arXiv:2303.02192v1 [math.RT] 3 Mar 2023

域上的对偶对的柯西-哈里什-钱德拉积分：定义与一个猜想

HUNG YEAN LOKE 与 TOMASZ PRZEBINDA

对于实不可约对偶对，存在一个积分核算子，它将秩较小或相等的群上的不可约容许表示的分布特征映射到秩较大或相等的群上的不变特征分布。

本文旨在将这一构造推广到 p 进情形。我们给出积分核算子的精确定义，并提出一个猜想。

Contents

1. 引言 2 2. 嘉当子群。 2 2.1. 半单元素。 2 2.2. 正则元素。 3 2.3. 一般线性群。 3 2.4. 等距群。 6 2.5. 韦伊-哈里什-钱德拉积分公式。 9 2.6. II 型对偶对矩映射的一些几何性质 10 2.7. I 型对偶对矩映射的一些几何性质 13 3. 分布 $\mathrm{chc}_{x'} \in \mathcal{S}^*(\mathfrak{g})$ 对于 $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$。 15 3.1. Sp(W) 的极小幂零轨道积分 in $\mathfrak{sp}(W)$。 15 3.2. End(X) 中的极小 GL(X) $\times$GL(X)-轨道积分。 18 3.3. $\mathrm{chc}_{x'}$ 的定义。 22 4. 分布 $\mathrm{Chc}_{h'} \in C_c^{\infty *}(\widetilde{\ }G)$, $h' \in \widetilde{\ }H'^{\mathrm{reg}}$。 23 4.1. Sp(W) 魏尔表示的特征标。 23 4.2. 从 GL(X) 的 mirabolic子群 归纳。 29 4.3. $\mathrm{Chc}_{h'}$ 的定义。 32 5. chc 是 Chc 渐近展开中的最低项。 33 6. 猜想与动机 34

日期：2023年3月7日。2010年数学主题分类。主要分类：22E46；次要分类：22E47。关键词与短语：Howe 对应，非阿基米德局部域上的约化对偶对，特征。第一作者感谢俄克拉荷马大学于 2017 年 2 月提供的款待与经费支持。第二作者衷心感谢新加坡国立大学数学科学研究所提供的款待与经费支持，并感谢美国国家科学基金会的资助（项目编号 DMS-2225892）。

附录A. 波前集 参考文献 35
50

1. 引言

对于实不可约对偶对 (G, G′)，若 G′ 的秩小于或等于 G [，则 Prz00] 给出一个积分核算子 Chc，它将 G′ 的不可约容许表示 Π' 的分布特征$\sim\Theta_{\Pi'}$ 映射到群G上的不变特征分布$\sim\Theta'_{\Pi'}$，并使其具有无穷小特征对应意义下正确的无穷小特征，参见 [BP14] 和 [Prz96]。如果该对处于稳定范围，且 G′ 是较小的一方，同时表示是酉的，那么 $\Theta'_{\Pi'} = \Theta_{\Pi}$，其中$\Pi$ 通过 Howe 对应与 Π' 相关联，参见 [Prz18]。若 G′ =$\mathrm{U}_{p',\ q'}$ 且 G $= \mathrm{U}_{p,\ q}$，其中 $p' + q' = p + q$ 且 Π' 是离散系列表示，情况也相同，参见 [Mer21]。缩写 Chc 代表柯西–Harish-Chandra 积分，因为正如 [Prz00], 所述，这一构造从柯西行列式恒等式出发，经由 Harish-Chandra 理论中的半单轨道积分，直接联系到 Howe 对应。

本文旨在将 [Prz00] 的构造推广到 p 进情形。我们给出积分核算子 Chc 的精确定义，并提出一个大致表述为 $\Theta'_{\Pi'} = \Theta_{\Pi}$ 的猜想。由于这需要相当篇幅，我们将把有关新的 p 进 Chc 的一些性质的报告留待后续论文。

我们关注作为对偶对成员出现的群，具体定义见 [How79]。因此，我们固定一个特征为 0 的非阿基米德局部域 $\mathbb{F}$ 。II 型对偶对的一个成员是一般线性群 G =$\mathrm{GL}_{\mathbb{D}}$(V)，其中 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维除环，而 V 是有限维右 $\mathbb{D}$ 向量空间。$\mathrm{GL}_{\mathbb{D}}$(V) 的李代数为 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}$(V)。I 型对偶对的一个成员是等距群 G $\subseteq \mathrm{GL}_{\mathbb{D}}$(V)，它对应于 V 上一个非退化的 σ-厄米形式或 σ-斜厄米形式 $(\cdot,\cdot)$，其中 σ 是 $\mathbb{D}$ 上可能为平凡的对合，并逐点固定 $\mathbb{F}$。群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 包含于 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}$(V) 中。

2. 嘉当子群。

下面我们将描述 $\mathfrak{g}$ 中的嘉当子代数以及 G 中的嘉当子群。根据定义， $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数是一个正则半单元的中心化子，而 G 的嘉当子群是一个嘉当子代数的中心化子。当 $\mathbb{D}$ 是交换群时，文献中已有相关讨论，参见 [Mor91] 和 [Kim99]。其中给出的证明需要具备一些代数群理论知识。我们的论证则绕开了这一理论。

2.1. 半单元素。我们称元素 $x \in \mathrm{End}_{\mathbb{D}}$(V) 为半单元素，如果 V 可分解为 $\mathbb{D}$ 上的 x-不可约子空间的直和。于是， x作为 $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}$(V) 中的元素是半单的。事实上，由于域 $\mathbb{F}$ 的特征为零，x 具有 Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$，其中 x_s 是半单的，而 x_n 是幂零的

并且二者都是以 $\mathbb{F}$ 中的系数构成的 x 的多项式，参见 [Jac62，第 96-98] 页。因此，它们与 $\mathbb{D}$ 的作用可交换。所以， $x_s, x_n \in \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)$。在每个 x- 不可约分量上， U, x_n 是幂零的，因此 $\mathrm{Ker}\ x_n|_U$ 非零。于是 $\mathrm{Ker}\ x_n|_U = U$。这意味着 $x_n = 0$。作为 $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ 中的元素为半单，等价于最小多项式 $P_x(t) \in \mathbb{F}[t]$ 是若干不可约多项式的乘积，且每个因子的重数均为 1，参见 [Lan02，练习 10，第 662] 页。特别地，半单元素构成的子集是 Zariski 稠密的。

2.2. 正则元素。设 $\mathbb{F}$ 是交换域上的有限维向量空间，且 $L : U \to U$ 是一个线性映射，则存在 L-不变子空间 $U_{0,L}$ 和 $U_{1,L}$ ，使得 L 在 $U_{0,L}$ 上的限制是幂零的，L 在 $U_{1,L}$ 上的限制是双射，且 $U = U_{0,L} \oplus U_{1,L}$。这称为关于 L 的 U 的 Fitting分解，参见 [Jac62，第 37-38] 页。子空间 $U_{0,L}$ 称为 U 关于 L 的 Fitting零分量。

令 l 为 $\mathrm{ad}\, x$ 的 Fitting零分量的最小维数，其中 x 遍历 $\mathfrak{g}$，

$$l = \min\{\dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_{0,\mathrm{ad}\, x}) \ : x \in \mathfrak{g}\}\,.$$

按照 Harish-Chandra， [HC70，第 63], 页，我们引入多项式函数 η: $\mathfrak{g} \to \mathbb{F}$，定义如下

$$\det(t - \mathrm{ad}\, x)_{\mathfrak{g}} = \eta(x)t^l + \ldots \text{terms of higher degree in } t \qquad (x \in \mathfrak{g})\,. \tag{1}$$

根据 Harish-Chandra， $x \in \mathfrak{g}$ 当且仅当 $\eta(x) \neq 0$时是正则的。因此，根据定义，正则元素构成的子集是 Zariski开集。

2.3. 一般线性群。

引理 1. 设 $\mathbb{E}$ 是 $\mathbb{F}$的域扩张。假设 v_1、v_2、.....、$v_m \in \mathbb{F}^n$ 在 $\mathbb{F}$上线性无关。那么它们在 $\mathbb{E}^n$ 中的 $\mathbb{E}$ 上也线性无关。

证明. 我们可以将 v_i 写成行向量。于是 v_1、.....、v_m 构成一个 m 行 n 列的矩阵 A，其元素属于 $\mathbb{F}$。设 A' 是它在 $\mathbb{F}$上的简化行阶梯形。若在 $\mathbb{E}$上进行运算，得到的也是同一个简化阶梯矩阵 A' 。矩阵 A' 的秩为 m ，因为这些向量在 $\mathbb{F}$上线性无关。这说明， m也等于这些向量在 $\mathbb{E}$上的张成空间的维数。□

引理 2. 设 $\mathbb{E}$ 是 $\mathbb{F}$ 的域扩张，且 $X \in M_{n,n}(\mathbb{F})$。记 $P_{\mathbb{F}}(t) \in \mathbb{F}[t]$ 为 X 的最小多项式，记 $P_{\mathbb{E}}(t) \in \mathbb{E}[t]$ 为将 X 视为 $M_{n,n}(\mathbb{E})$ 中的一个元素时的最小多项式。则 $P_{\mathbb{E}}(t) = P_{\mathbb{F}}(t)$.

证明. 显然， $P_{\mathbb{E}}(t)$ 在 $\mathbb{E}[t]$ 中整除 $P_{\mathbb{F}}(t)$。令 d 表示 $P_{\mathbb{E}}(t)$ 的次数。那么这些向量

$$I\,, \quad X\,, \quad X^2\,, \quad \ldots\,, \quad X^d \in M_{n,n}(\mathbb{F})$$

在 $\mathbb{E}$ 上线性相关。由于它们都属于 $M_{n,n}(\mathbb{F})$，引理 1 表明它们在 $\mathbb{F}$ 上线性相关。因此，

$$\deg P_{\mathbb{F}}(t) \leq \deg P_{\mathbb{E}}(t)\,.$$

因此 $P_{\mathbb{E}}(t) = P_{\mathbb{F}}$({v4)。 □

引理 3. $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ 中的任意正则元素都是半单的。

证明。在 [Jac62 第三章第 1 节第 60-61] 页中，Jacobson 证明了任意正则元素都包含于一个按其定义的嘉当子代数中，见 [Jac62 第 57] 页。在[Jac62 第三章第 3 节定理 2] 中，他证明了若 $\mathbb{F}$ 是代数闭的，则其嘉当子代数由本文所定义的半单元素构成。然而，根据引理 2，域扩张后最小多项式保持不变。因此，根据[Lan02 第 10 题第 662] 页，$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ 中的正则元素是半单的。□

众所周知，$\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)$ 是一个中心单代数，其中心等于 $Z(\mathbb{D})$（乘以恒等元），参见 [Lan02，定理 5.5，第 656] 页。回忆一下，[Pie82，定理，第236], 页指出，对于任意中心单代数 A，$\dim_{Z(A)} A = (\deg A)^2,$，其中 deg A 是一个正整数，称为 A的次数。特别地，

$$\deg \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V) = \dim_{\mathbb{D}} V \cdot \deg \mathbb{D}\,.$$

L引理 4. 设 $x \in \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)$ 满足 V 在 $\mathbb{D}$ 上是 x-不可约的。 n

$$\dim_{Z(\mathbb{D})} \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x \geq \deg \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)$$

且当且仅当时取等号

$$\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x = Z(\mathbb{D})[x]\,.$$

此外，$Z(\mathbb{D})[x]$ 是一个域。

证明。舒尔引理，[Jac80, p.118], 表明 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x$ 是一个$Z(\mathbb{D})$上的除代数。因此，$Z(\mathbb{D})[x] \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x$ 是一个子域，参见 [Pie82, 引理 b，第 235]页。特别地

$$\dim_{Z(\mathbb{D})} Z(\mathbb{D})[x] \leq \dim_{Z(\mathbb{D})} \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x \tag{2}$$

且 $Z(\mathbb{D})[x]$ 是一个关于 $Z(\mathbb{D})$的单代数。将 [Pie82]第232页上的定理应用于两个代数 $Z(\mathbb{D})[x] \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)$，可知 $Z(\mathbb{D})[x]$ 与 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x$ 互为中心化子。换言之，$Z(\mathbb{D})[x]$ 是 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x$的中心。此外

$$\dim_{Z(\mathbb{D})} Z(\mathbb{D})[x] \cdot \dim_{Z(\mathbb{D})} \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x = \dim_{Z(\mathbb{D})} \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V) \ = (\deg \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V))^2. \tag{3}$$

利用（2），得到不等式

$$\dim_{Z(\mathbb{D})} \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x \geq \deg \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V).$$

若 $Z(\mathbb{D})[x] = \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x$，则上式取等号。

反过来，假设 $\dim^{Z(\mathbb{D})} \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x = \deg \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)$。由（3）可得

$$\dim_{Z(\mathbb{D})} Z(\mathbb{D})[x] = \deg \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V).$$

这意味着 $Z(\mathbb{D})[x]$ 是 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)$ 的极大（等价地，严格极大）子域。因此，它也是 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x$ 的极大子域。由于 $Z(\mathbb{D})[x]$是 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x$ 的中心，我们得到 $Z(\mathbb{D})[x] = \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)^x$。□

引理 5. 设 $x \in \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})$ 为半单的。那么

$$\dim_{Z(\mathbb{D})} \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x \geq \deg \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}) \tag{4}$$

当且仅当.....时等号成立

$$\mathsf{V} = \mathsf{V}_1 \oplus \mathsf{V}_2 \oplus \ldots \oplus \mathsf{V}_n \tag{5}$$

是 x-不可约表示的直和，其中每个 $\mathbb{D}$

$$\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}_j)^x = Z(\mathbb{D})[x|_{\mathsf{V}_j}] \tag{6}$$

一个域，且

$$\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x = \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}_1)^x \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}_2)^x \oplus \ldots \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}_n)^x \,. \tag{7}$$

证明。固定一个分解 (5)。那么

$$\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x \supseteq \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}_1)^x \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}_2)^x \oplus \ldots \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}_n)^x \tag{8}$$

根据引理 4,

$$\dim_{Z(\mathbb{D})} \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}_j)^x \geq \deg \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}_j) \tag{9}$$

对所有 j。这意味着（4）。反之，（4）中的等式成立意味着（9）和（8）中的等式成立。因此，（6）由引理 4 得出。 □

对于正则半单元 $x \in \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})$，可以证明分解（5）和（7）成立。因此，由 x 在 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}j)$ 中对 $\mathsf{V}j$ 的限制所生成的 $Z(\mathbb{D})$-子代数是 $\mathbb{F}$的一个域扩张 $\mathbb{E}_j$，也是 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}j)$ 的严格极大子域。 x 在 $\mathrm{End}(\mathsf{V})$ 中的中心化子是直和

$$\mathrm{End}(\mathsf{V})^x = \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}_n \,. \tag{10}$$

这是 $\mathrm{End}(\mathsf{V})$ 的一个嘉当子代数，上述公式描述了除共轭外的所有此类子代数。群 $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ 中嘉当子代数的中心化子称为嘉当子群。在上述术语下

$$\mathrm{GL}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x = \mathbb{E}_1^\times \times \mathbb{E}_2^\times \times \ldots \times \mathbb{E}_n^\times \,. \tag{11}$$

对于一个嘉当子群

$$\mathrm{H} = \mathbb{E}_1^\times \times \mathbb{E}_2^\times \times \ldots \times \mathbb{E}_n^\times$$

对于上述嘉当子群，我们将 H 的分裂部分定义为

$$\mathrm{A} = \underbrace{\mathbb{F}^\times \times \ldots \times \mathbb{F}^\times}_{n \text{ copies}} \subseteq \mathrm{H} \,.$$

那么 H/A 是紧的。事实上，这可由下面的引理推出，我们按照 [Wei73 第 I.4] 节的表述来写。记 $|\cdot|_{\mathbb{D}}$ 为 $\mathbb{D}$ 上的模，定义同 [Wei73 第 4] 页。

引理 6. 记 $\mathfrak{o}' \subseteq \mathbb{D}$ 和 $\mathfrak{o} \subseteq \mathbb{F}$ 为相应的整数环。设 $\varpi' \in \mathbb{D}$ 和 $\varpi \in \mathbb{F}$ 为素元，并令 e 表示 $\mathbb{D}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的分歧指数。那么

$$\mathbb{D}^\times = \sum_{j=0}^{e-1} \varpi'^j \mathfrak{o}'^\times \mathbb{F}^\times \,.$$

证明。由于 $\mathbb{D}^\times = \langle\varpi'\rangle\mathfrak{o}'^\times$，其中 $\langle\varpi'\rangle = \{\varpi'^n$；参见 [Wei73，第 32]，页的 $n \in \mathbb{Z}\}$，只需验证对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，存在 $k \in \mathbb{Z}$、$0 \le j \le e-1$ 和 $x \in \mathfrak{o}'^\times$，使得

$$\varpi'^n = \varpi'^j x \varpi^k .$$

等价地

$$|\varpi'^{(n-j)}\varpi^{-k})|_{\mathbb{D}} = 1 .$$

令 q' 为 $\mathbb{D}$ 的模。则

$$|\varpi'^{(n-j)}\varpi^{-k}|_{\mathbb{D}} = |\varpi'^{(n-j)}|_{\mathbb{D}}|\varpi^{-k}|_{\mathbb{D}} = q'^{j-n}q'^{ek} .$$

因此我们希望

$$n = ek + j ,$$

这可以通过令 k 为 n 除以 e 所得的商，令 j 为余数来实现。□

为便于今后参考，H 和 A 的李代数分别为

$$\mathfrak{h} = \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}_n , \quad \mathfrak{a} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F} \oplus \ldots \oplus \mathbb{F} . \tag{12}$$

2.4. 等距群。设 $\mathbb{D}$ 是带有对合 σ 的除 $\mathbb{F}$ 代数。我们有如下包含关系

$$\mathbb{F} \subseteq Z(\mathbb{D})^\sigma \subseteq Z(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D} . \tag{13}$$

根据 [How79，第 728]，页（证明另见 Paul Garrett 在线发表的“带对合的代数”，或 [Sch85，定理 2.2，第 353] 页），以下三种情况之一成立。

- $\mathbb{D} = Z(\mathbb{D})$ 和 $\sigma = 1$;
- $\mathbb{D} = Z(\mathbb{D})$ 和 $\sigma \neq 1$;
- $\mathbb{D}$ 是 $Z(\mathbb{D})$ 上的四元数除代数，且 σ 在 $Z(\mathbb{D})$ 上是平凡的。

设 V 是有限维右 $\mathbb{D}$-向量空间，带有非退化的 $\mathbb{D}$-厄米型或斜厄米形式 $(\cdot,\cdot)$。在上述第三种情况下，非退化的 $\mathbb{D}$-厄米型由其秩确定，见 [Lew82，第 264] 页。非退化的 $\mathbb{D}$-斜厄米形式有四种类型，见 [Tsu61，定理 3]。无论哪种情况，型 $(\cdot,\cdot)$ 都在代数 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})$ 上确定一个对合，

$$(xu, v) = (u, \sigma(x)v)) \qquad (u, v \in \mathsf{V}, x \in \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})) ,$$

它与 $\mathbb{D}$ 上原有的对合重合（左侧作用为恒等变换）。回顾等距群

$$\mathrm{G} = \{x \in \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V});\ x\sigma(x) = 1\} = \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})_{\sigma=\mathrm{inv}} , \tag{14}$$

其中 $\mathrm{inv}(x) = x^{-1}$，其李代数为

$$\mathfrak{g} = \{x \in \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V});\ x + \sigma(x) = 0\} = \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})_{\sigma=-1} .$$

固定一个非零半单元 $x \in \mathfrak{g}$。

引理 7. 设 $x \in \mathfrak{g}$ 是一个非零半单元，且 $\mathsf{V} \neq 0$ 在 $\mathbb{D}$ 上是 x-不可约的。那么

$$\dim_{Z(\mathbb{D})^\sigma} \mathfrak{g}^x \geq \frac{1}{2} \cdot \dim_{Z(\mathbb{D})^\sigma} Z(\mathbb{D}) \cdot \deg \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}).$$

当且仅当

$$\mathfrak{g}^x = Z(\mathbb{D})[x]_{\sigma=-1}\,.$$

此外，如果等式成立，则 $Z(\mathbb{D})[x]$ 是一个域。

证明。由于 $\sigma(x) = -x$， $Z(\mathbb{D})[x]$ 和 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x$ 都是 σ-不变的。由于 $\mathrm{Ker}(x) = 0$，以 x 进行乘法给出了 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x_{\sigma=-1}$ 与 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x_{\sigma=1}$ 之间的一个 $Z(\mathbb{D})^\sigma$-线性同构；类似地，也给出了 $Z(\mathbb{D})[x]_{\sigma=-1}$ 与 $Z(\mathbb{D})[x]_{\sigma=1}$ 之间的同构。因此

$$\dim_{Z(\mathbb{D})^\sigma} Z(\mathbb{D})[x]_{\sigma=-1} = \frac{1}{2} \dim_{Z(\mathbb{D})^\sigma} Z(\mathbb{D})[x]$$

and

$$\dim_{Z(\mathbb{D})^\sigma} \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x_{\sigma=-1} = \frac{1}{2} \dim_{Z(\mathbb{D})^\sigma} \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x = \frac{1}{2} \dim_{Z(\mathbb{D})^\sigma} Z(\mathbb{D}) \cdot \dim_{Z(\mathbb{D})} \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x\,.$$

根据引理 4

$$\dim_{Z(\mathbb{D})} \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x \geq \deg \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}). \tag{15}$$

由于 $\mathfrak{g}^x = \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x_{\sigma=-1}$，这就得到了引理中的不等式。当且仅当式 (15) 取等号时，引理中的等式成立。再次由引理 4 可知，当且仅当

$$\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x = Z(\mathbb{D})[x].$$

此外， $Z(\mathbb{D})[x]$ 是一个域。根据上述计算，这等价于

$$\mathfrak{g}^x = \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})^x_{\sigma=-1} = Z(\mathbb{D})[x]_{\sigma=-1}\,,$$

□

引理 8. 设 $x \in \mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})$ 中的一个半单元素。则存在一个直和分解

$$\mathsf{V} = \bigoplus_{j \in J} (\mathsf{V}_j \oplus \mathsf{V}_{j'}) \oplus \bigoplus_{l \in L} \mathsf{V}_l \oplus \mathsf{V}_0\,, \tag{16}$$

其中 $0 \notin J \cup L$,

(i) 每个子空间 V_j、$\mathsf{V}_{j'}$、V_l 都是 x 在 $\mathbb{D}$ 上的不可约子空间；(ii) 型 $(\cdot,\cdot)$ 在 V_j 和 $\mathsf{V}_{j'}$ 上的限制为零，但在 $\mathsf{V}_j \oplus \mathsf{V}_{j'}$ 上的限制是非退化的；(iii) 型在每个 V_l 上的限制都是非退化的；(iv) 空间 $\mathsf{V}_j \oplus \mathsf{V}_{j'}$、$\mathsf{V}_l$、$\mathsf{V}_0$ 两两正交。(v) 空间 $\mathsf{V}_0 \neq 0$ 当且仅当 $\mathbb{D}$ 是交换的、对合 σ 是平凡的、型 $(\cdot,\cdot)$ 是对称的，且 V 在 $\mathbb{D}$ 上的维数为奇数。在此情形下，$\dim_{\mathbb{D}} \mathsf{V}_0 = 1$ 且 $x|_{\mathsf{V}_0} = 0$。

证明。我们选取 V 的一个分解，使其成为若干个 x-不可约子空间的直和，将由此得到的、通过型配对的各向同性子空间归在一起，并用集合 J 为它们编索引。剩余子空间具有这样的性质：型在其中任意一个子空间上的限制都是非退化的。它们由集合 L 编索引，最终还有 0。□

引理9. 设 $x \in \mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)$ 中的半单元素。那么，根据 (16),

$$\dim_{Z(\mathbb{D})^\sigma} \mathfrak{g}^x \geq \frac{1}{2} \cdot \dim_{Z(\mathbb{D})^\sigma} Z(\mathbb{D}) \cdot (\deg \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V) - \dim_{\mathbb{D}} V_0) \ . \tag{17}$$

当且仅当根据 (16) 时，等号成立,

$$\mathfrak{g}^x = \bigoplus_{j \in J} Z(\mathbb{D})[x|_{V_j + V_{j'}}]_{\sigma=-1} \oplus \bigoplus_{l \in L} Z(\mathbb{D})[x|_{V_l}]_{\sigma=-1} \, . \tag{18}$$

每个 $Z(\mathbb{D})[x|_{V_j+V_{j'}}]$ 和每个 $Z(\mathbb{D})[x|_{V_l}]$ 都是 $Z(\mathbb{D})^\sigma$ 的域扩张。此外，每个$Z(\mathbb{D})[x|_{V_j+V_{j'}}]_{\sigma=-1}$ 通过限制到 V_j 都与 $Z(\mathbb{D})^\sigma[x|_{V_j}]$ 同构。

证明. 回忆 $\deg \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V) = \dim_{\mathbb{D}} V$。由于

$$\mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}(V)^x \supseteq \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{g}(V_j \oplus V_{j'})^x \oplus \bigoplus_{l \in L} \mathfrak{g}(V_l)^x$$

and

$$\mathfrak{g}(V_j \oplus V_{j'})^x \supseteq \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V_j)^x$$

通过限制到 V_j ，结论由引理4和引理7得出。（式 (17) 中的分数 $_1{}_2$ 是必要的，因为我们讨论的是空间 $V_j \oplus V_{j'}$。）□

群G中嘉当子代数的中心化子称为嘉当子群H。在上述术语中

$$H = G^x = \prod_{j \in J} Z(\mathbb{D})[x|_{V_j+V_{j'}}]^\times_{\sigma=\mathrm{inv}} \times \prod_{l \in L} Z(\mathbb{D})[x|_{V_l}]^\times_{\sigma=\mathrm{inv}} \, . \tag{19}$$

Set

$$X = \sum_{j \in J} V_j \, , \quad Y = \sum_{j \in J} V'_j \, , \quad V^{ell} = \sum_{l \in L} V_l \, .$$

于是我们得到一个由H保持不变的直和分解,

$$V = X \oplus V^{ell} \oplus Y \, , \tag{20}$$

使得 X、Y 是互补各向同性子空间，$V^{ell} \subseteq V$ 是 $X + Y$ 的正交补，而 $H|_{V^{ell}}$ 是形式 $(\cdot, \cdot)$ 在 V^{ell}上的限制的等距群中的一个紧致嘉当子群。特别地，H 不保持 V^{ell}的任何各向同性子空间。此外，$H|_X \subseteq GL(X)$ 是一个嘉当子群；由于 Y 可以视为 X 的线性对偶，该子群确定了 $H|_{X+Y}$。我们将 $H|_{X+Y}$ 的分裂部分称为 H 的分裂部分，并记作 A。于是 H/A 是紧致的。

2.5. 韦伊-哈里什-钱德拉积分公式。关于第 2.3 和 2.4 节中嘉当子群的描述，一个重要结论是：这类子群的共轭类数目是有限的。这一点在 [HC70 第 87] 页中未给出任何证明或参考文献。对于半单群， [Mor88 第 4.2] 节给出了证明。下面我们将对 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 以及某些经典群给出证明。

设 $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$。由于固定次数 n 的 $\mathbb{F}$ 的非分歧扩张的同构类数量有限， [Mil20，命题 7.50], 且全分歧扩张的数量也有限， [Ser78], 因此 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 中嘉当子群的共轭类数量有限。完整论证见 [Kra66]。

下面设 $\mathbb{D}$ 是一个交换域，且 G 是定义在（14）中的向量空间 V 上的等距群，其中 V 是 $\mathbb{D}$ 上的向量空间。特别地，$\mathrm{G} = \mathrm{GL(V)}_{\sigma=\mathrm{inv}}$。我们可以如下证明嘉当子群的共轭类数量有限：设 T 是 G 中的一个嘉当子群。那么 $C = Z_{\mathrm{GL(V)}}$(T) 是 GL(V) 的一个嘉当子群。特别地，$C = \prod E_i^{\times}$ 其中 E_i 是 $\mathbb{D}$的一个域扩张。此外，$\mathrm{T} = C_{\sigma=\mathrm{inv}}$。这表明，在 $\mathbb{F}$上同构的意义下，G 中只有有限多个嘉当子群。设 T′ 是另一个与 T 同构的嘉当子群。那么 $C' = Z_{\mathrm{GL(V)}}$(T′) 同构于C。我们可以在 C 和 C'上定义厄米型。通过调整厄米型，我们得到 $\mathrm{V} \simeq C \simeq C'$ 作为厄米空间。根据维特定理，存在 $g \in \mathrm{G}$，使得 $gCg^{-1} = C'$。取 σ 不变元，我们得到 $g\mathrm{T}g^{-1} =$T′。这证明了 G 中嘉当子群的共轭类数量有限。

x 在 $\mathfrak{g}$ 中满足 $\eta(x) \neq 0$ 的集合是 Zariski 稠密的。由于 $\mathfrak{g}$ 是 Zariski 连通的，其补集是 Zariski 闭的。因此，由 [Mar91，(2.5.3) 命题 (i)], 可知，它不包含任何在 p 进拓扑下非空且开集的子集。因此，正则半单元素在 $\mathfrak{g}$ 中关于 p 进拓扑是稠密的。因此，经过 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数的共轭类之并在 $\mathfrak{g}$ 中稠密。

回顾李代数 $\mathfrak{g}$ 上的 Weyl–Harish-Chandra积分公式，

$$\int_{\mathfrak{g}} \psi(x)\,dx = \sum_{\mathrm{H}} \frac{1}{|W(\mathrm{H})|} \int_{\mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}} |\eta(x)| \int_{\mathrm{G/H}} \psi(x^g)\,d(g\mathrm{H})\,dx \qquad (\psi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}))\,. \tag{21}$$

这里的求和遍历一组互不共轭的极大嘉当子群 $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$， W(H) 是 Weyl 群，等于 H 在 G 中的正规化子对 H 的商，$dx = d(g\mathrm{H})\,dx$， $x^g = gxg^{-1}$ 见 [HC70，第 86-88] 页。

令 $\mathrm{G}^0 \subseteq \mathrm{G}$ 表示 Zariski单位连通分支，并令 $Z \subseteq$G 表示 G 的中心。凯莱变换 $x \mapsto (1+x)(1-x)^{-1}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 与群 G^0之间的双有理同构。因此，G^0 中的正则半单元素集是 Zariski开集。若 G^0 是 Zariski连通的，则该集合也稠密。因此，根据[Mar91, (2.5.3) 命题 (i)], ，该集合在 p进拓扑下稠密。因此，所有嘉当子群的共轭类之并在 $Z\mathrm{G}^0$中稠密。（若 G 是一般线性群，则不需要凯莱变换。）由此我们得到群 $Z\mathrm{G}^0$, 上的 Weyl–Harish-Chandra积分公式

$$\int_{\mathrm{G}} \Psi(x)\,dx = \sum_{\mathrm{H}} \frac{1}{|W(\mathrm{H})|} \int_{\mathrm{H}^{\mathrm{reg}}} |D(x)| \int_{\mathrm{G/H}} \Psi(x^g)\,d(g\mathrm{H})\,dx \qquad (\Psi \in C_c(Z\mathrm{G}^0))\,. \tag{22}$$

这里， $D(x)$是多项式中 t^l 的系数（参见 (1)）

$$\det(t+1-\mathrm{Ad}(x))$$

在不定元 t 中。由对偶对分类可知， $Z\mathsf{G}^0=\mathsf{G}$，除非 G 是偶正交群。

2.6. II 型对偶对的矩映射的一些几何性质。设 V 是有限维右 $\mathbb{D}$-向量空间。对于 $x\in \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})$，令 $\mathrm{tr}(x)$ 表示将 x 视为 $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathsf{V})$ 的元素时的迹。则

$$\mathrm{tr}\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}),\mathbb{F}) \tag{23}$$

并且用 [Wei73，第 53], 页中的术语表示

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathsf{V})/\mathbb{F}}(x)=\dim_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})\cdot \mathrm{tr}(x)\qquad (x\in \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}))\,. \tag{24}$$

由于恒等映射的迹不为零，我们看到 $\mathrm{tr}\neq 0$。（这里需要假设 $\mathbb{F}$ 的特征为零。）对于 x、$y\in \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})$，定义 $t(x)(y)=\mathrm{tr}(xy)\in\mathbb{F}$。这给出了一个非零映射

$$\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}),\mathbb{F})\,,\quad x\mapsto t(x)(-). \tag{25}$$

核是一个双边理想。代数 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})$ 是单的，因此该理想为零。因此，(25) 是一个嵌入。由维数计数可知，它是一个线性双射。

令 V' 为另一个有限维右 $\mathbb{D}$-向量空间。我们定义映射

$$T\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V},\mathsf{V}')\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}',\mathsf{V}),\mathbb{F}) \tag{26}$$

by

$$T(y)(x)=\mathrm{tr}(xy)$$

其中 $y\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V},\mathsf{V}')$ 且 $x\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}',\mathsf{V})$。由于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}',\mathsf{V})$ 是一个简单的 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})\times \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}')$-模，$\ker T=0$。令

$$\mathsf{W}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}',\mathsf{V})\oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V},\mathsf{V}')\,. \tag{27}$$

$\ker T=0$ 这一事实意味着

$$\langle w,w'\rangle=\mathrm{tr}(xy')-\mathrm{tr}(x'y)\qquad (w=(x,y),\ w=(x',y')\in \mathsf{W}) \tag{28}$$

在 W 上定义了一个非退化辛形式。

对于任意 $\mathbb{F}$-子空间 $\mathfrak{e}\subseteq \mathfrak{sp}(\mathsf{W})$，令 $\mathfrak{e}^*=\mathrm{Hom}(\mathfrak{e},\mathbb{F})$。我们回顾未归一化矩映射

$$\begin{aligned}&\tau_{\mathfrak{e}^*}:\mathsf{W}\to\mathfrak{e}^*\,,\\ &\tau_{\mathfrak{e}^*}(w)(e)=\langle e(w),w\rangle\qquad (e\in\mathfrak{e},w\in\mathsf{W})\,.\end{aligned} \tag{29}$$

令 $\mathfrak{g}=\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V})$，并令 $\mathfrak{g}'=\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}')$。定义

$$\begin{aligned}&\tau_{\mathfrak{g}}\colon \mathsf{W}\to\mathfrak{g}\,,\quad \tau_{\mathfrak{g}'}\colon \mathsf{W}\to\mathfrak{g}'\,,\\ &\tau_{\mathfrak{g}}(x,y)=xy\,,\quad \tau_{\mathfrak{g}'}(x,y)=yx\qquad (x\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V}',\mathsf{V}),\ y\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(\mathsf{V},\mathsf{V}'))\,.\end{aligned} \tag{30}$$

那么，在同一化 (25) 下，我们有

$$\tau_{\mathfrak{g}^*}=2\tau_{\mathfrak{g}}\,,\quad \tau_{\mathfrak{g}'^*}=2\tau_{\mathfrak{g}'}\,. \tag{31}$$

群 G = $GL_{\mathbb{D}}(V)$ 和 G′ = $GL_{\mathbb{D}}(V')$ 通过左乘和右乘其逆元的方式作用于 W。这些作用保持辛形式不变。矩映射 (31) 将这些作用与相应的余伴随作用和伴随作用相互交织。

设 H′ ⊆ G′ = $GL_{\mathbb{D}}(V')$ 是一个嘉当子群，其 $\mathbb{F}$-分裂分量为 A′ ⊆ H′。令

$$V' = V'_1 \oplus V'_2 \oplus \dots \tag{32}$$

为 V′ 按 A′ 分解所得的同型分量。于是辛空间分解为两两正交子空间的直和：

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots , \tag{33}$$

其中 $W_j = \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(V'_j, V) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(V, V'_j)$。

令 A″ ⊆ Sp(W) 表示 A′ 的中心化子。则 A″ 保持分解 (33)，且限制到每个极大各向同性子空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(V'_j, V)$ 上，得到以下同构：

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}'' &= \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(V'_1, V)) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(V'_2, V)) \oplus \dots \\ A'' &= \mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(V'_1, V)) \times \mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(V'_2, V)) \times \dots . \end{aligned} \tag{34}$$

因此，A‴ 在 Sp(W) 中的中心化子等于 A″ ，并且作为一个约化对偶对，(A″, A‴) = (A″, A′) 同构于

$$(\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}), \mathrm{GL}_1(\mathbb{F})) \times (\mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{F}), \mathrm{GL}_1(\mathbb{F})) \times \dots , \tag{35}$$

其中 $n_j = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(V'_j, V)$。

设 $\mathfrak{h}'$ 为 H′的李代数。由（11）可知 H′ ⊆ $\mathfrak{h}'$ ，而由（12）可知，$\mathfrak{h}'$ ⊆$\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V')$ 也是一个在 $Z(\mathbb{D})$ 上的结合子代数。记 $\mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}} \subseteq \mathfrak{h}'$ 以及 H'^{reg} ⊆H′ 为正则元素的子集。

引理 10. 设 $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$ 或 $x' \in H'^{\mathrm{reg}}$。则元素 1, x', x'^2, x'^3, ... 张成结合代数 $\mathfrak{h}'$ 在 $Z(\mathbb{D})$ 上。

证明。这由（10）立即得到。 □

我们按惯例将切丛 $T\mathfrak{a}''$与 $\mathfrak{a}'' \times \mathfrak{a}''$、余切丛 $T^*\mathfrak{a}''$与 $\mathfrak{a}'' \times \mathfrak{a}''^*$ 分别作自然等同。给定 $x' \in \mathfrak{h}'$ ，存在一个嵌入

$$\iota_{\mathfrak{g},x'} : \mathfrak{g} \ni x \to x + x' \in \mathfrak{a}'' . \tag{36}$$

该嵌入的余法丛等于

$$N_{\iota_{\mathfrak{g},x'}} = \{(x + x', \xi);\ x \in \mathfrak{g} ,\ \xi \in \mathfrak{a}''^* ,\ \xi|_{\mathfrak{g}} = 0\} \tag{37}$$

类似地，给定 $h' \in$H′ ，存在一个嵌入

$$\iota_{\mathrm{G},h'} : \mathrm{G} \ni g \to gh' \in \mathrm{A}'' . \tag{38}$$

这个嵌入的余法丛等于

$$N_{\iota_{\mathrm{G},h'}} = \{(gh', \xi);\ g \in \mathrm{G} ,\ \xi \in \mathfrak{a}''^* ,\ \xi|_{\mathfrak{g}} = 0\} \tag{39}$$

引理 11. 设

$$\begin{aligned} S_{\mathfrak{a}''} &= \{(x, \tau_{\mathfrak{a}''*}(w)) \in \mathfrak{a}'' \times (\mathfrak{a}''^* \setminus \{0\});\ x(w) = 0\,,\ w \in \mathsf{W}\}\,, \\ S_{\mathrm{A}''} &= \{(g, \tau_{\mathfrak{a}''*}(w)) \in \mathrm{A}'' \times (\mathfrak{a}''^* \setminus \{0\});\ g(w) = -w\,,\ w \in \mathsf{W}\}\,. \end{aligned} \tag{40}$$

取一个元素 $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$ 和 $h' \in \mathrm{H}'^{\mathrm{reg}}$。于是 $S_{\mathfrak{a}''} \cap N_{\iota_{\mathfrak{g},x'}} = \emptyset$ 和 $S_{\mathrm{A}''} \cap N_{\iota_{\mathrm{G},h'}} = \emptyset$。

证明。假设 $(x + x', \tau_{\mathfrak{a}''*}(w)) \in N_{\iota_{\mathfrak{g},x'}}$。那么限制 $\tau_{\mathfrak{a}''*}(w))|_{\mathfrak{g}} = 0$。根据定义 (29)，$\tau_{\mathfrak{a}''*}(w))|_{\mathfrak{g}} = \tau_{\mathfrak{g}^*}(w)$。按照分解 (33)

$$w = (w_1, w_2, \ldots)\,,\quad w_j = (x_j, y_j)\,,\quad x_j \in \mathrm{Hom}(\mathsf{V}'_j, \mathsf{V})\,,\quad y_j \in \mathrm{Hom}(\mathsf{V}, \mathsf{V}'_j)$$

并按照分解 (27)

$$w = (\tilde{x}, \tilde{y})\,,\quad \tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots)\,,\quad \tilde{y} = (y_1, y_2, \ldots)\,.$$

因此，由 (31) 得，

$$0 = \tau_{\mathfrak{g}^*}(w)(z) = 2\,\mathrm{tr}(z \sum_j x_j y_j)$$

对所有 $z \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\mathsf{V})$。这给出

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots = 0\,. \tag{41}$$

我们还有条件

$$(x + x')w = 0\,, \tag{42}$$

这意味着对所有 j

$$x x_j = x_j x'\,,\quad y_j x = x' y_j\,. \tag{43}$$

将 x^k 从左侧乘到 (41) 上，并使用 (43)，得到

$$x_1 x'^k y_1 + x_2 x'^k y_2 + \ldots = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{44}$$

因此，由引理 10 可知

$$x_1 z' y_1 + x_2 z' y_2 + \ldots = 0 \qquad (z' \in \mathfrak{h}')\,.$$

因此

$$x_j y_j = 0 \tag{45}$$

对所有 j，由 (34) 和 (31) 可知，这意味着 $\tau_{\mathfrak{a}''*}(w) = 0$。因此，$S_{\mathfrak{a}''} \cap N_{\iota_{\mathfrak{g},\ x'}} = \emptyset$。

为了证明 $S_{\mathrm{A}''} \cap N_{\iota_{\mathrm{G},\ x'}} = \emptyset$，我们考虑一个元素 $(gh', \tau_{\mathfrak{a}''*}(w)) \in N_{\iota_{\mathrm{G},\ h'}}$ 并将 (42) 替换为

$$gh'(w) = -w\,, \tag{46}$$

这意味着对所有 j

$$g x_j = -x_j h'\,,\quad y_j g = -h' y_j\,. \tag{47}$$

在 (46) 左侧乘以 g^k 并使用 (47)，得到

$$x_1 h'^k y_1 + x_2 h'^k y_2 + \ldots = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

引理 10 推出 (43)，因此对所有 j，(45) 都成立，这意味着 $\tau_{\mathfrak{a}''*}(w) = 0$。因此，$S_{\mathrm{A}''} \cap N_{\iota_{\mathrm{G},x'}} = \emptyset$。 □

2.7. I 型对偶对的矩映射的一些几何性质。设 σ 是除 $\mathbb{F}$-代数 $\mathbb{D}$ 上的一个对合，它逐点固定 $\mathbb{F}$ 。设 V 和 V′ 是两个有限维右 $\mathbb{D}$-向量空间，分别带有非退化型 $(\cdot,\cdot)$ 和 $(\cdot,\cdot)'$，其中一个为 σ-厄米型，另一个为 σ-斜厄米型。分别以 $G \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)$ 和 $G' \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V')$ 表示相应的等距群，以 $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)$ 和 $\mathfrak{g}' \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V')$ 表示它们的李代数。

定义一个映射

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(V', V) \ni w \to w^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(V, V')\,, \\ &(w(v'), v) = (v', w^*(v))' \qquad (v \in V, v' \in V')\,. \end{aligned} \tag{48}$$

令 $W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(V', V)$。

公式

$$\langle w', w\rangle = \mathrm{tr}(w'w^*) \qquad (w, w' \in W) \tag{49}$$

在 $\mathbb{F}$-向量空间 W 上定义了一个非退化辛形式。定义

$$\begin{aligned} &\tau_{\mathfrak{g}} \colon W \to \mathfrak{g}\,, \quad \tau_{\mathfrak{g}'} \colon W \to \mathfrak{g}'\,, \\ &\tau_{\mathfrak{g}}(w) = ww^*\,, \quad \tau_{\mathfrak{g}'}(w) = w^*w \qquad (w \in W)\,. \end{aligned} \tag{50}$$

由于 $\mathbb{F}$值双线性形式

$$\mathbb{D} \times \mathbb{D} \ni (a, b) \to \mathrm{tr}_{\mathbb{D}/\mathbb{F}}(ab) \in \mathbb{F}$$

是非退化的， $\mathbb{F}$值双线性形式

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{D}/\mathbb{F}} \circ (\cdot,\cdot) \tag{51}$$

等于 $\mathrm{tr}^{\mathbb{D}/\mathbb{F}}$ 与 V 上形式 $(\cdot,\cdot)$ 的复合，也是非退化的。由带对合的除代数的分类， [Sch85，定理 2.2，第 353], 页，并根据 $\mathbb{F} \subseteq Z(\mathbb{D})^{\sigma}$ 的假设，我们看到

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{D}/\mathbb{F}}(a) = \mathrm{tr}_{\mathbb{D}/\mathbb{F}}(\sigma(a)) \qquad (a \in \mathbb{D})\,. \tag{52}$$

由于 tr 可以通过将 $\mathbb{F}$ 视为 $\mathbb{F}$ 上的向量空间时的基和对偶基计算，(52) 蕴含

$$\mathrm{tr}(x) = \mathrm{tr}(\sigma(x)) \qquad (x \in \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V))\,. \tag{53}$$

这反过来又意味着这两个子空间

$$\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)_{\sigma=1} \quad \text{and} \quad \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)_{\sigma=-1}$$

关于配对，它们在 $\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)$ 中是正交的

$$\mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V) \times \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V) \ni (x, y) \to \mathrm{tr}(xy) \in \mathbb{F}\,.$$

由于 $\mathfrak{g} = \mathrm{End}_{\mathbb{D}}(V)_{\sigma=-1}$ ，恒等式 (25) 限制为恒等式 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$ ，类似地 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'^*$。回忆矩映射 (29)。用这些术语，我们有

$$\tau_{\mathfrak{g}^*} = \tau_{\mathfrak{g}}\,, \quad \tau_{\mathfrak{g}'^*} = \tau_{\mathfrak{g}'}\,. \tag{54}$$

设 $\mathsf{H}' \subseteq \mathsf{G}'$ 是一个嘉当子群，其分裂分量为 $\mathsf{A}' \subseteq \mathsf{H}'$。回忆分解 (20)

$$\mathsf{V}' = \mathsf{X}' \oplus \mathsf{V}'^{ell} \oplus \mathsf{Y}' .$$

Let

$$\mathsf{X}' = \mathsf{X}'_1 \oplus \mathsf{X}'_2 \oplus \dots , \quad \mathsf{Y}' = \mathsf{Y}'_1 \oplus \mathsf{Y}'_2 \oplus \dots , \tag{55}$$

分别表示分解为 A'-同型分量，使得 Y'_j 通过辛型 $\langle \cdot$ 与 X'_j 对偶。此外，令

$$\mathsf{W}^{split} = \mathrm{Hom}(\mathsf{X}' \oplus \mathsf{Y}', \mathsf{V}) , \quad \mathsf{W}^{ell} = \mathrm{Hom}(\mathsf{V}'^{ell}, \mathsf{V}) .$$

Let

$$\mathsf{W}_j = \mathrm{Hom}(\mathsf{X}'_j \oplus \mathsf{Y}'_j, \mathsf{V}) = \mathrm{Hom}(\mathsf{X}'_j, \mathsf{V}) \oplus \mathrm{Hom}(\mathsf{Y}'_j, \mathsf{V}) .$$

我们有

$$\mathsf{W}^{split} = \mathrm{Hom}(\mathsf{X}', \mathsf{V}) \oplus \mathrm{Hom}(\mathsf{Y}', \mathsf{V}) = \bigoplus_j \mathsf{W}_j .$$

辛群 空间 W 分解为两两正交子空间的直和 :

$$\mathsf{W} = \mathsf{W}^{ell} \oplus \mathsf{W}^{split} = \mathsf{W}^{ell} \oplus \left(\bigoplus_j \mathsf{W}_j \right) . \tag{56}$$

此外,

$$\mathsf{W}^{split} = \mathrm{Hom}(\mathsf{X}', \mathsf{V}) \oplus \mathrm{Hom}(\mathsf{Y}', \mathsf{V}) \tag{57}$$

是一个完全极化。群 A'' 保持分解 (56)，显然的限制给出以下同构:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}'' &= \mathfrak{sp}(\mathsf{W}^{ell}) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathrm{Hom}(\mathsf{X}'_1, \mathsf{V})) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathrm{Hom}(\mathsf{X}'_2, \mathsf{V})) \oplus \\ \mathrm{A}'' &= \mathrm{Sp}(\mathsf{W}^{ell}) \times \mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(\mathrm{Hom}(\mathsf{X}'_1, \mathsf{V})) \times \mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(\mathrm{Hom}(\mathsf{X}'_2, \mathsf{V})) \times \dots . \end{aligned} \tag{58}$$

因此 $\mathsf{A}''' = \mathsf{A}'$，并且作为约化对偶对，$(\mathsf{A}'', \mathsf{A}''') = (\mathsf{A}'', \mathsf{A}')$ 同构于

$$(\mathrm{Sp}_{2n_0}(\mathbb{F}), \mathrm{O}_1(\mathbb{F})) \times (\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}), \mathrm{GL}_1(\mathbb{F})) \times (\mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{F}), \mathrm{GL}_1(\mathbb{F})) \times \dots , \tag{59}$$

其中 $2n_0 = \dim_{\mathbb{F}} \mathsf{W}^{ell}$，且对于 $1 \le j$, $n_j = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}(\mathsf{V}'_j, \mathsf{V})$。

引理 12. 设 $\mathfrak{h}'$ 是 H' 的李代数，且 $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$ 或 $x' \in \mathsf{H}'^{\mathrm{reg}}$。那么，就空间 V' 的 (20) 而言，元素 1, x', x'^2, x'^3,... 在 $\mathsf{X}' \oplus \mathsf{V}'^{ell}$ 上的限制张成 $\mathrm{End}(\mathsf{X}' \oplus \mathsf{V}'^{ell})^{x'}$ 在 $Z(\mathbb{D})$ 上的空间。

证明。这分别由 (18) 或 (19) 立即得出。 □

我们将余切丛 $T^*\mathfrak{a}''$ 与 $\mathfrak{a}'' \times \mathfrak{a}''^*$ 认同，并将 $T^*\mathrm{A}''$ 与 $\mathrm{A}'' \times \mathfrak{a}''^*$ 认同，且采用引理 11 前刚引入的记号。

引理 13. 设

$$\begin{aligned} S_{\mathfrak{a}''} &= \{(x, \tau_{\mathfrak{a}''^*}(w)) \in \mathfrak{a}'' \times (\mathfrak{a}''^* \setminus \{0\});\ x(w) = 0 ,\ w \in \mathsf{W}\} , \\ S_{\mathrm{A}''} &= \{(g, \tau_{\mathfrak{a}''^*}(w)) \in \mathrm{A}'' \times (\mathfrak{a}''^* \setminus \{0\});\ g(w) = -w ,\ w \in \mathsf{W}\} . \end{aligned} \tag{60}$$

固定一个元素 $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$ 和 $h' \in \mathsf{H}'^{\mathrm{reg}}$。则 $S_{\mathfrak{a}''} \cap N_{\iota_{\mathfrak{g},\ x'}} = \emptyset$ 和 $S_{\mathrm{A}''} \cap N_{\iota_{\mathrm{G},\ h'}} = \emptyset$。

证明。设 $(x+x', \tau_{\mathfrak{a}''*}(w)) \in N_{\iota_{\mathfrak{g},\ x'}}$。则限制 $\tau_{\mathfrak{a}''*}(w)|_{\mathfrak{g}} = 0$。根据定义 (29)，$\tau_{\mathfrak{a}''*}(w))|_{\mathfrak{g}} = \tau_{\mathfrak{g}^*}(w)$。根据分解 (56)

$w = (w_0, w_1, w_2, \ldots)$ $w_0 \in \mathsf{W}^{ell}$, $w_j = (x_j, y_j)$ $x_j \in \mathrm{Hom}(\mathsf{V}'_j, \mathsf{V})$ $y_j \in \mathrm{Hom}(\mathsf{V}, \mathsf{V}'_j)$，其中 $j \geq 1$。因此，由（54）可得，

$$0 = \tau_{\mathfrak{g}^*}(w)(z) = \mathrm{tr}(z(w_0 w_0^* + 2x_1 y_1^* + 2x_2 y_2^* + \ldots)) \qquad (z \in \mathfrak{g}) .$$

因此，

$$w_0 w_0^* + 2x_1 y_1^* + 2x_2 y_2^* + \ldots = 0 . \tag{61}$$

我们还有以下条件

$$(x + x')w = 0 ,$$

这意味着对所有 j

$$xw_0 = w_0 x' , \quad x x_j = x_j x' , \quad y_j x = x' y_j , \quad j \geq 1 . \tag{62}$$

在 (41) 式左边乘以 x'^k 并利用 (43) 式，得到

$$w_0 x'^k w_0^* + 2x_1 x'^k y_1 + 2x_2 x'^k y_2 + \ldots = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{63}$$

因此，引理 12 蕴含

$$w_0 z' w_0^* + 2x_1 z' y_1^* + 2x_2 z' y_2^* + \ldots = 0 \qquad (z' \in \mathrm{End}(\mathsf{X}' \oplus \mathsf{V}'^{ell})^{x'}) .$$

因此

$$w_0 w_0^* = 0 , \quad x_j y_j^* = 0 , \quad j \geq 1 , \tag{64}$$

这由 (58) 式和 (54) 式意味着 $\tau_{\mathfrak{a}''*}(w) = 0$。因此，$S_{\mathfrak{a}''} \cap N_{\iota_{\mathfrak{g},\ x'}} = \emptyset$。对上述论证稍作修改，即可证明 $S_{\mathrm{A}''} \cap N_{\iota_{\mathrm{G},\ x'}} = \emptyset$，其方法与引理 11 的证明中所用的方法类似。□

3. The distributions $\mathrm{chc}_{x'} \in \mathcal{S}^*(\mathfrak{g})$ for $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$.

3.1. $\mathfrak{sp}(\mathsf{W})$ 中的极小幂零 $\mathrm{Sp}(\mathsf{W})$-轨道积分。 设 W 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间，配备一个非退化辛形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。令 $\mathrm{Sp}(\mathsf{W}) \subseteq \mathrm{End}(\mathsf{W})$ 表示相应的辛群，其李代数为 $\mathfrak{sp}(\mathsf{W}) \subseteq \mathrm{End}(\mathsf{W})$。固定一个格 $\mathcal{L} \subseteq \mathsf{W}$。我们假设 $\mathcal{L}$ 关于该辛形式是自对偶的，具体而言

$$(\langle w, w' \rangle \in \mathfrak{o}_{\mathbb{F}} \ \text{ for all } \ w' \in \mathcal{L}) \iff w \in \mathcal{L} . \tag{65}$$

我们将 W 上的哈尔测度 $d\mu_{\mathsf{W}}(w) = dw$ 归一化，使得 $\mathcal{L}$ 的体积为 1。（注意，$\mathcal{L}$ 是开紧的。）这就确定了任意子空间 $\mathsf{U} \subseteq \mathsf{W}$ 上哈尔测度 μ_{U} 的归一化，从而使得 $\mu_{\mathrm{U}}(\mathsf{U} \cap \mathcal{L}) = 1$。

回顾 [Wei73，第 189] 页，我们令 $\mathrm{End}(\mathsf{W}\ \mathcal{L})$ 为 $\mathrm{End}(\mathsf{W})$ 中保持 $\mathcal{L}$ 的自同态集合。集合 $\mathrm{End}(\mathsf{W}\ \mathcal{L})$ 是 $\mathrm{End}(\mathsf{W})$ 中的一个格。我们将使用此格来规范 $\mathrm{End}(\mathsf{W})$ 子空间上的哈尔测度，如上所述，特别是 $\mathfrak{sp}(\mathsf{W})$ 上的哈尔测度。

固定加法群 $\mathbb{F}$ 上的一个酉特征标 χ，其核为 $\ker\chi=\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}$。我们回顾波前集的概念（见附录A）。定义

$$\mathrm{chc}(\psi)=\int_{\mathsf{W}}\int_{\mathfrak{sp}(\mathsf{W})}\chi(\langle xw,w\rangle)\psi(x)\,dx\,dw \tag{66}$$

对于 $\psi\in\mathcal{S}(\mathfrak{sp}(\mathsf{W}))$。

定理14。（i）式（66）中的每个连续积分都绝对收敛，并定义了一个分布 $\mathrm{chc}\in\mathcal{S}^*(\mathfrak{sp}(\mathsf{W}))$。

（ii）我们有

$$\mathrm{chc}(\psi)=\int_{\mathfrak{sp}(\mathsf{W})}\gamma_{\mathrm{Weil}}(x)|\det(x)|_{\mathbb{F}}^{-\frac{1}{2}}\psi(x)\,dx\qquad(\psi\in\mathcal{S}(\mathfrak{sp}(\mathsf{W}))\,, \tag{67}$$

其中 $\gamma_{\mathrm{Weil}}(x)$ 是二次型的 Weil 因子 $\langle xw,\ w\rangle$，[Wei64，第 2 条推论，第 162] 页，$|\cdot|_{\mathbb{F}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的模 [Wei73，第 3] 页，并且该积分绝对收敛。特别地，$\gamma_{\mathrm{Weil}}(x)^8=1$。

（iii）子集

$$\tau_{\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})}(\mathsf{W}\setminus\{0\})\subseteq\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})\,, \tag{68}$$

是一个极小幂零余伴随轨道。式（66）中定义的分布 Chc 是该幂零轨道上某个正不变测度的傅里叶变换。此外，

$$\mathrm{WF}(\mathrm{chc})=\{(x,\tau_{\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})}(w));\ \tau_{\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})}(w)\neq0\,,\ x(w)=0\}\,. \tag{69}$$

证明。令 $N_{\mathcal{L}}(w)=\inf_{a\in\mathbb{F}^\times,\ aw\in\mathcal{L}}|a|_{\mathbb{F}}^{-1}$ 为与格 $\mathcal{L}$相关的范数，[Wei73，第 28], 页，并令 w_1、w_2、...、w_{2n} 为 W 的一组 $N_{\mathcal{L}}$- 正交基，其意义是 $\mathsf{W}=\mathbb{F}w_1\oplus\mathbb{F}w_2\oplus\ldots\oplus\mathbb{F}w_{2n}$、[1] 且 $1=N_{\mathcal{L}}(w_1)=N_{\mathcal{L}}(w_2)=\ldots N_{\mathcal{L}}(w_{2n})$。取关于此基的坐标，我们得到一个 $\mathbb{F}$-线性同构

$$\mathsf{W}\ni w=u_1w_1+u_2w_2+\ldots u_{2n}w_{2n}\to u=(u_1,u_2,\ldots,u_{2n})\in M_{1,2n}(\mathbb{F})$$

它将测度 dw 传送为 $du=du_1du_2\ldots du_{2n}$，其中每个 du_j 都经过归一化，使得 $\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}$ 的质量为 1。此外，对于每个 $x\in\mathfrak{sp}(\mathsf{W})$，双线性形式 $\langle x\cdot,\ \cdot\rangle$ 在 W 上是对称的。我们在 $M_{1,\ 2n}(\mathbb{F})$ 上定义一个辛形式 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，使得 $\langle e_i,\ e_j\rangle=\langle w_i,\ w_j\rangle$。因此，我们有一个 $\mathbb{F}$-线性双射

$$\mathfrak{sp}(\mathsf{W})\ni x\to S(x)\in SM_{2n}(\mathbb{F})\,,\quad S(x)_{i,j}=\langle xe_i,e_j\rangle\,,$$

它将归一化测度 dx on $\mathfrak{sp}(\mathsf{W})$ 推送为对称矩阵空间 $SM_{2n}(\mathbb{F})$ 上的测度 dC。在此空间上定义傅里叶变换如下：

$$\hat{f}(D)=\int_{SM_{2n}(\mathbb{F})}\chi(-trace(DC))f(C)\,dC\qquad(f\in\mathcal{S}(SM_{2n}(\mathbb{F}))\,,\ D\in SM_{2n}(\mathbb{F}))$$

[1]我们可以假设，对于 $i\leq j$，有 $\langle w_i,w_j\rangle=\delta_{i+n,j}$。

其中 $trace(\cdot)$ 表示矩阵的迹。注意，对于 $u,u' \in M_{1,2n}(\mathbb{F})$，等式 $u^t u = u'^t u'$ 成立当且仅当 $u' = \pm u$。因此，我们可以在 $SM_{2n}(\mathbb{F})$ 上定义测度 ν，如下：

$$\nu(f) = \int_{M_{1,2n}(\mathbb{F})} f(-u^t u)\, du \qquad (f \in \mathcal{S}(SM_{2n}(\mathbb{F}))\,,$$

其中积分绝对收敛。此外

$$\hat{\nu}(f) = \nu(\hat{f}) = \int_{M_{1,2n}(\mathbb{F})} \int_{SM_{2n}(\mathbb{F})} \chi(uCu^t) f(C)\, dC\, du \qquad (f \in \mathcal{S}(SM_{2n}(\mathbb{F}))$$

因为 $uCu^t = trace(u^t uC)$。若令下式成立，则上式变为 (66)：

$$\mathrm{chc}(\psi) = \hat{\nu}(\psi \circ S^{-1}) \qquad (\psi \in \mathcal{S}(\mathfrak{sp}(\mathsf{W}))\,. \tag{70}$$

对于 $x \in \mathfrak{sp}(\mathsf{W})$ 和 $w \in \mathsf{W}$，令 $[X_{i,j}]$ 为 x 关于 W 的有序基$\{e_1, e_2, ...\}$ 的矩阵，

$$xe_j = \sum X_{i,j} e_i\,,$$

and 令 $(u_1, u_2, \ldots, u_{2n})$ 为 w 的坐标，如前所述，$w = \sum_i u_i w_i$。设

$$Y_{i,j} = \sum_l \langle e_j, e_l \rangle u_i u_l\,.$$

于是容易验证该公式

$$ye_j = \sum_i Y_{i,j} e_i$$

定义了一个元素 $y \in \mathfrak{sp}(\mathsf{W})$。此外，

$$\sum_j Y_{i,j} Y_{j,k} = \sum_{j,l,l'} \langle e_j, e_l \rangle u_i u_l \langle e_k, e_{l'} \rangle u_j u_{l'} = \sum_j \langle e_j, w \rangle u_i \langle e_k, w \rangle u_j = \langle w, w \rangle u_i \langle e_k, w \rangle = 0\,.$$

因此，$y^2 = 0$ 属于 $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathsf{W})$。由于 $\mathsf{W} \setminus \{0\}$ 是一个 $\mathrm{Sp}(\mathsf{W})$-轨道，$\tau_{\mathfrak{sp}(\mathsf{W})}(\mathsf{W} \setminus \{0\})$ 是一个幂零余伴随轨道。其维数等于 W 的维数，因此是可能的最小维数，参见 [CM93]。因此，chc 是一个最小幂零轨道的傅里叶变换。

(i) 中的绝对收敛性由 [DPS99，定理 4.4] 得出。积分 (67) 的显式公式见 [Wei64，定理 2，第 161] 页。更准确地说，对于一个可逆的 $x \in \mathfrak{sp}(\mathsf{W})$，函数

$$\mathsf{W} \ni w \to \chi(\langle xw, w \rangle) \in \mathbb{C}$$

在 [Wei64] 中称为二次特征。他计算了它的傅里叶变换，所得函数为

$$\mathsf{W} \ni w' \to \gamma_{\mathrm{Weil}}(x) |\det(x)|_{\mathbb{F}}^{-\frac{1}{2}} \chi(\langle -x^{-1} w', w' \rangle) \in \mathbb{C}\,.$$

通过在 $w' = 0$ 处计算傅里叶变换，我们看到

$$\int_{\mathsf{W}} \chi(\langle xw, w \rangle)\, dw = \gamma_{\mathrm{Weil}}(x) |\det(x)|_{\mathbb{F}}^{-\frac{1}{2}}\,.$$

根据定理 A.12，ν 在 0 处的波前集等于 supp$\hat{}\nu$。从式 (70) 和 (67) 可以看出，这与整个空间 $SM_{2n}(\mathbb{F})$ 重合。

从现在起　我们考虑 $C \in \text{supp } \nu \setminus \{0\}$。测度 ν 在该作用下不变

$$SM_{2n}(\mathbb{F}) \ni C \to gCg^t \in SM_{2n}(\mathbb{F}) \qquad (g \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{F})).$$

由于 supp $\nu \setminus \{0\}$ 是该作用下的单个轨道，将定理 A.20 应用于子流形 supp $\nu \setminus \{0\} \subseteq SM_{2n}(\mathbb{F})$，可得 $(C, D) \in WF(\nu)$ 当且仅当 D 与 supp $\nu \setminus \{0\}$ 在 C 处的切空间正交。这意味着，对于任意 $X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{F})$

$$0 = \mathrm{tr}(D(XC + CX^t)) = 2\,\mathrm{tr}(CDX)\,.$$

因此 CD 是单位矩阵的常数倍。然而，C 的秩为 1，且不可逆。因此 $CD = 0$。等价地，$0 = (CD)^t = DC$。因此

$$WF(\nu) = \{(C, D) \in \mathrm{supp}\nu \times SM_m(\mathbb{F});\ DC = 0\} \tag{71}$$

由于 ν 是齐次的，(71)与定理 A.12 一起推出 (69)。 □

3.2. End(X) 中最小的 GL(X) ×GL(X)-轨道积分。固定一个完备极化 W $= \mathsf{X} \oplus \mathsf{Y}$。群 $\mathbb{F}^\times$ 在 W 上的作用为

$$a(x + y) = xa + ya^{-1} \qquad (a \in \mathbb{F}^\times,\ x \in \mathsf{X},\ y \in \mathsf{Y}) \tag{72}$$

保持辛形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。该作用在 Sp(W) 中的中心化子保持 X 和 Y 不变，并且通过限制同构于 GL(X)。群 $\mathbb{F}^\times$ 作用于

$$\mathsf{W}_{\mathbb{F}^\times} = (\mathsf{X} \setminus \{0\}) \oplus (\mathsf{Y} \setminus \{0\})$$

无不动点。定义轨道空间 $\mathbb{F}^\times \backslash \mathsf{W}_{\mathbb{F}^\times}$ 上的正测度 $d(\mathbb{F}^\times w)$，使得

$$\int_{\mathsf{W}_{\mathbb{F}^\times}} \phi(w)\, dw = \int_{\mathbb{F}^\times \backslash \mathsf{W}_{\mathbb{F}^\times}} \int_{\mathbb{F}^\times} \phi(a(w))\, \frac{da}{|a|}\, d(\mathbb{F}^\times w) \qquad (\phi \in \mathcal{S}(\mathsf{W}))\,. \tag{73}$$

群 GL(X) ×GL(X) 在 End(X) 上的作用为

$$(g, h) \cdot x = gxh^{-1}$$

对于 $(g, h) \in$ GL(X) × GL(X) 及 $x \in$ End(X)。这给出了在函数空间上的相应左作用和右作用

$$L \otimes R(g, h)\psi(x) = \psi(g^{-1}xh) \qquad (g, h \in \mathrm{GL}(\mathsf{V}), x \in \mathrm{End}(\mathsf{X}), \psi \in \mathcal{S}(\mathrm{End}(\mathsf{X}))\,.$$

设 $n = \dim_{\mathbb{F}} \mathsf{X}$。对于每个整数 $0 \le k \le n$，令 $\mathcal{O}_k$ 为 End(X) 中秩为 k 的自同态集合。集合 $\mathcal{O}_k$ 是一个单独的 GL(X) ×GL(X)-轨道，并且除一个常数因子外，存在唯一的支集包含于 $\mathcal{O}_k$ 上的正测度 $\mu_{\mathcal{O}_k}$，使得

$$\mu_{\mathcal{O}_k}(L \otimes R(g, h)\psi) = |\det(g)|^k |\det(h)|^{-k} \mu_{\mathcal{O}_k}(\psi) \qquad (\psi \in C_c(\mathcal{O}_k))\,. \tag{74}$$

定理 15. (i) 对于 $k = 1$ 和 $k = n - 1$，测度 $\mu_{\mathcal{O}_k}$ 通过零延拓定义了一个分布 $\mu_{\mathcal{O}_k} \in \mathcal{S}^*$ (End(X))。此延拓满足 $\psi \in \mathcal{S}$(End(X)) 的变换性质 (74)。

(ii) 对于 $\psi \in \mathcal{S}(\mathrm{End}(X))$，我们有以下公式

$$\mu_{\mathcal{O}_{n-1}}(\psi) = \hat{\mu}_{\mathcal{O}_1}(\psi) = \int_{\mathbb{F}^\times \backslash W_{\mathbb{F}^\times}} \int_{\mathrm{End}(X)} \chi(\langle xw, w\rangle)\psi(x)\, dx\, d(\mathbb{F}^\times w) \tag{75}$$

其中每个连续的积分都绝对收敛。右端定义了一个分布 $\mathcal{S}^*(\mathrm{End}(X))$。

根据上述定理的第 (ii) 部分，我们定义

$$\mathrm{chc}(\psi) = \int_{\mathbb{F}^\times \backslash W_{\mathbb{F}^\times}} \int_{\mathrm{End}(X)} \chi(\langle xw, w\rangle)\psi(x)\, dx\, d(\mathbb{F}^\times w) \qquad (\psi \in \mathcal{S}(\mathrm{End}(X))). \tag{76}$$

它是 $\mathcal{S}^*(\mathrm{End}(X))$中的一个分布。

定理 16。我们有

$$\mathrm{WF}(\mathrm{chc}) = \{(x, \tau_{\mathrm{End}(X)^*}(w));\ \tau_{\mathrm{End}(X)^*}(w) \neq 0\,,\ x(w) = 0\}\,.$$

注 1. $\det : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{F}$ 的导数（即梯度）非零的集合，等于所有大小为 $n-1$ 的子式均非零的子集。这是秩至多为 $n-2$的元素集合，即 $\mathcal{O}_{n-2} \cup \mathcal{O}_{n-3} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_0$。因此，导数非零的集合等于 $\mathrm{End}(X)_{rk \geq n-1} = \mathcal{O}_n \cup \mathcal{O}_{n-1}$。在此子集上，拉回 $\det^* \delta_0 = \delta_0 \circ \det$ 定义良好。明确地，若 $\phi_j \in C_c(\mathbb{F})$，$\phi_j \geq 0$、$\int \phi_j(x)\, dx = 1$，且当 $j \to \infty$时，ϕ_j 的支集收缩至零，则

$$\det{}^* \delta_0(\psi) = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathrm{End}(X)} \phi_j(\det(x))\, \psi(x)\, dx \qquad (\psi \in C_c(\mathrm{End}(X)_{rk\geq n-1}))\,.$$

这由推论 A.18 和定理 A.19 得出。由于该分布对于 $k = n-1$满足（74），将 chc 视为 $\delta_0 \circ \det = \det_0^* \delta_0$的正倍数是方便的：

$$\mathrm{chc}(x) = c_0 \delta_0(\det(x)) \qquad (x \in \mathrm{End}(X))\,. \tag{77}$$

定理 15 的证明。对于 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ 令

$$|x| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\,.$$

单位球面 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{F}^n;\ \ |x| = 1\}$ 可视为一个单位立方体，分解为面的不交并

$$S^{n-1}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \{x \in \mathbb{F}^n;\ |x_{i_1}| = |x_{i_2}| = \ldots = |x_{i_k}| = 1\,,\ |x_j| < 1\,,\ j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}\}\,,$$

它们是 $\mathbb{F}^n$ 的开子集：

$$S^{n-1} = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} S^{n-1}_{i_1 i_2 \ldots i_k}\,.$$

Set

$$\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^\times \backslash S^{n-1}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \{x \in \mathbb{F}^n;\ x_{i_1} = 1\,,\ |x_{i_2}| = \ldots = |x_{i_k}| = 1\,,\ |x_j| < 1\,,\ j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}\}$$

and

$$\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^{\times}\backslash S^{n-1}=\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^{\times}\backslash S^{n-1}_{i_1i_2\ldots i_k}\,.$$

那么映射

$$\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^{\times}\times(\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^{\times}\backslash S^{n-1})\ni(a,x)\to ax\in S^{n-1}$$

是双射的，并且

$$\int_{S^{n-1}}\phi(x)\,dx=\int_{\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^{\times}\backslash S^{n-1}}\int_{\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^{\times}}\phi(ax)\,da\,dx\qquad(\phi\in C(S^{n-1}))\,.$$

因此，我们 得到以下关于“球坐标积分”的公式，

$$\int_{\mathbb{F}^n}\phi(x)\,dx=\int_{\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^{\times}\backslash S^{n-1}}\int_{\mathbb{F}^{\times}}\phi(ax)|a|^n\,\frac{da}{|a|}\,dx\qquad(\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{F}^n))\,.$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{F}^n}\int_{\mathbb{F}^n}\phi(x,y)\,dx\,dy&=\int_{\mathbb{F}^n}\int_{\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^{\times}\backslash S^{n-1}}\int_{\mathbb{F}^{\times}}\phi(ax,y)\,|a|^n\,\frac{da}{|a|}\,dx\,dy\\&=\int_{\mathbb{F}^n}\int_{\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^{\times}\backslash S^{n-1}}\int_{\mathbb{F}^{\times}}\phi(ax,a^{-1}y)\,\frac{da}{|a|}\,dx\,dy\quad(\text{Substitute }y\text{ by }a^{-1}y)\\&=\int_{\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^{\times}\backslash S^{n-1}}\int_{\mathbb{F}^n}\left(\int_{\mathbb{F}^{\times}}\phi(ax,a^{-1}y)\,\frac{da}{|a|}\right)dy\,dx\,.\end{aligned}\tag{78}$$

定义测度 μ_1 on $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ 如下：

$$\mu_1(\psi)=\int_{\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^{\times}\backslash S^{n-1}}\int_{\mathbb{F}^n}\psi(x^ty)\,dy\,dx\qquad(\psi\in\mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})))\,.\tag{79}$$

我们将计算测度 μ_1 的傅里叶变换 $\hat{}\mu_1$ 。我们在第 3.1 节中假设，特征标 χ 的核等于 $\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}$ ，且 $\mathfrak{o}_{\mathbb{F}}$ 的体积为 1。 $\mathbb{F}$ 上的哈尔测度的傅里叶变换是原点处的狄拉克 δ 函数：

$$\phi(0)=\int_{\mathbb{F}}\int_{\mathbb{F}}\chi(-xy)\phi(x)\,dx\,dy\qquad(\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{F}))\,.$$

令 K $=\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{F}})$。这是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的一个极大紧子群。（事实上，在共轭意义下这是唯一的极大紧子群，参见 [Ser06，附录 1，定理 2，第122]页。）令

$$e_1=(1,0,0,\ldots,0)\,.$$

我们对群 K 上的哈尔测度 dk 进行归一化，使得

$$\mu_1(\psi)=\int_{\mathrm{K}}\int_{\mathbb{F}^n}\psi(ke_1^ty)\,dy\,dk\qquad(\psi\in\mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})))\,.\tag{80}$$

作用于测试函数 $\psi \in \mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}))$ 的傅里叶变换 μ_1 可按如下方式计算，

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_1(\psi) &= \mu_1(\hat{\psi}) \\
&= \int_{\mathrm{K}}\int_{\mathbb{F}^n}\int_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})} \chi(-\operatorname{tr}(zke_1^t y))\psi(z)\,dz\,dy\,dk \\
&= \int_{\mathrm{K}}\int_{\mathbb{F}^n}\int_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})} \chi(-\operatorname{tr}(ze_1^t y))\psi(zk)\,dz\,dy\,dk \\
&= \int_{\mathrm{K}}\int_{\mathbb{F}^n}\int_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})} \chi(-\sum_{j=1}^{n} z_{j,1}y_j)\psi(zk)\,dz\,dy\,dk \\
&= \int_{\mathrm{K}}\int_{\mathbb{F}^{n(n-1)}} \psi(\begin{pmatrix} 0 & z_{1,2} & z_{1,3} & \cdots & z_{1,n} \\ 0 & z_{2,2} & z_{2,3} & \cdots & z_{2,n} \\ .. & .. & .. & \cdots & .. \\ 0 & z_{n,2} & z_{n,3} & \cdots & z_{n,n} \end{pmatrix} k)\,dz\,dk\,.
\end{aligned} \tag{81}$$

最后一个公式定义了一个支集在秩为 $n-1$ 的矩阵上的正测度，并表明它可通过零延拓为 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ 上的一个分布。显然，在左平移作用下，该测度按照 (74) 变换，其中 $k = n-1$。由 (79) 可知，在右平移作用下，测度 μ_1 按照 (74) 变换，其中 $k = 1$。因此，在右平移作用下，它的傅里叶变换按照 (74) 变换，其中 $k = n-1$。这表明 $\hat{}\mu_1$ 是一个支集在 $\mathcal{O}_{n-1}$ 上的正测度，并且在 GL(X) × GL(X) 的作用下，它的变换方式与测度 μ_{n-1} 相同。因此，对测度 μ_{n-1} 进行适当归一化后，我们有

$$\hat{\mu}_1 = \mu_{n-1}. \tag{82}$$

由于 $|-2|_{\mathbb{F}} = 1$，对 (81) 中的 $y \mapsto -2y$ 作变量代换可得

$$\hat{\mu}_1(\psi) = \int_{\mathrm{K}}\int_{\mathbb{F}^n}\int_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})} \chi(2\operatorname{tr}(zke_1^t y))\psi(z)\,dz\,dy\,dk\,.$$

由（28）

$$\begin{aligned}
\langle z(ke_1^t, y), (ke_1^t, y)\rangle &= \langle (zke_1^t, -yz), (ke_1^t, y)\rangle = \operatorname{tr}(zke_1^t y) + \operatorname{tr}(ke_1^t yz) \\
&= 2\operatorname{tr}(zke_1^t y).
\end{aligned}$$

因此，

$$\hat{\mu}_1(\psi) = \int_{\mathrm{K}}\int_{\mathbb{F}^n}\int_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})} \chi(\langle z(ke_1^t, y), (ke_1^t, y)\rangle)\psi(z)\,dz\,dy\,dk\,.$$

方程（78）和（80）表明，在 $\mathrm{K} \times \mathbb{F}^n$ 上的积分与在商 $\mathbb{F}^\times \backslash \mathsf{W}_{\mathbb{F}^\times}$ 上对一个 $\mathbb{F}^\times$-不变函数的积分相同。因此

$$\hat{\mu}_1(\psi) = \int_{\mathbb{F}^\times \backslash \mathsf{W}_{\mathbb{F}^\times}}\int_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})} \chi(\langle z(w), w\rangle)\psi(z)\,dz\,d(\mathbb{F}^\times w)\,.$$

根据（75），上述方程的右侧等于 chc(ψ)。结合（82），我们得到

$$\mathrm{chc} = \hat{\mu}_1 = \mu_{n-1}.$$

这证明了 (75)。因此该定理成立。 □

定理 16 的证明。我们计算 μ_1 和 μ_{n-1} 的波前集。由于 μ_1 是一个齐次分布，定理 A.12 蕴含 WF(μ_1) 在 $0 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ 上的纤维与 $\mathrm{supp}\hat{\ }\mu_1 = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})_{rk\le n-1}$ 重合，后者是秩小于或等于 $n-1$ 的元素构成的集合。μ_1 的支集是秩至多为 1 的矩阵构成的集合。这是单个 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-轨道连同零矩阵。因此，根据定理 A.20，点 $(x,y) \in (\mathrm{supp}\mu_1 \setminus \{0\}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ 属于 WF(μ_1) 当且仅当 y 垂直于经过 x 的轨道：

$$\mathrm{tr}(zxy) = 0 \qquad (\text{for all } z \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}))\,,$$
$$\mathrm{tr}(xzy) = 0 \qquad (\text{for all } z \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}))\,.$$

因此 $xy = 0$ 也如此，并且由于 $\mathrm{tr}(xzy) = \mathrm{tr}(yxz)$，$yx = 0$ 也如此。于是

$$\mathrm{WF}(\mu_1) = \{(x,y) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})_{rk\le 1} \times (\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})_{rk\le n-1} \setminus 0);\ xy = yx = 0\}\,. \tag{83}$$

因此，定理 A.12 蕴含

$$\mathrm{WF}(\mu_{n-1}) \ = \ \{(x,y) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})_{rk\le n-1} \times (\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})_{rk\le 1} \setminus 0);\ xy = yx = 0\} \tag{84}$$

定理 16 由上述计算得出，因为 chc $= \mu_{\mathcal{O}_{n-1}}$。 □

3.3. $\mathrm{chc}_{x'}$ 的定义。设 $\mathrm{G}\cdot\mathrm{G}' \subseteq \mathrm{Sp(W)}$ 是一个不可约对偶对，其李代数为 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{sp}(\mathrm{W})$。设 $\mathrm{H}' \subseteq \mathrm{G}'$ 是一个嘉当子群，其分裂部分为 $\mathrm{A}' \subseteq \mathrm{H}'$，使得商 H'/A' 是紧的。参见第 2.3 和 2.4 节。

引理 17. 设 $\mathrm{A}'' \subseteq \mathrm{Sp(W)}$ 是 A' 的中心化子。那么 $(\mathrm{A}'', \mathrm{A}')$ 是 Sp(W) 中的一个约化对偶对。此外，存在一个开稠密的 A'-不变子集 $\mathrm{W}_{\mathrm{A}'} \subseteq \mathrm{W}$，使得 $\mathrm{A}'\backslash\mathrm{W}_{\mathrm{A}'}$ 配备有由 $d(\mathrm{A}'w)$ 定义的 A''-不变测度

$$\int_{\mathrm{W}} \phi(w)\,dw = \int_{\mathrm{A}'\backslash\mathrm{W}_{\mathrm{A}'}} \int_{\mathrm{A}'} \phi(aw)\,da\,d(\mathrm{A}'w) \qquad (\phi \in \mathcal{S}(\mathrm{W}))\,. \tag{85}$$

证明。参见（34）、（58）和（73）。 □

定义一个酉高斯

$$\chi_x(w) = \chi(\frac{1}{4}\langle x(w), w\rangle) \qquad (x \in \mathfrak{sp}(\mathrm{W}),\ w \in \mathrm{W})\,. \tag{86}$$

引理 18。设 $\mathfrak{a}''$ 为 A'' 的李代数。那么

$$\int_{\mathrm{A}'\backslash\mathrm{W}_{\mathrm{A}'}} \left| \int_{\mathfrak{a}''} \psi(x)\chi_x(w)\,dx \right| d(\mathrm{A}'w) < \infty \qquad (\psi \in \mathcal{S}(\mathfrak{a}'')) \tag{87}$$

因此，该公式

$$\mathrm{chc}(\psi) = \int_{\mathrm{A}'''\backslash\mathrm{W}_{\mathrm{A}'''}} \int_{\mathfrak{a}''} \psi(x)\chi_x(w)\,dx\,d(\mathrm{A}'w) \qquad (\psi \in \mathcal{S}(\mathfrak{a}'')) \tag{88}$$

在 $\mathfrak{a}''$ 上定义一个分布。 该分布的波前集等于

$$\mathrm{WF}(\mathrm{chc}) = \{(x, \tau_{\mathfrak{a}''}(w)) \in \mathfrak{a}'' \times (\mathfrak{a}''^* \setminus 0) : \ x(w) = 0\,, \ w \in \mathsf{W}\}\ . \tag{89}$$

证明。这直接由 (34)、(58) 以及定理 14、15 和 16 得出。 □

命题 19。固定一个元素 $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$。那么，波前集 WF(chc) 与嵌入的余法丛的交集

$$\mathfrak{g} \ni x \to x' + x \in \mathfrak{a}'' \tag{90}$$

为空。

证明。由 (89)，WF(chc) 等于集合 $S_{\mathfrak{a}''}$，其定义见 (40) 和 (60)。该命题由引理 11 和 13 得出。□

标准微局部分析，即定理 A.19，与命题 19 一起证明了以下定义的合理性。

定义20。对于 $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$，定义 $\mathrm{chc}_{x'}$ 为分布 chc 经由嵌入拉回到 $\mathfrak{g}$ 的结果

$$\mathfrak{g} \ni x \to x' + x \in \mathfrak{a}''\,.$$

形式上

$$\mathrm{chc}_{x'}(x) = \mathrm{chc}(x' + x) = \int_{\mathrm{A}'\setminus \mathsf{W}_{\mathrm{A}'}} \chi_{x'+x}(w)\, d(\mathrm{A}'w) \qquad (x \in \mathfrak{g})\,. \tag{91}$$

引理21。对于任意 $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$

$$\mathrm{WF}(\mathrm{chc}_{x'}) \subseteq \{(x, \tau_{\mathfrak{g}^*}(w));\ (x' + x)(w) = 0,\ x \in \mathfrak{g},\ w \in \mathsf{W}\}\,.$$

证明。这由定义20、引理 18 和定理 A.19 得出。注意，右侧是 WF(chc) 在投影映射 $T^*_{x'+x}\mathfrak{a}'' \to T^*_x\mathfrak{g}$ 下的像。□

4. The distributions $\mathrm{Chc}_{h'} \in C_c^{\infty *}(\widetilde{\mathrm{G}})$, $h' \in \widetilde{\mathrm{H}}'^{\mathrm{reg}}$.

4.1. Sp(W) 的魏尔表示的特征标。回顾第 3.1 节中固定的格 $\mathcal{L} \subseteq \mathsf{W}$。对于元素 $g \in \mathrm{Sp}(\mathsf{W})$，选取 $(g-1)\mathsf{W}$ 的一组基 $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$，使得

$$\mathcal{L} \cap (g-1)\mathsf{W} = \mathfrak{o}_{\mathbb{F}} u_1 + \mathfrak{o}_{\mathbb{F}} u_2 + \ldots + \mathfrak{o}_{\mathbb{F}} u_m\,.$$

关于这组基的存在性，参见 [Wei73，定理 1，第 29]页。设 w_1、w_2、.....、w_m 是 W 中满足以下条件的元素：

$$\langle u_j, w_k \rangle = \delta_{j,k}\,.$$

回顾高斯函数

$$\gamma(a) = \int_{\mathbb{F}} \chi(\frac{1}{2} a x^2)\, dx \qquad (a \in \mathbb{F}^\times)\,.$$

在辛群上定义如下函数，

$$\Theta^2(g) = \gamma(1)^{2\dim \mathsf{W}} \gamma(1)^{-2} \gamma(\det(\langle (g-1)w_j, w_k\rangle)_{1\le j,k\le m})^2 \qquad (g \in \mathrm{Sp}(\mathsf{W}))。 \tag{92}$$

（这里的平方 Θ^2 是这个函数名称的一部分。目前我们还没有任何函数 Θ 使得 $\Theta^2 = (\Theta)^2$。）可以验证，上述定义不依赖于我们所作的 u_j 和 w_k 的选择，参见 [AP14，定义 5.15]。令

$$\widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W}) = \{(g,\xi) \in \mathrm{Sp}(\mathsf{W}) \times \mathbb{C}^\times;\ \xi^2 = \Theta^2(g)\}$$

于是，辛群上存在一个余循环 C，使得公式 la

$$(g_1,\xi_1)(g_2,\xi_2) = (g_1g_2, \xi_1\xi_2 C(g_1,g_2))$$

$\widetilde{\ }$在 Sp(W) 上定义了一个群结构。该余循环满足以下方程

$$C(g_1,g_2)^2 = \frac{\Theta^2(g_1g_2)}{\Theta^2(g_1)\Theta^2(g_2)} \qquad (g_1,g_2 \in \mathrm{Sp}(\mathsf{W}))\,,$$

参见 [AP14，引理 5。16]其明确描述见 [AP14，命题 5。12]此外，映射

$$\widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W}) \ni (g,\xi) \to g \in \mathrm{Sp}(\mathsf{W})$$

$\widetilde{\ }$是一个群同态，且每个纤维均由两个元素组成。因此，Sp(W) 是 Sp(W) 的一个双覆盖，称为米塔普勒克蒂群。对于任意 $g \in$Sp(W)，定义

$$c(g)u = (g+1)w\,, \quad u = (g-1)w\,, \quad w \in \mathsf{W}$$

and

$$\chi_{c(g)}(u) = \chi(\frac{1}{4}\langle c(g)u, u\rangle) \qquad (u \in (g-1)\mathsf{W})\,.$$

（若 $g-1$ 可逆，则 $c(g) = (g+1)(g-1)^{-1}$ 是凯莱变换，是一个双有理同构 c : Sp(W) $\to \mathfrak{sp}$(W)，且等于其自身的逆。）对于任意子空间 U $\subseteq$ W，令μ_{U} 为 U 上的哈尔测度，并将其归一化，使得 $\mathcal{L} \cap$U 的体积为 1。定义以下函数

$$\begin{aligned} &\Theta : \widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W}) \ni (g,\xi) \to \xi \in \mathbb{C}^\times\,, \\ &T\colon \widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W}) \ni (g,\xi) \to \xi\chi_{c(g)}\mu_{(g-1)\mathsf{W}} \in \mathcal{S}^*(\mathsf{W})\,. \end{aligned} \tag{93}$$

复值测度 $\chi_{c(g)}\mu_{(g-1)\mathsf{W}}$ 被视为 W 上的一个分布。映射 T 将米塔普勒克蒂群嵌入 W 上温和分布构成的空间，并具有以下性质，

$$\begin{aligned} T(\tilde g_1) \natural T(\tilde g_2) &= T(\tilde g_1\tilde g_2) \qquad (\tilde g_1,\tilde g_2 \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W})) \\ T(\tilde g)^* &= T(\tilde g^{-1}) \qquad (\tilde g \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W})) \\ T(1) &= \delta_0\,, \end{aligned}$$

其中扭卷积

$$\phi \natural \psi(w') = \int_{\mathsf{W}} \phi(w)\psi(w'-w)\chi(\frac{1}{2}\langle w, w'\rangle)\, d\mu_{\mathsf{W}}(w) \qquad (\phi,\psi \in \mathcal{S}(\mathsf{W}))$$

通过连续性延拓到某些温和分布上，使得 $T(\tilde{g}_1)\natural T(\tilde{g}_2)$ 有意义，见 [AP14，引理 5.23]。特别是

$$C(g_1,g_2)=\frac{\Theta(\tilde{g}_1\tilde{g}_2)}{\Theta(\tilde{g}_1)\Theta(\tilde{g}_2)}\qquad(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2\in\widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W}))\,,\tag{94}$$

参见 [AP14，引理 5.23] 的证明。此外，若 g_1、 g_2 和 g_1g_2 属于凯莱变换的定义域，则

$$C(g_1,g_2)=\int_{\mathsf{W}}\chi(\frac{1}{4}\langle(c(g_1)+c(g_2))(w),w\rangle\,dw\,,\tag{95}$$

参见 [AP14，命题 5.12] 在此特例下的表述。

此外，我们令

$$\phi^*(w)=\overline{\phi(-w)}\,,\quad u^*(\phi)=u(\phi^*)\qquad(w\in\mathsf{W}\,,\ \phi\in\mathcal{S}(\mathsf{W})\,,\ u\in\mathcal{S}^*(\mathsf{W}))\,.$$

特别地，若 $T(\tilde{g})$ 是一个函数，则 $T(\tilde{g})^*(w)=T(\tilde{g})(-w)$。结果表明， Θ 是一个局部可积函数，与魏尔表示的分布特征相同，参见 [AP14，定理 5.26]，，即两个不可约分量的直和。

设 G 是一个解析李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$ 上的 $\mathbb{F}$。（这里我们从局部解析函数的角度来考虑， [Ser06，第二部分]。）每个 $Y\in\mathfrak{g}$ 都通过右正则表示在 G 上定义一个左不变向量场，

$$R_Y\Psi(x)=\frac{d}{dt}\,\Psi(x\exp(tY))\big|_{t=0}\qquad(x\in\mathrm{G},\ \Psi\in C_c^\infty(\mathrm{G}))\,.\tag{96}$$

给定一个局部坐标图

$$\kappa:\mathrm{G}^\kappa\to\mathfrak{g}^\kappa\,,$$

其中 $\mathfrak{g}^\kappa$ 是 $\mathfrak{g}$的一个开子集。我们可以用以下公式将向量场（96）提升到 $\mathfrak{g}^\kappa$

$$\kappa_*(R_Y)\psi(X)=R_Y(\psi\circ\kappa)(\kappa^{-1}(X))\qquad(X\in\mathfrak{g}^\kappa,\ \psi\in C_c^\infty(\mathfrak{g}^\kappa))\,.$$

明确地说，

$$\kappa_*(R_Y)\psi(X)=\frac{d}{dt}\,\psi(X+tv_X(Y))\big|_{t=0}\ ,$$

其中

$$v_X(Y)=\frac{d}{dt}\,\kappa(\kappa^{-1}(X)\exp(tY))\big|_{t=0}\ .\tag{97}$$

于是我们得到以下双射

$$\mathrm{G}^\kappa\times\mathfrak{g}\ni(x,Y)\leftrightarrow(\kappa(x),v_{\kappa(x)}(Y))\in\mathfrak{g}^\kappa\times\mathfrak{g}\,.\tag{98}$$

对（98）取对偶，得到以下双射

$$\mathrm{G}^\kappa\times\mathfrak{g}^*\ni(x,v^*_{\kappa(x)}\eta)\leftrightarrow(\kappa(x),\eta)\in\mathfrak{g}^\kappa\times\mathfrak{g}^*\,,\tag{99}$$

其中

$$v^*_{\kappa(x)}\eta=\eta\circ v_{\kappa(x)}\,.$$

根据 [H¨or83，定义 6.4.1] 切丛和余切丛上的图册可以视为

$$\bigcup_{x\in \mathrm{G}^\kappa} T_x(\mathrm{G}) = \{(\kappa(x), Y);\ x \in \mathrm{G}^\kappa,\ Y \in \mathfrak{g}\}$$

因此

$$\bigcup_{x\in \mathrm{G}^\kappa} T^*_x(\mathrm{G}) = \{(\kappa(x), \eta);\ x \in \mathrm{G}^\kappa,\ \eta \in \mathfrak{g}^*\}\,.$$

因此，双射 (99) 定义了一个识别 $\mathsf{G} \times \mathfrak{g}^* = T^*\mathsf{G}$，使得对于给定的 $\mathbb{F}$ 值紧支撑光滑函数 Ψ，我们通过下式将 $d\Psi$视为 G 上的 $\mathfrak{g}^*$ 值函数

$$d\Psi(x)(X) = R_Y\Psi(x) \qquad (x \in \mathrm{G},\ X \in \mathfrak{g})\,, \tag{100}$$

如 [How81] 中所示。特别地，在此识别下，

$$\mathrm{WF}(u) = \{(x, v^*_{\kappa(x)}\eta);\ (\kappa(x), \eta) \in \mathrm{WF}((\kappa^{-1})^*u)\} \qquad (u \in D'(\mathrm{G}^\kappa))\,, \tag{101}$$

$\widetilde{\ }$其中 $(\kappa^{-1})^*u$ 是 $\mathfrak{g}^\kappa$ 上的一个分布。现在我们将上述结果特化到 $\mathsf{G} = \mathsf{Sp(W)}$ 和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(\mathsf{W})$。

$\widetilde{\ }$命题 22。$\mathsf{WF(\Theta)} = \{(g, \tau_{\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})}(w));\ \ g \in \mathsf{Sp(W)}\ \ w \in \mathsf{W} \setminus \{0\},\ gw = w\}$。

证明。定义平移

$$\Lambda_{\tilde{x}_0} : \widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W}) \ni \tilde{x} \to \tilde{x}_0\tilde{x} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W}) \qquad (\tilde{x}_0 \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W}))$$

and

$$\lambda_{X_0} : \mathfrak{g} \ni X \to X_0 + X \in \mathfrak{g} \qquad (X_0 \in \mathfrak{g})\,.$$

令 $\mathsf{Sp}^c(\mathsf{W}) = \{g \in \mathsf{Sp(W)};\ \det(g-1) \neq 0\}$ 是凯莱变换的定义域。我们$\widetilde{\ }$固定一个元素 $\tilde{x}_0 \in \mathsf{Sp}^c(\mathsf{W})$，并考虑由下式定义的分布 $u \in \mathcal{S}^*(\mathsf{Sp}^c(\mathsf{W}))$

$$u(\tilde{x}) = \Theta(\tilde{x}_0\tilde{x}) \qquad (\tilde{x} \in \widetilde{\mathrm{Sp}^c}(\mathsf{W}))$$

乘以哈尔测度。用上述定义的平移表示，$u = \Lambda^*_{x_0}\Theta|_{\mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})}$。令$X_0 = \tilde{c}(x_0)$。于是（94）和（95）表明，作为 $\mathfrak{sp}(\mathsf{W})^c$上的分布，

$$\tilde{c}^*u = \Lambda^*_{x_0}\Theta|_{\mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})} = \Theta(x_0)\cdot\tilde{c}^*\Theta\cdot\lambda^*_{X_0}\,\mathrm{chc}, \tag{102}$$

其中 chc 在（66）中定义。方程（102）表明

$$\mathrm{WF}(\tilde{c}^*u) = \mathrm{WF}(\lambda^*_{X_0}\,\mathrm{chc}).$$

因此，由（69）可知

$$\mathrm{WF}(\tilde{c}^*u) = \{(X, \tau_{\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})}(w));\ X \in \mathfrak{g}^c,\ w \in \mathsf{W},\ (X_0 + X)w = 0\}. \tag{103}$$

直接计算可得

$$v_X(Y) = \frac{1}{2}(1+X)Y(1-X) \qquad (Y \in \mathfrak{g}),$$

其中，v_X 在 (97) 中定义，且 $\kappa = \tilde{c}$。因此

$$v^*_X\tau_{\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})}(w)(Y) = \langle\frac{1}{2}(1+X)Y(1-X)w, w\rangle = \frac{1}{2}\langle Y(1-X)w, (1-X)w\rangle$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{WF}(u) &= \{(x, v_X^* \tau_{\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})}(w));\ X=\tilde{c}(x),\ w\in \mathsf{W},\ (X_0+X)w=0\} \\ &= \{(x, \tau_{\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})}((1-X)w));\ X=\tilde{c}(x),\ w\in \mathsf{W},\ (X_0+X)w=0\}.\end{aligned} \tag{104}$$

然而，

$$X_0+X = 2(x_0-1)^{-1}(x_0x-1)(x-1)^{-1} \quad \text{and} \quad (x-1)^{-1} = \frac{1}{2}(X-1).$$

因此，方程 $(X_0+X)w=0$ 等价于 $(x_0x-1)(X-1)w=0$。于是

$$\mathrm{WF}(u) = \{(x, \tau_{\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})}(w'));\ w'\in \mathsf{W},\ x_0xw'=w'\}$$

并因此

$$\mathrm{WF}(\Theta) = \{(x_0x, \tau_{\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})}(w'));\ w'\in \mathsf{W},\ x_0xw'=w',\ x_0\in \mathrm{Sp}^c(\mathsf{W}),\ x\in \mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})\}\,.$$

由于根据下文的引理 23，$\mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})\cdot \mathrm{Sp}^c(\mathsf{W}) = \mathrm{Sp}(\mathsf{W})$，所以结论成立。 □

引理 23。$\mathrm{Sp}(\mathsf{W}) = \mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})\cdot \mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})$。

证明。子集 $\mathrm{Sp}^c(\mathsf{W}) \subseteq \mathrm{Sp}(\mathsf{W})$ 是 Zariski开，因此对于一个 $g\in \mathrm{Sp}(\mathsf{W})$，$g^{-1}\mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})$ 也是 Zariski开。于是，对每个 $g\in \mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})$，都存在 $h\in \mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})$，使得 $gh\in \mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})$。

设 $g\in \mathrm{Sp}(\mathsf{W})$ 满足 $\mathsf{W}_1 \subseteq \mathsf{W}$，即 g 的 1-特征子空间是非退化的，也就是说

$$\mathsf{W} = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_1^{\perp}.$$

那么 $g|_{\mathsf{W}_1^{\perp}} \in \mathrm{Sp}^c(\mathsf{W}_1^{\perp})$。设 $k\in \mathrm{Sp}(\mathsf{W})$ 定义为

$$k(w_1+w_2) = -w_1 + hw_2 \qquad (w_1\in \mathsf{W}_1,\ w_2\in \mathsf{W}_1^{\perp})\,,$$

其中 $h\in \mathrm{Sp}(\mathsf{W}_1^{\perp})$ 满足 $g|_{\mathsf{W}_1^{\perp}}h \in \mathrm{Sp}^c(\mathsf{W}_1^{\perp})$。那么 $k^{-1}, kg \in \mathrm{Sp}(W)^c$ 且 $g = k^{-1}(kg)$。

设 $g\in \mathrm{Sp}(W)$ 使得 $\mathsf{X}\subseteq \mathsf{W}$，即 g 的 1-特征子空间，是极大各向同性子空间。于是

$$\mathrm{Im}(g-1) = \mathrm{Ker}(g-1)^{\perp} = \mathsf{X}^{\perp} = X\,.$$

因此，$g=1$ 在 X 上，且在 W/X 上。故 $-g=-1$ 在 X 上，且在 W/X 上。因此 $-g\in \mathrm{Sp}(W)^c$。由于 $g=(-1)(-g)$，结论得证。

一般而言，存在如下分解

$$\mathsf{W} = (\mathsf{X}\oplus \mathsf{Y})\oplus \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$$

其中 X、Y 是各向同性子空间，辛形式在 W_1 和 W_2上的限制均为非退化，且 g 的 1-特征子空间为

$$\mathsf{X}\oplus \mathsf{W}_1\,.$$

这里，X 是限制在 g的 1-特征子空间上的辛形式的根基。现在，g保持 $(\mathsf{X}\oplus \mathsf{W}_1)^{\perp} = \mathsf{X}\oplus \mathsf{W}_2$。由于 $g=1$ 在 X 上，g 保持 W_2。同样，$g=1$ 在 W_1上，因此 g 保持 $\mathsf{W}_1\oplus \mathsf{W}_2$，且 $(\mathsf{W}_1\oplus \mathsf{W}_2)^{\perp} = \mathsf{X}\oplus \mathsf{Y}$。我们可以写成 $g = g_0g_1g_2$，其中 g_0、g_1、g_2分别是 g 在 $\mathsf{X}\oplus \mathsf{Y}$、$\mathsf{W}_1$和 W_2上的限制。注意，$g_2\in \mathrm{Sp}(\mathsf{W}_3)^c$。上文已处理 g_0 和 g_1。这就证明了引理。□

定理 24. 对任意 $\Psi \in C_c^\infty(\mathrm{Sp}(\mathsf{W}))$，分布

$$T(\Psi) = \int_{\widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W})} T(g)\Psi(g)\,dg \in \mathcal{S}^*(\mathsf{W}) \tag{105}$$

是 W 上属于 $\mathcal{S}(\mathsf{W})$（乘以测度 dw）的函数，且公式为

$$\mathrm{Chc}(\Psi) = \int_{\mathsf{W}} T(\Psi)(w)\,dw \tag{106}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$定义了 $\mathrm{Sp}(\mathsf{W})$ 的一个分布。因此，在 $\mathrm{Sp}(\mathsf{W})$ 上的分布空间中，

$$\mathrm{Chc} = \int_{\mathsf{W}} T(w)\,dw\,. \tag{107}$$

明确地，

$$\mathrm{Chc} = \Theta(\widetilde{-1})^{-1}\Lambda^*_{\widetilde{-1}}\Theta\,. \tag{108}$$

此外，

$$\mathrm{WF}(\mathrm{Chc}) = \{(g, \tau_{\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})}(w));\ g \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W}),\ w \in \mathsf{W}\setminus\{0\},\ gw = -w\}\,. \tag{109}$$

$\widetilde{\ }$证明。引理 23 意味着存在 g_1、g_2、.....、g_m，属于 $\mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})$，使得

$$\widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W}) = \bigcup_{i=1}^m g_i\widetilde{\mathrm{Sp}^c}(\mathsf{W})\,.$$

$\widetilde{\ }$因此，存在支集 Ψ_i 包含于$\widetilde{\ }\mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})$中的光滑函数 $\Psi_i \in C^\infty(\mathrm{Sp}(\mathsf{W}))$，使得

$$\sum_{i=1}^m \Psi_i(g_i^{-1}g) = 1 \qquad (g \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W}))\,.$$

$\widetilde{\ }$因此，对于 $\Psi \in C_c^\infty(\mathrm{Sp}(\mathsf{W}))$，

$$\begin{aligned} T(\Psi) &= \sum_{i=1}^m \int_{\widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W})} \Psi_i(g_i^{-1}g)\Psi(g)T(g)\,dg = \sum_{i=1}^m \int_{\widetilde{\mathrm{Sp}}(\mathsf{W})} \Psi_i(g)\Psi(g_ig)T(g_ig)\,dg \\ &= \sum_{i=1}^m T(g_i)\natural \int_{\widetilde{\mathrm{Sp}^c}(\mathsf{W})} \Psi_i(g)\Psi(g_ig)T(g)\,dg\,. \end{aligned} \tag{110}$$

$\widetilde{\ }$对于 $g \in \mathrm{Sp}^c(\mathsf{W})$，由（93），$T(g)(w) = \Theta(g)\chi(\frac{1}{4}\langle\tilde{c}(g)w, w\rangle)$是$\mathsf{W}$上的一个函数。对于适当的 $\psi_i \in C_c^\infty(\mathfrak{sp}(\mathsf{W}))$，

$$\int_{\widetilde{\mathrm{Sp}^c}(\mathsf{W})} \Psi_i(g)\Psi(g_ig)T(g)(w)\,dg = \int_{\mathfrak{sp}(\mathsf{W})} \psi_i(x)\chi(\langle x(w), w\rangle)\,dx\,.$$

这是 ψ_i 从 $\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})$ 到 W 的傅里叶变换经由矩映射$\tau_{\mathfrak{sp}^*(\mathsf{W})}$ 的拉回，其纤维至多包含两个元素。因此，这个拉回是$\mathcal{S}(\mathsf{W})$中的一个函数。由 $T(g_i)$ 进行的扭卷积是 $\mathcal{S}(\mathsf{W})$ 上的连续线性映射，因此 (110) 是 $\mathcal{S}(\mathsf{W})$ 中的一个函数。由此得到 (105)、(106) 和 (107)。

$\widetilde{\ }$由于凯莱变换将 -1 映射到 0， $c(-1) = 0$，我们看到 $T(-1)$ 是一个常数函数：

$$T(\widetilde{-1})(w) = \Theta(\widetilde{-1})\chi(\frac{1}{4}\langle c(-1)(w), w\rangle) = \Theta(\widetilde{-1})\,.$$

若将分布视为广义函数，则得到

$$\begin{aligned}\Lambda_{\widetilde{-1}}\Theta(g) = \Theta(\widetilde{-1}g) = T(\widetilde{-1}g)(0) = T(\widetilde{-1})\natural T(g)(0)\\ = \int_{\mathsf{W}} T(\widetilde{-1})(0-w)T(g)(w)\,dw = \int_{\mathsf{W}} \Theta(\widetilde{-1})T(g)(w)\,dw = \Theta(\widetilde{-1})\,\mathrm{Chc}(g)\,.\end{aligned}$$

这验证了 (108)。最后，由 (108) 和命题 22 可得 (109)。 □

4.2. 从 GL(X) 的 mirabolic子群诱导。设 P 是约化群G 的一个抛物子群，其朗朗兹分解为 P =LN。设 $\mathfrak{n}$ 为幺幂根基 N 的李代数，并设 K ⊆G 是 G 的一个开紧子群，使得岩泽分解 G = KLN 成立，参见 [HC70，第 5 条，页码 16]。对于任意函数 $\Psi \in C_c^\infty$(G)，定义

$$\begin{aligned}&\Psi^{\mathrm{K}}(g) = \int_{\mathrm{K}} \Psi(kgk^{-1})\,dk, \quad \Psi^{\mathrm{K}}_{\mathrm{N}}(g) = \int_{\mathrm{N}} \Psi^{\mathrm{K}}(gn)\,dn\\ &\Psi^{\mathrm{L}}(l) = |\det(\mathrm{Ad}(l)_{\mathfrak{n}})|^{1/2}\Psi^{\mathrm{K}}_{\mathrm{N}}(l) \qquad (g \in \mathrm{G},\ l \in \mathrm{L})\,.\end{aligned} \tag{111}$$

显然

$$C_c^\infty(\mathrm{G}) \ni \Psi \to \Psi^{\mathrm{L}}|_{\mathrm{L}} \in C_c^\infty(\mathrm{L})$$

是一个定义良好的连续线性映射。对于分布 $u \in C_c^\infty$(L)* ，我们定义诱导分布 Ind$^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}}(u) \in C_c^\infty$(G)* 为

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{G}}(u)(\Psi) = u(\Psi^{\mathrm{L}}) \qquad (\Psi \in C_c^\infty(\mathrm{G}))\,. \tag{112}$$

这一构造见 [HC70，第 18 页及 30]。对于实约化群 G， [Var77 第二部分第 121-123] 页对此作了详细说明。另见 [BP11，命题 A.5]。

回顾第 3.2 节中的完全极化 W = X ⊕Y。我们将保持 X 和 Y 的辛群子群与 GL(X) 等同。记 K ⊆ GL(X) 为保持 $\mathcal{L}$ ∩X 的子群。这是一个极大紧子群。

设 X′ ⊆ X 是一个一维子空间，并设 X″ ⊆ X 是其补子空间，使得 X = X′ ⊕X″。记 P ⊆ GL(X) 为保持 X′ 的元素所构成的子群。这称为 mirabolic子群， [Ber84]。P 的幺幂根基与 N = 1 + Hom(X″, X′) ⊆ End(X) 重合，其李代数为 $\mathfrak{n}$ = Hom(X″, X′)。利维因子 L ⊆ P 由同时保持 X′ 和 X″ 的元素构成。它同构于 GL(X′) ×GL(X″)。通过在 X′ 中选取一个非零向量，我们将 X′ 与 $\mathbb{F}$ 以及 GL(X′)$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$与 $\mathbb{F}^\times$ 识别。令 GL(X) 表示其在 Sp(W) 中的逆像。定义

$$sum : C_c^\infty(\widetilde{\mathrm{GL}}(\mathsf{X})) \to C_c^\infty(\mathrm{GL}(\mathsf{X}))$$

为覆盖映射的各纤维上的和

$$sum(f)(g)=\sum_{\tilde g} f(\tilde g)\qquad (g\in \mathrm{GL}(\mathsf{X}))\,.$$

$\widetilde{\ }$定理 25. 对任意 $\Psi\in C_c^\infty(\mathbf{GL}^c(\mathbf{X}))$，该分布

$$T(\Psi)=\int_{\widetilde{\mathrm{GL}}(\mathsf{X})}\Psi(\tilde g)T(\tilde g)\,d\tilde g\in\mathcal{S}^*(\mathsf{W}) \tag{113}$$

是 W 上的一个函数，在 $\mathbb{F}^\times$ 的 (72) 作用下保持不变，使得

$$\int_{\mathbb{F}^\times\backslash \mathsf{W}_{\mathbb{F}^\times}}|T(\Psi)(w)|\,d(\mathbb{F}^\times w)<\infty\,.$$

公式

$$\mathrm{Chc}(\Psi)=\int_{\mathbb{F}^\times\backslash \mathsf{W}_{\mathbb{F}^\times}}T(\Psi)(w)\,d(\mathbb{F}^\times w)\qquad (\Psi\in C_c^\infty(\widetilde{\mathrm{GL}^c}(\mathsf{X}))) \tag{114}$$

定义 $\widetilde{\ }$是 $\mathbf{GL}^c(\mathbf{X})$ 的一个分布，它与一个复值测度相一致 e

$$\mathrm{Chc}(\Psi)=\int_{\mathrm{GL}(X)}sum(\Psi\Theta)(g)|\det(g-1)|\delta(\det(g+1))\,dg\,. \tag{115}$$

$\widetilde{\ }$该测度通过在 $\mathbf{GL}(\mathbf{X})$ 上延拓为零而定义了一个分布，仍以同一符号表示，(114)。函数

$$\epsilon:\widetilde{\mathrm{GL}}(\mathsf{X})\ni\tilde g\to\frac{\Theta(\tilde g)}{|\Theta(\tilde g)|}\in\mathbb{C}^\times \tag{116}$$

是一个群同态，并且

$$\mathrm{Chc}=\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}(\mathsf{X}')\times\mathrm{GL}(\mathsf{X}'')}^{\mathrm{GL}(\mathsf{X})}\left((\delta_1\otimes\mu)\circ\Lambda_{-1}\circ sum\circ mult_\epsilon\right)\,, \tag{117}$$

其中，δ_1 是 $\mathbf{GL}(\mathbf{X}')$ 上位于 $1\in$ 的狄拉克 δ 函数，μ 是 $\mathbf{GL}(\mathbf{X}'')$ 上的哈尔测度，而$mult_\epsilon$ 是乘以 ϵ。此外，

$$\mathrm{WF}(\mathrm{Chc})=\{(\tilde g,\tau_{\mathrm{End}(\mathsf{X})^*}(w));\ \tilde g\in\widetilde{\mathrm{GL}}(\mathsf{X})\,,\ \tau_{\mathrm{End}(\mathsf{X})^*}(w)\neq 0\,,\ g(w)=-w\}\,, \tag{118}$$

证明. 若 $g\in\mathbf{GL}^c(\mathbf{X})$ 且 $x=c(g)\in\mathbf{End}(\mathbf{X})$，则 $\det(x-1)=\det(2(g-1)^{-1})\neq 0$ 并且 $\widetilde{\ }\det(x+1)=\det(2g(g-1)^{-1})\neq 0$。令 $\Psi\in C_c^\infty(\mathbf{GL}^c(\mathbf{X}))$。则

$$T(\Psi)(w)=\int_{\widetilde{\mathrm{GL}}(\mathsf{X})}\Psi(\tilde g)\Theta(\tilde g)\chi_{c(g)}(w)\,d\tilde g=\int_{\mathrm{End}(\mathsf{X})}\psi(x)\chi_x(w)\,dx\,, \tag{119}$$

其中 $\psi(x)=sum(\Psi\Theta)(c^{-1}(x))\cdot$ 雅可比(x)，且 Jac 是逆凯莱变换的雅可比。由于 $\psi\in C_c^\infty(\mathbf{End}^c(\mathbf{X}))$，(119) 是 ψ 在 $\tau_{\mathrm{End}(\mathsf{X})^*}(w)$ 处的傅里叶变换。因此，$T(\Psi)$ 是 W 上在 $\mathbb{F}^\times$ 作用下不变的函数。根据 (77)，(114) 等于

$$\mathrm{Chc}(\Psi)=\int_{\mathrm{End}(\mathsf{X})}\psi(x)\delta(\det(x))\,dx=\int_{\mathrm{GL}(\mathsf{X})}sum(\Psi\Theta)(g)\delta(\det c(g))\,dg\,.$$

将公式 $\delta(at) = |a|^{-1}\delta(t)$ 应用于上述积分，我们得到 (115)。通过 $\widetilde{\ }$ 零延拓，(115) 定义了 GL(X) 上的一个分布。

断言 (116) 由 [AP14，命题 5.27] 得出。由 [AP14，命题 5.27], 可得

$$|\Theta(\tilde{g})\det(g-1)| = |\det g|^{\frac{1}{2}}\,.$$

因此，(115) 等于

$$\int_{\mathrm{GL}(\mathsf{X})} \Phi(g)|\det g|^{\frac{1}{2}}\delta(\det(g+1))\,dg\,,$$

其中 $\Phi = sum(\Psi\epsilon)$。令 $n = \dim_{\mathbb{F}}\mathsf{X}$。那么最后一个积分可改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{Chc}(\Psi) &= \int_{\mathrm{End}(\mathsf{X})} \Phi(x)|\det x|^{\frac{1}{2}}\delta(\det(x+1))|\det(x)|^{-n}\,dx \\ &= \int_{\mathrm{End}(\mathsf{X})} \Phi(x-1)|\det(x-1)|^{\frac{1}{2}-n}\delta(\det(x))\,dx\,. \qquad (120)\end{aligned}$$

参照 (119)，可得

$$\mathrm{Chc}(\Psi) = \int_{\mathsf{W}}\int_{\mathrm{End}(\mathsf{X})} \psi(x)\chi_x(w)\,dx = \mathrm{chc}(\psi) = \int_{\mathrm{End}(\mathsf{X})} \psi(x)\mu_{n-1}(x).$$

第二个等式由 (75) 和 (76) 得出。由 (75)、(76) 及注 1，我们有 $\mathrm{chc}(x) = \delta(\text{行列式}(x)) = \mu_{n-1}(x)$。

注意，经过适当的测度归一化，

$$\mu_{n-1}(\psi) = \int_{M_{n,n-1}(\mathbb{F})} \psi^{\mathrm{K}}(0,z)\,dz\,, \quad \psi^{\mathrm{K}}(x) = \int_{\mathrm{K}} \psi(kxk^{-1})\,dk\,. \qquad (121)$$

因此，利用定理 15 的证明中使用的坐标，(120) 等于

$$\begin{aligned}\mathrm{Chc}(\Psi) &= \int_{\mathrm{End}(\mathsf{X})} \Phi(x-1)|\det(x-1)|^{\frac{1}{2}-n}\,d\mu_{n-1}(x) \qquad (122)\\
&= \int_{M_{n-1,n-1}(\mathbb{F})}\int_{M_{1,n-1}(\mathbb{F})} \Phi^{\mathrm{K}}\left(\begin{pmatrix} -1 & z_1 \\ 0 & z_2-1\end{pmatrix}\right)\left|\det\left(\begin{pmatrix} -1 & z_1 \\ 0 & z_2-1\end{pmatrix}\right)\right|^{\frac{1}{2}-n} dz_1\,dz_2\\
&= \int_{M_{n-1,n-1}(\mathbb{F})}\int_{M_{1,n-1}(\mathbb{F})} \Phi^{\mathrm{K}}\left(\begin{pmatrix} -1 & z_1 \\ 0 & z_2\end{pmatrix}\right)|\det(z_2)|^{\frac{1}{2}-n}\,dz_1\,dz_2\\
&= \int_{M_{n-1,n-1}(\mathbb{F})}\int_{M_{1,n-1}(\mathbb{F})} \Phi^{\mathrm{K}}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & z_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)|\det(z_2)|^{-\frac{1}{2}}\,dz_1\,|\det(z_2)|^{1-n}\,dz_2\\
&= \int_{\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})}\int_{M_{1,n-1}(\mathbb{F})} \Phi^{\mathrm{K}}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)|\det(g_2)|^{-\frac{1}{2}}\,dz_1\,dg_2\,.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g_2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -z_1g_2^{-1} \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

我们看到

$$|\det(g_2)|^{-\frac{1}{2}} = \left|\mathrm{Ad}(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix})_{\mathfrak{n}}\right|^{-\frac{1}{2}},$$

其中

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ z_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{F}) \right\}.$$

因此，采用（111）中的记号，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Chc}(\Psi) &= \int_{\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})} \Phi^{\mathrm{GL}_1(\mathbb{F})\times\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})}(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix})\, dg_2 \\
&= \int_{\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})} \Phi^{\mathrm{GL}_1(\mathbb{F})\times\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})}(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -g_2 \end{pmatrix})\, dg_2 \\
&= \int_{\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})} (\Lambda_{-1}\Phi)^{\mathrm{GL}_1(\mathbb{F})\times\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix})\, dg_2 \\
&= \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_1(\mathbb{F})\times\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}(\delta_1 \times dg_2)(\Lambda_{-1}\Phi) \qquad (\text{by (112).}) \\
&= \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_1(\mathbb{F})\times\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}(\delta_1 \times dg_2)(\Lambda_{-1}(sum(\Psi\epsilon))\,.
\end{aligned}$$

这验证了（117）。

注意，群 GL(X) 包含于其李代数 End(X) 中。由（120）可知，Chc 与分布 $\delta\circ$行列式 $=\mu_{n-1}$ 相同，该分布乘以光滑函数 $|\text{行列式}(x)|^{\frac{1}{2}}$，再平移 -1。因此，通过代换 $x = g+1$，可由定理 16 得到（118）。□

4.3. $\mathrm{Chc}_{h'}$ 的定义。设 $\mathsf{G}\cdot\mathsf{G}' \subseteq \mathsf{Sp(W)}$ 是一个不可约对偶对。设 $\mathsf{H}' \subseteq \mathsf{G}'$ 是一个嘉当子群，其分裂部分为 $\mathsf{A}' \subseteq \mathsf{H}'$。回顾引理 17 中定义的对偶对 $(\mathsf{A}'', \mathsf{A}')$。

$\widetilde{\ }$引理 26. 对于任意 $\Psi \in C_c^\infty(\mathsf{A}''^c)$，分布

$$T(\Psi) = \int_{\widetilde{\mathsf{A}''^c}} \Psi(\tilde{g})T(\tilde{g})\, d\tilde{g} \in \mathcal{S}^*(\mathsf{W}) \tag{123}$$

是 W 上的一个函数，满足

$$\int_{\mathsf{A}'\backslash\mathsf{W}_{\mathsf{A}'}} \left| \int_{\mathsf{A}''} \Psi(g)T(g)(w)\, dx \right| d\dot{w} < \infty\,. \tag{124}$$

公式

$$\mathrm{Chc}(\Psi) = \int_{\mathsf{A}'\backslash\mathsf{W}_{\mathsf{A}'}} T(\Psi)(w)\, d(\mathsf{A}'w) \qquad (\Psi \in C_c^\infty(\widetilde{\mathsf{A}''^c})) \tag{125}$$

$\widetilde{\ }$在 A''^c 上定义了一个分布，该分布与一个复值测度重合。此测度$\widetilde{\ }$通过延拓为零延拓到 A'' 上，并定义了一个分布，仍记作同一符号（125）。此外，

$$\mathrm{WF}(\mathrm{Chc}) = \{(\tilde{g}, \tau_{\mathfrak{a}''*}(w));\ \tilde{g} \in \widetilde{\mathsf{A}''},\ \tau_{\mathfrak{a}''*}(w) \neq 0\,, g(w) = -w\}\,, \tag{126}$$

证明。这直接由（34）、（58）以及定理 24 和 25 得出。 □

命题 27。固定一个元素 $\tilde{h}' \in \widetilde{\mathrm{H}}'^{\mathrm{reg}}$。波前集 WF(Chc) 与嵌入的余法丛的交集

$$\widetilde{\mathrm{G}} \ni \tilde{g} \to \tilde{g}\tilde{h}' \in \widetilde{\mathrm{A}''} \tag{127}$$

为空。

证明。波前集 WF(Chc) 等于在 (40) 和 (60) 中定义的集合 $S_{\mathrm{A}''}$。该命题由引理 11 和 13 得出。
□

标准的微局部分析，即定理 A.19，连同命题 19，证明了如下定义的合理性。

定义 28. 对于 $\tilde{h}' \in \widetilde{\mathrm{H}}'^{\mathrm{reg}}$，定义 $\mathrm{Chc}_{\tilde{h}'}$ 为分布 Chc 经由嵌入 (127) 拉回到 $\widetilde{\mathrm{G}}$ 的结果。形式上，

$$\mathrm{Chc}_{\tilde{h}'}(\tilde{g}) = \int_{\mathrm{A}'\backslash \mathsf{W}_{\mathrm{A}'}} T(\tilde{g}\tilde{h}')(w)\, d(\mathrm{A}'w) \qquad (x \in \mathfrak{g})\,. \tag{128}$$

引理 29. 对任意 $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$

$$\mathrm{WF}(\mathrm{Chc}_{\tilde{h}'}) \subseteq \{(\tilde{g}, \tau_{\mathfrak{g}^*}(w));\ gh'(w) = -w,\ \tilde{g} \in \widetilde{\mathrm{G}},\ w \in \mathsf{W}\}\,.$$

证明. 这由定义 28、(126) 和定理 A.19 得出。 □

5. chc 是 Chc 渐近展开中的最低阶项。

本节验证以下定理，该定理表明 chc 是“Chc 渐近展开中的最低阶项”。

定理 30. 根据定义 20 和 28，对于 $x \in \mathfrak{g}$ 和 $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$,

$$\lim_{t\to 0} t^{\dim \mathsf{W}} \int_{\mathrm{A}'\backslash \mathsf{W}_{\mathrm{A}'}} T(-\tilde{c}(t^2x)\tilde{c}(t^2x'))(w)\, d(\mathrm{A}'w) = \Theta(\widetilde{-1}) \int_{\mathrm{A}'\backslash \mathsf{W}_{\mathrm{A}'}} \chi_{x+x'}(w)\, d(\mathrm{A}'w)\,.$$

证明。这里我们沿用 [Prz00，定理 213]的证明。回顾一下，用有理函数表示,

$$c(-c(x)c(x')) = c(c(x)c(x'))^{-1} = ((x'-1)(x+x')^{-1}(x-1)+1)^{-1}\,.$$

因此,

$$c(-c(t^2x)c(t^2x')) = t^2((t^2x'-1)(x+x')^{-1}(t^2x-1)+t^2)^{-1}\,.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{A}'\backslash \mathsf{W}_{\mathrm{A}'}} \chi_{c(-c(t^2x)c(t^2x'))}(w)\, d(\mathrm{A}'w) &= \int_{\mathrm{A}'\backslash \mathsf{W}_{\mathrm{A}'}} \chi_{((t^2x'-1)(x+x')^{-1}(t^2x-1)+t^2)^{-1}}(tw)\, d(\mathrm{A}'w) \\ &= t^{-\dim \mathsf{W}} \int_{\mathrm{A}'\backslash \mathsf{W}_{\mathrm{A}'}} \chi_{((t^2x'-1)(x+x')^{-1}(t^2x-1)+t^2)^{-1}}(w)\, d(\mathrm{A}'w)\end{aligned}$$

因此,

$$t^{\dim \mathsf{W}} \int_{\mathrm{A}'\backslash \mathsf{W}_{\mathrm{A}'}} T(-\tilde{c}(t^2x)\tilde{c}(t^2x'))(w)\, d(\mathrm{A}'w)$$
$$= \Theta(-\tilde{c}(t^2x)\tilde{c}(t^2x')) \int_{\mathrm{A}'\backslash \mathsf{W}_{\mathrm{A}'}} \chi_{((t^2x'-1)(x+x')^{-1}(t^2x-1)+t^2)^{-1}}(w)\, d(\mathrm{A}'w)\,,$$

当 $t \to 0$ 时，该式具有所需的极限。 □

6. 猜想与动机

设 Π' 是 G′ 的一个不可约容许表示，它出现在对 (G, G′) 的 Howe 对应中，并设 Π_1 是 G 的相应最大 Howe 商表示。记 $\Theta_{\Pi'}$ 为 Π'的分布特征。

我们考虑乘积 $Z'\mathrm{G}'^0$ ，其中 Z' 是 G′ 的中心，而 G'^0 是 G′的 Zariski单位连通分支。回顾第 2.5 节， $Z'\mathrm{G}'^0 = \mathrm{G}'$，除非 G′ 是偶正交群。

猜想1。对于任意 $\Psi \in C_c(\mathrm{G})$

$$\int_{\mathrm{H}'^{\mathrm{reg}}} \left|\Theta_{\Pi'}(\tilde{h}')D(h')\,\mathrm{Chc}_{\tilde{h}'}(\Psi)\right| dh' < \infty\,. \tag{129}$$

假设（129），根据 G′ 的 Weyl–Harish-Chandra积分公式（见（22）），定义

$$\Theta'_{\Pi'}(\Psi) = C_{\Pi'} \sum_{\mathrm{H}'} \frac{1}{|W(\mathrm{H}')|} \int_{\mathrm{H}'^{\mathrm{reg}}} \check{\Theta}_{\Pi'}(\tilde{h}')|D(h')| \frac{1}{\mu(\mathrm{H}'/\mathrm{A}')}\,\mathrm{Chc}_{\tilde{h}'}(\Psi)\, d\tilde{h}'\,, \tag{130}$$

其中 $\check{}\ \Theta_{\Pi'}(\tilde{h}') = \Theta_{\Pi'}(\tilde{h}'^{-1})$，并且

$$C_{\Pi'} = (\textit{the central character of } \Pi' \textit{ evaluated at } \widetilde{-1})^{-1} \cdot \Theta(\widetilde{-1})\,.$$

如果特征标 $\Theta_{\Pi'}$ 的支集包含于 $Z'\mathrm{G}'^0$，那么，作为分布，

$$\Theta'_{\Pi'} = \Theta_{\Pi_1}\,. \tag{131}$$

以下给出一个启发式理由，说明为何 (131) 应当成立。将 (130) 的右端除以 $C_{\Pi'}$，等于

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{H}'} \frac{1}{|W(\mathrm{H}')|} \int_{\mathrm{H}'^{\mathrm{reg}}} \check{\Theta}_{\Pi'}(\tilde{h}')|D(h')| \frac{1}{\mu(\mathrm{H}'/\mathrm{A}')} \operatorname{Chc}_{\tilde{h}'}(\Psi)\, dh' \\
&\quad = \sum_{\mathrm{H}'} \frac{1}{|W(\mathrm{H}')|} \int_{\mathrm{H}'^{\mathrm{reg}}} \check{\Theta}_{\Pi'}(\tilde{h}')|D(h')| \frac{1}{\mu(\mathrm{H}'/\mathrm{A}')} \int_{\mathrm{A}'\backslash \mathsf{W}_{\mathrm{A}'}} \int_{\widetilde{\mathrm{G}}} \Psi(\tilde{g}) T(\tilde{g}\tilde{h}')(w)\, d\tilde{g}\, d(\mathrm{A}'w) \\
&\quad\quad = \sum_{\mathrm{H}'} \frac{1}{|W(\mathrm{H}')|} \int_{\mathrm{H}'^{\mathrm{reg}}} \check{\Theta}_{\Pi'}(\tilde{h}')|D(h')| \int_{\mathrm{H}'\backslash \mathsf{W}_{\mathrm{A}'}} \int_{\widetilde{\mathrm{G}}} \Psi(\tilde{g}) T(\tilde{g}\tilde{h}')(w)\, d\tilde{g}\, d(\mathrm{H}'w)\, dh' \\
&\quad\quad\quad = \int_{\mathrm{G}'^{\mathrm{reg}}} \check{\Theta}_{\Pi'}(\tilde{g}') \int_{\mathrm{G}'\backslash \mathsf{W}_{\mathrm{A}'}} \int_{\widetilde{\mathrm{G}}} \Psi(\tilde{g}) T(\tilde{g}\tilde{g}')(w)\, d\tilde{g}\, d(\mathrm{G}'w)\, d\tilde{g}' .
\end{aligned}$$

假设 G′ 是紧的。那么上式等于

$$\int_{\mathrm{G}'^{\mathrm{reg}}} \check{\Theta}_{\Pi'}(\tilde{g}') \int_{\mathsf{W}} \int_{\widetilde{\mathrm{G}}} \Psi(\tilde{g}) T(\tilde{g}\tilde{g}')(w)\, d\tilde{g}\, dw\, d\tilde{g}' .$$

~另一方面，形式上，对任意 $\tilde{s} \in$Sp(W),

$$\begin{aligned}
\Theta(\widetilde{-1}) \int_{\mathsf{W}} T(\tilde{s})(w)\, dw &= \int_{\mathsf{W}} \Theta(\widetilde{-1})\chi_0(w) T(\tilde{s})(w)\, dw = \int_{\mathsf{W}} \Theta(\widetilde{-1})\chi_0(-w) T(\tilde{s})(w)\, dw \\
&= \int_{\mathsf{W}} T(\widetilde{-1})(-w) T(\tilde{s})(w)\, dw = T(\widetilde{-1}) \natural T(\tilde{s})(0) = T(\widetilde{-1}\tilde{s})(0) = \Theta(\widetilde{-1}\tilde{s}) .
\end{aligned}$$

~设 ζ 为 Π' 的中心特征在 -1处的取值。因此，(130) 的右侧等于

$$\begin{aligned}
&\zeta^{-1} \int_{\widetilde{\mathrm{G}'}} \check{\Theta}_{\Pi'}(\tilde{g}') \int_{\widetilde{\mathrm{G}}} \Psi(\tilde{g}) \Theta(\widetilde{-1}\tilde{g}\tilde{g}'), d\tilde{g}\, d\tilde{g}' \\
&\quad\quad = \zeta^{-1} \int_{\widetilde{\mathrm{G}'}} \check{\Theta}_{\Pi'}(\widetilde{-1}^{-1}\tilde{g}') \int_{\widetilde{\mathrm{G}}} \Psi(\tilde{g}) \Theta(\tilde{g}\tilde{g}')\, d\tilde{g}\, d\tilde{g}' \\
&\quad\quad\quad = \int_{\widetilde{\mathrm{G}'}} \check{\Theta}_{\Pi'}(\tilde{g}') \int_{\widetilde{\mathrm{G}}} \Psi(\tilde{g}) \Theta(\tilde{g}\tilde{g}')\, d\tilde{g}\, d\tilde{g}' = \int_{\widetilde{\mathrm{G}}} \Psi(\tilde{g}) \Theta_{\Pi}(\tilde{g})\, d\tilde{g} .
\end{aligned}$$

APPENDIXA. 波前集

在本附录中，我们汇集了 [H¨or83 第 VIII 章] 中的一些事实；当实数被替换为一个 p-进域 $\mathbb{F}$（即 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张）时，我们将需要这些事实。

令 $\mathfrak{o}_F$ 为 $\mathbb{F}$ 中的整数环，并令 $\mathfrak{p}_F \subseteq \mathfrak{o}_F$ 为其唯一的极大真理想。设 $\chi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{C}^\times$ 是加法群 $\mathbb{F}$ 的一个特征标，且 χ 的核等于 $\mathfrak{o}_F$。用 $\mathcal{S}(U)$ 表示开子集 $U \subseteq \mathbb{F}^n$ 上的 Schwartz-Bruhat 空间，即 U 上具有紧支集的复值局部常值函数空间。我们将 $\mathbb{F}^n$

通过以下对称双线性形式，将其与线性对偶 $(\mathbb{F}^n)^*$ 识别

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = xy^t \,,$$

其中 x和 y 是 $\mathbb{F}^n$ 中的行向量，其分量如所示。我们对 $\mathbb{F}^n$ 上的哈尔测度 $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ 作归一化，使得对于 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$，傅里叶变换及其逆变换为

$$\mathcal{F}\phi(\xi) = \int_{\mathbb{F}^n} \phi(x)\chi(-x \cdot \xi)\, dx \qquad (\xi \in \mathbb{F}^n) \tag{A.1}$$

and

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{F}^n} \mathcal{F}\phi(\xi)\chi(x \cdot \xi)\, d\xi \qquad (x \in \mathbb{F}^n)\,, \tag{A.2}$$

参见 [Wei73，推论 1，第 107] 页。

记 $\mathbb{F}$上的绝对值为 $|\,|$，如 [Wei73，第 4], 页所述，并令

$$|x| = \max\{|x_1|, \dots, |x_1|\} \qquad (x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n)\,.$$

取一个有限指数子群 $\Lambda \subseteq \mathbb{F}^\times$ 。我们将假设

$$\varpi \in \Lambda\,. \tag{A.3}$$

那么 Λ 是由 ϖ 生成的 $\langle\varpi\rangle \subseteq \mathbb{F}^\times$ 的子群与 $\Lambda \cap \mathfrak{o}_F^\times \subseteq \mathfrak{o}_F^\times$ 的一个有限指数子群的直积，

$$\Lambda = \langle\varpi\rangle(\Lambda \cap \mathfrak{o}_F^\times)\,.$$

$\mathbb{F}^n \setminus 0$ 的子集称为锥，如果它在乘以 Λ的运算下封闭。（更准确的名称应为 Λ -锥。由于 Λ 固定不变，我们省略它。）对于 $n = 1$，存在有限个元素 x_1、x_2、……、$x_l \in \mathfrak{o}_F^\times$，使得 $\mathbb{F} \setminus 0 = \cup_{j=1}^{l} \Lambda x_j$。

更一般地，令 $S^{n-1} = \{$（x_1、x_2、……、x_n）$\in \mathbb{F}^n$；$\max_i |x_i| = 1\}$ 为单位球面。这是 $\mathbb{F}^n$的一个开且紧子集。（有关 S^{n-1}结构的更多信息，请参见定理 15 的证明。）于是，对于任意锥 $\Gamma \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$，我们有

$$\Gamma = \Lambda\,(\Gamma \cap S^{n-1}) \tag{A.4}$$

（参见 [Hei85，引理 2。5]）。事实上，如果（x_1、x_2、……、x_n）$\in \Gamma$ 且 $|x_j| = \max_i |x_i|$ 满足 $|x_j| \neq |\varpi^m|$，那么 ϖ^{-m}（x_1、x_2、……、x_n）$\in \Gamma$，因为根据（A.3），$\varpi \in \Lambda$。

由（A.4）可知，Γ 是开集（分别地，是闭集）当且仅当 $\Gamma \cap S^{n-1}$ 是开集（分别地，是闭集）。

此外，$\Gamma \cap S^{n-1} = \bigcup_{i \in I} S_i$ 是群 $\Lambda \cap \mathfrak{o}_{\mathbb{F}}^\times$ 作用下的轨道 S_i 之并。因此

$$\Gamma = \bigcup_{i \in I} \langle\varpi\rangle S_i\,.$$

对于子集 $A \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$，我们将 A 的渐近锥 AC(A) 定义为所有与 A 的交集有界的开锥之并集的补集。等价地，点 $x \in \mathbb{F}^n \setminus 0$ 属于 AC(A)，当且仅当每个包含 x 的开锥都与 A 相交于一个无界集。

由于单位球面 S^{n-1} 是紧的， $\mathbb{F}^n \setminus 0$ 的任意开锥覆盖都包含一个有限子覆盖。因此，若 AC(A) $= \emptyset$ ，则 A 有界。反之，若 A 有界，则 AC(A) $= \emptyset$。因此，AC(A) $= \emptyset$ 当且仅当 A 有界。

令 $\mathcal{E}^*(\mathbb{F}^n) \subseteq \mathcal{S}^*(\mathbb{F}^n)$ 表示紧支撑分布的子空间。对于 $v \in \mathcal{E}^*(\mathbb{F}^n)$，它在局部常值函数空间 $C^\infty(\mathbb{F}^n)$ 上按如下方式作用：

$$v(\phi) = v(\psi\phi) \qquad (\phi \in C^\infty(\mathbb{F}^n), \psi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{F}^n), \psi = 1 \text{ on } \mathrm{supp} v)\,.$$

特别地，其傅里叶变换

$$\mathcal{F}v(\xi) = v(\chi(-\ \cdot \xi)) \qquad (\xi \in \mathbb{F}^n) \tag{A.5}$$

是良定义的。直接计算表明 $\mathcal{F}v \in C^\infty(\mathbb{F}^n)$。假设 supp$\mathcal{F}v$有界，则 $v = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}v$是一个光滑函数。这是非阿基米德版本的帕莱-维纳定理的一个特例，该定理指出：如果一个分布$v \in \mathcal{E}^*(\mathbb{F}^n)$的傅里叶变换具有紧支集，即 $\mathcal{F}v \in \mathcal{E}^*(\mathbb{F}^n)$，那么它与局部常值函数 (A.5) 乘以哈尔测度所得的分布相同。

因此，若 $v \in \mathcal{E}^*(\mathbb{F}^n)$ 不是光滑函数，则 supp$\mathcal{F}v$ 无界。因此 AC(supp$\mathcal{F}v$) $\neq \emptyset$。按照 [H¨or83，第 8.1], 节，我们定义 $\Sigma(v)$ = AC(supp$\mathcal{F}v$)。显然

$$\Sigma(v_1 + v_2) \subseteq \Sigma(v_1) \cup \Sigma(v_2) \qquad (v_1, v_2 \in \mathcal{E}^*(\mathbb{F}^n))\,. \tag{A.6}$$

引理 A.1. 对任意子集 $A \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$ 和任意有界集 $B \subseteq \mathbb{F}^n$,

$$\mathrm{AC}(A) \supseteq \mathrm{AC}(A + B)\,.$$

证明. 我们需要证明，对于任意开锥 $V \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$，若 $V \cap A$ 有界，则 $V \cap (A + B)$ 有界。

设 $W = V \cap S^{n-1}$，使得 $V = \Lambda W$，见式 (A.4)。由于 W 是开集，存在 $M > 0$ 使得

$$W - \lambda^{-1}B \subseteq W \qquad (\lambda \in \Lambda, |\lambda| > M)\,. \tag{A.7}$$

此外，由于 $V \cap A$ 有界，且 W 与 0 保持正距离，因此在 $N > 0$ 中存在使得

$$\lambda W \cap A = \emptyset \qquad (\lambda \in \Lambda, |\lambda| > N)\,. \tag{A.8}$$

因此

$$\lambda W \cap (A + B) = \emptyset \qquad (\lambda \in \Lambda, |\lambda| > \max\{M, N\})\,.$$

事实上，若非如此，则存在如上所述的 $a \in A$、 $b \in B$、 $w \in W$ 和 λ，使得

$$\lambda w = a + b\,.$$

但此时

$$a = \lambda(w - \lambda^{-1}b) \in \lambda(W - \lambda^{-1}B) \subseteq \lambda W\,,$$

这与（A.8）矛盾。 □

推论 A.2. [H¨or83，引理 8.1。1] 对于 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$ 和 $v \in \mathcal{E}^*(\mathbb{F}^n)$， $\Sigma(\phi v) \subseteq \Sigma(v)$。

定义 A.3. [H¨or83，引理 8.1。2] 对于 $u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{F}^n)$，定义

$$\Sigma_x(u) = \bigcap_{\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n),\ \phi(x) \neq 0} \Sigma(\phi u) \qquad (x \in \mathbb{F}^n)$$

以及 u 的波前集，

$$\mathrm{WF}(u) = \{(x, \xi) \in \mathbb{F}^n \times (\mathbb{F}^n \setminus 0);\ \xi \in \Sigma_x(u)\}\,.$$

（注意，若 $\Sigma_x(u) \neq \emptyset$，则 $x \in \mathrm{supp}(u)$。）

引理 A.4. 取子集 $A \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$ 和开紧集 $W \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$。对于 $N > 0$，令 $\Lambda_{>N} = \{\lambda \in \Lambda;\ |\lambda| > N\}$。[2] 那么存在 N，使得

$$(\Lambda_{>N} W) \cap A = \emptyset$$

当且仅当

$$\Lambda W \cap A \quad \textit{is bounded}.$$

证明。令

$$(\Lambda W)_{>M} = \{x \in \Lambda W;\ |x| > M\}\,.$$

Then

$$\Lambda_{>N} W \supseteq (\Lambda W)_{>N \cdot \max\{|\xi|;\ \xi \in W\}}$$

and

$$(\Lambda W)_{>M} \supseteq \Lambda_{>M/\min\{|\xi|;\ \xi \in W\}} W\,.$$

这就得出了所要证明的结论。 □

定义 A.5. [Hei85，第 288-289] 页：分布 $u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{F}^n)$ 在点 $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{F}^n \times (\mathbb{F}^n \setminus 0)$ 处光滑，当且仅当存在开紧子集 $U \subseteq \mathbb{F}^n$ 和 $W \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$ 使得 $x_0 \in U$, $\xi_0 \in W$ 并且对任意 $\phi \in \mathcal{S}(U)$，存在 $N > 0$ 使得

$$(\Lambda_{>N} W) \cap \mathrm{supp} \mathcal{F}(\phi u) = \emptyset\,.$$

引理 A.6. 对任意 $u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{F}^n)$，$u$ 的波前集等于 $\mathbb{F}^n \times (\mathbb{F}^n \setminus 0)$ 中 u的所有光滑点所构成集合的补集。

证明. 由引理 A.4 可知，(x_0, ξ_0) 是 u 的光滑点，当且仅当存在开紧子集 $U \subseteq \mathbb{F}^n$ 和 $W \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$ 使得 $x_0 \in U$, $\xi_0 \in W$ 并且对任意$\phi \in \mathcal{S}(U)$

$$\Lambda W \cap \mathrm{supp} \mathcal{F}(\phi u)$$

有界。等价地，存在一个开紧子集 $U \subseteq \mathbb{F}^n$ 和一个开锥 $V \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$，使得 $x_0 \in U$、$\xi_0 \in V$，且对于任意 $\phi \in \mathcal{S}(U)$

$$V \cap \mathrm{supp} \mathcal{F}(\phi u)$$

有界。 等价地，存在一个包含 x_0 的开紧子集 $U \subseteq \mathbb{F}^n$，使得 at

$$\xi_0 \notin \Sigma(\phi u) \qquad (\phi \in \mathcal{S}(U))\,.$$

[2] Loke：我们回顾一下，Λ 是 $\mathbb{F}^\times$的有限指数子群。

假设（x_0，ξ_0）是一个光滑点，则上述内容意味着 $\xi_0 \notin \Sigma_{x_0}(u)$，因此（$x_0$，$\xi_0$）$\notin$WF（$u$）。

反之，$(x_0,\xi_0) \notin \mathrm{WF}(u)$，所以 $\xi_0 \notin \Sigma_{x_0}(u)$。根据定义，存在一个 $\phi \in \mathcal{S}(U)$，使得$\phi(x_0) \neq 0$，且 $\xi_0 \notin \Sigma(\phi u)$。令 $U_0 \subseteq U$ 为一个开集，在该集上 ϕ 是常数，等于 $\phi(x_0)$。根据推论 A.2，

$$\Sigma(\phi_0 \phi u) \subseteq \Sigma(\phi u) \qquad (\phi_0 \in S(U_0))\,.$$

因此

$$\xi_0 \notin \Sigma(\phi_0 u) \qquad (\phi_0 \in \mathcal{S}(U_0))\,.$$

这表明 (x_0,ξ_0) 是 u 的光滑点。 □

推论 A.7. [H¨or83, (8.1.9)] 对于任意 $u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{F}^n)$，子集 $\mathrm{WF}(u) \subseteq \mathbb{F}^n \times (\mathbb{F}^n \setminus 0)$ 是闭的。此外，

$$\mathrm{WF}(\phi u) \subseteq \mathrm{WF}(u) \qquad (\phi \in C^\infty(\mathbb{F}^n))\,.$$

特别地，如果 ϕ 没有零点，则

$$\mathrm{WF}(\phi u) = \mathrm{WF}(u)\,.$$

推论 A.8. [H¨or83，命题 8.1。3] 对于任意 $v \in \mathcal{E}^*(\mathbb{F}^n)$，$\mathrm{WF}(v)$ 在第二分量上的投影等于 $\Sigma(v)$。

证明。令

$$P(\mathrm{WF}(v)) = \bigcup_{x \in \mathbb{F}^n} \Sigma_x(v)$$

表示该投影。显然

$$P(\mathrm{WF}(v)) \subseteq \Sigma(v)\,. \tag{A.9}$$

由于 $\mathrm{WF}(v)$ 是闭集且 $\mathrm{supp} v$ 是紧的，集合 $\mathrm{WF}(v) \cap (\mathbb{F}^n \times S^{n-1})$ 是紧的。因此 $P(\mathrm{WF}(v)) \cap S^{n-1}$ 是紧的。由于根据 (A.4)，$P(\mathrm{WF}(v)) = \Lambda(P(\mathrm{WF}(v)) \cap S^{n-1})$，锥 $P(\mathrm{WF}(v))$ 是闭的。

为了证明等式

$$P(\mathrm{WF}(v)) = \Sigma(v)$$

只需验证：对于任意包含 $P(\mathrm{WF}(v))$ 的开锥 V，都有 $\Sigma(v) \subseteq V$。令 V 为这样的锥。假设 $\Sigma_x(v) \neq \emptyset$。那么 $x \in \mathrm{supp} v$。由 (A.9) 可得 $\Sigma_x(v) \subseteq V$。因此，根据定义 A.3，存在一个开邻域 $U_x \subseteq \mathbb{F}^n$，使得

$$\Sigma(\phi v) \subseteq V \qquad (\phi \in \mathcal{S}(U_x))\,.$$

我们可以用有限个这样的 U_{x_j} 覆盖 $\mathrm{supp} v$，并选取 $\phi_j \in \mathcal{S}(U_{x_j})$，使其在 $\mathrm{supp} v$ 上满足 $\sum_j \phi_j = 1$。于是，由 (A.6) 可得，

$$\Sigma(v) = \Sigma(\sum_j \phi_j v) \subseteq \bigcup_j \Sigma(\phi_j v) \subseteq V\,.$$

□

引理 A.9. [H¨or83，引理 8.1.7] 对于任意 $u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{F}^n)$

$$\Sigma_0(u) \subseteq \mathrm{AC}(\mathrm{supp}\mathcal{F}(u))\,.$$

证明。设 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$ 满足 $\phi(0) \neq 0$。那么，根据定义 A.3,

$$\Sigma_0(u) \subseteq \Sigma(\phi u)\,.$$

我们还有

$$\Sigma(\phi u) = \mathrm{AC}(\mathrm{supp}\mathcal{F}(\phi u)) \subseteq \mathrm{AC}(\mathrm{supp}\mathcal{F}(\phi) + \mathrm{supp}\mathcal{F}(u)) \subseteq \mathrm{AC}(\mathrm{supp}\mathcal{F}(u))\,,$$

其中最后一个包含关系由引理 A.1 得出，因为 $\mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$ 有有界支集。

□

定义 A.10。设 $\chi_\Lambda : \Lambda \to \mathbb{C}^\times$ 是一个群同态。若分布 $u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{F}^n)$ 满足下式，则称其为次数为 χ_Λ 的齐次分布

$$u(\phi_\lambda) = \chi_\Lambda(\lambda)u(\phi) \qquad (\lambda \in \Lambda, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n))\,,$$

其中

$$\phi_\lambda(x) = |\lambda|^{-n}\phi(\lambda^{-1}x)\,.$$

（这种齐次分布的一个例子是 $\mathbb{F}^n$ 上的哈尔测度。齐次分布已在 [GGPS90 第二章第 2.3 节第138]页中得到完整描述。）

引理 A.11. 若 $u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{F}^n)$ 是一个齐次分布，则 $\Sigma_0(u) = \mathrm{supp}\mathcal{F}u$。

证明. 由于 $u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{F}^n)$ 是次数为 χ_Λ 的齐次分布， $\mathcal{F}u$ 是次数为$\chi_\Lambda^{-1}|\cdot|^{-n}$的齐次分布。齐次分布的支集是一个锥，因此它等于其渐近锥。由引理 A.9 得

$$\Sigma_0(u) \subseteq \mathrm{AC}(\mathrm{supp}\mathcal{F}(u)) = \mathrm{supp}\mathcal{F}u\,.$$

Supp设 $0 \neq \xi \qquad \notin \Sigma_0(u)$。我们将证明 $\xi \notin \mathrm{supp}\mathcal{F}u$。这将证明 $\Sigma_0(u) \supseteq \mathrm{supp}\mathcal{F}u \qquad$.

现在， $0 \neq \xi \notin \Sigma_0(u)$ 意味着 $(0, \xi)$ 是分布 u 的一个光滑点。根据定义，存在一个包含 0 的开紧集 U、一个包含ξ 的开紧集 W，以及一个数 $N > 0$，使得

$$\mathcal{F}(\phi u)(\lambda w) = 0 \qquad (\lambda \in \Lambda\,,\ |\lambda| > N\,,\ w \in W)\,.$$

Let

$$L_w\psi(x) = \psi(x - w)\,,\ R\psi(x) = \psi(-x)\,,\ D_{\lambda^{-1}}\psi(x) = |\lambda|^n\psi(\lambda x)\,.$$

于是，经过简单计算可得

$$\mathcal{F}(\phi u)(\lambda w) = \chi_\Lambda(\lambda)^{-1}\mathcal{F}u(L_w R D_{\lambda^{-1}}\mathcal{F}\phi)\,.$$

因此

$$\mathcal{F}u(L_w R D_{\lambda^{-1}}\mathcal{F}\phi) = 0 \qquad (\lambda \in \Lambda\,,\ |\lambda| > N\,,\ w \in W)\,. \tag{A.10}$$

对于 $\epsilon > 0$，令 $B_\epsilon \subseteq \mathbb{F}^n$ 表示以 0 为中心、半径为 ϵ 的闭球。令 $1_{B_\epsilon + w}$ 为 $B_\epsilon + w$的示性函数。我们定义

$$\phi = \mathcal{F}^{-1}D_\lambda R L_{-w} 1_{B_\epsilon + w} = \mathcal{F}^{-1}D_\lambda R 1_{B_\epsilon} = |\lambda|^{-n}\mathcal{F}^{-1}D_\lambda 1_{B_\epsilon} = \mathcal{F}^{-1}1_{B_{|\lambda|\epsilon}} = C(|\lambda|)1_{B_{\frac{1}{|\lambda|\epsilon}}}\,,$$

其中 $C(|\lambda|)$ 是一个非零常数。对于足够大的 $|\lambda|$，$\phi \in \mathcal{S}(U)$。这意味着

$$1_{B_\epsilon+w} = L_w R D_{\lambda^{-1}} \mathcal{F}\phi\,.$$

由 (A.10) 可得

$$\mathcal{F}u(1_{B_\epsilon+w}) = 0\,, \tag{A.11}$$

对于任意 $w \in W$，我们可以找到 $\epsilon > 0$ 使得 $B_\epsilon + w \subseteq W$。那么 (A.11) 蕴含 tha t

$$W \cap \mathrm{supp}\mathcal{F}u = \emptyset.$$

特别是，$\xi \notin \mathrm{supp}\mathcal{F}$，如所要求的。 □

以下定理似乎未见于文献，尽管证明只是对 H¨ormander 所用论证的直接改编。

定理 A.12. [H¨or83，定理 8.1.8] 设 $u \in \mathcal{S}^*(F^n)$ 是齐次的。那么

$$\begin{array}{lll} (x,\xi) \in \mathrm{WF}(u) & \Longleftrightarrow & (\xi,-x) \in \mathrm{WF}(\mathcal{F}u) \quad (x \neq 0 \ \textit{and}\ \xi \neq 0)\,, \\ x \in \mathrm{supp}u & \Longleftrightarrow & (0,-x) \in \mathrm{WF}(\mathcal{F}u) \quad (x \neq 0)\,, \\ \xi \in \mathrm{supp}\mathcal{F}u & \Longleftrightarrow & (0,\xi) \in \mathrm{WF}(u) \quad (\xi \neq 0)\,. \end{array}$$

证明. 齐次分布的傅里叶变换仍是齐次分布，而两个傅里叶变换的复合就是反射。因此，最后两个陈述等价。此外，最后一个陈述与引理 A.11 中的等式一致。因此，只需验证第一个陈述。

由于两个傅里叶变换的复合就是反射，只需证明对任意 $x_0 \neq 0$ 和 $\xi_0 \neq 0$，

$$(x_0,\xi_0) \notin \mathrm{WF}(u) \implies (\xi_0,-x_0) \notin \mathrm{WF}(\mathcal{F}u)\,. \tag{A.12}$$

为简化记号，我们将遵循盖尔范德的做法，记作

$$u(\phi) = \int_{\mathbb{F}^n} u(x)\phi(x)\,dx$$

对于分布 u 在测试函数 ϕ 上的取值。选取 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$，使其在 ξ_0 的一个邻域内等于 1；并选取 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$，使其在 x_0 的一个邻域内等于 1，从而

$$(\mathrm{supp}\psi \times \mathrm{supp}\phi) \cap \mathrm{WF}(u) = \emptyset\,. \tag{A.13}$$

设 $v = \phi\mathcal{F}u$。我们需要在 $-x_0$ 的一个 Λ-锥形邻域中估计 $\mathcal{F}v(-\lambda x)$。那么对于 $\lambda \in \Lambda$ 和 $x \in \mathbb{F}^n$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}v(-\lambda x) &= \mathcal{F}\phi * (\mathcal{F}^2 u)(-\lambda x) = \int_{\mathbb{F}^n} \mathcal{F}\phi(-\lambda x - y)(\mathcal{F}^2 u)(y)\,dy \qquad (A.14) \\ &= \int_{\mathbb{F}^n} \mathcal{F}\phi(-\lambda x + y)u(y)\,dy = \chi_\Lambda(\lambda)|\lambda|^n \int \mathcal{F}\phi(\lambda(y-x))u(y)\,dy \\ &= \chi_\Lambda(\lambda)|\lambda|^n \int \mathcal{F}\phi(\lambda(y-x))(\psi u)(y)\,dy \\ &\quad + \chi_\Lambda(\lambda)|\lambda|^n \int \mathcal{F}\phi(\lambda(y-x))((1-\psi)u)(y)\,dy\,. \end{aligned}$$

设 $r>0$，使得 $(1-\psi)(y) \neq 0$ 蕴含 $|y-x_0|>2r$。那么 $|x-x_0|<r$ 蕴含$|y-x|>r$。因此存在 $N>0$，使得

$$\mathcal{F}\phi(\lambda(y-x))=0 \qquad ((1-\psi)(y)\neq 0,\ |x-x_0|<r,\ |\lambda|>N)\,.$$

因此，

$$\mathcal{F}\phi(\lambda(y-x))(1-\psi)(y)=0 \qquad (|x-x_0|<r,\ |\lambda|>N)\,. \tag{A.15}$$

此外，由于傅里叶变换的伴随性质，

$$\int \mathcal{F}\phi(\lambda(y-x))(\psi u)(y)\,dy=\int \mathcal{F}(\psi u)(\lambda\xi)\phi(\xi)\chi(\lambda x\cdot\xi)\,d\xi\,. \tag{A.16}$$

条件 (A.13) 蕴含存在 $M>0$ 使得

$$\mathcal{F}(\psi u)(\lambda\xi)=0 \qquad (|\lambda|>M,\ \phi(\xi)\neq 0)\,.$$

因此，对于任意 $|\lambda|>M$，(A.16) 均为零，且与 x 无关。因此，若 $|x-x_0|<r$ 且 $|\lambda|>\max\{M,N\}$，则 (A.14) 为零。这验证了 (A.12)。□

定理 A.13。 [H¨ 或 83，定理 8.1。5] 设 $V\subseteq\mathbb{F}^n$ 为一个子空间，$V^\perp\subseteq\mathbb{F}^n$ 为其正交补，使得 $\mathbb{F}^n=V\oplus V^\perp$。设 $u_V\in\mathcal{S}^*(V)$ 是由非零光滑函数乘以哈尔测度 dx_V 得到的倍数。记 $\delta\in\mathcal{S}^*(V^\perp)$ 为原点处的狄拉克 δ 函数。则

$$\mathrm{WF}(u_V\otimes\delta)=\mathrm{supp}u_V\times V^\perp\setminus 0\,.$$

证明。由推论 A.7 可知，我们可以假设 $u_V=dx_V$。于是分布$u_V\otimes\delta$ 是齐次的，因此定理 A.12 推出

$$\Sigma_0(u_V\otimes\delta)=\mathrm{supp}\mathcal{F}(u_V\otimes\delta)\setminus 0=\{0\}\times V^\perp\setminus 0\,.$$

然而，由定义 A.3 可清楚得知

$$\begin{aligned}\Sigma_x(u_V\otimes\delta) &= \Sigma_0(u_V\otimes\delta) \qquad (x\in\mathrm{supp}u_V)\,,\\ \Sigma_x(u_V\otimes\delta) &= \emptyset \qquad (x\notin\mathrm{supp}u_V)\,.\end{aligned}$$

□

引理 A.14. [H¨或83，定理 7.7。1], [Hei85，命题 1。1] 设 $U\subseteq\mathbb{F}^n$ 是一个开紧子集，并设 $f:U\to\mathbb{F}$ 是一个可微函数，使得

$$f(x_0+x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot x+R(x_0,x)(x)\cdot x \qquad (x_0,\ x_0+x\in U)\,,$$

其中 $f'(x_0)\in\mathbb{F}^n$ 是 f 在 x_0 处的梯度，而 $R(x_0,x):\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ 是一个线性函数，满足

$$B:=\max_{x_0,x_0+x\in U,|y|=1}|R(x_0,x)(y)\cdot y|<\infty\,.$$

我们还假设

$$\delta:=\min_{x_0\in U}|f'(x_0)|>0\,.$$

令 $\phi\in\mathcal{S}(U)$，并令 $m_0\in\mathbb{Z}$ 为满足存在有限不交覆盖的 $m\in\mathbb{Z}$ 的最小值

$$U=\bigsqcup_k(x_k+B_{q^{-m}})$$

且 ϕ 在每个 $x_k + B_{q^{-m}}$ 上都是常数。（该覆盖存在，因为 ϕ 是局部常值的，而 U 是开且紧的。）于是

$$\int_U \chi(\lambda f(x))\phi(x)\,dx = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{F}^\times,\ |\lambda| > \max\{q\delta^{-2}B, \delta^{-1}q^{m_0}\})\,. \tag{A.17}$$

证明。取如上的覆盖，

$$\int_U \chi(\lambda f(x))\phi(x)\,dx = \Sigma_k\, \chi(\lambda f(x_k))\phi(x_k) \int_{B_{q^{-m}}} \chi(\lambda f'(x_k)\cdot x)\chi(\lambda R(x_k,x)(x)\cdot x)\,dx\,.$$

注意，对 $|\lambda| > \delta^{-1}q^m$，函数

$$B_{q^{-m}} \ni x \to \chi(\lambda f'(x_k)\cdot x) \in \mathbb{C}^\times$$

是加法群 $B_{q^{-m}}$ 的非平凡特征标。事实上，若此特征标是平凡的，则我们将有

$$|\lambda f'(x_k)\cdot x| \le 1 \qquad (x \in B_{q^{-m}})\,.$$

选择 $x \in B_{q^{-m}}$，使得 $|f'(x_k)\cdot x| = |f'(x_k)||x|$。此外，若 $|x| = q^{-m}$，则

$$|\lambda||f'(x_k)|q^{-m} \le 1\,.$$

这将意味着

$$|\lambda|\delta q^{-m} \le 1\,,$$

这将与 $|\lambda| > \delta^{-1}q^m$ 的选取相矛盾。取 $m = m_0$，我们看到，若 $B = 0$，则

$$\int_U \chi(\lambda f(x))\phi(x)\,dx = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{F}^\times,\ |\lambda| > \delta^{-1}q^{m_0})\,. \tag{A.18}$$

从现在起，假设 $B > 0$。若 $|\lambda|Bq^{-2m} \le 1$，则

$$\chi(\lambda R(x_k,x)(x)\cdot x) = 1 \qquad (x \in B_{q^{-m}})\,.$$

因此

$$\int_{B_{q^{-m}}} \chi(\lambda f'(x_k)\cdot x)\chi(\lambda R(x_k,x)(x)\cdot x)\,dx = 0 \qquad (\delta^{-1}q^m < |\lambda| \le B^{-1}q^{2m})\,. \tag{A.19}$$

令 $\delta = q^{-m_\delta}$ 和 $B = q^{m_B}$。那么，当 $m_\delta + m_B < m$ 时，区间 $(\delta^{-1}q^m, B^{-1}q^{2m}] = (q^{m_\delta+m}, q^{-m_B+2m}]$ 非空。通过写成 $m_\delta + m_B + k = m$，我们得到

$$\bigcup_{m_\delta+m_B<m} (m_\delta + m, -m_B + 2m] = \bigcup_{k=1}^{\infty} (2m_\delta + m_B + k, 2m_\delta + m_B + 2k]$$

$$= \quad 2m_\delta + m_B + \bigcup_{k=1}^{\infty}(k, 2k] = 2m_\delta + m_B + (1,\infty) = (2m_\delta + m_B + 1, \infty)\,.$$

由于 $q^{2m_\delta+m_B+1} = q\delta^{-2}B$，我们看到，对于任意满足 $|\lambda| > q\delta^{-2}B$ 的 λ，存在一个 $m > m_\delta + m_B$，使得 $\delta^{-1}q^m < |\lambda| \le B^{-1}q^{2m}$，因此 (A.19) 对这个 m 成立。若进一步有 $m \ge m_0$，则函数 ϕ 在每个 $x_k + B_{q^{-m}}$ 上都是常数。因此

$$\int_U \chi(\lambda f(x))\phi(x)\,dx = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{F}^\times,\ |\lambda| > q\delta^{-2}B, m \ge m_0)\,.$$

接下来，我们希望用 $|\lambda|$ 来表示条件 $m \ge m_0$。如果 $m_0 \le m_\delta + m_B$，那么 $m > m_0$，因为 $m > m_\delta + m_B$。如果 $m_0 > m_\delta + m_B$，那么我们需要对 $|\lambda|$ 施加一个条件，使得非空区间（$m_\delta + m_0,\ -m_B + 2m_0]$）位于（$m_\delta + m,\ -m_B + 2m]$）的左侧，并允许有重叠。当 $m_\delta + m_0 < \log_q |\lambda|$ 时，这将成立。等价地，当 $\delta^{-1}q^{m_0} < |\lambda|$ 时成立。因此

$$\int_U \chi(\lambda f(x))\phi(x)\,dx = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{F}^\times,\ |\lambda| > \max\{q\delta^{-2}B, \delta^{-1}q^{m_0}\})\,. \tag{A.20}$$

显然，（A.17）由（A.18）和（A.20）推出。 □

设 $X \subseteq \mathbb{F}^n$ 为一个开集。用 $\mathcal{S}(X) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$ 表示支集包含于 X 中的函数所组成的子集，并令 $\mathcal{S}(X)^*$ 为 $\mathcal{S}(X)$ 的对偶，赋予逐点收敛（弱拓扑）拓扑。

引理 A.15。设 $u_j \in \mathcal{S}(X)^*$ 为一个序列，使得对每个 $\phi \in \mathcal{S}(X)$，集合$\{u_j(\phi);\ j = 1, 2, 3, \ldots\}$ 有界。则对任意 $\psi \in \mathcal{S}(X)$ 及任意 $0 < r < \infty$,

$$\sup_{|\eta| \le r} |\mathcal{F}(\psi u_j)(\eta)| < \infty\,.$$

证明。令 $\chi_\eta(x) = \chi(\eta \cdot x)$。明确地说，

$$\mathcal{F}(\psi u_j)(\eta) = \int_X \chi(-\eta \cdot x)\psi(x)u_j(x)\,dx = u_j(\chi_{-\eta}\psi)\,.$$

我们断言

$$\chi(-\eta \cdot x) = \chi(-\eta \cdot y) \quad \text{if} \quad |x - y| \le r^{-1}\,.$$

事实上，若 $|\eta \cdot (x - y)| < 1$，则 $\chi(-\eta \cdot x) = \chi(-\eta \cdot y)$。由柯西-施瓦茨不等式，$|\eta \cdot (x - y)| \le |\eta||x - y| \le r|x - y|$。断言得证。

函数集合

$$\{\chi(-\eta \cdot x) : |\eta| \le r\}$$

是一致局部常值的。因此，这些函数

$$\chi(-\eta \cdot x)\psi(x) \qquad (|\eta| \le r)$$

是一致局部常值的，且其支集都包含在 $\operatorname{supp}\psi$ 中。因此，它们都属于有限维子空间 $\mathcal{S}(X)_\phi \subseteq \mathcal{S}(X)$。序列 u_j 在 $\mathcal{S}(X)_\phi$ 上的限制是弱有界的。根据一致有界原理，或者仅仅因为空间 $\mathcal{S}(X)_\phi$ 是有限维的，它是一致有界的，证毕。□

若子集 $\Gamma \subseteq X \times (\mathbb{F}^n \setminus 0)$ 满足对任意 $\lambda \in \Lambda$，均有 $(x,\xi) \in \Gamma \iff (x,\lambda\xi) \in \Gamma$，则称其为锥。对于任意闭锥 $\Gamma \subseteq X \times (\mathbb{F}^n \setminus 0)$，令 $\mathcal{S}^*_\Gamma(X) \subseteq \mathcal{S}^*(X)$ 表示所有波前集包含于 Γ 的分布所构成的子集。我们如下在 $\mathcal{S}^*_\Gamma(X)$ 上引入一种拓扑。遗憾的是，这一定义在 [Hei85] 中缺失了。 [CHLR18] 注意到了这一点并予以修正。下面我们给出一个简洁的论证，尽可能接近 H¨ormander 在实数情形中所用的论证。

定义 A.16. 序列 $u_j \in \mathcal{S}^*_\Gamma(X)$ 收敛到 $u \in \mathcal{S}^*_\Gamma(X)$，当且仅当对于任意$\phi \in \mathcal{S}(X)$,

$$\lim_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi) \tag{A.21}$$

并且对于任意开锥 $V \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$,

$$\textit{if} \quad \Gamma \cap (\mathrm{supp}\phi \times V) = \emptyset\,, \quad \textit{then} \quad \bigcup_j \mathrm{supp}\mathcal{F}(\phi u_j) \cap V \quad \textit{is bounded}\,. \tag{A.22}$$

引理 A.17. [H¨or83，定理 8.2.3] 对于任意 $u \in \mathcal{S}_\Gamma(X)$，存在一个序列 $u_j \in \mathcal{S}(X)$，使得 $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ 属于 $\mathcal{S}^*_\Gamma(X)$。

证明. 设 $u_j = \phi_j * (\psi_j u)$，其中
(a) $\psi_j \in \mathcal{S}(X)$，且对于任意紧子集 X，当 j 足够大时，$\psi_j = 1$；(b) $0 \le \phi_j \in \mathcal{S}(X)$，$\int \phi_j(x)\,dx = 1$，$\mathrm{supp}\phi_j + \mathrm{supp}\psi_j \subseteq X$，并且当 j 趋于无穷时，$\mathrm{supp}\phi_j$ 收缩至零。

于是 $u_j \in \mathcal{S}(X)$，且 (A.21) 成立。若 ϕ 和 V 满足 (A.22)，则取 $\psi \in \mathcal{S}(X)$，使其在 $\mathrm{supp}\phi$ 的某个邻域内恒等于 1，并取一个闭锥 $W \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$，使 V 包含于其内部，从而

$$\Gamma \cap (\mathrm{supp}\psi \times W) = \emptyset\,. \tag{A.23}$$

令 $w_j = \phi_j * (\psi u)$。于是 $\phi u = \phi\psi u$，因此当 j 足够大时，$\phi u_j = \phi w_j$。另外

$$|\mathcal{F}w_j| \le |\mathcal{F}\phi_j||\mathcal{F}(\psi u)| \le |\mathcal{F}(\psi u)|\,.$$

因此,

$$\bigcup_{j \text{ large}} \mathrm{supp}\mathcal{F}(\phi u_j) = \bigcup_{j \text{ large}} \mathrm{supp}\mathcal{F}(\phi w_j) \subseteq \mathrm{supp}\mathcal{F}(\psi u)\,.$$

推论 A.7 表明，$\mathrm{WF}(\psi u) \subseteq \mathrm{WF}(u) \cap (\mathrm{supp}\,\psi \times \mathbb{F}^n)$。因此，$\mathrm{WF}(\psi u) \subseteq \Gamma \cap (\mathrm{supp}\,\psi \times \mathbb{F}^n)$。推论 A.8 蕴含，$\mathrm{WF}(\psi u)$ 在第二个变量上的投影等于 $\Sigma(\psi u)$。因此，条件 (A.23) 蕴含集合 $\mathrm{supp}\mathcal{F}(\psi u) \cap W$ 有界。故结论成立。□

在引理 A.17 的证明中取 $\psi_j = 1$，即可得到以下推论。

推论 A.18. 固定 $u \in \mathcal{S}^*_\Gamma(X)$。令 $0 \le \phi_j \in \mathcal{S}(X)$、$\int \phi_j(x)\,dx = 1$，$\mathrm{supp}\phi_j + \mathrm{supp}u \subseteq X$，且当 j 趋于无穷时，$\mathrm{supp}\phi_j$ 收缩至 0。则 $u = \lim_{j\to\infty} \phi_j * u$ 属于 $\mathcal{S}^*_\Gamma(X)$。

定理 A.19. [H¨or83，定理 8.2.4], [Hei85，定理 2.8] 设 $X \subseteq \mathbb{F}^m$ 和 $Y \subseteq \mathbb{F}^n$ 为开子集，并设 $f : X \to Y$ 为解析映射。令

$$N_f = \{(f(x), \eta) \in Y \times (\mathbb{F}^n \setminus 0);\ f'(x)^t \eta = 0\}\,.$$

那么，对于任意满足下列条件的闭锥 $\Gamma \subseteq Y \times (\mathbb{F}^n \setminus 0)$

$$\Gamma \cap N_f = \emptyset\,,$$

由下式给出的映射 $f^* : \mathcal{C}^\infty(Y) \to \mathcal{C}^\infty(X)$

$$f^*(u) = u \circ f$$

唯一延拓为连续映射

$$f^* : \mathcal{S}^*_\Gamma(Y) \to \mathcal{S}^*_{f^*\Gamma}(X)\,,$$

其中

$$f^*\Gamma = \{(x, f'(x)^t\eta);\ (x, \eta) \in \Gamma\}\,.$$

特别地

$$\mathrm{WF}(f^*u) \subseteq f^* \,\mathrm{WF}(u) \qquad (u \in \mathcal{S}^*_\Gamma(\mathbb{F}^n))\,.$$

证明。定义 $f^*u = u \circ f$ whenever $u \in C^\infty(Y)$。根据引理 A.17，只需证明 f^* 将收敛于 $\mathcal{S}^*_\Gamma(Y)$ 的序列 $u_j \in C^\infty(Y)$ 映射为收敛于 $\mathcal{S}^*_{f^*\Gamma}(Y)$ 的序列$f^*u_j \in C^\infty(X)$，即可证明该定理。首先证明在 $\mathcal{S}^*(X)$ 中的收敛性。

若 $u \in \mathcal{S}(X)$ 且 $\phi \in \mathcal{S}(X)$，则将傅里叶反演公式应用于 u，得到

$$\begin{aligned} f^*u(\phi) &= \int_X u(f(x))\phi(x)\,dx = \int_X \int_{\mathbb{F}^n} \mathcal{F}u(\eta)\chi(f(x)\cdot\eta)\,d\eta\,\phi(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{F}^n} \mathcal{F}u(\eta)\, I_\phi(\eta)\,d\eta\,, \\ I_\phi(\eta) &= \int_X \chi(f(x)\cdot\eta)\phi(x)\,dx\,. \end{aligned} \tag{A.24}$$

公式 (A.24) 用傅里叶变换表示拉回，因此使我们能够使用以波前集表述的假设。

设 $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, $\Gamma_{y_0} = \{\eta; (y_0, \eta) \in \Gamma\}$。取

(a) Γ_{y_0} 的一个闭锥形邻域 $V \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$，使得

$$f'(x_0)^t\eta \neq 0 \qquad (\eta \in V)$$

（这是可能的，因为 $N_f \cap \Gamma = \emptyset$），

(b) 一个包含 y_0 的开紧邻域 Y_0，使得对于每个 $y \in Y_0$，V 都是 Γ_y 的邻域（这是可能的，因为 Γ 是闭的）；以及 (c) 一个包含 x_0 的开紧邻域 X_0，满足 $f(X_0) \subseteq Y_0$，并且

$$f'(x)^t\eta \neq 0 \qquad (x \in X_0\,,\ \eta \in V)\,.$$

选取 $\psi \in \mathcal{S}(Y_0)$，使其在 $f(X_0)$ 上恒等于 1。于是 (A.24) 推出

$$f^*u(\phi) = \int_{\mathbb{F}^n} \mathcal{F}(\psi u)(\eta)\, I_\phi(\eta)\, d\eta \qquad (\phi \in \mathcal{S}(X_0)\,,\ u \in C^\infty(Y))\,. \tag{A.25}$$

对于固定的 $\eta \in V$，考虑函数

$$f_\eta : X_0 \ni x \to f(x)\cdot\eta = f(x)^t\eta \in \mathbb{F}\,.$$

那么 f_η 是一个解析函数，并且 $f'_\eta(x) = f'(x)^t\eta$。因此，

$$\delta_\eta = \min_{x\in X_0} |f'_\eta(x)| > 0\,.$$

因此， f_η 满足引理 A.14 的条件。因此

$$\int_{X_0} \chi(\lambda f(x)\cdot\eta)\phi(x)\,dx = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{F}^\times\,,\ |\lambda| > \max\{q\delta_\eta^{-2}B_\eta, q^{m_0+1}, \delta_\eta^{-1}q^{m_0}\})\,,$$

其中， m_0 是满足以下条件的最小值： X_0 是半径为 q^{-m_0} 的球的不交并，并且在每个球上 ϕ 为常数。参数 δ_η 和 B_η 随 η 连续变化。因此，如果 $C = \max_{\eta\in V,\ |\eta|=1} \max\{q\delta_\eta^{-2}B_\eta, q^{m_0+1}, \delta_\eta^{-1}q^{m_0}\}$，则

$$\int_{X_0} \chi(\lambda f(x)\cdot\eta)\phi(x)\,dx = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{F}^\times\,,\ |\lambda| > C,\ \eta \in V,\ |\eta| = 1)\,.$$

因此，

$$\mathrm{supp} I_\phi \cap V \text{ is bounded for any } \phi \in \mathcal{S}(X_0)\,. \tag{A.26}$$

固定 $\phi \in \mathcal{S}(X_0)$，并令 $u_j \in C^\infty(Y)$ 在 $\mathcal{S}^*_\Gamma(X)$ 中收敛到 u。结合 (A.26) 与引理 A.15，我们看到

$$\lim_{j\to\infty} \int_V \mathcal{F}(\psi u_j)(\eta)\, I_\phi(\eta)\, d\eta = \int_V \mathcal{F}(\psi u)(\eta)\, I_\phi(\eta)\, d\eta\,. \tag{A.27}$$

令 $V^c \subseteq \mathbb{F}^n \setminus 0$ 为 V 的补集。则

$$(Y_0 \times V^c) \cap \Gamma = \emptyset\,.$$

由于 u_j 在 $\mathcal{S}^*_\Gamma(X)$ 中收敛，集合

$$\bigcup \mathrm{supp}\mathcal{F}(\psi u_j) \cap V^c \tag{A.28}$$

是有界的。此外，根据引理 A.15，函数 $\mathcal{F}(\psi u_j)$ 在此集合上一致有界。因此

$$\lim_{j\to\infty} \int_{V^c} \mathcal{F}(\psi u_j)(\eta)\, I_\phi(\eta)\, d\eta = \int_{V^c} \mathcal{F}(\psi u)(\eta)\, I_\phi(\eta)\, d\eta\,. \tag{A.29}$$

由（A.27）和（A.29）可得

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{F}^n} \mathcal{F}(\psi u_j)(\eta)\, I_\phi(\eta)\, d\eta = \int_{\mathbb{F}^n} \mathcal{F}(\psi u)(\eta)\, I_\phi(\eta)\, d\eta\,. \tag{A.30}$$

因此，根据（A.24）和单位分解，序列 f^*u_j 收敛于 $\mathcal{S}^*(X)$ 中的一个极限，且该极限与所选序列无关。我们将此极限记为 $f^*u \in \mathcal{S}^*(X)$:

$$\lim_{j\to\infty} f^*u_j(\phi) = f^*u(\phi) \qquad (\phi \in \mathcal{S}(X))\,. \tag{A.31}$$

现在我们将证明 $\lim_{j\to\infty} f^*u_j = f^*u$ in $\mathcal{S}^*_\Gamma(X)$。沿用 (A.24) 与 (A.30) 之间引入的记号，其中 $\phi \in \mathcal{S}(X_0)$。将 ϕ 替换为 $\chi(-\xi\cdot x)\phi(x)$，并将 u 替换为 u_j，代入可得 (A.25)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\phi f^*u_j)(\xi) &= \int_X \psi(f(x))u_j(f(x))\chi(-\xi\cdot x)\phi(x)\,dx \\
&= \int_X \int_{\mathbb{F}^n} \mathcal{F}(\psi u_j)(\eta)\chi(f(x)\cdot\eta - x\cdot\xi))\,d\eta\,\phi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{F}^n} \mathcal{F}(\psi u_j)(\eta)\, I_\phi(\eta,\xi)\,d\eta\,, \\
I_\phi(\eta,\xi) &= \int_X \chi(f(x)\cdot\eta - x\cdot\xi))\phi(x)\,dx\,.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

设 $W \subseteq \mathbb{F}^m \setminus 0$ 是 $f'(x_0)^t\Gamma_{y_0} = (f^*\Gamma)_{x_0}$ 的一个开锥形邻域。我们不妨假设 V 和 X_0 的选取满足

$$f'(x)^t\eta \in W \qquad (x \in \mathsf{X}_0\,,\ \eta \in V)\,. \tag{A.33}$$

固定 $\eta \in V$ 和 $\xi \notin W$，考虑函数

$$f_{\eta,\xi} : X_0 \ni x \to f(x)\cdot\eta - x\cdot\xi \in \mathbb{F}\,.$$

则 $f_{\eta,\xi}$ 是一个解析函数，且 $f'_{\eta,\xi}(x) = f'(x)^t\eta - \xi$。由于 X_0 是紧的，且 (A.33) 蕴含

$$\delta_{\eta,\xi} = \min_{x\in X_0} |f'_{\eta,\xi}(x)| > 0\,.$$

因此 $f_{\eta,\xi}$ 满足引理 A.14 的条件。于是

$$\int_{X_0} \chi(\lambda(f(x)\cdot\eta - x\cdot\xi))\phi(x)\,dx = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{F}^\times\,,\ |\lambda| > \max\{q\delta_{\eta,\xi}^{-2}B_{\eta,\xi}, q^{m_0+1}, \delta_{\eta,\xi}^{-1}q^{m_0}\})\,,$$

其中，m_0 是使得 X_0 成为半径为 q^{-m_0} 的球的不交并的最小值，并且在每个球上 ϕ 都是常数。参数 $\delta_{\eta,\xi}$ 和 $B_{\eta,\xi}$ 连续依赖于 η 和 ξ。因此，若 $C = \max_{\eta\in V,\ \xi\notin W,\ |\eta|=1,\ |\xi|=1} \max\{q\delta_{\eta,\xi}^{-2}B_{\eta,\xi}, q^{m_0+1}, \delta_{\eta,\xi}^{-1}q^{m_0}\}$，则

$$\int_{X_0} \chi(\lambda(f(x)\cdot\eta - x\cdot\xi))\phi(x)\,dx = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{F}^\times\,,\ |\lambda| > C,\ \eta \in V,\ \xi \notin W,\ |\eta| = 1,\ |\xi| = 1)\,.$$

因此，

$$\mathrm{supp} I_\phi \cap (V \times W^c) \quad \text{is bounded for any } \phi \in \mathcal{S}(X_0)\,. \tag{A.34}$$

Let

$$I_{\phi,\eta}(\xi) = I_\phi(\eta,\xi)\,.$$

结合（A.34）和（A.28），我们得到

$$\left(\bigcup_j \operatorname{supp} \int_V \mathcal{F}(\psi u_j)(\eta) I_{\phi,\eta}\, d\eta\right) \cap W^c \quad \text{is bounded for any } \phi \in \mathcal{S}(X_0)\,. \tag{A.35}$$

我们如下考察积分 $I_\phi(\eta,\xi)$

$$I_\phi(\eta,\xi) = \int_X \chi(-x\cdot\xi)\big(\chi(f(x)\cdot\eta)\phi(x)\big)\, dx\,,$$

从而 $\chi(f(x)\cdot\eta)\phi(x)$ 是测试函数。由于对于紧集中的 η，函数 $\chi(f(x)\cdot\eta)\phi(x)$ 是一致局部常值的，引理 A.14 蕴含

$$\bigcup_{\eta \text{ in a comact set}} \operatorname{supp} I_{\phi,\eta}$$

是有界的。将其与 (A.28) 结合，我们看到

$$\bigcup_j \operatorname{supp} \int_{V^c} \mathcal{F}(\psi u_j)(\eta) I_{\phi,\eta}\, d\eta \quad \text{is bounded for any } \phi \in \mathcal{S}(X_0)\,. \tag{A.36}$$

陈述 (A.35) 和 (A.36) 蕴含

$$\left(\bigcup_j \operatorname{supp} \int_{F^n} \mathcal{F}(\psi u_j)(\eta) I_{\phi,\eta}\, d\eta\right) \cap W^c \quad \text{is bounded for any } \phi \in \mathcal{S}(X_0)\,.$$

但从 (A.32) 可知，这意味着

$$\left(\bigcup_j \operatorname{supp} \mathcal{F}(\phi f^* u_j)\right) \cap W^c \quad \text{is bounded for any } \phi \in \mathcal{S}(X_0)\,. \tag{A.37}$$

由单位分解可知，f^*u_j在 $\mathcal{S}_{f^*\Gamma}(X)$ 中收敛到 f^*u。因此映射

$$f^* : \mathcal{S}_\Gamma(Y) \to \mathcal{S}_{f^*\Gamma}(X)$$

是良定义且连续的。 □

该定理表明，对于解析流形 X 上的任意分布 $u \in C_c^\infty(X)^*$，都可以通过使用局部坐标图来定义波前集 $\mathrm{WF}(u) \subseteq T^*X \setminus 0$。参见[H¨or83，第 265] 页，以及 [Hei85，第 290] 页。特别地，定理 A.13 可改写为

定理 A.20. 设 X 是解析流形，$Y \subseteq X$ 是一个子流形，并配备测度 μ，其支集为 Y，且在 Y 的任意坐标邻域中，该测度等于标准哈尔测度乘以一个非负函数。我们将 μ 视为 X 上的一个分布。[3]那么

$$\mathrm{WF}(\mu) = T^*_{\operatorname{supp}\mu} X\,,$$

其中右侧表示 X 中 Y 的丛余法丛，其支集在 $\operatorname{supp}\mu$上。

[3]More precisely, we define $\mu(\psi) = \mu(\psi|_Y)$ for $\psi \in C_c^\infty(X)$.

这是 [H¨或83]中的例 8.2.5。

References

[AP14] A.-M. Aubert 和 T. Przebinda。《魏尔表示》的逆向工程方法。《中欧数学杂志》，12:1500–1585，2014。[Ber84] Joseph N. Bernstein。GL(N) 上的 P-不变分布与 GL(N) 酉表示的分类（非阿基米德情形）。载于《李群表示》，第二卷（马里兰州科利奇帕克，1982/1983），《数学讲义》第1041卷，第50–102页。Springer，柏林，1984。[BP11] F. Bernon 和 T. Przebinda。柯西–Harish-Chandra 积分的规范化。《李理论杂志》，11（3）：615–702，2011。[BP14] F. Bernon 和 T. Przebinda。柯西–Harish-Chandra 积分与不变特征分布。《国际数学研究通知》，14：3818–3862，2014。[CHLR18] Raf Cluckers、Immanuel Halupczok、Francois Loeser 和 Michel Raibaut。一致非阿基米德背景下的分布与波前集。《伦敦数学学会汇刊》，5：97–131，2018。[CM93] D. Collingwood 和 W. McGovern。《复半单李代数中的幂零轨道》。Reinhold, Van Nostrand，纽约，1993。[DPS99] S. DeBacker 和 Jr. P. Sally。约化 p-进群上的容许不变分布。1999。[GGPS90] I. M. Gelfand、M. I. Graev 和 I. I. Pyatetskii-Shapiro。《表示论与自守函数》，《广义函数》第6卷。Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1990。K. A. Hirsch 从俄文译出；重印1969年版。[HC70] Harish-Chandra。约化 p-进群上的调和分析。《数学讲义》第162卷。Springer-Verlag，柏林–纽约，1970。G. van Dijk 笔记。[Hei85] Heifetz D. B. p-进振荡积分与波前集。《太平洋数学杂志》，116：285–305，1985。[H¨or83] L. H¨ormander。《线性偏微分算子分析 I》。Springer Verlag，1983。[How79] R. Howe。θ-级数与不变理论。载于《自守形式、表示与 L-函数》（俄勒冈州立大学科瓦利斯分校，1977年纯粹数学专题讨论会论文集），第一部分，《纯粹数学专题讨论会论文集》第XXXIII卷，第275–285页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1979。[How81] R. Howe。李群表示的波前集。载于《自守形式、表示论与算术》，第117–140页。塔塔基础研究所，孟买，1981。[Jac62] N. Jacobson。《李代数》。Dover Publications, Inc.，纽约，1962。[Jac80] N. Jacobson。《基础代数 II》。W. H. Freeman and Company，旧金山，1980。[Kim99] Ju-Lee Kim。 p -进域上经典群的 Hecke 代数与超尖点表示。《美国数学杂志》，121：967–1029，1999。[Kra66] Marc Krasner。一个局部域的给定次数扩张的数目。载于《代数与数论中的几何趋势》，第143–169页。法国国家科学研究中心出版社（CNRS），巴黎，1966。[Lan02] Serge Lang。《代数》，《数学研究生教材》第211卷。Springer-Verlag，纽约，第三版，2002。[Lew82] D. W. Lewis。除代数上厄米型的等距分类。《线性代数及其应用》，43：245–272，1982。[Mar91] G. A. Margulis。《半单李群的离散子群》，《数学及其交叉领域成果丛书》（第三辑）第17卷。Springer-Verlag，柏林，1991。

[Mer21] Allan Merino。通过柯西–Harish-Chandra 积分，在等秩情形下酉群离散系列表示的特征转移。预印本，2021。[Mil20] James S. Milne。《代数数论》（v3.08），2020。可见 www.jmilne.org/math/。[Mor88] Lawrence Morris。幺幂元素的有理共轭类与极大环面，以及若干 Shalika 公理。《伦敦数学学会杂志》（第二辑），38(1)：112–124，1988。[Mor91] L. Morris。辛群的一些温和分歧超尖点表示。《伦敦数学学会会刊》，63：519–551，1991。[Pie82] Richard S. Pierce。《结合代数》，《现代科学史研究》第9卷。Springer-Verlag，纽约–柏林，1982。[Prz96] T. Przebinda。无穷小特征的对偶对应。《数学集刊》，70：93–102，1996。[Prz00] T. Przebinda。实约化对偶对的一个柯西–Harish-Chandra 积分。《数学发明》，141(2)：299–363，2000。[Prz18] T. Przebinda。稳定范围内特征与波前集的对应。《泛函分析杂志》，274：1284–1305，2018。[Sch85] W. Scharlau。《二次型与厄米型》，第270卷。Springer-Verlag《数学科学基础丛书》，1985。[Ser78] Jean-Pierre Serre。关于一个局部域的给定次数全分歧扩张的“质量公式”。《巴黎科学院报告》，A-B辑，286(22)：A1031–A1036，1978。[Ser06] J.P. Serre。《李代数与李群》。Springer Verlag，2006。[Tsu61] Takashi Tsukamoto。四元数反厄米型的局部理论。《日本数学会杂志》，13：387–400，1961。[Var77] V.S. Varadarajan。《实约化群上的调和分析》。《数学讲义》第576卷。Springer-Verlag，1977。[Wei64] André Weil。论某些酉算子群。《数学学报》，111：143–211，1964。[Wei73] A. Weil。《基础数论》。Springer-Verlag，1973。《数学经典丛书》。

National University of Singapore, Science Drive 2, Singapore 117543电子邮箱地址：matlhy@nus.edu.sg

Department of Mathematics, University of Oklahoma, Norman, OK 73019, USA电子邮箱地址：tprzebinda@ou.edu