arXiv:2303.02224v1 [math.CO] 3 Mar 2023

三角对角调和猜想。

F. BERGERON

摘要。 本文的主要目的是提出一些猜想，将多变量对角调和模的 Frobenius 性质推广到“三角分拆”的情形（按 [9] 的术语，即“位于任意直线之下”的分拆）。

目录

1. 引言 1
2. 关于 $\mathcal{A}_\tau$ 和 $\mathcal{E}_\tau$ 的性质 4
3. 观察到 ∇ 钩形指标 Schur Negut 公式 7
4. 通用公式 10
5. 愿望清单 12
6. 参考文献 12
16
17

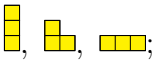
1. 引言

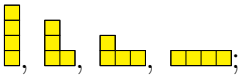
本文描述并讨论了三角分拆及其性质 [7]。大小不超过 5 的三角分拆（以及相应的法式记法 Ferrers 图）如下：

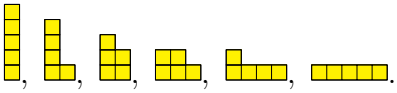
0; $\emptyset$

1; ;

$11, 2$; ;

$111, 21, 3$; ;

$1111, 211, 31, 4$; ;

$11111,\ 2111,\ 221,\ 32,\ 41,\ 5$; .

日期：2023年3月7日。此项工作得到加拿大自然科学与工程研究委员会的资助。

Cl经典情形包括 **阶梯** 形状 $\delta(n) = (n-1,\ n-2,\ \ldots\ldots,\ 2,\ 1)$ ：

$$\delta(1) = \emptyset,\quad \delta(2) = \ydiagram{1},\quad \delta(3) = \ydiagram{2,1},\quad \delta(4) = \ydiagram{3,2,1},\quad \delta(5) = \ydiagram{4,3,2,1},\quad \cdots$$

以及一般阶梯形（$(n-1)k, (n-2)k, \ldots, 2k, k$），及其共轭分拆。事实上，三角分拆的集合在共轭运算下封闭。我们分别用 $\boldsymbol{\ell}(\tau)$ 和 $\boldsymbol{m}(\tau)$ 表示 τ 的长度（非零分拆部分的个数）以及 τ 中某个分拆部分的最大重数。因此，对于长度为 6 的分拆 $\tau = 222211$，$\boldsymbol{m}(\tau)$ 的值为 4。注意，长度为 2 的分拆 $\tau = ab$ 是三角分拆，当且仅当 $2b \leq a+1$。

对于给定的三角分拆 τ，以及任意满足 n 大于或等于 $\boldsymbol{\ell}(\tau)$ $+\boldsymbol{m}(\tau)$ 的正整数，我们考虑如下表达式：

$$\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}(\boldsymbol{q};\boldsymbol{x}) = \sum_{\mu\vdash n}\sum_{\lambda} a_{\lambda\mu}\, s_{\lambda}(\boldsymbol{q}) s_{\mu}(\boldsymbol{x}), \tag{1.1}$$

其中系数 $a_{\lambda\mu}$ 为正整数，$\boldsymbol{q}$ 表示由 k 个变量（q_1、q_2、…、q_k）组成的“字母表”，而 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$。$\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}$旨在作为双变量情形 $\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}(q,t;\boldsymbol{x})$（因此 $q_1 = q$ 和 $q_2 = t$）的多变量扩展，见 [9]。对于给定的 τ，这些双变量实例可以通过 Negut 在 Schimann-Burban椭圆霍尔代数中的算子计算，也可以利用组合公式计算；该公式以包含在 τ 中的分拆为基础，并涉及“面积”和“dinv”参数以及 LLT 多项式。详情请参见同上文献；关于整个主题的更多背景，也可参见 [1, 10, 11, 17] 。$\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}(q,t;\boldsymbol{x})$ 关于 q 和 t 是对称的，并且作为 q 、t 以及 $\boldsymbol{x}$ 变量的函数，均为“Schur 正”。因此，方程1.1是有意义的。我们回顾一下

$$\nabla(\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}(q,t;\boldsymbol{x})) = \mathcal{E}_{\tau+\delta(n)}^{(n)}(q,t;\boldsymbol{x}), \tag{1.2}$$

其中分拆加法是逐部分进行的。这里，∇ 是 Macdonald特征算子，其特征函数 $H_{\mu}(q,t;\boldsymbol{x})$ 对应的特征值为 $\widetilde{\prod}_{(i,j)\in\mu} q^i t^j$。这些是修正 Macdonald 多项式（见 [2]）。下文将介绍 $\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}$与更一般的 Macdonald特征算子 Δ_f（见 [5, 14]）之间的关系，其中 Δ_f 的特征值为 $f(\sum_{(i,j)\in\mu} q^i t^j)$。用复合记号表示，这意味着将单项式 $q^i t^j$代入对称函数 $f(z_1, z_2, \ldots, z_r)$ 中，以替代其中的变量，并假设 r等于 μ的格子数 (i,j) 。

由于在许多情况下并未实际用到变量字母表 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{x}$，因此将 $\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}(\boldsymbol{q};\boldsymbol{x})$ 表示为抽象的张量[1] 表达式会很方便，在这种表达式中，变量会被省略（包括记号上的变量）：

$$\mathcal{E}_{\tau}^{(n)} := \sum_{\mu\vdash n}\sum_{\lambda} a_{\lambda\mu}\, s_{\lambda} \otimes s_{\mu}. \tag{1.3}$$

对于此类表达式，我们考虑 Hall 内积（对应于 $\boldsymbol{x}$-变量部分），使得 $\langle f\otimes s_{\mu}、\ s_{\mu}\rangle = f$ 和 $\langle f\otimes s_{\mu}、\ s_{\nu}\rangle = 0$（如果 $\nu\neq\mu$）。特别是，$\langle \mathcal{E}_{\tau}^{(n)}、\ s_{\mu}\rangle$

[1]在此，我们利用张量的非交换性及其双线性。

提取 $\mathcal{E}_\tau^{(n)}$ 中 s_μ 的系数：

$$\langle \mathcal{E}_\tau^{(n)}, s_\mu \rangle = \sum_\lambda a_{\lambda\mu}\, s_\lambda. \tag{1.4}$$

正如我们将看到的，$\mathcal{E}_\tau^{(n)}$的某些系数可能依赖于 n，但当 n足够大时，它们都会“稳定下来”。为了更好地表达这一点，我们考虑

$$\overline{\mathcal{E}}_\tau^{(n)} := \sum_{\mu\vdash n}\sum_\lambda a_{\lambda\mu}\, s_\lambda \otimes s_{\overline{\mu}},$$

其中 $\overline{\mu}$ 是从 μ 中去掉第一列后得到的分拆。当然，我们可以给所有涉及的分拆都添上一列，从而还原出 $\mathcal{E}_\tau^{(n)}$，使它们重新成为 n的分拆。当 n 大于某个值 n_0时，存在一个稳定的 **稳定值** $\overline{\mathcal{E}}_\tau$ 等于$\overline{\mathcal{E}}_\tau^{(n)}$ 。对于特殊情形 $\mu = 1^n$，我们令 $\mathcal{A}_\tau^{(n)} := \langle \mathcal{E}_\tau^{(n)},\ s_{1^n}\rangle$。事实上，$\mathcal{A}_\tau^{(n)}$与 n无关，因此我们将其简记为 $\mathcal{A}_\tau$。

在以下内容中，将线性算子 $e_k^\perp$作用于张量表达式时，它作用于张量的第一分量，也就是说

$$e_k^\perp(f\otimes g) := (e_k^\perp f)\otimes g.$$

在对称函数上，$e_k^\perp$关于 Hall 内积与乘以初等对称函数e_k 互为对偶。特别地，它作用于 Schur函数 s_μ 的结果为：

$$e_k^\perp s_\mu = \sum_{\nu\subset_k\mu} s_\nu,$$

其中的求和遍历所有可通过从 μ 中移除 k 个格子而得到的分拆 ν，且所移除的格子中任意两个都不在同一行。

考虑 **长度** $\boldsymbol{\ell}(f)$ 对于对称函数 f 而言是有用的：它是分拆 λ 中所出现的分拆部分的最大数量，其中 $\langle f,\ s_\lambda\rangle \neq 0$。公式如下：

$$\boldsymbol{\ell}(f) := \max_{\langle f, s_\lambda\rangle\neq 0} \boldsymbol{\ell}(\lambda).$$

我们将其推广到张量，令 $\boldsymbol{\ell}(f\otimes g) := \boldsymbol{\ell}(f)$。由于 Schur函数在其变量数小于索引分拆的长度时恒为零；固定 k 后，变量数 q_i 对应于对左侧分量长度的限制。因此我们写作

$$\mathcal{E}_\tau^{(n)}\big|_{\le j} := \sum_{\mu\vdash n}\Big(\sum_{\boldsymbol{\ell}(\lambda)\le j} a_{\lambda\mu}\, s_\lambda\Big)\otimes s_\mu, \tag{1.5}$$

对于 **限制** $\mathcal{E}_\tau^{(n)}$在长度至多为 j的项上的限制，换言之，即所有满足$\boldsymbol{\ell}(s_\lambda\otimes s_\mu)\le j$的项。特别地，$\mathcal{E}_\tau^{(n)}\big|_{\le 2}$双射地编码了 $\mathcal{E}_\tau^{(n)}(q,\ t;\ \boldsymbol{x})$。可以证明，$\mathcal{E}_\tau^{(n)}\big|_{\le 1}$ 完全由一个 Whittaker q多项式确定（相差一个 [2] 次幂）。事实上，有如下结论。

[2]Whittaker 多项式 $W_\mu(q;\boldsymbol{x})$ 作为修正 Macdonald 多项式 $\widetilde{H}_\mu(q,t;\ \boldsymbol{x})$ 的最高 t 次分量出现。

命题 1.1. 对于任意三角分拆 τ 及 $n \geq \boldsymbol{\ell}(\tau) + \boldsymbol{m}(\tau)$ ，

$$\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}(q;\boldsymbol{x}) = q^{|\tau|-\eta(\mu)} W_{\mu}(q;\boldsymbol{x}), \tag{1.6}$$

其中 $\mu = \mu(\tau,\ n)$ 是分拆 $(n-\boldsymbol{\ell}(\tau)\ \rho_1,\ \ldots\ldots,\ \rho_k)$ 的共轭分拆，其中 ρ_i 是 τ 中出现的分拆部分的重数（按降序重新排列）。此外， $\eta(\mu)$ 表示 $\sum_{(i,\ j)\in\mu} j$。

为了解其如何描述 $\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}$ 的长度为一的分量，考虑 $\tau = 321$ 和 $n = 6$ 的情形，此时我们得到

$$\begin{aligned} W_{41}(q,\boldsymbol{x}) &= s_{411} + (q+q^2)s_{321} + q^3 s_{222} + (q+q^2+q^3)s_{3111} \\ &\quad + (q^2+q^3+q^4)s_{2211} + (q^3+q^4+q^5)s_{21111} + q^6 s_{111111}, \qquad \text{and} \\ \mathcal{E}_{321}^{(6)}\big|_{\leq 1} &= 1\otimes s_{411} + (s_1+s_2)\otimes s_{321} + s_3\otimes s_{222} + (s_1+s_2+s_3)\otimes s_{3111} \\ &\quad + (s_2+s_3+s_4)\otimes s_{2211} + (s_3+s_4+s_5)\otimes s_{21111} + s_6\otimes s_{111111}. \end{aligned}$$

鉴于限制为“两个参数”所具有的特殊作用，我们设：

$$\varepsilon_{\tau}^{(n)} := \mathcal{E}_{\tau}^{(n)}\big|_{\leq 2}, \tag{1.7}$$

回顾一下， $\varepsilon_{\tau}^{(n)}$可以通过组合方法或利用对称函数上的算子显式计算，如 [9] 中所述。若将所有 $\nabla(f)$ 写成张量形式，公式 1.2 的关键作用就更加明显了。在所有情况下，在 $t=0$ 处的特化均由 命题 1.1给出。我们的主要目标是描述 $\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}$的“良好”多值扩张 $\varepsilon_{\tau}^{(n)}$。关于“良好”的确切含义将在下文讨论。它依赖于对 $\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}$所期望的一组性质。

2. 的一些显式值： $\mathcal{A}_{\tau}$ 和 $\mathcal{E}_{\tau}$

在后文中，我们假设以下结论成立。

猜想1 （系数—长度）。对于所有三角分拆 τ，我们有

$$\boldsymbol{\ell}(\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}) \leq \min(\boldsymbol{\ell}(\tau), \boldsymbol{\ell}(\tau')), \tag{2.1}$$

并且 $\mathcal{A}_{\tau} = \langle \mathcal{E}_{\tau}^{(n)},\ e_n \rangle$ 不依赖于 n。

由此可知，当 $\min(\boldsymbol{\ell}(\tau)\ \boldsymbol{\ell}(\tau')) \leq 2$ 时， $\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}$ 和 $\varepsilon_{\tau}^{(n)}$ 必须相同。对于所有 n，分拆部分至多为一个，或所有分拆部分均为 1 的情形，都已由稳定公式涵盖

$$\mathcal{E}_0^{(n)} = 1\otimes s_{1^n}, \qquad \overline{\mathcal{E}}_0 = 1\otimes 1; \tag{2.2}$$

$$\mathcal{E}_d^{(n)} = s_{d-1}\otimes s_{21^{n-2}} + s_d\otimes s_{1^n}, \qquad \overline{\mathcal{E}}_d = s_{d-1}\otimes s_1 + s_d\otimes 1; \tag{2.3}$$

and

$$\mathcal{E}^{(n)}_{1^d} = \sum_{k=0}^{d} s_{d-k} \otimes s_{2^k 1^{n-2k}}, \qquad \overline{\mathcal{E}}_{1^d} = \sum_{k=0}^{d} s_{d-k} \otimes s_{1^k}. \tag{2.4}$$

在每种情况下，这些公式对任意 $n \geq \boldsymbol{\ell}(\tau) + \boldsymbol{m}(\tau)$ 都成立。因此，它们无需进一步限制，具有稳定性。由此，我们可以分别按上述格式 $\overline{\mathcal{E}}_\tau$ 呈现这些公式，而不会丢失任何信息。

对于两行三角分拆，当 $n = \boldsymbol{\ell}(\tau) + \boldsymbol{m}(\tau)$ 时，我们有以下显式值。注意，这迫使 $n = 3$。

命题 2.1. 对于任意两行三角分拆 $\tau = (a,\ b)$，因此对于 $2b \leq a+1$，我们有

$$\mathcal{A}_\tau = \sum_{\substack{0 \leq d \leq b \\ 3d \leq a+b}} s_{(a+b-2d,d)}. \tag{2.5}$$

此外，

$$\mathcal{E}^{(3)}_\tau = (e_2^\perp \mathcal{A}_\tau) \otimes s_3 + (e_1^\perp \mathcal{A}_\tau) \otimes s_{21} + \mathcal{A}_\tau \otimes s_{111}. \tag{2.6}$$

此外 $e_2^\perp \mathcal{A}_{\tau+\delta(3)} = \mathcal{A}_\tau$，这意味着 $e_2^\perp \mathcal{E}^{(3)}_{\tau+\delta(3)} = \mathcal{E}^{(3)}_\tau$。

证明。 最后一个推论直接由 公式 2.6 得出。确实，假设 $e_2^\perp \mathcal{A}_{\tau+\delta(3)} = \mathcal{A}_\tau$，并对两边应用 $e_2^\perp$ $\tau + \delta(3)$ 这一情形的 公式 2.6。于是，我们得到

$$\begin{aligned} e_2^\perp \mathcal{E}^{(3)}_{\tau+\delta(3)} &= e_2^\perp (e_2^\perp \mathcal{A}_{\tau+\delta(3)}) \otimes s_3 + e_2^\perp (e_1^\perp \mathcal{A}_{\tau+\delta(3)}) \otimes s_{21} + e_2^\perp \mathcal{A}_{\tau+\delta(3)} \otimes s_{111} \\ &= e_2^\perp (\mathcal{A}_\tau) \otimes s_3 + e_1^\perp (\mathcal{A}_\tau) \otimes s_{21} + \mathcal{A}_\tau \otimes s_{111} = \mathcal{E}^{(3)}_\tau, \end{aligned}$$

因为算子 $e_2^\perp$ 和 $e_1^\perp$ 可交换。回想一下，

$$e_2^\perp s_{(c,d)} = \begin{cases} s_{(c-1,d-1)} & \text{if } d > 0, \\ 0 & \text{if } d = 0. \end{cases}$$

因此，假设 公式 2.5 满足 $\tau + \delta(3) = (a+2, b+1)$，我们很容易计算得出

$$e_2^\perp \mathcal{A}_{\tau+\delta(3)} = \sum_{\substack{1 \leq d \leq b+1 \\ 3d \leq a+b+3}} e_2^\perp s_{(a+b+3-2d,d)} = \sum_{\substack{1 \leq d \leq b+1 \\ 3d \leq a+b+3}} s_{(a+b+2-2d,d-1)} = \sum_{\substack{0 \leq d \leq b \\ 3d \leq a+b}} s_{(a+b-2d,d)} = \mathcal{A}_\tau,$$

在中间的求和中用 d 替换 $d-1$。

我们递归地证明 公式 2.6 和 公式 2.5 均成立。注意，在张量积项中，我们有

$$\nabla(s_3) = s_{22} \otimes s_{21} + s_{32} \otimes s_{111}, \tag{2.7}$$

$$\nabla(s_{21}) = -(s_{21} \otimes s_{21} + s_{31} \otimes s_{111}), \tag{2.8}$$

$$\nabla(s_{111}) = 1 \otimes s_3 + (s_1 + s_2) \otimes s_{21} + (s_3 + s_{11}) \otimes s_{111}. \tag{2.9}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(3)}_{\tau+\delta(3)} &= \nabla(\mathcal{E}^{(3)}_{\tau}) \\ &= \nabla((e_2^{\perp}\mathcal{A}_\tau)\otimes s_3 + (e_1^{\perp}\mathcal{A}_\tau)\otimes s_{21} + \mathcal{A}_\tau \otimes s_{111}) \\ &= \mathcal{A}_\tau \otimes s_3 \\ &\quad + (s_{22}\cdot(e_2^{\perp}\mathcal{A}_\tau) - s_{21}\cdot(e_1^{\perp}\mathcal{A}_\tau) + (s_1+s_2)\cdot\mathcal{A}_\tau)\otimes s_{21} \\ &\quad + (s_{32}\cdot(e_2^{\perp}\mathcal{A}_\tau) - s_{31}\cdot(e_1^{\perp}\mathcal{A}_\tau) + (s_3+s_{11})\cdot\mathcal{A}_\tau)\otimes s_{111}\end{aligned}$$

其中所有计算都限制在长度为二的情形。我们已经验证 $\mathcal{A}_\tau = e_2^{\perp}\mathcal{A}_{\tau+\delta(3)}$ 与公式 2.5相容。下面来看 在(3)中的系数是否与上述公式右侧一致，即:

$$\mathcal{A}_{\tau+\delta(3)} = s_{32}\cdot(e_2^{\perp}\mathcal{A}_\tau) - s_{31}\cdot(e_1^{\perp}\mathcal{A}_\tau) + (s_3+s_{11})\cdot\mathcal{A}_\tau.$$

为此，考虑$s_{(a+b+3-2d,d)}$ 在以下各式右侧出现的任意一项：公式 2.5对于 $\tau=(a+2,b+1)$，因此有 $0\le d\le b+1$ 且 $3d\le a+b+3$。我们将标量积分解为:

$$\langle s_{(a+b+3-2d,d)}, s_{32}\cdot(e_2^{\perp}\mathcal{A}_\tau) - s_{31}\cdot(e_1^{\perp}\mathcal{A}_\tau) + (s_3+s_{11})\cdot\mathcal{A}_\tau\rangle,$$

将其分为三个部分，并利用乘以 g 与 $g^{\perp}$ 的对偶性，得到以下计算结果

$$\begin{aligned}\langle s_{(a+b+3-2d,d)}, s_{32}\cdot(e_2^{\perp}\mathcal{A}_\tau)\rangle &= \langle e_2\, s_{32}^{\perp}\, s_{(a+b+3-2d,d)}, \mathcal{A}_\tau\rangle \\ &= \langle s_{(a+b+1-2d,d-1)}, \mathcal{A}_\tau\rangle, \\ \langle s_{(a+b+3-2d,d)}, -s_{31}\cdot(e_1^{\perp}\mathcal{A}_\tau)\rangle &= -\langle e_1\, s_{31}^{\perp}\, s_{(a+b+3-2d,d)}, \mathcal{A}_\tau\rangle \\ &= -\langle s_{(a+b+1-2d,d-1)} + s_{(a+b-2d,d)}, \mathcal{A}_\tau\rangle, \\ \langle s_{(a+b+3-2d,d)}, (s_3+s_{11})\cdot\mathcal{A}_\tau\rangle &= \langle (s_3+s_{11})^{\perp}\, s_{(a+b+3-2d,d)}, \mathcal{A}_\tau\rangle \\ &= \langle (s_3)^{\perp}\, s_{(a+b+3-2d,d)} + s_{(a+b+2(d-1),d-1)}, \mathcal{A}_\tau\rangle.\end{aligned}$$

为了计算这些标量积，现在根据递推假设， $\mathcal{A}_\tau$ 由公式 2.5给出，因此其中只包含形如 $s_{(a+b-2d',d')}$ 的项，这将计算简化为

$$\langle s_{(a+b+3-2d,d)}, \mathcal{A}_{\tau+\delta(3)}\rangle = \langle s_{(a+b-2(d-1),d-1)}, \mathcal{A}_{\tau+\delta(3)}\rangle = 1.$$

另一项对应于一个完全类似的验证，即 $e_1^{\perp}\mathcal{A}_{\tau+\delta(3)} = (s_{22}\cdot(e_2^{\perp}\mathcal{A}_\tau) - s_{21}\cdot(e_1^{\perp}\mathcal{A}_\tau) + (s_1+s_2)\cdot\mathcal{A}_\tau)$。□

下 列出的显式值[3] 对于 $\mathcal{E}^{(n)}_\tau = \varepsilon^{(n)}_\tau$，以及对于 $n\ge \boldsymbol{\ell}(\tau)+\boldsymbol{m}(\tau)$，说明了 t

$$\overline{\mathcal{E}}^{(n+1)}_\tau - \overline{\mathcal{E}}^{(n)}_\tau,$$

是 Schur 正[4]。显然，稳定性意味着当 n 足够大时，这个差值会消失。例如，对于 $b=1$ 公式 2.6 变为稳定:

$$\overline{\mathcal{E}}_{(a,1)} = \overline{\mathcal{E}}^{(3)}_{(a,1)} + s_{a-1}\otimes s_{11}, \qquad n\ge 4. \tag{2.10}$$

进一步 达到稳定值前的连续增量示例如下:

[3]部分计算借助了作者提供的 Sagemath 代码，见 [9]。[4]对于 $s_\lambda\otimes s_\mu$ 项，其系数为正整数。

$$\overline{\mathcal{E}}^{(4)}_{211} = (s_4 + s_{21}) \otimes 1 + (s_2 + s_3 + s_{11}) \otimes s_1 + s_1 \otimes s_2 + s_2 \otimes s_{11},$$
$$\overline{\mathcal{E}}^{(5)}_{211} = \overline{\mathcal{E}}^{(4)}_{211} + s_1 \otimes s_{11} + 1 \otimes s_{21}, \overline{\mathcal{E}}_{211} = \overline{\mathcal{E}}^{(5)}_{211} + s_1 \otimes s_{111};$$

$$\overline{\mathcal{E}}^{(3)}_{32} = (s_5 + s_{31}) \otimes 1 + (s_3 + s_4 + s_{21}) \otimes s_1 + s_2 \otimes s_2$$
$$\overline{\mathcal{E}}_{32} = \overline{\mathcal{E}}^{(3)}_{32} + (s_3 + s_{11}) \otimes s_{11};$$

$$\overline{\mathcal{E}}^{(4)}_{221} = (s_5 + s_{31}) \otimes 1 + (s_3 + s_4 + s_{21}) \otimes s_1 + s_2 \otimes s_2 + (s_3 + s_{11}) \otimes s_{11},$$
$$\overline{\mathcal{E}}^{(5)}_{221} = \overline{\mathcal{E}}^{(4)}_{221} + s_2 \otimes s_{11} + s_1 \otimes s_{21},$$
$$\overline{\mathcal{E}}_{221} = \overline{\mathcal{E}}^{(5)}_{221} + s_2 \otimes s_{111};$$

$$\overline{\mathcal{E}}^{(6)}_{2111} = (s_5 + s_{31}) \otimes 1 + (s_3 + s_4 + s_{21}) \otimes s_1 + s_2 \otimes s_2 + (s_2 + s_3 + s_{11}) \otimes s_{11},$$
$$+ s_1 \otimes s_{21} + s_2 \otimes s_{111},$$
$$\overline{\mathcal{E}}^{(7)}_{2111} = \overline{\mathcal{E}}^{(6)}_{2111} + 1 \otimes s_{211} + s_2 \otimes s_{111}$$
$$\overline{\mathcal{E}}_{2111} = \overline{\mathcal{E}}^{(7)}_{2111} + s_1 \otimes s_{1111}.$$

3. 观察到的性质

观察到的性质包括以下内容。首先，回顾一下，$\mathcal{A}_\tau$ 与n 无关（假设其至少大于 $\ell(\tau) + 1$）。

性质 3.1 (共轭)。 对于任意 τ 和 n，$\mathcal{E}^{(n)}_\tau$和 $\mathcal{E}^{(n)}_{\tau'}$ 的相应交错分量相等。也就是说，$\mathcal{A}_\tau = \mathcal{A}_{\tau'}$。

$\mathcal{A}_\tau$ 的较小值如下（对于主导三角分拆）。

$\mathcal{A}_0 = 1,$	$\mathcal{A}_1 = s_1,$	$\mathcal{A}_2 = s_2,$	$\mathcal{A}_3 = s_3,$	.....
$\mathcal{A}_{21} = s_3 + s_{11},$	$\mathcal{A}_{31} = s_4 + s_{21},$	$\mathcal{A}_{41} = s_5 + s_{31},$	$\mathcal{A}_{51} = s_6 + s_{41},$	...
$\mathcal{A}_{32} = s_5 + s_{31},$	$\mathcal{A}_{42} = s_6 + s_{41} + s_{22},$	$\mathcal{A}_{52} = s_7 + s_{51} + s_{32},$	$\mathcal{A}_{62} = s_8 + s_{61} + s_{42},$	...

$$\mathcal{A}_{53}=s_{8}+s_{61}+s_{42},\qquad \mathcal{A}_{63}=s_{9}+s_{71}+s_{52}+s_{33},\qquad \mathcal{A}_{73}=s_{10.}+s_{81}+s_{62}+s_{43},$$
$$\mathcal{A}_{83}=s_{11.}+s_{72}+s_{53}+s_{91},\qquad \mathcal{A}_{93}=s_{12.}+s_{82}+s_{63}+s_{10.1},\quad \cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{321}&=s_{6}+s_{31}+s_{41}+s_{111},\\
\mathcal{A}_{421}&=s_{7}+s_{32}+s_{41}+s_{51}+s_{211},\\
\mathcal{A}_{431}&=s_{8}+s_{42}+s_{51}+s_{61}+s_{311},\\
\mathcal{A}_{531}&=s_{9}+s_{71}+s_{61}+s_{52}+s_{42}+s_{411}+s_{221},\\
\mathcal{A}_{631}&=s_{10.}+s_{81}+s_{62}+s_{43}+s_{52}+s_{71}+s_{511}+s_{321};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{432}=s_{9}+s_{33}+s_{52}+s_{61}+s_{71}+s_{411},\mathcal{A}_{532}=s_{10.}+s_{81}+s_{62}+s_{43}+s_{52}+s_{71}+s_{511}+s_{321},\\
&\mathcal{A}_{641}=s_{11.}+s_{91}+s_{72}+s_{53}+s_{62}+s_{81}+s_{611}+s_{421},\\
&\mathcal{A}_{741}=s_{12.}+s_{10.1}+s_{72}+s_{91}+s_{82}+s_{63}+s_{53}+s_{331}+s_{521}+s_{711},\\
&\mathcal{A}_{841}=s_{13.}+s_{92}+s_{73}+s_{54}+s_{63}+s_{10.1}+s_{11.1}+s_{82}+s_{431}+s_{621}+s_{811},\\
&\mathcal{A}_{542}=s_{11.}+s_{91}+s_{72}+s_{53}+s_{62}+s_{81}+s_{611}+s_{421},\\
&\mathcal{A}_{642}=s_{12.}+s_{10.1}+s_{91}+s_{82}+s_{72}+s_{63}+s_{62}+s_{44}+s_{222}+s_{421}+s_{521}+s_{711},\\
&\mathcal{A}_{742}=s_{13.}+s_{92}+s_{10.1}+s_{73}+s_{82}+s_{54}+s_{63}+s_{72}+s_{11.1}+s_{322}+s_{431}+s_{521}+s_{621}+s_{811};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{4321}&=s_{10.}+s_{42}+s_{43}+s_{61}+s_{62}+s_{71}+s_{81}+s_{311}+s_{411}+s_{511}+s_{1111},\\
\mathcal{A}_{5321}&=s_{11.}+s_{43}+s_{52}+s_{53}+s_{62}+s_{71}+s_{72}+s_{81}+s_{91}\\
&+s_{321}+s_{411}+s_{421}+s_{511}+s_{611}+s_{2111},\\
\mathcal{A}_{5421}&=s_{12.}+s_{44}+s_{53}+s_{62}+s_{63}+s_{72}+s_{81}+s_{82}+s_{91}+s_{10.1}\\
&+s_{331}+s_{421}+s_{511}+s_{521}+s_{611}+s_{711}+s_{3111},\\
\mathcal{A}_{5431}&=s_{13.}+s_{54}+s_{63}+s_{72}+s_{73}+s_{82}+s_{91}+s_{92}+s_{10.1}+s_{11.1}\\
&+s_{431}+s_{521}+s_{611}+s_{621}+s_{711}+s_{811}+s_{4111},\\
\mathcal{A}_{6421}&=s_{13.}+s_{53}+s_{54}+s_{63}+2s_{72}+s_{73}+s_{82}+s_{91}+s_{92}+s_{10.1}+s_{11.1}\\
&+s_{421}+s_{431}+2s_{521}+s_{611}+s_{621}+s_{711}+s_{811}+s_{2211}+s_{4111}.
\end{aligned}$$

为了陈述下一个观察结果，我们使用**弗罗贝尼乌斯记号**表示钩形分拆，记$(a\,|\,\ell)$为分拆$(a+1,\ 1^{\ell})$（见图1）。换句话说，a是该钩形的**钩臂**，而ℓ是它的**钩腿**。回顾一下，算子$e_k^{\perp}$是对于 Hall 内积而言的乘以e_k的对偶算子，其作用由皮埃里规则给出，这一点众所周知。

性质3.2（钩形分量）。对于任意大小为n的钩形（$a\,|\,\ell$），我们有恒等式

$$e_a^{\perp}\mathcal{A}_{\tau}=\langle \mathcal{E}_{\tau}^{(n)},s_{(a\,|\,\ell)}\rangle, \tag{3.1}$$

因此，$\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}$中$)$的系数与n无关。

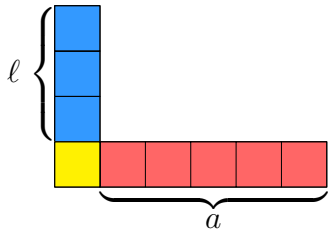


图1. 钩形 $(a \mid \ell)$ 。

回顾一下，对于两个单变量 u 和 v，复合 $p_k[u-\varepsilon v]$ 定义为$(u^k - (-1)^k v^k)$。照例，将其线性且乘法地扩展到以幂和基表示的对称函数。可以验证

$$\frac{1}{u+v} s_\mu[u-\varepsilon v] := \begin{cases} u^a v^\ell & \text{if } \mu = (a \mid \ell), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.2}$$

换言之，上述左侧所考虑的复合建立了一个直接的双射对应

$$s_{(a \mid \ell)} \leftrightarrow u^a v^\ell,$$

舒尔函数线性组合的钩形部分与u 和 v中的多项式之间的对应关系。因此，下述命题完整刻画了 $\mathcal{A}_\tau$的钩形部分。它由性质3.2 和 命题 1.1推出。

命题 3.1 (钩形交错式)。 对于任意三角分拆 τ，有

$$\frac{1}{u+v} \mathcal{A}_\tau[u-\varepsilon v] = u^{|\tau| - \binom{k+1}{2}} (u^2+v) \cdots (u^m+v), \tag{3.3}$$

其中 $m = \min(\ell(\tau)\ \ell(\tau'))$。

例如， $\mathcal{A}_{54321}$ 中的钩形项为：

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{54321}\big|_{\text{hooks}} = {} & s_{(14\,\mid 0)} + s_{(12\,\mid 1)} + s_{(11\,\mid 1)} + s_{(10\,\mid 1)} + s_{(9\,\mid 2)} + s_{(9\,\mid 1)} + s_{(8\,\mid 2)} + 2s_{(7\,\mid 2)} \\ & + s_{(6\,\mid 2)} + s_{(5\,\mid 3)} + s_{(5\,\mid 2)} + s_{(4\,\mid 3)} + s_{(3\,\mid 3)} + s_{(2\,\mid 3)} + s_{(0\,\mid 4)}, \end{aligned}$$

相应的编码多项式为：

$$\begin{aligned} & (u^2+v)(u^3+v)(u^4+v)(u^5+v) \\ & \qquad = u^{14} + u^{12}v + u^{11}v + u^{10}v + u^9v^2 + u^9v + u^8v^2 + 2u^7v^2 \\ & \qquad\quad + u^6v^2 + u^5v^3 + u^5v^2 + u^4v^3 + u^3v^3 + u^2v^3 + v^4. \end{aligned}$$

进一步的计算表明，命题 2.1 应该适用于所有情形。因此，我们有：

性质 3.3(∇^{-1}) (令 $m = \min(\ell(\tau)\ \ell(\tau'))$，对任意三角分拆 τ，则

$$e_m^\perp \mathcal{E}^{(n)}_{\tau+\delta(m)} = \mathcal{E}^{(n)}_\tau, \tag{3.4}$$

对于所有 $n \geq \ell(\tau) + m(\tau)$。

以下更一般的性质成立。

性质3.4（Delta 性质）。对于主导三角分拆 τ，其中 $n:=\boldsymbol{\ell}(\tau)+1$且满足 $\tau-\delta(n)$ 为三角形，我们有

$$\left(e_k^{\perp}\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}\right)\Big|_{\leq 2}=\Delta'_{e_{n-k-1}}\left(\mathcal{E}_{\tau-\delta(n)}^{(n)}\Big|_{\leq 2}\right) \tag{3.5}$$

对于任意 $0\leq k\leq n-1$。

当 $n=\boldsymbol{\ell}(\tau)+1$时，方程 3.5 唯一刻画了 $\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}$对所有 τ长度至多为 5的主导对象。

4. ∇ 钩形指标 Schur 的

在那些我们拥有$\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}$的表示论描述（用 $\mathrm{GL}_k\times\mathbb{S}_n$-模表示）的特殊情形中，有一类有趣的族对应于 $\nabla(\widehat{s}_{(a\,|\,\ell)})$ 这一情形，其中我们设

$$\widehat{s}_{(a\,|\,\ell)}(\boldsymbol{x}):=(-1/qt)^{a-1}s_{(a\,|\,\ell)}(\boldsymbol{x}). \tag{4.1}$$

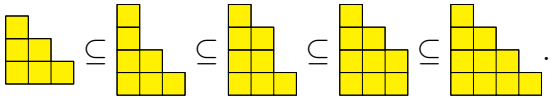
有关更多信息，请参见[3, 4]。有趣的观察是，∇-像这些重正规化钩指标 Schur 函数对应于 $\varepsilon_{\tau}^{(n)}$。更确切地说，

性质 4.1. 若 $\delta(n-1)\subseteq\tau\subseteq\delta(n)$，使得 $\boldsymbol{\ell}(\tau')\preceq\boldsymbol{\ell}(\tau)$（$\tau'$是主导的），则 n

$$\left(\mathcal{E}_{\tau}^{(n)}\right)\Big|_{\leq 2}=\nabla(\widehat{s}_{(a\,|\,\ell)}), \tag{4.2}$$

其中 $a=\binom{n+1}{2}-|\tau|$ 和 $\ell=n-a-1$。

例如，当 $n=5$时，相关的分拆为



对此我们有以下取值

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{321}^{(5)}&=\nabla(\widehat{s}_{(4\,|\,0)})+s_{111}\otimes s_{11111},\\
\mathcal{E}_{3211}^{(5)}&=\nabla(\widehat{s}_{(3\,|\,1)})+s_{111}\otimes s_{2111}+s_{211}\otimes s_{2111},\\
\mathcal{E}_{3221}^{(5)}&=\nabla(\widehat{s}_{(2\,|\,2)})+s_{111}\otimes s_{221}+s_{211}\otimes s_{2111}+s_{311}\otimes s_{11111},\\
\mathcal{E}_{3321}^{(5)}&=\nabla(\widehat{s}_{(1\,|\,3)})+s_{211}\otimes s_{221}+s_{311}\otimes s_{2111}+s_{411}\otimes s_{11111},\\
\mathcal{E}_{4321}^{(5)}&=\nabla(\widehat{s}_{(0\,|\,4)})+(s_{211}+s_{311})\otimes s_{221}+(s_{111}+s_{211}+s_{311}+s_{411})\otimes s_{2111}\\
&\qquad+(s_{311}+s_{411}+s_{511}+s_{1111})\otimes s_{11111}.
\end{aligned}$$

用 $e_k^{\perp}\mathcal{A}_{\tau}$ 表示以使表达式更简洁，这些式子可展开为：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(5)}_{321} &= (s_6 + s_{31} + s_{41} + s_{111}) \otimes s_{11111} \\ &\quad + (s_2 + s_3 + s_4 + s_{11} + s_{21}) \otimes s_{221} + (s_1 + s_2) \otimes s_{32} \\ &\quad + (e_1^{\perp}\mathcal{A}_{321}) \otimes s_{2111} + (e_2^{\perp}\mathcal{A}_{321}) \otimes s_{311} + (e_3^{\perp}\mathcal{A}_{321}) \otimes s_{41},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(5)}_{3211} &= (s_7 + s_{32} + s_{41} + s_{51} + s_{211}) \otimes s_{11111} \\ &\quad + (s_3 + s_4 + s_5 + 2s_{21} + s_{31}) \otimes s_{221} + (s_2 + s_3 + s_{11}) \otimes s_{32} \\ &\quad + (e_1^{\perp}\mathcal{A}_{3211}) \otimes s_{2111} + (e_2^{\perp}\mathcal{A}_{3211}) \otimes s_{311} + (e_3^{\perp}\mathcal{A}_{3211}) \otimes s_{41},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(5)}_{3221} &= (s_8 + s_{42} + s_{51} + s_{61} + s_{311}) \otimes s_{11111} \\ &\quad + (s_4 + s_5 + s_6 + s_{22} + 2s_{31} + s_{41} + s_{111}) \otimes s_{221} + (s_3 + s_4 + s_{21}) \otimes s_{32} \\ &\quad + (e_1^{\perp}\mathcal{A}_{3221}) \otimes s_{2111} + (e_2^{\perp}\mathcal{A}_{3221}) \otimes s_{311} + (e_3^{\perp}\mathcal{A}_{3221}) \otimes s_{41},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(5)}_{3321} &= (s_9 + s_{33} + s_{52} + s_{61} + s_{71} + s_{411}) \otimes s_{11111} \\ &\quad + (s_5 + s_6 + s_7 + s_{31} + 2s_{41} + s_{51} + s_{211} + s_{32}) \otimes s_{221} \\ &\quad + (s_4 + s_5 + s_{21} + s_{31}) \otimes s_{32} \\ &\quad + (e_1^{\perp}\mathcal{A}_{3321}) \otimes s_{2111} + (e_2^{\perp}\mathcal{A}_{3321}) \otimes s_{311} + (e_3^{\perp}\mathcal{A}_{3321}) \otimes s_{41},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(5)}_{4321} &= (s_{10.} + s_{42} + s_{43} + s_{61} + s_{62} + s_{71} + s_{81} + s_{311} + s_{411} + s_{511} + s_{1111}) \otimes s_{11111} \\ &\quad + (s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 + s_{21} + s_{31} + 2s_{41} + 2s_{51} + s_{61} \\ &\qquad + s_{22} + s_{32} + s_{42} + s_{211} + s_{311}) \otimes s_{221} \\ &\quad + (s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_{21} + s_{31} + s_{41} + s_{22}) \otimes s_{32} \\ &\quad + (e_1^{\perp}\mathcal{A}_{4321}) \otimes s_{2111} + (e_2^{\perp}\mathcal{A}_{4321}) \otimes s_{311} + (e_3^{\perp}\mathcal{A}_{4321}) \otimes s_{41} + (e_4^{\perp}\mathcal{A}_{4321}) \otimes s_5.\end{aligned}$$

利用 性质 3.4、性质 4.1以及关系式

$$\Delta'_{e_{n-2}}(e_n) = \sum_{a=1}^{n-1} \nabla(\widehat{s}_{(a\,|\,\ell)}), \qquad (\ell = n-1-a) \tag{4.3}$$

由此我们推断，上述结论可提升为以下结果。

性质 4.2. 对所有 n,

$$e_1^{\perp}\mathcal{E}^{(n)}_{\delta(n)} = \sum_{\delta(n-1)\subseteq\tau\subsetneq\delta(n)} \mathcal{E}^{(n)}_{\tau}. \tag{4.4}$$

5. Negut 公式

如果一个分拆的格子恰好是其图示的凸包中的整点，并且它的补集中没有格子落在该凸包内，那么这个分拆称为三角的。对于所有三角分拆 τ （在[9]中称为“任意直线下的分拆”），都存在一个相应的$(q,\ t)$-系数对称函数，可由 Negut 给出的以下公式计算：

$$\mathcal{E}_\tau^{(n)}(q,t;\boldsymbol{x}) = \sum_{\mu\vdash n} \sum_{\theta\in \mathrm{SYT}(\mu)} \Omega(\theta)\, \frac{T_\mu^\tau(\theta)}{T_\mu} \widetilde{H}_\mu(q,t;\boldsymbol{x}),$$

其中 n 是大于或等于 ℓ（τ）$+1$ 的某个整数。此外，对于形状为 μ 的标准杨表 θ，我们定义

$$T_\mu^\tau(\theta) := \prod_{(i,j)\in\mu} (q^i t^j)^{v_\tau(\theta(i,j))},$$

其中 v_τ:=$(0, \tau_1-\tau_2, \ldots, \tau_i-\tau_{i+1}, \ldots)$，补上若干个 0 分拆部分，使其成为长度为 n 的向量；并且

$$\Omega(\theta) := \prod_{\theta(a,b)>\theta(i,j)} \frac{(q^a t^b - q^i t^j)^*(q^a t^b - q^{i+1}t^{j+1})^*}{(q^a t^b - q^{i+1} t^j)^*(q^a t^b - q^i t^{j+1})^*} \times \prod_{\theta(a,b)=\theta(i,j)+1} \frac{q^a t^b}{q^a t^b - q^{i+1}t^{j+1}} \prod_{\theta(i,j)\neq 1} \frac{1}{q^i t^j - 1}$$

其中 $(A)^*$ 在 $A=0$ 时等于 1，否则等于 A。当 τ 是阶梯分拆（$n-1, \ldots, 2, 1$）时，我们有 $\mathcal{E}_\tau = \nabla(e_n)$；其他特殊情形还包括利用椭圆Hall代数的技巧，与有理及矩形 Catalan 组合学相关的其他对称函数；以及 ∇ 对钩形Schur函数的影响。

6. 通用公式

$\mathcal{E}_\tau(\boldsymbol{q}+1, \boldsymbol{x})$ 的 e-基展开式的另一种描述方式是通过辅助表达式[5]

$$\mathcal{F}_\tau(\boldsymbol{q};\boldsymbol{x}) := \downarrow \mathcal{E}_\tau(\boldsymbol{q}+1;\boldsymbol{x}) = \sum_\lambda \sum_\mu \alpha_{\mu\lambda}\, s_\mu(\boldsymbol{q})(\downarrow e_\lambda(\boldsymbol{x}))$$
$$= \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu\nu}\, s_\mu(\boldsymbol{q}) e_\nu(\boldsymbol{x}), \tag{6.2}$$

[5]请回忆，复合 $p_k(\boldsymbol{q}+1) = p_k(\boldsymbol{q}) + 1$ 会将 Schur函数 s_ρ 映射为以下总和

$$s_\rho(\boldsymbol{q}+1) = \sum_{\rho/\mu \text{ H.S.}} s_\mu(\boldsymbol{q}), \tag{6.1}$$

其中 μ 遍历所有满足 ρ/μ 为 **水平条带** （H.S.）的分拆。这就是说，斜形 μ/ρ 中任意两个格子都不位于同一列。在我们的框架中，逆复合等价关系为：$f(\boldsymbol{q}) = g(\boldsymbol{q}-1)$ 当且仅当 $g(\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{q}+1)$。

其中 $(\downarrow e_\lambda)$ 表示从 λ 中去掉其第一部分后得到的初等函数。我们可以将 $\mathcal{F}_\tau$ 以张量形式表示为:

$$\mathcal{F}_\tau = \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu\nu}\, s_\mu \otimes e_\nu. \tag{6.3}$$

$\mathcal{F}_\tau$ 的优点在于，我们可以通过逆复合统一地恢复所有 $\mathcal{E}_\tau^{(n)}$

$$\mathcal{E}_\tau^{(n)}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) = \uparrow^{(n)} \mathcal{F}_\tau(\boldsymbol{q} - 1, \boldsymbol{x}) \tag{6.4}$$

其中，$\uparrow^{(n)}$ 是作用于 $\boldsymbol{x}$变量对称多项式的线性算子，它将 $e_\nu = e_\nu(\boldsymbol{x})$映射为$(\uparrow^{(n)} e_\nu)$:
$= e_{n-|\nu|}\, e_\nu$。换言之，$(\uparrow^{(n)} e_\nu)$是通过向 ν 中添加一个部分而得到的，使所得分拆的大小为 n。

例如，我们有

$$\mathcal{F}_0 = 1 \otimes 1, \tag{6.5}$$

$$\mathcal{F}_d = s_d \otimes 1 + (1 + s_1 + \cdots + s_{d-1}) \otimes e_1, \tag{6.6}$$

$$\mathcal{F}_{1^d} = s_d \otimes 1 + s_{d-1} \otimes e_1 + \cdots + 1 \otimes e_d \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{(a,1)} = {} & (s_{a+1} + s_{(a-1,1)}) \otimes 1 \\ & + (s_a + (1 + s_2 + \ldots + s_{a-2}) \cdot s_1) \otimes e_1 \\ & + s_{a-1} \otimes e_2 + (1 + s_1 + \ldots + s_{a-2}) \otimes e_{11}.\end{aligned} \tag{6.8}$$

让我们说明 公式 6.4 如何正确描述以下 公式 2.6 和 公式 2.10的两个实例:

$$\mathcal{E}^{(3)}_{(a,1)} = s_{a-2} \otimes s_3 + (s_{a-1} + s_a + s_{(a-2,1)}) \otimes s_{21} + (s_{a+1} + s_{(a-1,1)}) \otimes s_{111}, \qquad \text{and} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(4)}_{(a,1)} = {} & s_{a-2} \otimes s_{31} + (s_{a-1} + s_a + s_{(a-2,1)}) \otimes s_{211} + (s_{a+1} + s_{(a-1,1)}) \otimes s_{1111} \\ & + s_{a-1} \otimes s_{22},\end{aligned} \tag{6.10}$$

as

$$\begin{aligned}\uparrow^{(n)} \mathcal{F}_{(a,1)}(\boldsymbol{q} - 1, \boldsymbol{x}) = {} & (s_{a+1} - s_a - s_{a-1} + s_{a-2} + s_{(a-1,1)} - s_{(a-2,1)}) \otimes e_n \\ & + (s_a - s_{a-2} + s_{(a-2,1)}) \otimes e_{n-1}e_1 \\ & + (s_{a-1} - s_{a-2}) \otimes e_{n-2}e_2 + s_{a-2} \otimes e_{n-2}e_{11} \\ = {} & (s_{a+1} - s_a - s_{a-1} + s_{a-2} + s_{(a-1,1)} - s_{(a-2,1)}) \otimes s_{1^n} \\ & + (s_a - s_{a-2} + s_{(a-2,1)}) \otimes (s_{21^{n-2}} + s_{1^n}) \\ & + (s_{a-1} - s_{a-2}) \otimes (\chi(n > 3)\, s_{221^{n-4}} + s_{21^{n-2}} + s_{1^n}) \\ & + s_{a-2} \otimes (s_{31^{n-3}} + \chi(n > 3)\, s_{221^{n-4}} + 2s_{21^{n-2}} + s_{1^n})\end{aligned}$$

其中，当 $n > 3$ 时，$\chi(n > 3) = 1$；否则为零。因此，$\mathcal{E}^{(3)}_{(a,\,1)}$ 与一般值 $\mathcal{E}^{(n)}_{(a,\,1)}$ 之间的差异仅由乘积公式的不同所致:

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_2 &= s_{21} + s_{111}, \\ e_1 \cdot e_{11} &= s_3 + 2s_{21} + s_{111}, \end{aligned}$$

and

$$e_n \cdot e_2 = s_{221^{n-4}} + s_{21^{n-2}} + s_{1^n},$$
$$e_n \cdot e_{11} = s_{31^{n-3}} + s_{221^{n-4}} + 2s_{21^{n-2}} + s_{1^n}$$

$\mathcal{F}_\tau$ 的更具体取值如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{211} = \quad & (s_4 + s_{21}) \otimes 1 \\ & + (s_2 + s_3 + s_{11}) \otimes e_1 + s_2 \otimes e_2 + s_1 \otimes e_{11} + s_1 \otimes e_3 + 1 \otimes e_{21};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{32} = \quad & (s_5 + s_{31}) \otimes 1 \\ & + (s_2 + s_3 + s_4 + s_{21}) \otimes e_1 + (s_1 + s_3 + s_{11}) \otimes e_2 + (1 + s_1 + s_2) \otimes e_{11}, \\ \mathcal{F}_{221} = \quad & (s_5 + s_{31}) \otimes 1 \\ & + (s_3 + s_4 + s_{21}) \otimes e_1 + (s_1 + s_3 + s_{11}) \otimes e_2 \\ & + s_2 \otimes e_{11} + s_2 \otimes e_3 + (1 + s_1) \otimes e_{21}, \\ \mathcal{F}_{2111} = \quad & (s_5 + s_{31}) \otimes 1 \\ & + (s_3 + s_4 + s_{21}) \otimes e_1 + (s_3 + s_{11}) \otimes e_2 \\ & + s_2 \otimes e_{11} + s_2 \otimes e_3 + s_1 \otimes e_{21} + s_1 \otimes e_4 + 1 \otimes e_{31};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{42} = {} & (s_6 + s_{41} + s_{22}) \otimes 1 \\ & + (s_5 + s_4 + s_3 + s_2 + s_{31} + s_{21}) \otimes e_1 \\ & + (s_2 + s_4 + s_{21}) \otimes e_2 + (1 + s_3 + s_2 + 2s_1 + s_{11}) \otimes e_{11};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{321} = {} & (s_6 + s_{31} + s_{41} + s_{111}) \otimes 1 \\ & + (s_3 + s_4 + s_5 + s_{11} + s_{21} + s_{31}) \otimes e_1 \\ & + (s_2 + s_4 + s_{11} + s_{21}) \otimes e_2 + (s_1 + s_2 + s_3) \otimes e_{11} \\ & + (s_3 + s_{11}) \otimes e_3 + (2s_1 + s_2) \otimes e_{21} + 1 \otimes e_{111};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{2211} = {} & (s_6 + s_{41} + s_{22}) \otimes 1 \\ & + (s_5 + s_4 + s_{31} + s_{21}) \otimes e_1 \\ & + (s_4 + s_2 - s_{11} + s_{21}) \otimes e_2 + (s_3 + s_{11}) \otimes e_{11} \\ & + (s_3 + s_{11}) \otimes e_3 + (s_2 + s_1) \otimes e_{21} + 1 \otimes e_{22} + s_2 \otimes e_4 + s_1 \otimes e_{31}.\end{aligned}$$

注意，对于 $\mathcal{F}_{2211}$， e_2 的系数中出现了一个负项。

性质 6.1. 当 $\boldsymbol{\ell}(\tau') > \boldsymbol{\ell}(\tau)$时，对于所有 $k \geq 0$， e_1^k 在 $\mathcal{F}_\tau$ 中的系数可由 $\mathcal{A}_\tau$ 计算如下：

$$\langle \mathcal{F}_\tau, f_{1^k} \rangle = e_k^\perp \mathcal{A}_\tau. \tag{6.11}$$

例如，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{4321} = s_{10.} + s_{42} + s_{43} + s_{61} + s_{71} + s_{81} + s_{62} + s_{311} + s_{411} + s_{511} + s_{1111}、\\
&e_1^\perp \mathcal{A}_{4321} = s_6 + s_7 + s_8 + s_9 + s_{31} + 2s_{41} + 2s_{51} + 2s_{61} + s_{71} \\
&\quad + s_{32} + s_{42} + s_{52} + s_{33} + s_{111} + s_{211} + s_{311} + s_{411}、\\
&e_2^\perp \mathcal{A}_{4321} = s_3 + s_4 + 2s_5 + s_6 + s_7 + s_{11} + s_{21} + 2s_{31} + s_{41} + s_{51} + s_{32}、\\
&e_3^\perp \mathcal{A}_{4321} = s_1 + s_2 + s_3 + s_4、\ e_4^\perp \mathcal{A}_{4321} = 1;
\end{aligned}$$

然后

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{4321} = {} & \mathcal{A}_{4321} \otimes 1 + (e_1^\perp \mathcal{A}_{4321}) \otimes e_1 + (e_2^\perp \mathcal{A}_{4321}) \otimes e_{11} + (e_3^\perp \mathcal{A}_{4321}) \otimes e_{111} + (e_4^\perp \mathcal{A}_{4321}) \otimes e_{1111} \\
& + (s_4 + s_6 + s_8 + s_{21} + s_{31} + 2s_{41} + s_{51} + s_{61} + s_{22} + s_{42} + s_{111} + s_{211} + s_{311}) \otimes e_2 \\
& + (s_4 + s_7 + s_{21} + s_{31} + s_{41} + s_{51} + s_{32} + s_{111} + s_{211}) \otimes e_3 \\
& + (2s_2 + 2s_3 + s_4 + 2s_5 + s_6 + 2s_{11} + 3s_{21} + 2s_{31} + s_{41} + s_{22}) \otimes e_{21} \\
& + (s_6 + s_{31} + s_{41} + s_{111}) \otimes e_4 \\
& + (2s_3 + s_4 + s_5 + 2s_{11} + s_{21} + s_{31}) \otimes e_{31} \\
& + (s_2 + s_4 + s_{11} + s_{21}) \otimes e_{22} \\
& + (3s_1 + 2s_2 + s_3) \otimes e_{211}
\end{aligned}$$

性质 6.1. 对于所有三角分拆 τ，我们有

(1) $\mathcal{A}_\tau(\boldsymbol{q}+1) = \sum_\nu \langle \mathcal{F}_\tau, f_\nu \rangle$.

(2) 对于所有 $k \geq 0$，我们有

$$\sum_{\boldsymbol{\ell}(\nu)=k} \langle \mathcal{F}_\tau, f_\nu \rangle = \sum_{\boldsymbol{\ell}(\nu)=k} \langle \mathcal{F}_{\tau'}, f_\nu \rangle. \tag{6.12}$$

(3) 对于所有 $n > \boldsymbol{\ell}(\tau)$，

$$(\uparrow^{(n)} \mathcal{F}_\tau)(q; \boldsymbol{x}) = \sum_{\alpha \subseteq \tau} q^{\mathrm{area}(\alpha)} s_{(\alpha+1^n)/\alpha}(\boldsymbol{x}). \tag{6.13}$$

(4) 对于定义正确的 *LLT* 多项式 $\mathbb{L}_\alpha(t; \boldsymbol{x})$ 和 $n > \boldsymbol{\ell}(\tau)$，我们有

$$(\uparrow^{(n)} \mathcal{F}_\tau)(q; \boldsymbol{x}) = \sum_{\alpha \subseteq \tau} q^{\mathrm{area}(\alpha)} \mathbb{L}_\alpha(t; \boldsymbol{x}). \tag{6.14}$$

(5) 对于任意三角分拆 $\tau_1 \subseteq \tau_2$，若 $|\tau_2| - |\tau| = 1$，则

$$(e_1^{\perp}\mathcal{F}_{\tau_2}) \geq \mathcal{F}_{\tau_1} \qquad \textit{(the difference is e-positive)} \tag{6.15}$$

我们推测，对于所有三角分拆 τ，都存在一个 Tamari类偏序集 $\mathcal{T}_\tau$，其定义在包含于 τ 中的分拆集合 α 上，并在变量 k 中给出带标记链枚举多项式$\mathcal{T}_\tau(k;\boldsymbol{x})$。这里，$k$ 表示链的长度，终止于α 的链以初等对称函数 $s_{(\alpha+1^n)/\alpha}$ （甚至可以用 LLT 多项式 $\mathbb{L}_\alpha(t;\boldsymbol{x})$）作为标记（加权）。公式如下：

$$\mathcal{T}_\tau(k;\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\ell}(\gamma)=k} s_{(\mathrm{top}(\gamma)+1^n)/\mathrm{top}(\gamma)}, \tag{6.16}$$

其中，求和遍历长度为 k 的链 γ 的集合。预期这个 $\mathcal{T}_\tau$ 满足

性质 6.2. 对于所有三角分拆 τ，差值 $\mathcal{T}_\tau(k;\boldsymbol{x}) - (\uparrow^{(n)}\mathcal{F}_\tau)(k;\boldsymbol{x})$ 是e-正的。

这里，在 k 处对 $(\uparrow^{(n)}\mathcal{F}_\tau)$ 求值，相当于将前 k 个变量 q_i 设为 1，并将其余所有变量设为 0。例如，我们有

$$\begin{aligned}(\uparrow^{(n)}\mathcal{F}_{321})(k;\boldsymbol{x}) = {}& (1/720)(k^6+39k^5+295k^4+645k^3-296k^2+36k)\,e_n(\boldsymbol{x})\\ &+(1/120)(k^2+3k)(k^3+27k^2+74k-12)\,e_{(n-1,1)}(\boldsymbol{x})\\ &+(1/24)(k^4+14k^3+35k^2-2k)\,e_{(n-2,2)}(\boldsymbol{x})\\ &+(1/6)(k^3+6k^2-k)\,e_{(n-3,3)}(\boldsymbol{x})\\ &+(1/6)(k^3+6k^2+11k)\,e_{(n-2,11)}(\boldsymbol{x})\\ &+(1/2)(k^2+5k)\,e_{21}+e_{(n-3,111)}(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

7. 愿望清单

我们希望得到一个形式如下的 $\mathcal{F}_\tau$ 展开式

$$\mathcal{F}_\tau = \sum_{\alpha\subseteq\tau} \mathcal{C}_\alpha \otimes s_{(\alpha+1^{\boldsymbol{\ell}(\alpha)})/\alpha}, \tag{7.1}$$

其系数为 $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}_\alpha^\tau$，且满足

(1) $\mathcal{C}_0 = \mathcal{A}_\tau$，（2）如果 $\langle \mathcal{C}_\alpha, s_\mu\rangle \neq 0$，那么 $\sum_i i\mu_i \leq |\tau| - |\alpha|$。（3）对于所有 $\alpha \subseteq \tau$，我们有 $\langle \mathcal{C}_\alpha, s_n\rangle = 1$，其中 $n = |\tau| - |\alpha|$，（4）在某些情况下 $\mathcal{C}_\alpha^\tau = \mathcal{C}_{\alpha'}^{\tau'}$。

为简化后续表达式的呈现，我们考虑

$$\mathcal{F}^{(1)}_{\tau} := \mathcal{A}_{\tau} \otimes 1 + \sum_{0 \subsetneq \alpha \subseteq \tau} \mathcal{C}^{(1)}_{\alpha} \otimes s_{(\alpha+1^{\ell(\alpha)})/\alpha}, \qquad \text{其中}$$

$$\mathcal{C}^{(1)}_{\alpha} := s_n, \quad \text{with } n = |\tau| - |\alpha|.$$

换句话说，这对应于规则（1）和（2）的贡献。一般而言，第三个条件似乎无法成立。不过，在以下情况下确实可以成立。

- 对于 $\tau = 1^k$ 和 k，我们有 $\mathcal{F}_{\tau} = \mathcal{F}_{(1)\,\tau}$。
- 对于 $\tau = 21^k$，我们有

$$\mathcal{F}_{\tau} = \mathcal{F}^{(1)}_{\tau} + \sum_{j=1}^{k-1} s_{(j,1)} \otimes e_{\rho(1^{k-j})}. \tag{7.2}$$

- 等价地，假设条件（3），对于 $\tau = (k+1, 1)$，我们有

$$\mathcal{F}_{\tau} = \mathcal{F}^{(1)}_{\tau} + \sum_{j=1}^{k-1} s_{(j,1)} \otimes e_{\rho(k-j)}. \tag{7.3}$$

- 对于 $\tau = 321$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\tau} = \mathcal{F}^{(1)}_{\tau} &+ s_{31} \otimes e_{\rho(1)} + s_{21} \otimes \big(e_{\rho(11)} + e_{\rho(2)}\big) \\ &+ s_{11} \otimes \big(e_{\rho(111)} + e_{\rho(3)} + e_{\rho(22)}\big).\end{aligned} \tag{7.4}$$

- 对于 $\tau = 421$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\tau} = \mathcal{F}^{(1)}_{\tau} &+ \big(s_{22} + s_{31} + s_{41} + s_{111}\big) \otimes e_{\rho(1)} + s_{31} \otimes \big(e_{\rho(11)} + e_{\rho(2)}\big) \\ &+ s_{21} \otimes \big(e_{\rho(111)} + e_{\rho(3)} + e_{\rho(21)} + e_{\rho(22)}\big) \\ &+ s_{11} \otimes \big(e_{\rho(211)} + e_{\rho(31)} + e_{\rho(4)}\big).\end{aligned} \tag{7.5}$$

参考文献

[1] Per Alexandersson，LLT 多项式、初等对称函数与融化的棒棒糖，《代数组合学杂志》53（2021年），第2期，299–325，https://doi.org/10.1007/s10801-019-00929-z。2[2] François Bergeron，与矩形 Catalan 组合学相关的算子的开放问题，《组合学杂志》8（2017），第4期，673–703，https://doi.org/10.4310/JOC.2017.v8.n4.a6。2[3] ———，（$Gl_k \times S_n$）-模与钩形指标 Schur 函数的 Nabla，2019，https://arxiv.org/abs/1909.03531。10[4] ———，（$Gl_k \times S_n$）-多元对角调和函数模，https://arxiv.org/abs/arXiv:2003.07402。10[5] François Bergeron、Adriano M. Garsia、2020, Mark Haiman 和 Glenn Tesler，对称函数理论中某些特殊算子的恒等式与正性猜想，《方法与应用分析》6（1999），第3期，363–420，https://doi.org/10.4310/MAA.1999.v6.n3.a7。2[6]François Bergeron、Adriano M. Garsia、Emily Sergel Leven 和 Guoce Xin，组合型 (km, kn)-洗牌猜想，《国际数学研究通报》IMRN（2016），第14期，4229–4270，https://doi.org/10.1093/imrn/rnv272。[7]François Bergeron 和 Mikhail Mazin，三角分拆的组合学，2022，https://arxiv.org/abs/arXiv:2203.15942。1

[8]Nantel Bergeron、Cesar Ceballos 和 Vincent Pilaud，Hopf 梦与对角调和函数，《伦敦数学会杂志》105（2022），第3期，1546–1600，https://doi.org/10.1112/jlms.12541。[9] Jonah Blasiak、Mark Haiman、Jennifer Morse、Anna Pun 和 George H. Seelinger，任意直线下方路径的洗牌定理，2021，https://arxiv.org/abs/2102.07931。1, 2, 4, 6, 12[10] Erik Carlsson 和 Anton Mellit，洗牌猜想的证明，《美国数学会杂志》31（2018），第3期，661–697，https://doi.org/10.1090/jams/893。2[11] Michele D'Adderio，垂直条带 LLT 多项式的 e-正性，《组合理论杂志A辑》172（2020），105212，15，https://doi.org/10.1016/j.jcta.2020.105212。2[12] Adriano M. Garsia、James Haglund、Dun Qiu 和 Marino Romero， e-正性结果与猜想，2019，https://arxiv.org/abs/1904.07912。[13] Adriano M. Garsia 和 Guoce Xin，Dinv 与面积，《电子组合学杂志》24（2017），第1期，论文编号1.64，9，https://doi.org/10.37236/6501。[14]James Haglund、Jeff B. Remmel 和 Anthony T. Wilson，delta 猜想，《美国数学会汇刊》370（2018），第6期，4029–4057，https://doi-org.proxy.bibliotheques.uqam.ca/10.1090/tran/7096。2[15]James Haglund、Brendon Rhoades 和 Mark Shimozono，在 $t = 0$处 Schur delta 算子的 Hall–Littlewood 展开，《洛泰尔组合学研讨会》79（[2018–2020]），文章B79c，20，https://www.mat.univie.ac.at/~slc/wpapers/s79rhoades.pdf。[16] Ian G. Macdonald，对称函数与 Hall 多项式，牛津物理科学经典文本，克拉伦登出版社，1998，https://books.google.ca/books?id=srv90XiUbZoC。[17] Anton Mellit，环面辫与 (m, n)-停车函数，《杜克数学杂志》170（2021年），第18期，4123–4169，https://doi.org/10.1215/00127094-2021-0011。2

数学系，Lacim，魁北克大学蒙特利尔分校。电子邮箱
地址： bergeron.francois@uqam.ca