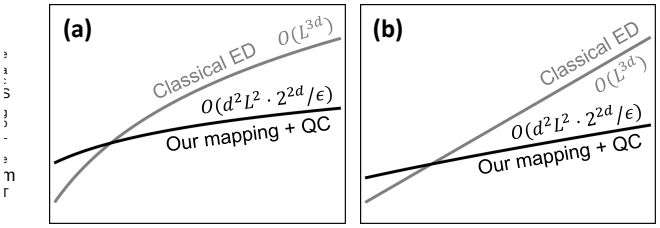

图7. **有利的资源缩放**。 对复杂度与我们的高阶拓扑晶格相近的 d 维、尺寸为 L 的晶格哈密顿量进行动力学模拟所需渐近计算时间的比较。对于**(a)** 固定晶格维数 d 、增大晶格尺寸 L 的情况，我们的方法在量子计算机（QC）上的耗时随 L^2 增长，而通过经典精确对角化（ED）则随 L^{3d} 的更高次幂增长。对于**(b)** 固定 L 、改变 d 的情况，我们的方法表现出良好的缩放特性，耗时随 4^d 增长，而精确对角化则随 $(L^3)^d$ 增长。我们假设采用传统 Trotter 化构造电路；当 L 和 d 较大时，我们的映射与量子模拟方法相较于经典数值方法（例如 精确对角化）能够带来资源优势。

使用我们的映射直接实现一般的哈密顿量，每个特罗特步需要 $\mathcal{O}\left(dL^d \cdot 2^d\right)$ 个泡利串（见方法）；其中允许对晶格每条边上的跃迁（数量随系统规模增长）分别进行调节。然而，物理上相关的晶格通常只包含一组有规律的跃迁过程，其参数数量次广延。具体而言，在我们考虑的高阶拓扑晶格中，沿每个轴的跃迁振幅 $u_{\mathbf{r}}^{\alpha}$ 仅 α 取决于 α 以及坐标$\mathbf{r}$的奇偶性。鉴于不同跃迁的数量次广延，晶格哈密顿量可以写成更有利的因式分解形式，从而使每个特罗特步所需的泡利串数量变为 $\mathcal{O}\left(dL \cdot 2^{2d}\right)$（见方法）。将其分解为硬件门集后，在量子比特之间全连接的假设下，时间演化电路的门数在模拟精度为 ϵ 时，在最坏情况下按 $\mathcal{O}\left(d^2L^2 \cdot 2^{2d}/\epsilon\right)$ 的规模增长。重要的是，对量子比特链施加最近邻连接限制（如实际的 IBM 处理器所采用的连接方式，见图8）并不会改变这一上界。关键在于， d 不会随 L 呈指数增长（形式为 $\sim L^d$），这与经典精确对角化不同。

对于较大的 L 和 d，电路准备和执行时间可能低于经典精确对角化的 $\mathcal{O}\left(L^{3d}\right)$ 运行时间。我们在图 7中对此进行了说明，该图定性比较了量子模拟方法与精确对角化的运行时间扩展情况。我们假设硬件上的执行时间随电路中的门数 $\mathcal{O}\left(d^2L^2 \cdot 2^{2d}/\epsilon\right)$增长，且忽略了对作用于不相交量子比特的门进行并行化所带来的加速 [114, 115]。电路构建期间的经典内存使用量同样受到限制，通过以流式方式构建和执行门，可直接将其降至 $\mathcal{O}(dL)$ ；而在读出期间，最坏情况下的内存使用量为 [116, 117], ，用于计算 $\mathcal{O}\left(2^{ld}\right)$ ，可降至 $\langle O \rangle$。

假设可通过量子电路 [118, 119]实现常数开销的基变换，将 O 的分量映射到固定数量的测量量子比特的计算基上。

有利的资源缩放（运行时间和内存），加上所需量子比特数 dL 较少，表明我们的映射量子模拟方法具有良好的可扩展性，尤其有望实现更大、维数更高的高阶拓扑晶格。不过，我们再次强调，未经额外优化的 Trotter 化电路仍然过深，现阶段的 NISQ 硬件基本无法切实运行。使用量子位元硬件架构取代量子比特可使电路更浅 [120–122]；具体而言，在能够高效、准确地执行单量子位元和双量子位元操作 [123, 124] 的前提下，使用局域希尔伯特空间维数为 $\geq 2^d$ 的量子位元，而非一组 d 个量子比特，可以在一定程度上避免对长程多位点门进行分解。尽管如此，要充分发挥上述复杂拓扑晶格量子模拟的潜力，很可能至少需要容错量子计算，或误差特性和退相干时间大幅改善的量子设备。

G. 讨论与展望

尽管已有大量超材料和经典系统展示了高维拓扑相或高阶拓扑相 [48, 57, 92, 97, 100, 101, 103, 125–129], ，但这些典范拓扑态尚未在含噪声中型量子平台上直接模拟。近期，数字量子计算机展示了多种神秘的凝聚态物理现象，从离散时间晶体 [130, 131] 到拓扑相 [81, 132–136], ；这些成果表明，尽管受到量子门保真度有限和退相干时间较短等硬件限制，数字量子计算机仍具有令人期待的能力。尽管量子硬件开发和算法不断快速进步，鉴于所需量子比特数量极其庞大，在量子计算机上模拟高阶拓扑相依然十分困难。

通过充分利用量子计算机可访问的指数级庞大多体希尔伯特空间，我们首次在量子环境中模拟了高达四维的高阶拓扑哈密顿量。我们不仅准确测量了初态的密度演化，并展示了其源于高阶拓扑的鲁棒性，还明确测量了其中隙拓扑能谱；该能谱反映了高维晶格所承载的简并高阶拓扑模数量。我们克服了含噪声中等规模量子模拟所面临的挑战，为进一步实验研究高阶拓扑现象铺平了道路；鉴于量子材料高阶拓扑候选体系十分稀少，这项工作尤具价值。

尽管这超出了本文讨论的高阶拓扑（HOT）范畴，我们仍要指出，

类似的映射方案也适用于相互作用晶格，但每个量子链格点所需的局域希尔伯特空间维数更大，耦合也更复杂。具体而言，要模拟最多包含 m 个粒子的相互作用d维晶格，可以在链上使用 m 份 d 种粒子；在最坏情况下，晶格上的跃迁过程会转化为涉及链上 md个粒子的相互作用。在这种方案中，只需 $\mathcal{O}(mdL)$ 个量子比特即可实现该链，具体数量还可能根据晶格结构进一步减少。

III. 致谢

J.M.K. 和 T.T. 感谢新加坡国立大学的 Wei En Ng 和 Yong Han Phee 提供有益的讨论。作者感谢 IBM Quantum 服务在本研究中的使用。文中观点仅代表作者，不反映 IBM 或 IBM Quantum 团队的官方政策或立场。

IV. 作者贡献

C.H.L. 发起并监督了该项目，并撰写了部分稿件。J. M.K. 开发了大部分量子模拟代码库，在模拟器和硬件上进行了实验，并撰写了部分稿件。T.T. 为代码库作出了贡献，进行了实验，并撰写了部分稿件。C.H.L. 感谢新加坡国家研究基金会通过其 QEP2.0 计划提供资助（NRF2021-QEP2-02-P09）。所有作者均分析了计算结果和实验结果。稿件反映了所有作者的贡献。

V. 数据可用性

支持本研究结论的数据可根据合理请求向通讯作者获取。

VI. 代码可用性

本研究所用代码可根据合理请求向通讯作者索取。

VII. 竞争利益

作者声明不存在竞争利益。

[1] E. J. Zhang, S. Srinivasan, N. Sundaresan, D. F. Bogorin, Y. Martin, J. B. Hertzberg, J. Timmerwilke, E. J. Pritchett, J.-B. Yau, C. Wang, 等, 《通过对transmon量子比特进行激光退火实现高性能超导量子处理器》, Sci. Adv. 8, eabi6690 (2022年). [2] L. B. Nguyen, G. Koolstra, Y. Kim, A. Morvan, T. Chis- tolini, S. Singh, K. N. Nesterov, C. Jünger, L. Chen, Z. Pedramrazi, B. K. Mitchell, J. M. Kreikebaum, S. Puri, D. I. Santiago, 和 I. Siddiqi, 《高性能fluxonium量子处理器蓝图》, PRX Quantum 3, 037001 (2022年). [3] P. Jurcevic, A. Javadi-Abhari, L. S. Bishop, I. Lauer, D. F. Bogorin, M. Brink, L. Capelluto, O. Günlük, T. Itoko, N. Kanazawa, 等, 《在超导量子计算系统上演示量子体积64》, 《量子科学与技术》6, 025020 (2021). [4] C. Monroe, W. C. Campbell, L.-M. Duan, Z.-X. Gong, A. V. Gorshkov, P. W. Hess, R. Islam, K. Kim, N. M. Linke, G. Pagano, P. Richerme, C. Senko, 和 N. Y. Yao, 《利用囚禁离子对自旋系统进行可编程量子模拟》, 《现代物理评论》93, 025001 (2021). [5] C. D. Bruzewicz, J. Chiaverini, R. McConnell, 和 J. M. Sage, 《囚禁离子量子计算：进展与挑战》, Appl. Phys. Rev. 6, 021314 (2019年). [6] H. Bernien, S. Schwartz, A. Keesling, H. Levine, A. Om- ran, H. Pichler, S. Choi, A. S. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, 等, 《在51原子量子模拟器上探测多体动力学》, 《自然》551, 579 (2017).

[7] S. Ebadi, T. T. Wang, H. Levine, A. Keesling, G. Semeghini, A. Omran, D. Bluvstein, R. Samajdar, H. Pichler, W. W. Ho 等, 《256原子可编程量子模拟器上的物质量子相》, 《自然》595, 227 (2021)。[8] D. Bluvstein, A. Omran, H. Levine, A. Keesling, G. Semeghini, S. Ebadi, T. Wang, A. Michailidis, N. Maskara, W. W. Ho 等, 《驱动里德伯原子阵列中的量子多体动力学控制》, 《科学》371, 1355 (2021)。[9] P. Scholl, M. Schuler, H. J. Williams, A. A. Eberharter, D. Barredo, K.-N. Schymik, V. Lienhard, L.-P. Henry, T. C. Lang, T. Lahaye 等, 《利用数百个里德伯原子模拟二维反铁磁体》, 《自然》595, 233 (2021)。[10] M. Kim, K. Kim, J. Hwang, E.-G. Moon 和 J. Ahn, 《用于最大独立集问题的里德伯量子线》, 《自然·物理》18, 755 (2022)。[11] R. Shen, T. Chen, M. M. Aliyu, F. Qin, Y. Zhong, H. Loh 和 C. H. Lee, 《在里德伯原子阵列中观测杨-李临界性的提案》, 《物理评论快报》131, 080403 (2023)。[12] G. A. Quantum 等, 《超导量子比特量子计算机上的哈特里-福克》, 《科学》369, 1084 (2020)。[13] A. J. McCaskey, Z. P. Parks, J. Jakowski, S. V. Moore, T. D. Morris, T. S. Humble 和 R. C. Pooser, 《量子化学作为近期量子计算机的基准测试》, 《npj量子信息》5, 99 (2019)。[14] R. N. Tazhigulov, S.-N. Sun, R. Haghshenas, H. Zhai, A. T. Tan, N. C. Rubin, R. Babbush, A. J. Minnich 和

G. K.-L. Chan, 《在 Sycamore量子处理器上模拟具有挑战性的关联分子和材料模型》, PRX Quantum 3, 040318 (2022)。[15] S.-N. Sun, B. Marinelli, J. M. Koh, Y. Kim, L. B. Nguyen, L. Chen, J. M. Kreikebaum, D. I. Santiago, I. Siddiqi 和 A. J. Minnich, 《利用三量子比特 iToffoli 门（ 2023 2302 04271 ）计算[ ]频域分子响应性质》, arXiv: . quant-ph . [16] R. Samajdar, W. W. Ho, H. Pichler, M. D. Lukin 和 S. Sachdev, 《kagome 晶格上里德伯原子的量子相》, 美国国家科学院院刊 118, e2015785118 (2021)。[17] K. Xu, Z.-H. Sun, W. Liu, Y.-R. Zhang, H. Li, H. Dong, W. Ren, P. Zhang, F. Nori, D. Zheng 等, 《利用超导量子模拟器探测动力学相变》, Sci. Adv. 6, eaba4935 (2020)。[18] A. Browaeys 和 T. Lahaye, 《利用单独控制的里德伯原子研究多体物理》, 《自然·物理》16, 132 (2020)。[19] A. Smith, M. S. Kim, F. Pollmann 和 J. Knolle, 《在现有数字量子计算机上模拟量子多体动力学》, 《npj量子信息》5, 106 (2019)。[20] L. Bassman Oftelie, K. Liu, A. Krishnamoorthy, T. Linker, Y. Geng, D. Shebib, S. Fukushima, F. Shimojo, R. K. Kalia, A. Nakano 和 P. Vashishta, 《迈向在量子计算机上模拟材料动力学》, 《物理评论B》101, 184305 (2020)。[21] J. M. Koh, S.-N. Sun, M. Motta 和 A. J. Minnich, 《具有电路中途读出的超导量子处理器上的测量诱导纠缠相变》, 《自然·物理》 10.1038/s41567-023-02076-6 (2023)。[22] Y. Wu, W.-S. Bao, S. Cao, F. Chen, M.-C. Chen, X. Chen, T.-H. Chung, H. Deng, Y. Du, D. Fan, M. Gong, C. Guo, C. Guo, S. Guo, L. Han, L. Hong, H.-L. Huang, Y.-H. Huo, L. Li, N. Li, S. Li, Y. Li, F. Liang, C. Lin, J. Lin, H. Qian, D. Qiao, H. Rong, H. Su, L. S un, L. Wang, S. Wang, D. Wu, Y. Xu, K. Yan, W. Yang, Y. Yang, Y. Ye, J. Yin, C. Ying, J. Yu, C. Zha, C. Zhang, H. Zhang, K. Zhang, Y. Zhang, H. Zhao, Y. Zhao, L. Zhou, Q. Zhu, C.-Y. Lu, C.-Z. Peng, X. Zhu 和 J.-W. Pan, 《利用超导量子处理器实现强量子计算优势》, 《物理评论快报》127, 180501 (2021)。[23] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. Brandao, D. A. Buell, B. Burkett, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, R. Collins, W. Courtney, A. Dunsworth, E. Farhi, B. Foxen, A. Fowler, C. Gidney, M. Giustina, R. Graff, K. Guerin, S. Habegger, M. P. Harrigan, M. J. Hartmann, A. Ho, M. Hoffmann, T. Huang, T. S. Humble, S. V. Isakov, E. Jeffrey, Z. Jiang, D. Kafri, K. Kechedzhi, J. Kelly, P. V. Klimov, S. Knysh, A. Korotkov, F. Kostritsa, D. Landhuis, M. Lindmark, E. Lucero, D. Lyakh, S. Mandra, J. R. McClean, M. McEwen, A. Megrant, X. Mi, K. Michielsen, M. Mohseni, J. Mutus, O. Naaman, M. Neeley, C. Neill, M. Y. Niu, E. Ostby, A. Petukhov, J. C. Platt, C. Quintana, E. G. Rieffel, P. Roushan, N. C. Rubin, D. Sank, K. J. Satzinger, V. Smelyanskiy, K. J. Sung, M. D. Trevithick, A. Vainsencher, B. Villalonga, T. White, Z. J. Yao, P. Yeh, A. Zalcman, H. Neven 和 J. M. Martinis, 《利用可编程超导处理器实现量子霸权》

, 《自然》574 , 505 (2019年)。

[24] L. S. Madsen、F. Laudenbach、M. F. Askarani、F. Rortais、T. Vincent、J. F. Bulmer、F. M. Miatto、L. Neuhaus、L. G. Helt、M. J. Collins等, 《利用可编程光子处理器实现量子计算优势》, 《自然》606，75（2022）。[25] H.-S. Zhong、H. Wang、Y.-H. Deng、M.-C. Chen、L.-C. Peng、Y.-H. Luo、J. Qin、D. Wu、X. Ding、Y. Hu、P. Hu、X.-Y. Yang、W.-J. Zhang、H. Li、Y. Li、X. Jiang、L. Gan、G. Yang、L. You、Z. Wang、L. Li、N.-L. Liu、C.-Y. Lu和J.-W. Pan, 《利用光子实现量子计算优势》, 《科学》370，1460（2021）。[26] M. Mancini、G. Pagano、G. Cappellini、L. Livi、M. Rider、J. Catani、C. Sias、P. Zoller、M. Inguscio、M. Dalmonte等, 《在合成霍尔条带中观测中性费米子的手性边缘态》, 《科学》349，1510（2015）。[27] M. Lohse、C. Schweizer、H. M. Price、O. Zilberberg和I. Bloch, 《利用二维拓扑电荷泵探索四维量子霍尔物理》, 《自然》553，55（2018）。[28] J. Niu、T. Yan、Y. Zhou、Z. Tao、X. Li、W. Liu、L. Zhang、H. Jia、S. Liu、Z. Yan等, 《超导量子比特中高阶拓扑相及相关拓扑相变的模拟》, 《科学通报》66，1168（2021）。[29] G. Jotzu、M. Messer、R. Desbuquois、M. Lebrat、T. Uehlinger、D. Greif和T. Esslinger, 《利用超冷费米子实验实现拓扑Haldane模型》, 《自然》515，237（2014）。[30] T. Manovitz、Y. Shapira、N. Akerman、A. Stern和R. Ozeri, 《囚禁离子链中具有复杂几何结构和合成规范场的量子模拟》, PRX Quantum 1，020303（2020）。[31] O. Boada、A. Celi、J. I. Latorre和M. Lewenstein, 《额外维度的量子模拟》, 《物理评论快报》108，133001（2012）。[32] S. Nakajima、T. Tomita、S. Taie、T. Ichinose、H. Ozawa、L. Wang、M. Troyer和Y. Takahashi, 《超冷费米子的拓扑Thouless泵浦》, 《自然·物理》12，296（2016）。[33] P. T. Dumitrescu、J. G. Bohnet、J. P. Gaebler、A. Hankin、D. Hayes、A. Kumar、B. Neyenhuis、R. Vasseur和A. C. Potter, 《在囚禁离子量子模拟器中实现动力学拓扑相》, 《自然》607，463（2022）。[34] T. Ozawa、H. M. Price、A. Amo、N. Goldman、M. Hafezi、L. Lu、M. C. Rechtsman、D. Schuster、J. Simon、O. Zilberberg和I. Carusotto, 《拓扑光子学》, 《现代物理评论》91，015006（2019）。[35] J.-B. Bouhiron、A. Fabre、Q. Liu、Q. Redon、N. Mittal、T. Satoor、R. Lopes和S. Nascimbene, 《在四维中实现原子量子霍尔系统》（2022）, arXiv:2210.06322 [cond-mat.quant-gas]。[36] U. Warring、F. Hakelberg、P. Kiefer、M. Wittemer和T. Schaetz, 《用于多维量子模拟的囚禁离子架构》, Adv. Quantum Tech-nol. 3，1900137（2020）。[37] M. Z. Hasan和C. L. Kane, 《专题评论：拓扑绝缘体》, 《现代物理评论》82，3045（2010）。[38] C. L. Kane和E. J. Mele, 《石墨烯中的量子自旋霍尔效应》, 《物理评论快报》95，226801（2005）。[39] C. L. Kane和E. J. Mele, Z_2《拓扑序与量子自旋霍尔效应》, 《物理评论快报》95，146802（2005）。

[40] M. König、S. Wiedmann、C. Brüne、A. Roth、H. Buhmann、L. W. Molenkamp、X.-L. Qi和S.-C. Zhang，《碲化汞量子阱中的量子自旋霍尔绝缘体态》，《科学》318，766（2007）。[41] L. Fu、C. L. Kane和E. J. Mele，《三维拓扑绝缘体》，《物理评论快报》98，106803（2007）。[42] L. Fu和C. L. Kane，《具有反演对称性的拓扑绝缘体》，《物理评论B》76，045302（2007）。[43] J. Moore，《拓扑绝缘体：下一代》，《自然·物理》5，378（2009）。[44] Y. Gu、C. H. Lee、X. Wen、G. Y. Cho、S. Ryu和X.-L. Qi，《（$2+1$）维量子反常霍尔态与（$3+1$）维拓扑绝缘体之间的全息对偶》，《物理评论B》94，125107（2016）。[45] L. Li、S. Mu、C. H. Lee和J. Gong，《由谱绕数拓扑产生的量子化经典响应》，《自然·通讯》12，5294（2021）。[46] B. Xie、H.-X. Wang、X. Zhang、P. Zhan、J.-H. Jiang、M. Lu和Y. Chen，《高阶能带拓扑》，Nat. Rev. Phys. 3，520（2021）。[47] W. A. Benalcazar、B. A. Bernevig和T. L. Hughes，《量子化电多极绝缘体》，《科学》357，61（2017）。[48] F. Schindler、Z. Wang、M. G. Vergniory、A. M. Cook、A. Murani、S. Sengupta、A. Y. Kasumov、R. Deblock、S. Jeon、I. Drozdov、H. Bouchiat、S. Guéron、A. Yazdani、B. A. Bernevig和T. Neupert，《铋中的高阶拓扑》，《自然·物理》14，918（2018）。[49] R. Noguchi、M. Kobayashi、Z. Jiang、K. Kuroda、T. Takahashi、Z. Xu、D. Lee、M. Hirayama、M. Ochi、T. Shirasawa等，《由铋卤化物链范德华堆叠构成的三维材料中高阶拓扑绝缘体的证据》，Nat. Mater. 20，473（2021）。[50] L. Aggarwal、P. Zhu、T. L. Hughes和V. Madhavan，《铋和Bi0.92Sb0.08中高阶拓扑的证据》，《自然·通讯》12，4420（2021）。[51] F. Schindler、A. M. Cook、M. G. Vergniory、Z. Wang、S. S. Parkin、B. A. Bernevig和T. Neupert，《高阶拓扑绝缘体》，Sci. Adv. 4，eaat0346（2018）。[52] L. Trifunovic和P. W. Brouwer，《高阶拓扑能带结构》，《固体物理学现状（b）》258，2000090（2021）。[53] Z. Song、Z. Fang和C. Fang，《旋转对称性保护拓扑态的（$d-2$）维边缘态》，《物理评论快报》119，246402（2017）。[54] S. Franca、J. van den Brink和I. C. Fulga，《一种反常高阶拓扑绝缘体》，《物理评论B》98，201114（2018）。[55] B.-Y. Xie、H.-F. Wang、H.-X. Wang、X.-Y. Zhu、J.-H. Jiang、M.-H. Lu和Y.-F. Chen，《具有角态的二阶光子拓扑绝缘体》，《物理评论B》98，205147（2018）。[56] C. H. Lee、Y. Wang、Y. Chen和X. Zhang，《五维、六维及更高维量子霍尔系统的电磁响应》，《物理评论B》98，094434（2018）。[57] D. Zou、T. Chen、W. He、J. Bao、C. H. Lee、H. Sun和X. Zhang，《在非厄米拓扑电路中观测混合高阶皮肤拓扑效应》，《自然·通讯》12，7201（2021）。[58] H. Chen、H. Zhang、Q. Wu、Y. Huang、H. Nguyen、E. Prodan、X. Zhou和G. Huang，《创建合成》用于高阶拓扑声输运的合成空间，《自然·通讯》12，5028（2021）。[59] X.-L. Qi 和 S.-C. Zhang，拓扑绝缘体与超导体，《现代物理评论》83，1057（2011）。[60] C. Nayak、S. H. Simon、A. Stern、M. Freedman 和 S. Das Sarma，非阿贝尔任意子与拓扑量子计算，《现代物理评论》80，1083（2008）。[61] A. Pandey、R. Yadav、M. Kaur、P. Singh、A. Gupta 和 S. Husale，利用拓扑绝缘体薄膜制备高性能柔性光电器件，《科学报告》11，832（2021）。[62] D. Pesin 和 A. H. MacDonald，石墨烯和拓扑绝缘体中的自旋电子学与赝自旋电子学，Nat. Mater. 11，409（2012）。[63] M. Roncaglia、M. Rizzi 和 J. I. Cirac，强三体耗散产生 Pfaffian态，《物理评论快报》104，096803（2010）。[64] C. H. Lee、W. W. Ho、B. Yang、J. Gong 和 Z. Papić，非阿贝尔分数量子霍尔态的 Floquet机制，《物理评论快报》121，237401（2018）。[65] B. Yang，分数量子霍尔流体中的统计相互作用与玻色子—任意子对偶性，《物理评论快报》127，126406（2021）。[66] M. Levin、B. I. Halperin 和 B. Rosenow，粒子-空穴对称性与 Pfaffian态，《物理评论快报》99，236806（2007）。[67] T. E. Pahomi、M. Sigrist 和 A. A. Soluyanov，二阶拓扑超导体中的马约拉纳角模编织，《物理评论研究》2，032068（2020）。[68] S. Ikegaya、W. B. Rui、D. Manske 和 A. P. Schnyder，非中心对称超导体中可调控的马约拉纳角模：隧穿谱学与边缘缺陷，《物理评论研究》3，023007（2021）。[69] M. Amundsen 和 V. Juričić，通过 p-波配对控制二维 $p+id$ 拓扑超导体中的马约拉纳模，《物理评论研究》4，013088（2022）。[70] Z. Wang、B. J. Wieder、J. Li、B. Yan 和 B. A. Bernevig，过渡金属二硫属化物中的高阶拓扑、单极子节点线及大费米弧的起源 $x\mathrm{te}_2$（$x=$ Mo、W），《物理评论快报》123，186401（2019）。[71] Q. Wei、X. Zhang、W. Deng、J. Lu、X. Huang、M. Yan、G. Chen、Z. Liu 和 S. Jia，声学晶体中的高阶拓扑半金属，Nat. Mater. 20，812（2021）。[72] T. Liu、J. J. He、Z. Yang 和 F. Nori，高阶 Weyl异常环半金属，《物理评论快报》127，196801（2021）。[73] E. Edvardsson、F. K. Kunst 和 E. J. Bergholtz，高阶拓扑相的非厄米扩展及其双正交体边对应，《物理评论B》99，081302（2019）。[74] T. Li、J. Ingham 和 H. D. Scammell，人工石墨烯：蜂窝超晶格中的非常规超导，《物理评论研究》2，043155（2020）。[75] T. Li、M. Geier、J. Ingham 和 H. D. Scammell，kagome和蜂窝系统中由排斥相互作用产生的高阶拓扑超导，《二维材料》9，015031（2021）。[76] H. D. Scammell、J. Ingham、M. Geier 和 T. Li，掺杂拓扑绝缘体中的内禀一阶与高阶拓扑超导，《物理评论B》

105，195149（2022）。[77] Y. Jiang、M.-L. Cai、Y.-K. Wu、Q.-X. Mei、W.-D. Zhao、X.-Y. Chang、L. Yao、L. He、Z.-C. Zhou 和 L.-M. Duan，磁场中二维 Weyl 方程的量子模拟，《物理评论快报》128，200502（2022）。[78] J. Argüello-Luengo、A. González-Tudela、T. Shi、P. Zoller 和 J. I. Cirac，光学晶格中的二维量子化学量子模拟，《物理评论研究》2，042013（2020）。[79] Z. Song、Z. Fang 和 C. Fang，$(d-2)$维旋转对称性保护拓扑态的边缘态，《物理评论快报》119，246402（2017）。[80] W. P. Su、J. R. Schrieffer 和 A. J. Heeger，聚乙炔中的孤子，《物理评论快报》42，1698（1979）。[81] J. M. Koh、T. Tai、Y. H. Phee、W. E. Ng 和 C. H. Lee，在量子计算机上稳定多个拓扑费米子，《npj量子信息》8，16（2022）。[82] J. M. Koh、T. Tai 和 C. H. Lee，数字量子计算机上相互作用诱导的手性拓扑动力学模拟，《物理评论快报》129，140502（2022）。[83] S.-N. Sun、M. Motta、R. N. Tazhigulov、A. T. Tan、G. K.-L. Chan 和 A. J. Minnich，利用量子虚时间演化对自旋系统有限温度静态与动力学性质进行量子计算，PRX Quantum 2，010317（2021）。[84] S. Khatri、R. LaRose、A. Poremba、L. Cincio、A. T. Sornborger 和 P. J. Coles，量子辅助量子编译，《量子》3，140（2019）。[85] K. Heya、Y. Suzuki、Y. Nakamura 和 K. Fujii，变分量子门优化（2018），arXiv:1810.12745 [quant-ph]。[86] A. Kandala、K. Temme、A. D. Córcoles、A. Mezzacapo、J. M. Chow 和 J. M. Gambetta，误差缓解扩展了噪声量子处理器的计算能力，《自然》567，491（2019）。[87] S. McArdle、X. Yuan 和 S. Benjamin，误差缓解数字量子模拟，《物理评论快报》122，180501（2019）。[88] M. Dobšíček、G. Johansson、V. Shumeiko 和 G. Wendin，使用单个辅助量子比特实现任意精度的迭代量子相位估计算法：双量子比特基准测试，《物理评论A》76，030306（2007）。[89] H. Mohammadbagherpoor 、 Y.-H. Oh 、 P. Dreher 、A. Singh、X. Yu 和 A. J. Rindos，在量子计算机上实现量子相位估计的改进方法，载于2019 IEEE重启计算国际会议（ICRC）（IEEE，2019），第1—9页。[90] J. D. Whitfield、J. Biamonte 和 A. Aspuru-Guzik，利用量子计算机模拟电子结构哈密顿量，Mol. Phys. 109，735（2011）。[91] A. Aspuru-Guzik、A. D. Dutoi、P. J. Love 和 M. Head-Gordon，分子能量的模拟量子计算，《科学》309，1704（2005）。[92] M. Serra-Garcia、V. Peri、R. Süsstrunk、O. R. Bilal、T. Larsen、L. G. Villanueva 和 S. D. Huber，声子四极拓扑绝缘体的观测，《自然》555，342（2018）。[93] C. W. Peterson、W. A. Benalcazar、T. L. Hughes 和 G. Bahl，具有拓扑保护角态的量子化微波四极绝缘体，《自然》555，346（2018）。

[94]B. Lv、R. Chen、R. Li、C. Guan、B. Zhou、G. Dong、C. Zhao、Y. Li、Y. Wang、H. Tao 等，《电路中准晶四极拓扑绝缘体的实现》，Commun. Phys. 4，108（2021年）。[95] E. Lustig、S. Weimann、Y. Plotnik、Y. Lumer、M. A. Bandres、A. Szameit 和 M. Segev，《合成维度中的光子拓扑绝缘体》，《自然》567，356（2019年）。[96] X.-D. Chen、W.-M. Deng、F.-L. Shi、F.-L. Zhao、M. Chen 和 J.-W. Dong，《二阶拓扑光子晶体板中角态的直接观测》，《物理评论快报》122，233902（2019年）。[97] A. El Hassan、F. K. Kunst、A. Moritz、G. Andler、E. J. Bergholtz 和 M. Bourennane，《光子波导中的光角态》，Nat. Photonics 13，697（2019年）。[98] M. Li、D. Zhirihin、M. Gorlach、X. Ni、D. Filonov、A. Slobozhanyuk、A. Alù 和 A. B. Khanikaev，《具有长程相互作用的光子 kagome 晶体中的高阶拓扑态》，Nat. Photonics 14，89（2020年）。[99] J. Schulz、J. Noh、W. A. Benalcazar、G. Bahl 和 G. von Freymann，《利用轨道诱导的合成磁通实现光子四极拓扑绝缘体》，《自然·通讯》13，6597（2022年）。[100] S. I mhof、C. Berger、F. Bayer、J. Brehm、L. W. Molenkamp、T. Kiessling、F. Schindler、C. H. Lee、M. Greiter、T. Neupert 等，《拓扑电路中拓扑角模的实现》，《自然·物理》14，925（2018年）。[101] H. Xue、Y. Yang、F. Gao、Y. Chong 和 B. Zhang，《kagome 晶格上的声学高阶拓扑绝缘体》，Nat. Mater. 18，108（2019年）。[102] L. Li、M. Umer 和 J. Gong，《从二维和三维手征对称晶格系统的边缘绕数直接预测角态构型》，《物理评论B》98，205422（2018年）。[103] X. Ni、M. Weiner、A. Alu 和 A. B. Khanikaev，《受广义手征对称性保护的高阶拓扑声学态的观测》，Nat. Mater. 18，113（2019年）。[104] S. Liu、S. Ma、Q. Zhang、L. Zhang、C. Yang、O. You、W. Gao、Y. Xiang、T. J. Cui 和 S. Zhang，《三维拓扑电路中的八极角态》，Light Sci. Appl. 9，145（2020年）。[105] X. Ni、M. Li、M. Weiner、A. Alù 和 A. B. Khanikaev，《量子化声学八极拓扑绝缘体的演示》，《自然·通讯》11，2108（2020年）。[106] M. Weiner、X. Ni、M. Li、A. Alù 和 A. B. Khanikaev，《三维声学超材料中拓扑态的三阶层级演示》，Sci. Adv. 6，eaay4166（2020年）。[107] H. Xue、Y. Yang、G. Liu、F. Gao、Y. Chong 和 B. Zhang，《声学三阶拓扑绝缘体的实现》，《物理评论快报》122，244301（2019年）。[108] S. Kempkes、M. Slot、J. van Den Broeke、P. Capiod、W. Benalcazar、D. Vanmaekelbergh、D. Bercioux、I. S wart 和 C. Morais Smith，《电子高阶拓扑绝缘体中的稳健零能模》，Nat. Mater. 18，1292（2019年）。[109] Y. Wang、H. M. Price、B. Zhang 和 Y. Chong，《四维拓扑绝缘体的电路实现》，《自然·通讯》11，2356（2020年）。[110] W. Zhang、D. Zou、J. Bao、W. He、Q. Pei、H. Sun 和 X. Zhang

，《物理评论B》102，100102（2020）。[111] A. Dutt、M. Minkov、I. A. Williamson 和 S. Fan，合成维度中的高阶拓扑绝缘体，《Light Sci. Appl.》9，131（2020）。[112] X. Zhang、Y. Chen、Y. Wang、Y. Liu、J. Y. Lin、N. C. Hu、B. Guan 和 C. H. Lee，源自光子晶体缺陷的纠缠四维多组分拓扑态，《物理评论B》100，041110（2019）。[113]A. Weiße 和 H. Fehske，精确对角化技术，载于《计算多体物理》，H. Fehske、R. Schneider 和 A. Weiße 编（施普林格柏林海德堡，柏林、海德堡，2008年），第529–544页。[114] D. Venturelli、M. Do、E. Rieffel 和 J. Frank，使用时序规划器将量子电路编译到现实硬件架构，《量子科学与技术》3，025004（2018）。[115] C. Figgatt、A. Ostrander、N. M. Linke、K. A. Landsman、D. Zhu、D. Maslov 和 C. Monroe，通用离子阱量子计算机上的并行纠缠操作，《自然》572，368（2019）。[116] C. A. Ryan、B. R. Johnson、D. Ristè、B. Donovan 和 T. A. Ohki，动态量子计算的硬件，《科学仪器评论》88，104703（2017）。[117] L. Riesebos、B. Bondurant、J. Whitlow、J. Kim、M. Kuzyk、T. Chen、S. Phiri、Y. Wang、C. Fang、A. Van Horn 等，实时量子控制系统的模块化软件，载于《2022年IEEE量子计算与工程国际会议》（QCE）（IEEE，2022年），第545–555页。[118] I. Hamamura 和 T. Imamichi，利用纠缠测量高效评估量子可观测量，《npj量子信息》6，56（2020）。[119] P. Gokhale、O. Angiuli、Y. Ding、K. Gui、T. Tomesh、M. Suchara、M. Martonosi 和 F. T. Chong，通过划分为对易族，最大限度地减少变分量子本征求解器中的态制备（2019），arXiv:1907.13623 [量子物理]。[120] D. González-Cuadra、T. V. Zache、J. Carrasco、B. Kraus 和 P. Zoller，在里德堡平台上使用量子位高效模拟非阿贝尔规范理论，《物理评论快报》129，160501（2022）。[121] D. M. Kurkcuoglu、M. S. Alam、J. A. Job、A. C. Y. Li、A. Macridin、G. N. Perdue 和 S. Providence，量子位系统中的 φ^4 理论模拟（2021），arXiv:2108.13357 [量子物理]。[122] A. S. Nikolaeva、E. O. Kiktenko 和 A. K. Fedorov，使用量子位高效实现量子算法（2021），arXiv:2111.04384 [量子物理]。[123] M. Ringbauer、M. Meth、L. Postler、R. Stricker、R. Blatt、P. Schindler 和 T. Monz，基于囚禁离子的通用量子位量子处理器，《自然·物理》18，1053（2022）。[124] Y. Chi、J. Huang、Z. Zhang、J. Mao、Z. Zhou、X. Chen、C. Zhai、J. Bao、T. Dai、H. Yuan 等，可编程的基于量子位的量子处理器，《自然·通讯》13，1166（2022）。[125] C. W. Peterson、W. A. Benalcazar、T. L. Hughes 和 G. Bahl，具有拓扑保护角态的量子化微波四极绝缘体，《自然》555，346（2018）。[126]X. Zhang、H.-X. Wang、Z.-K. Lin、Y. Tian、B. Xie、M.-H. Lu、Y.-F. Chen和J.-H. Jiang，声子晶体中的二阶拓扑与多维拓扑相变，《自然·物理》15，582（2019年）。[127] M. Ezawa，非互易和互易系统中的非厄米高阶拓扑态及其电路实现，《物理评论B》99，201411（2019年）。[128] P. M. Lenggenhager、A. Stegmaier、L. K. Upreti、T. Hofmann、T. Helbig、A. Vollhardt、M. Greiter、C. H. Lee、S. Imhof、H. Brand等，在电路板上模拟双曲空间，《自然·通讯》13，4373（2022年）。[129] J. Noh、W. A. Benalcazar、S. Huang、M. J. Collins、K. P. Chen、T. L. Hughes和M. C. Rechtsman，光子中隙缺陷模的拓扑保护，Nat. Photonics 12，408（2018年）。[130] X. Mi、M. Ippoliti、C. Quintana、A. Greene、Z. Chen、J. Gross、F. Arute、K. Arya、J. Atalaya、R. Babbush等，量子处理器上的时间晶体本征态序，《自然》601，531（2022年）。[131] P. Frey和S. Rachel，在量子计算机的57个量子比特上实现离散时间晶体，Sci. Adv. 8，eabm7652（2022年）。[132] K. Choo、C. W. von Keyserlingk、N. Regnault和T. Neupert，利用IBM量子计算机测量对称性保护拓扑态的纠缠谱，《物理评论快报》121，086808（2018年）。[133] A. Smith、B. Jobst、A. G. Green和F. Pollmann，利用量子计算机穿越拓扑相变，《物理评论研究》4，L022020（2022年）。[134] D. Azses、R. Haenel、Y. Naveh、R. Raussendorf、E. Sela和E. G. Dalla Torre，含噪声量子计算机上对称性保护拓扑态的识别，《物理评论快报》125，120502（2020年）。[135] F. Mei、Q. Guo、Y.-F. Yu、L. Xiao、S.-L. Zhu和S. Jia，可编程量子处理器上拓扑物质的数字模拟，《物理评论快报》125，160503 2020（）。[136] T. Chen、R. Shen、C. H. Lee和B. Yang，含噪声中等规模量子时代量子处理器上AKLT态的高保真实现（2023年），arXiv:2210。13840 [quant-ph]。[137] A. W. Cross、L. S. Bishop、S. Sheldon、P. D. Nation和J. M. Gambetta，使用随机模型电路进行量子计算机验证，《物理评论A》100，032328（2019年）。[138] N. Moll、P. Barkoutsos、L. S. Bishop、J. M. Chow、A. Cross、D. J. Egger、S. Filipp、A. Fuhrer、J. M. Gam- betta、M. Ganzhorn等，在近期量子设备上使用变分算法进行量子优化，《量子科学与技术》3，030503（2018年）。[139] T. Jones和S. C. Benjamin，通过能量最小化实现稳健量子编译和电路优化，《量子》6，628（2022年）。[140] J. Gray，quimb：用于量子信息和多体计算的Python软件包，《开放源代码软件期刊》3，819（2018年）。[141] G. Andrew和J. Gao，l1正则化对数线性模型的可扩展训练，载于第24届国际机器学习会议论文集，ICML '07（计算机协会，美国纽约州纽约，2007年），第33–40页。[142] R. Malouf，最大熵参数估计算法的比较

自然语言学习会议，COLING- 02，第 20 卷（计算语言学协会，美国，2002 年），第 1–7 页。[143] R. Cleve、A. Ekert、C. Macchiavello 和 M. Mosca，《量子算法再探》，伦敦皇家学会会刊。A 辑：数学、物理与工程科学 **454**，339（1998）。[144] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，《量子计算与量子信息》（剑桥大学出版社，爱丁堡大楼，剑桥 CB2 8RU，英国，2000 年）。[145] A. Kandala、A. Mezzacapo、K. Temme、M. Takita、M. Brink、J. M. Chow 和 J. M. Gambetta，《用于小分子和量子磁体的硬件高效变分量子本征求解器》，《自然》**549**，242（2017）。[146] G. Aleksandrowicz、T. Alexander、P. Barkoutsos、L. Bello、Y. Ben-Haim、D. Bucher、F. Cabrera- Hernández、J. Carballo-Franquis、A. Chen、C. Chen、等，Qiskit：用于量子计算的开源框架（2019年）。

方法

量子硬件。我们的实验使用了 IBM 基于 transmon 的超导量子器件。在正方晶格上进行时间演化时，我们使用了 QV-32 设备 ibmq_manhattan（65 个量子比特）和 ibmq_brooklyn（65 个量子比特）；在立方体和超立方体晶格上进行时间演化时，我们使用了 QV-32 设备 ibmq_sydney（27 个量子比特）和 ibmq_toronto（27 个量子比特），以及 QV-128 设备 ibmq_mumbai（27 个量子比特）和 ibmq_montreal（27 个量子比特）。后一组 QV-128 设备也用于迭代量子相位估计（IQPE）。量子体积（QV）是衡量机器综合能力的近似指标，包括量子比特数量、门错误率和退相干时间 [137, 138]。作为性能的大致参考，这些设备的弛豫T_1和退相干 T_2时间平均为 $80\,\mu\text{s} \le T_1 \approx T_2 \le 130\,\mu\text{s}$。典型的单量子比特（$\sqrt{X}$）门错误率为$\mathcal{O}(10^{-4})$，典型的双量子比特（CX）门错误率为$\mathcal{O}(10^{-2})$。图8展示了 27 量子比特和 65 量子比特设备的量子比特布局。

硬核玻色子。我们所规定的映射将 d维非相互作用晶格变换为一维相互作用链，其中承载着硬核玻色子 $\{\omega^\alpha\}_{\alpha=1}^d$，它们满足标准的硬核玻色子混合对易关系

$$\left[\omega_\ell^\alpha, \omega_{\ell'\neq\ell}^\alpha\right] = \left[\omega_\ell^\alpha, \left(\omega_{\ell'\neq\ell}^\alpha\right)^\dagger\right] = \{\omega_\ell^\alpha, \omega_\ell^\alpha\} = 0, \tag{9}$$

对于链上的格点 ℓ，ℓ'。反对易关系禁止同一物种的两个玻色子在链上的任意格点 ℓ 双重占据。我们指出，对于高阶拓扑晶格的单粒子情形，由于 d维晶格上没有第二个粒子可供交换，因此可以忽略粒子统计。在我们的映射中选择硬核玻色子而非普通玻色子，可视为一种福克空间截断，有助于在量子计算机上进行模拟；与费米子映射相比，这也避免了依赖占据率的相位因子。同样，我们也可以选择让 $\{\omega^\alpha\}_{\alpha=1}^d$ 彼此对易。

受限扇区。我们的哈密顿量的对称性对其物理上允许的状态施加了约束。$\mathcal{H}_{\text{lattice}}^{d\text{D}}$ 和 $\mathcal{H}_{\text{chain}}^{d\text{D}}$ 各物种的粒子数守恒性质，以及我们映射的性质——将沿 α 轴的坐标编码为链上物种-α 玻色子的位置——意味着在任意时刻，链上每种物种恰好占据一个玻色子。位于这一福克空间扇区之外的状态（我们称之为受限扇区）在物理上并不

校准。如后文所述，我们在重新编译和后选择过程中利用了这一约束。

用量子比特表示。根据定义，

$$\omega_\ell^\alpha = \sum_{\mathbf{m}_\ell\in\{0,1\}^{d-1}} \begin{matrix} |m_\ell^1, \ldots, m_\ell^\alpha = 0, \ldots, m_\ell^d\rangle \\ \langle m_\ell^1, \ldots, m_\ell^\alpha = 1, \ldots, m_\ell^d| \end{matrix}, \tag{10}$$

其中 $|m_\ell^1$、……、$m_\ell^d\rangle$ 是链上格点 ℓ 处的福克基态，$m_\ell^\beta \in \{0,1\}$ 表示物种 β 的占用率。使用 d 个量子比特表示链上的每个格点，我们将

$$|m_\ell^1, \ldots, m_\ell^d\rangle = \bigotimes_{\alpha=1}^d |m_\ell^\alpha\rangle_{\text{q}}, \tag{11}$$

其中 $|0\rangle_{\text{q}}, |1\rangle_{\text{q}}$ 是量子比特的计算基态。

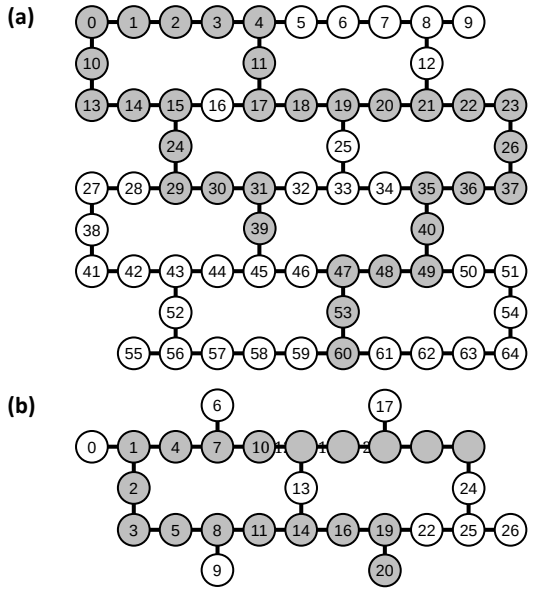

图 8。**量子硬件上的量子比特布局**。展示量子比特布局及其连接关系的示意图，连接关系位于 **（a）**65 量子比特和 **（b）**27 量子比特量子处理器上。相邻边连接的量子比特对之间可使用原生 CX 门。在（a）中的一个 32 量子比特链和（b）中的一个 18 量子比特链分别用于16×16 正方形和 $6 \times 6 \times 6$ 立方 HOT 晶格模拟，并以灰色突出显示。量子比特链的选择通过搜索方案完成，该方案可最小化估计的误差指标（见 方法）。

这确定了该表示

$$\begin{aligned}\omega_\ell^\alpha &= \sum_{\mathbf{m}_\ell\in\{0,1\}^{d-1}} \left[\bigotimes_{\beta=1}^d |m_\ell^\beta\rangle_{\text{q}}\right]_{m_\ell^\alpha=0} \left[\bigotimes_{\beta=1}^d \langle m_\ell^\beta|_{\text{q}}\right]_{m_\ell^\alpha=1} \\ &= \left(\mathbb{I}^{\alpha-1} \otimes \sigma^+ \otimes \mathbb{I}^{d-\alpha}\right)_\ell = \sigma_{\ell\alpha}^+,\end{aligned} \tag{12}$$

表示泡利升降算符 $\sigma^\pm = (\sigma^x \pm i\sigma^y)/2$，而 $\sigma_{\ell_\alpha}^\gamma$ 表示作用于第 ℓ^{th} 组中第 α^{th} 个量子比特上的 σ^γ，对应第 ℓ^{th} 个格点，每组包含 d 个量子比特。该表示满足 ω^α 和 $(\omega^\alpha)^\dagger$ 的混合硬核玻色子对易关系。数算符

$$n_\ell^\alpha = (\omega_\ell^\alpha)^\dagger \omega_\ell^\alpha = \sigma_{\ell\alpha}^+ \sigma_{\ell\alpha}^- = \mathbb{I}_{\ell\alpha}^z, \tag{13}$$

对于群 ℓ^{th} 中量子比特 α^{th} 的 $|1\rangle_{\text{q}}$ 子空间上的投影算符 $\mathbb{I}_{\ell\alpha}^z = (\mathbb{I}_{\ell\alpha} - \sigma_{\ell\alpha}^z)/2$。因此，对链上的每个量子比特进行终端计算基 (σ^z) 测量，就足以生成整个晶格上的位点分辨占据密度估计。具体而言，$\rho(\mathbf{r}) = \langle c_{\mathbf{r}}^\dagger c_{\mathbf{r}}\rangle = \langle \prod_{\alpha=1}^d n_{r_\alpha}^\alpha\rangle_{|1\rangle_{\text{q}}} = \langle \prod_{\alpha=1}^d \mathbb{I}_{r_\alpha\alpha}^z\rangle$ 是所有量子比特上的测量结果均代表晶格位点 $\mathbf{r}$ 的概率。我们采用如下约定：测量结果为 $|m\rangle_{\text{q}}$ 时记录比特 $m \in \{0,1\}$，因此 dL 个量子比特的结果是长度为 dL 的比特串。于是，$\rho(\mathbf{r})$ 是所有量子比特 $\{r_\alpha\alpha\}_{\alpha=1}^d$ 均为 1 的比特串所占的比例。随着测量样本数量增加，$\rho(\mathbf{r})$ 的统计可靠性也会提高；在我们的实验中，每个模拟电路进行 ≥ 32000 次采样。

Trotter 化。给定一个一般的哈密顿量 $\mathcal{H}$，传统的 Trotter 化会在自旋-1/2 基底中分解 $\mathcal{H}$，并通过一系列小时间步执行时间演化。记 $\mathcal{H} = \sum_\gamma A_\gamma \sigma^\gamma$，其中 $A_\gamma \in \mathbb{C}$ 和 σ^γ 是泡利串，则一阶Trotter分解方案为

$$U(t) = e^{-i\mathcal{H}t} = \left(\prod_\gamma e^{-iA_\gamma \sigma^\gamma \Delta t}\right)^M + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right), \tag{14}$$

对于 M 个时间步（Trotter步），每步覆盖 $\Delta t = t/M$。误差项源于 σ^γ 在 $\mathcal{H}$中的泡利串非对易性，这意味着要达到 ϵ的模拟精度，需要的步数随 $1/\epsilon$ 增长$e^{-iA_\gamma\sigma^\gamma\Delta t}$ 。每个耦合项都可以通过标准量子电路基本元件实现，因此可以直接转写时间演化电路。存在误差为 $\mathcal{O}(1/M^2)$ 的高阶公式，但会产生更深的电路。在高阶拓扑晶格中，将硬核玻色子算符的表示式（公式 12 和 13）代入 $\mathcal{H}^{\mathrm{dD}}_{\mathrm{chain}}$ （公式 7），可得到自旋 1/2 分解

$$\mathcal{H}^{\mathrm{dD}}_{\mathrm{chain}} = \sum_{\mathbf{r}\in[1,L]^d}\sum_{\alpha=1}^{d} u^\alpha_{\mathbf{r}}\left[\sigma^-_{(r_\alpha+1)\alpha}\sigma^+_{r_\alpha\alpha}\prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{d}\mathbb{I}^z_{r_\beta\beta}\right] + \mathrm{h.c.}, \tag{15}$$

因此，若直接计数，则共有 $\mathcal{O}(dL^d)$ 个耦合项，每项包含 $\mathcal{O}(2^d)$ 个泡利串，总计 $\mathcal{O}(dL^d\cdot 2^d)$ 个泡利串，构成 $\mathcal{H}^{\mathrm{dD}}_{\mathrm{chain}}$，因而会出现在每个Trotter步中。这些泡利串的权重为 $\le d$，也就是说，它们会对 $\le d$ 个量子比特产生非平凡作用；因此，假设硬件具有全连接量子比特连通性，每个泡利串的指数形式都可通过 $\mathcal{O}(d)$ 个门实现。

然而，施加最近邻（NN）量子比特连通性后，必须使用 SWAP 门，才能在非相邻量子比特之间执行 CX操作；此时，受泡利字符串作用的量子比特之间的最大距离决定了电路深度。这里，最大距离受链上量子比特数量 dL 的限制，因此，使用级联 SWAP 方案，每个指数化泡利字符串都可以通过 $\mathcal{O}(dL)$ 个门实现。因此，在模拟精度为 ϵ时，对于全连接和 NN 量子比特连通性，预期时间演化电路深度分别为 $\mathcal{O}(d^2L^d\cdot 2^d/\epsilon)$ 和 $\mathcal{O}(d^2L^{d+1}\cdot 2^d/\epsilon)$。

在上述针对一般哈密顿量的分解（式 15）和分析中，我们并未对跃迁 $u^\alpha_{\mathbf{r}}$的具体结构作任何假设；因此，所得结果适用于任何具有最近邻跳跃的 d 维晶格。不过，在我们的高阶拓扑晶格中，$u^\alpha_{\mathbf{r}}$ 仅取决于 α 以及坐标 $\mathbf{r}$的奇偶性，并在胞内对应项与胞间对应项之间交替。这种结构使得我们能够在物理相关扇区内采用更紧凑的分解，

$$\mathcal{H}^{\mathrm{dD}}_{\mathrm{chain}} = \sum_{\boldsymbol{\pi}\in\{0,1\}^d}\sum_{\alpha=1}^{d} u^\alpha_{\boldsymbol{\pi}}\left[\sum_{\substack{\ell=1\\\pi(\ell)=\pi_\alpha}}^{L}\underbrace{(\omega^\alpha_{\ell+1})^\dagger\,\omega^\alpha_\ell}_{\sigma^-_{(\ell+1)\alpha}\sigma^+_{\ell\alpha}}\right]\prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{d} P^\beta_{\pi_\beta} + \mathrm{h.c.},$$
$$P^\beta_\tau = \frac{1}{2}\left[\mathbb{I}^{\otimes dL} - \prod_{\substack{\ell=1\\\pi(\ell)=\tau}}^{L}\sigma^z_{\ell\beta}\right], \tag{16}$$

其中，$u^\alpha_{\boldsymbol{\pi}}$ 现在以晶格坐标的奇偶向量 $\boldsymbol{\pi}$ 标记；奇偶算符 $P^\beta_\tau|\psi\rangle = |\psi\rangle$ 表示 $|\psi\rangle$在轴 β 上奇偶性为 τ 的位置上含有一个粒子，而在其他位置不含粒子（奇偶性 $1-\tau$）。原本有 $\mathcal{O}(dL^d)$ 个不同的耦合项，现在则有 $\mathcal{O}(d\cdot 2^d)$ 个耦合项，每个耦合项包含 $\mathcal{O}(L\cdot 2^d)$ 个泡利串，因此总计有 $\mathcal{O}(dL\cdot 2^{2d})$ 个泡利串构成 $\mathcal{H}^{\mathrm{dD}}_{\mathrm{chain}}$。这些泡利串的权重为 $\mathcal{O}(dL)$，因此对于全连接和最近邻量子比特连通性，预期时间演化电路的深度为 $\mathcal{O}(d^2L^2\cdot 2^{2d}/\epsilon)$。与上述在最近邻量子比特连通性下采用朴素 Trotter 分解所需的 $\mathcal{O}(d^2L^{d+1}\cdot 2^d/\epsilon)$ 深度相比，该方案将因子 $L^d\to L\cdot 2^d$ 转化为有利因素，对 $L\gg 1$尤为有利。

重新编译。电路重新编译从电路拟设开始，其参数会动态优化 [81–85, 139]。我们采用的电路拟设包含一个初始层，其中包括U_3 作用于所有量子比特的一般单量子比特旋转门，后接 K 个试探态层，每层由一个使相邻量子比特纠缠的 CX 门层和一个 U_3 旋转层组成（见图 2e）。该拟设具备足够的纠缠能力，能够容纳我们研究的 $\mathcal{H}^{\mathrm{dD}}_{\mathrm{chain}}$ 耦合，并保持适度的 $K\le 10$ 深度。拟设中的每个 U_3 门都对应一组旋转角 $(\theta,\ \phi,\ \lambda)$；我们将它们汇总为参数向量 $\boldsymbol{\vartheta}$。随后，给定目标电路酉算符 V 和初始态 $|\psi_0\rangle$，优化问题为

$$\operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{\vartheta}} \mathcal{F}(V_{\boldsymbol{\vartheta}}|\psi_0\rangle, V|\psi_0\rangle) = \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{\vartheta}} \left|\langle\psi_0|V^\dagger_{\boldsymbol{\vartheta}}V|\psi_0\rangle\right|^2, \tag{17}$$

可以进行数值处理，其中 $V_{\boldsymbol{\vartheta}}$ 是带有参数 $\boldsymbol{\vartheta}$的电路拟设酉算符。重新编译后的电路即为固定 U_3 门、采用最优参数 $\boldsymbol{\vartheta}^*$ 的拟设。为提升重新编译的性能以及重新编译电路的质量，我们注意到，如上所述，只需访问 $\mathcal{H}^{\mathrm{dD}}_{\mathrm{chain}}$的受限扇区；因此可以专注于在该扇区内进行优化。具体而言，我们处理

$$\operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{\vartheta}} \Omega\left(\mathcal{F}^{\mathrm{R}}(V_{\boldsymbol{\vartheta}}|\psi_0\rangle, V|\psi_0\rangle), \Lambda_0\right), \tag{18}$$

其中，保真度 $\mathcal{F}^{\mathrm{R}}$ 是在受限扇区上计算的，因此损失评估的成本大幅降低。请注意，后选择强制实施 $\mathcal{H}^{\mathrm{dD}}_{\mathrm{chain}}$ 的对称性，从而禁止访问受限扇区之外的状态。一个复杂之处在于，$\mathcal{F}^{\mathrm{R}}$ 不再具有固定的归一化；为稳定优化过程，我们通过使用软最大值 $\Omega(x,\Lambda) = \Lambda + \log\left[1+e^{k(x-\Lambda)}\right]/\delta$ 施加最小归一化基线 Λ_0，以正则化扇区特定的保真度，使其具有合理的尖锐程度 δ。在我们的实现中，我们通过自动微分的基于张量网络的拟设模拟 [140],估计 $V_{\boldsymbol{\vartheta}}$，并使用 L-BFGS-B 结合盆地跳跃执行优化 [141, 142], ，每次跳跃进行 $\le 10^2$ 次跳跃和 $\le 10^3$ 次迭代，直至估计值达到 $\mathcal{F}^{\mathrm{R}}\ge 99.9\%$。重新编译经过调优，确保每个电路所需时间不会超过几分钟。

迭代量子相位估计（IQPE）。给定酉算符 U 及其本征态 $|\psi\rangle$，量子相位估计（QPE）可测量其本征相位 $\phi\in[0,1)$，原则上精度可任意高 [90, 91, 143, 144]。设置$U = e^{-i\mathcal{H}t}$ 后，即可推断 $|\psi\rangle$的本征能量 $E = -2\pi\phi/t$，从而探测 $\mathcal{H}$的谱。在 QPE 的标准电路构造中，ϕ 的二进制表示中的每一位都由一个辅助量子比特测量。相比之下，IQPE 只使用一个辅助量子比特，无需多量子比特量子傅里叶变换 [88, 89], ，因此更适用于含噪中等规模量子设备。

将 $\phi = 0.\phi_1\phi_2\ldots\phi_m$截断为 m 位后，迭代量子相位估计算法会迭代 $k=m$ 到 $k=1$。对于 $k=m$ 的电路

次迭代，会施加一个受控-$U^{2^{m-1}}$ 块，并测量辅助量子比特以确定 ϕ_m。在没有噪声 [88] 的情况下，测得辅助态为 $|0\rangle_{\mathrm{q}}$ 的概率 p_0 为 $\cos^2[(0.\phi_m)\pi] = 1-\phi_m$；存在噪声时，或者当 $|\psi\rangle$ 不是精确本征态时，辅助量子比特的测量结果不再是确定性的，但仍可进行阈值推断：若 $p_0 > 1/2$，则推断 $\phi_m = 0$；否则推断 $\phi_m = 1$。随后，在第 k 次迭代中，会施加一个受控-$U^{2^{k-1}}$ 块，并在辅助量子比特上施加角度为 $\omega_k = -2\pi(0.0\phi_{k+1}\phi_{k+2}\ldots\phi_m)$ 的反馈旋转，以消除前面各位产生的相位，然后同样推断 ϕ_k。第 k 次迭代的电路示意图见图2c。迭代量子相位估计的能量分辨率由执行的迭代次数 m 决定。

为探测角点高阶拓扑模式，我们选择 $|\psi\rangle$，使其完美局域于晶格角。更具体地说，我们选取 $|\psi\rangle$ 作为角点局域态的简单叠加，以模拟有限尺寸晶格上拓扑本征态的一般分布。尽管这些 $|\psi\rangle$ 十分简单，却与精确的高阶拓扑模式非常相似（保真度为$\geq$ 80%）。我们对所有量子比特应用读出误差缓解，并对模拟量子比特进行后选择，以选取物理上相关的受限扇区。

读出误差缓解（RO）。读出错误是指量子比特处于 $|0\rangle_{\mathrm{q}}$ 时测得 $|1\rangle_{\mathrm{q}}$，或反之的概率；在含噪中等规模量子设备上，这种概率不可忽略。缓解此类错误的一种标准方法是表征每个量子比特的测量比特翻转概率；随后，在实验中对原始测量计数进行线性求逆，从而恢复近似真实的测量计数 [3, 19, 86, 145]。我们首先介绍完全读出误差缓解。对于 N 量子比特上的末端测量，其中 $N = dL$ 用于时间演化，$N = dL+1$ 用于迭代量子相位估计，可能得到的测量比特串为 $S = \{0,1\}^N$。给定校准矩阵 M，其元素 $M_{ss'}$ 记录真实结果应为 $s' \in S$时测得 $s \in S$ 的概率；记比特串 $s \in S$的原始测量计数为 c_s，校正后的计数为 c'_s，则可写为

$$c_s = \sum_{s'\in S} M_{ss'}c'_{s'} \Longleftrightarrow \mathbf{c} = M\mathbf{c}' \Longrightarrow \mathbf{c}' = M^{+}\mathbf{c}, \tag{19}$$

其中$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{2^N-1}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$和 M^+是 M的伪逆。估计的$\mathbf{c}'$可能由于近似的 M而包含负值；这些值不符合物理实际，因此我们将其置零。也可以使用带非负约束的最小二乘拟合 [3, 146], ，但我们选择伪逆以降低后处理成本。矩阵 M 在每次运行开始时通过运行校准电路来构造：这些电路将 N 个量子比特针对每个 $s \in S$ 制备为状态 $|s\rangle$，并收集测量概率。因此，需要 2^N 个校准电路。对于大型 N，这种做法成本过高，因此我们采用张量积读出误差缓解。

在张量化方案中，我们将 N量子比特划分为k子寄存器，每个子寄存器包含 N_1、.....、N_k量子比特。随后，可以分别获取每个子寄存器的校准矩阵 M^1、.....、M^k，$\mathbf{c}' = (M^1\otimes\ldots\otimes M^k)^+\mathbf{c}$同样适用。在实践中，为提高效率，我们不显式计算张量积，而是利用校准矩阵的伪逆，以分块方式对 $\mathbf{c}$ 进行操作。由于作用于不相交量子比特子集的电路可以合并，该方案只需要 $2^{\max(N_1,\ldots,N_k)} < 2^N$ 个校准电路。不过，这种成本降低是以忽略不同子寄存器量子比特之间读出错误的相关性为代价的。在我们的实验中，最多使用 $k = 4$ 个子寄存器，每个子寄存器最多包含 8 个量子比特。

后选择（PS）。我们利用 $\mathcal{H}^{dD}_{\mathrm{chain}}$ 的对称性约束，在一定程度上缓解模拟电路中产生的门轮次错误。具体而言，回顾可知，物理上只允许 $\mathcal{H}^{dD}_{\mathrm{chain}}$ 的受限扇区。该扇区之外的占据数是不符合物理的，在模拟过程中不应出现——检测到此类情况的测量结果表明结果存在错误。无需额外成本，我们可以利用模拟量子比特上的终端计算基测量；这些测量提供位点分辨占据密度，可用于筛选并丢弃受噪声影响的结果。具体来说，我们接受测量比特串 $s \in S'$的计数 c'_s，

$$S' = \left\{ s\in\{0,1\}^N \,\middle|\, \bigwedge_{\alpha=1}^{d}\left(\sum_{\ell=1}^{L} s_{\ell\alpha} = 1\right)\right\}, \tag{20}$$

其中，$s_{\ell\alpha}$ 表示比特串 s中 ℓ^{th} 组的 α^{th} 量子比特上的测量结果。对于 $s \notin S'$，我们将计数 c'_s 置零，因为它们违反对称性且不符合物理实际。

量子比特选择与平均。我们使用的量子设备提供的量子比特数量多于实验所需，而且同一设备内各量子比特的质量存在显著差异。因此，我们采用穷举搜索方案，选出估计错误率最低的量子比特用于模拟。根据量子比特之间可用的 CX 耦合，我们找出所有长度为 N 的不同量子比特链，并为每条链计算以下适应度函数，

$$Q = 1 - \left\{\prod_{i=1}^{N}\left[\left(1-\varepsilon^{\mathrm{CX}}_{i,i-1}\right)\left(1-\varepsilon^{\mathrm{CX}}_{i,i+1}\right)\right]^{K/2}\left(1-\varepsilon^{\mathrm{M}}_{i}\right)\right\}^{1/N}, \tag{21}$$

其中 $\varepsilon^{\mathrm{M}}_i$是量子比特 i的校准读出错误，而 $\varepsilon^{\mathrm{CX}}_{i,j}$ 是量子比特 i 和 j之间校准后的 CX 门错误。按照惯例，$\varepsilon^{\mathrm{CX}}_{1,0} = \varepsilon^{\mathrm{CX}}_{N,N+1} = 0$。上述适应度函数旨在模拟我们的重新编译电路试探态的结构，其中包含 $K \sim 10$ 个试探态层。我们在模拟中选取 Q 值最高的量子比特链。由于错误率取自量子设备的定期校准（每天一次），且会随时间漂移和波动，因此这种选择本质上只是近似的。图 8 展示了通过此流程在 65 量子比特和 27 量子比特处理器上选出的量子比特链。此外，为了平均数据波动并进一步降低硬件噪声的影响，我们汇总了搜索选出的每台设备上多条量子比特链以及多台设备（如上所列）所产生的经误差缓解的测量比特串计数。

参数选择。所使用的高阶拓扑晶格模型可以由交替的 d 维拼接结构构建而成，其中包含交替排列的 Su-Schrieffer-Heeger（SSH）链 [80, 102]。每条 SSH 型链都由一个拓扑不变量——其绕数——来表征。也就是说，当相应的跃迁强度满足 $|v| < |w|$ 时，晶格中的每条组成 SSH 链都是拓扑的。

我们所有的高阶拓扑角态都归类为 I型 [102]，其支撑仅位于单个子晶格上，且振幅沿所有正交方向呈指数衰减。这被解释为 SSH模型一维拓扑的高维体现，因此，与一个拓扑角相交的各条边的绕数均为 1。我们在补充表 $v^{\alpha}_{\boldsymbol{\pi}}$, $w^{\alpha}_{\boldsymbol{\pi}}$ 中列出了模型的全部跃迁参数 $w^{\alpha}_{\boldsymbol{\pi}}$。对于 d维晶格

条边，适当的参数选择可通过简单偏移 $\{\delta_j\}_{j=1}^{E}$ 系统地确定，使 SSH类耦合参数满足 $v = \lambda(1-\delta)$，$w = \lambda(1+\delta)$，其中 $\lambda = -1$ 选取一部分边，以在晶格的每个面上产生 π 磁通，从而打开谱隙 [47]。边的 δ 取正值（负值）时，该边为拓扑非平凡（平凡）。

在二维晶格上，要实现带隙中一维边缘模，可以调节跃迁参数，使构型从具有四个角模（C4）转变为仅有两个相邻角模的构型。在这一转变过程中，随着能带沿一个动量方向变得无能隙，两个角模消失，进而出现零能一维边缘模。这种方法可直接推广到更高维晶格中，以构造零能（高阶）边缘模，例如在超立方体晶格上。

量子计算机上高阶拓扑态的观测（补充信息）

Jin Ming Koh ,[1,*] Tommy Tai ,[2,3,4,*] and Ching Hua Lee [4,†]

[1]加州理工学院物理、数学与天文学部，帕萨迪纳，加利福尼亚州 *91125*，美国

[2]麻省理工学院物理系，剑桥，马萨诸塞州 *02142*，美国

[3]剑桥大学卡文迪许实验室，*J. J.* 汤姆孙大道，剑桥 *CB3 0HE*，英国

[4]新加坡国立大学物理系，新加坡 *117542*

* 这些作者对本研究的贡献相同。

† phylch@nus.edu.sg

Square Lattice ($d = 2$)

Config.	v_0^x	v_1^x	v_0^y	v_1^y
C0	1.5	1.5	1.5	−1.5
C2	0.5	1.5	0.3	−0.3
C4	0.5	0.5	0.3	−0.3
	w_0^x	w_1^x	w_0^y	w_1^y
C0	0.5	0.5	0.5	−0.5
C2	1.5	0.5	1.7	−1.7
C4	1.5	1.5	1.7	−1.7

Cubic Lattice ($d = 3$)

Config.	v_{00}^x	v_{10}^x	v_{00}^y	v_{10}^y	v_{01}^x	v_{11}^x	v_{01}^y	v_{11}^y	v_{01}^z	v_{11}^z	v_{10}^z	v_{01}^z
C0	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8
C2a	0.2	1.8	0.2	−0.2	1.8	1.8	−0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2
C2b	1.8	1.8	0.2	−0.2	1.8	0.2	−0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2
C4a	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	−0.2	1.8	1.8	−0.2
C4b	0.2	0.2	0.2	−0.2	1.8	0.2	−0.2	0.2	−0.2	1.8	0.2	−0.2
C4c	0.2	1.8	0.2	−0.2	1.8	0.2	−0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2
C6	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2	1.8	−0.2	0.2	0.2	−0.2
C8	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2
	w_{00}^x	w_{10}^x	w_{00}^y	w_{10}^y	w_{01}^x	w_{11}^x	w_{01}^y	w_{11}^y	w_{01}^z	w_{11}^z	w_{10}^z	w_{01}^z
C0	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2
C2a	1.8	0.2	1.8	−1.8	0.2	0.2	−1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8
C2b	0.2	0.2	1.8	−1.8	0.2	1.8	−1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8
C4a	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	−1.8	0.2	0.2	−1.8
C4b	1.8	1.8	1.8	−1.8	0.2	1.8	−1.8	1.8	−1.8	0.2	1.8	−1.8
C4c	1.8	0.2	1.8	−1.8	0.2	1.8	−1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8
C6	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8	0.2	−1.8	1.8	1.8	−1.8
C8	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8

Tesseract Lattice ($d = 4$)

Config.	v_{000}^x	v_{100}^x	v_{000}^y	v_{100}^y	v_{010}^x	v_{110}^x	v_{010}^y	v_{110}^y	v_{010}^z	v_{110}^z	v_{100}^z	v_{010}^z	v_{001}^x	v_{101}^x	v_{011}^x	v_{111}^x	v_{001}^y	v_{101}^y	v_{011}^y	v_{111}^y	v_{001}^z	v_{101}^z	v_{011}^z	v_{111}^z	v_{000}^w	v_{100}^w	v_{010}^w	v_{110}^w	v_{001}^w	v_{101}^w	v_{011}^w	v_{111}^w
C0	1.8	1.8	1.8	−1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8
C2	0.2	0.2	0.2	−0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8
C4	0.2	0.2	0.2	−0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.8	1.8	−0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−1.8	0.2	1.8	−0.2	0.2	0.2	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8
C8	0.2	0.2	0.2	−0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	1.8	1.8	1.8	−1.8
C16	0.2	0.2	0.2	−0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2
E	0	2.5	0.5	0	0	0.5	2.5	0.5	0.5	0	2.5	0	0.5	0	2.5	0	0.5	2.5	0	0.5	0	0	2.5	0.5	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0
	w_{000}^x	w_{100}^x	w_{000}^y	w_{100}^y	w_{010}^x	w_{110}^x	w_{010}^y	w_{110}^y	w_{010}^z	w_{110}^z	w_{100}^z	w_{010}^z	w_{001}^x	w_{101}^x	w_{011}^x	w_{111}^x	w_{001}^y	w_{101}^y	w_{011}^y	w_{111}^y	w_{001}^z	w_{101}^z	w_{011}^z	w_{111}^z	w_{000}^w	w_{100}^w	w_{010}^w	w_{110}^w	w_{001}^w	w_{101}^w	w_{011}^w	w_{111}^w
C0	0.2	0.2	0.2	−0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	−0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2
C2	1.8	1.8	1.8	−1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2
C4	1.8	1.8	1.8	−1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	0.2	0.2	−1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−0.2	1.8	0.2	−1.8	1.8	1.8	0.2	0.2	0.2	0.2	−0.2
C8	1.8	1.8	1.8	−1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	0.2	0.2	0.2	−0.2
C16	1.8	1.8	1.8	−1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	−1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	−1.8
E	2	−0.5	1.5	−2	−2	1.5	−0.5	1.5	1.5	2	−0.5	−2	1.5	−2	−0.5	2	1.5	−0.5	−2	1.5	2	−2	−0.5	1.5	−2	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	−2

Supplementary Table 1. Values of intra- and inter-cell hopping coefficients, respectively $v^{\alpha}_{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}_\alpha)}$ and $w^{\alpha}_{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}_\alpha)}$ along direction $\alpha \in \{x, y, z, w\}$ and at parity $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}_\alpha)$ on the remaining axes, used in simulations of the square, cubic, and tesseract HOT lattices. Numerical values are explicitly listed for clarity; a systematic procedure to assign coefficients for corner-mode configurations on square and cubic lattices is available in Ref. [1], generalizable to higher dimensions.

晶格	构型	初态 $\|\psi\rangle$
正方形 ($d=2$)	C2	$(\|1,\ 1\rangle \pm \|L,\ 1\rangle)/\sqrt{2}$
	C4	$(\|1,\ 1\rangle \pm \|L,\ 1\rangle)\ /\sqrt{2}$
		$(\|1, L\rangle \pm \|L, L\rangle)\ /\sqrt{2}$
立方体 ($d=3$)	C4a	$(\|1,1,1\rangle \pm \|1,1,L\rangle + \|1,L,L\rangle)\ /\sqrt{3}$
		$(\|1,1,1\rangle \pm \|1,L,1\rangle - \|1,L,L\rangle)\ /\sqrt{3}$
	C4b	$(\|1,1,1\rangle \pm \|1,L,1\rangle - \|1,L,L\rangle)\ /\sqrt{3}$
		$(\|1,1,1\rangle + \|1,L,L\rangle \pm \|L,1,1\rangle)\ /\sqrt{3}$
	C8	$(\|1,\ 1,\ 1\rangle \pm \|1,\ L,\ 1\rangle \pm \|L,\ 1,\ 1\rangle)\ /\sqrt{3}$
		$(\|1,\ 1,\ L\rangle \pm \|1,\ L,\ L\rangle \pm \|L,\ 1,\ L\rangle)\ /\sqrt{3}$
		$(\|1,\ L,\ 1\rangle - \|L,\ 1,\ 1\rangle \pm \|L,\ L,\ 1\rangle)\ /\sqrt{3}$
		$(\|1,\ L,\ L\rangle + \|L,\ L,\ 1\rangle \pm \|L,\ L,\ L\rangle)\ /\sqrt{3}$

补充表2。用于在 IQPE 中探测角点高阶拓扑模式是否存在的初态，这些初态由角点局域态的简单叠加构成。上方所示，形式为 $|x,\ y\rangle$ 的态完全集中在空间坐标为（$x,\ y$）的格点上；三维情况下同样如此。晶格的边长为 L。

[1] L. Li、M. Umer 和 J. Gong，从二维和三维手征对称晶格系统的边缘绕数直接预测角态构型，《物理评论B》**98**，205422（2018年）。