arXiv:2303.02185v1 [math.DS] 3 Mar 2023

齐次动态系统的代数李雅普诺夫函数

Hassan Abdelraouf*、Eric Feron†和 Jeff Shamma ‡

本文提出了一种方法，可从多项式不变集构造次数为 1 的齐次李雅普诺夫函数，适用于线性时变系统、齐次动态系统以及可表示为此类系统的非线性系统。与先前文献中讨论的多项式齐次李雅普诺夫函数不同，该方法能够构造不一定关于原点对称的李雅普诺夫函数。文中通过一些非常简单的示例加以说明。

I. 引言

THE 线性时不变（LTI）系统的分析长期以来都与二次李雅普诺夫函数密切相关，因为人们早已证明，LTI 系统稳定等价于存在这样的李雅普诺夫函数 [1]。对于更广泛的时变系统和切换线性系统而言，这些系统可以涵盖含有扇区有界非线性的非线性系统以及允许全局线性化的系统 [2], ，通过寻找能够证明这些系统稳定性的二次李雅普诺夫函数，同样取得了显著进展。这些系统的稳定性并不一定意味着存在二次李雅普诺夫函数，但它等价于存在齐次多项式李雅普诺夫函数 [3, 定理 3.7] [4]。更近些时候，人们发展出一些方法，通过分析一系列规模不断增大的系统（这些系统由原系统提升而来），并计算二次李雅普诺夫函数，从而计算此类齐次多项式李雅普诺夫函数 [5]。对于单独的线性系统，计算此类高阶李雅普诺夫函数，可以显著改进对其逐时性质的严格分析，例如峰值脉冲响应、超调以及其他感兴趣的量，其效果远超二次李雅普诺夫函数所能达到的水平。

在本报告中，我们介绍一类新的李雅普诺夫函数。这类函数的提出受到了近期多项式不变集计算方面进展的启发：这些不变集不一定关于原点对称，所采用的技术基于将相应问题松弛为凸半定规划，通常统称为“平方和”方法。这些李雅普诺夫函数被隐式定义为关于单个变量的多项式方程的唯一非负解，其中该方程由系统的状态变量参数化。这类函数被命名为“代数李雅普诺夫

*博士研究生，航空航天工程，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，美国伊利诺伊州，hassana4@illinois.edu。
†教授，电气工程系，阿卜杜拉国王科技大学，沙特阿拉伯图瓦勒，eric.feron@kaust.edu.sa，AIAA 会士。
‡教授，工业与企业系统工程，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，美国伊利诺伊州，jshamma@illinois.edu

函数”由其定义可知。

II. 预备知识

这里我们考虑如下形式的动态系统

$$\frac{d}{dt}x = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中， $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态， $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为齐次函数。

定义 1 对于函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，若 $\forall\lambda$ 且 $\forall x$ 是次数为 ν 的齐次函数，则对任意 λ 及任意 $x \in \mathbb{R}^n$

$f(\lambda x) = \lambda^{\nu+1}x.$

例如，线性系统

$$\frac{d}{dt}x = Ax, \quad x(0) = x_0, \tag{2}$$

是零次齐次的。众所周知，系统 (2) 稳定，也就是说， A 的特征值实部均为负，当且仅当存在一个对称正定矩阵 P，使得矩阵 $A^T P + PA$为负定。于是， $V(x) = x^T Px$ 是该系统的二次李雅普诺夫函数。线性系统稳定性与二次李雅普诺夫函数存在之间这一强有力的等价关系，推动了大量扩展方法的产生：一方面用于分析时变系统和切换线性系统，另一方面用于分析线性系统的输入输出性质，例如无源性、非扩张性和鲁棒性 [2]。然而，正如近期其他研究所示，二次李雅普诺夫函数并不能包治分析线性系统诸多其他性质时的百病 [6]。值得注意的是，齐次多项式李雅普诺夫函数能够显著改进对 2 的逐时性质进行静态（即非仿真）分析的方法。受这一发现的启发，我们始终致力于构造更加灵活的李雅普诺夫函数，以证明线性系统的重要性质。

III. 不变多项式集

近期一项颇具价值的工作，不仅计算了李雅普诺夫函数，还计算了不变集。不变集有助于界定例如受持续有界激励作用的线性系统 [7], 以及所选非线性系统（如范德波尔振荡器 [8]）的行为。由于与代数或半代数优化问题相关的平方和松弛十分强大，这些不变集的多项式表达式已成为当前持续研究的重要内容。

对于系统 1，我们可能会感兴趣于对例如状态 x 在初始条件 x_0 下所遵循的轨迹进行界定。考虑一个候选有界等值集 $P(x) = 0$，其中 P 是 x 的各个元素的一个次数为

给定次数的多项式。假设当 x 位于等值集“内部”时， $P(x) < 0$ ，而当 x 位于等值集“外部”时， $P(x) > 0$ ，如果系统 1 的轨迹穿过该集合时是“由外向内”，则称该等值集为不变集，这可以写成

$$\frac{d}{dt}P(x(t)) < 0 \text{ whenever } P(x) = 0. \tag{3}$$

除了这一条件，还必须满足 $P(x_0) \leq 0$ ，以确保不变集包含初始条件。存在多种寻找此类不变集的技术。其中一种是“放宽”条件 (3)，并将其替换为

$$U_1(x)\frac{\partial P}{\partial x}f(x) + U_2(x)P(x) < 0, \ \forall x$$

其中， U_1 是给定次数的正多项式， U_2 是给定次数的任意多项式。添加约束 U_1 和 $-\left(U_1(x)\frac{\partial P}{\partial x}f(x) + U_2(x)P(x)\right)$ 为“平方和”多项式，可以大大简化寻找合适的 P、 U_1 和 U_2 的过程，从而解决该问题。

IV. 贡献：代数李雅普诺夫函数

假设已计算出由多项式方程 $P(x) = 0$ 表征的不变多项式集，接下来需要考虑如何从该集合中提取李雅普诺夫函数。为此，我们将 $P(x)$ 重写为其给定次数的单项式之和，即

$$P(x) = \sum_{i=0}^{p} M_i(x),$$

其中多项式 $M_i(x)$ 是 i 次齐次多项式。接下来，给定实变量 τ ，我们引入多项式

$$\tilde{P}(x,\tau) = \sum_{i=0}^{p} M_i(x)\tau^{p-i}$$

使得 $\tilde{P}(x,\tau)$ 关于变量 (x,τ) 是 p 次齐次的。注意，当 x 位于不变集内时， $\tilde{P}(x,1) = P(x) = 0$ 。现在考虑集合 $\tilde{P}(x,\tau) = 0$ ，其中 τ 从零变化到 ∞。容易看出， $\tilde{P}(x,\tau) = 0$ 是 $P(x)$ 的“放大”或“缩小”版本，具体取决于 $\tau > 1$ 还是 $\tau < 1$。例如，当 $\tau = 2$ 时，如果 $P(x) = 0$，则 $\tilde{P}(2x,2) = 0$ 。反过来，设 $\tau(x)$ 是关于单变量 $\tilde{P}(x,\tau)$ 的多项式方程在给定 $x \neq 0$ 时的一个正解，即 $= 0$ 。我们断言， $\tau(x)$ 是系统 (1) 的一个 1 次齐次李雅普诺夫函数。为此，可能需要满足一些技术条件。

唯一性条件：对于任意给定的 x，我们假设 $\tilde{P}(x,\ \tau) = 0$ 存在唯一解。很容易看出，一个等价条件是集合 $P(x)$ 关于原点 [9] 为星形凸。满足这一条件后，我们证明 $\tau(x)$ 确实是一个李雅普诺夫函数。

Pro位置 1 函数 $\tau(x) = \{c > 0 : \tilde{P}(x,c) = 0\}$ 是系统 *1* 的李雅普诺夫函数。

证明： 首先，函数 $\tau(x)$ 可以用 $P(x)$ 表示为 $\tau(x) = \{c > 0 : P(x/c) = 0\}$。沿着系统轨迹， x 和 c 随时间变化，但 $P(x/c) = 0$。沿系统轨迹对 $P(x/c)$ 关于时间求导，可得

$$\left(\nabla_{(x/c)}P\right)^T \left(\frac{\dot{x}}{c} - \frac{x\dot{c}}{c^2}\right) = 0 \tag{4}$$

那么，

$$\left(\nabla_{(x/c)}P\right)^T \left(\frac{\dot{x}}{c}\right) = \left(\nabla_{(x/c)}P\right)^T \left(\frac{x}{c}\right)\frac{\dot{c}}{c} \tag{5}$$

令 $y = x/c$，那么式 5 的左边就是 $P(。)$ 在不变集边界处的时间导数，因此是一个负项。因此，

$$\left(\nabla_y P\right)^T y\frac{\dot{c}}{c} < 0 \tag{6}$$

由于我们对 $P(x/c)$ 关于 (x/c) 求梯度，因此可以忽略 M_0。此外，不变集包含原点，因此 $P(x/c) - M_0 > 0$，并可写为 $z^T Q z$，其中 Q 是正定矩阵， z 是次数最高为 $p/2$ [10] 的单项式向量。不失一般性，在证明中我们可以假设系统是二阶系统（即 $x \in \mathbb{R}^2$）。为了将 z 写成一般形式，我们定义 $v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ 为次数为 n 的单项式向量，因此 $v_n = (y_1^n \quad y_1^{n-1}y_2 \ldots y_2^n)^T$。因此， $z \in \mathbb{R}^{(n/2+1)(n/2+2)/2-1}$ 可写为 $z = (v_{n/2}^T \quad v_{n/2-1}^T \ldots v_1^T)^T$。例如，如果 $P(y)$ 是一个次数为 4 的多项式，那么 z 是次数最高为 2 的单项式向量，因此 $z \in \mathbb{R}^5$，并且可写为 $z = (y_1^2 \quad y_1y_2 \quad y_2^2 \quad y_1 \quad y_2)^T$。

因此，5式右侧的项 $\left(\nabla_y P\right)^T y$ 可简化为

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_y P\right)^T y &= y^T \nabla_y P \\
&= y^T \left(\frac{dz}{dy}\right)^T \frac{dV}{dz} \\
&= 2y^T \left(\frac{dz}{dy}\right)^T Qz \\
&= 2z^T TQz \qquad \text{where } T = \operatorname{diag}\left(n/2 I_{n/2+1}, (n/2-1)I_{n/2}, \ldots, I_2\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $I_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ 是单位矩阵。

由于 Q 是正定矩阵，而 T 也是正定矩阵，因为它是一个对角线上元素为正整数的对角矩阵。因此，对于任意非零的 y，项 $\left(\nabla_y P\right)^T y > 0$。由 6 可知，沿着系统轨迹，$\dot{c}/c < 0$。根据 $c > 0$ 构成了 $\tau(x)$ 的定义，$\dot{c} < 0$，这证明了 $\tau(x)$ 是系统 1 的李雅普诺夫函数。

V. 示例

考虑以下线性系统

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

所有满足以下条件的 (x_1, x_2) 的集合

$$P(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4 = 0$$

˜是不变的（显然）。因此，多项式 P 满足

$$\tilde{P}(x_1, x_2, \tau) = -2\tau^2 + 2\tau(-x_1 + x_2) + (x_1^2 + x_2^2)$$

给定 x_1 和 x_2，求解 $\tilde{P}(x_1, x_2, \tau) = 0$，得到

$$\tau = \left(x_2 - x_1 \pm \sqrt{(-x_1 + x_2)^2 + 2(x_1^2 + x_2^2)}\right)/2,$$

其唯一的正值为

$$\tau(x_1, x_2) = \left(x_2 - x_1 + \sqrt{(-x_1 + x_2)^2 + 2(x_1^2 + x_2^2)}\right)/2. \tag{9}$$

并且它是系统（8）的李雅普诺夫函数。系统的图示，以及代数李雅普诺夫函数在 $\tau \in \{0.25, 0.5, 1\}$ 处的等值集

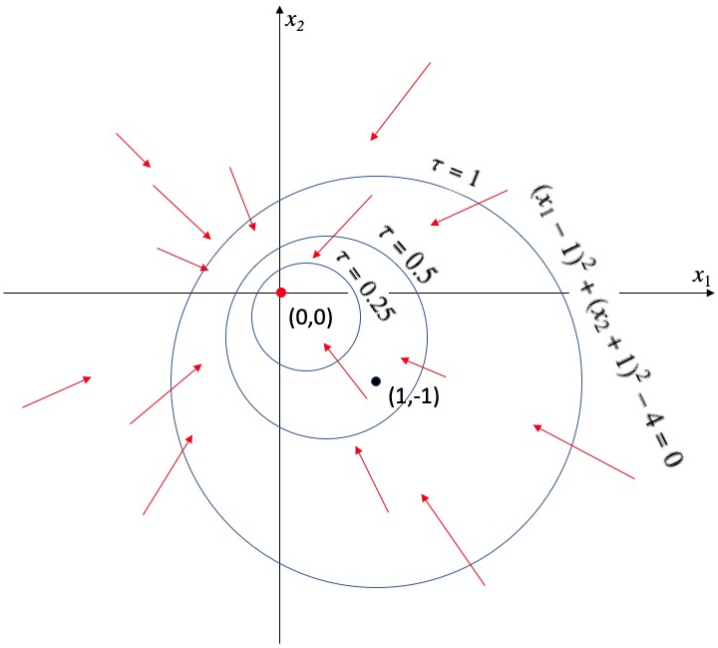


图1 代数李雅普诺夫函数（9）的等高线和系统（8）。

VI. 结论

本报告介绍了代数李雅普诺夫函数这一概念，该概念直接源于近期在计算动力系统不变集方面取得的进展，尤其是线性时不变系统、线性时变系统、切换系统以及可表示为此类系统的非线性系统。李雅普诺夫函数是从一个关于状态变量的多项式中提取出的唯一正根，因此得名“代数李雅普诺夫函数”。

经费来源

本研究获得 KAUST 基础预算的资助。

参考文献

[1] Khalil, H. K.,非线性系统，第三版，Prentice Hall，2002年。

[2] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. 和 Balakrishnan, V.，《系统与控制理论中的线性矩阵不等式》，SIAM，1994 年。

[3] Ahmadi, A. A. 和 Parrilo, P. A.，“平面齐次切换系统稳定性的平方和证书”，*IEEE*自动控制汇刊，第 62 卷第 10 期，2017 年，第 5269–5274 页。

[4] Mason, P., Boscain, U., and Chitour, Y.，“线性切换系统的公共多项式李雅普诺夫函数”，*SIAM*控制与优化杂志，第45卷，第1期，2006年，第226–245页。

[5] Abate, M., Klett, C., Coogan, S., and Feron, E., “切换线性系统的李雅普诺夫微分方程层级与多项式李雅普诺夫函数”，*2020*年美国控制会议（*ACC*），IEEE，2020年，第5322–5327页。[6] Klett, C., “航空航天系统自主性的形式化验证可处理方法探索”，博士论文，佐治亚理工学院，2022年。[7] Abdelraouf, H., Immanuel, G.-Y., and Feron, E., “使用齐次李雅普诺夫函数计算线性时不变系统的 L_∞ 诱导范数界”，*arXiv* 预印本 *arXiv:2203.00716*，2022年。[8] Henrion, D., and Korda, M., “多项式控制系统吸引域的凸计算”，*IEEE*自动控制汇刊，第59卷，第2期，2013年，第297–312页。[9] Shamma, J. S., and Cloutier, J. R., “SDRE稳定化反馈的存在性”，*IEEE*自动控制汇刊，第48卷，第3期，2003年，第513–517页。[10] Ahmadi, A. A., “平方和（SOS）技术：简介”，普林斯顿，普林斯顿，新泽西州，美国，技术报告，2018年，第1–9页。