arXiv:2303.02225v1 [math.NT] 3 Mar 2023

相对迹公式与一般线性群$(n+1)$ × 一般线性群(n)的 L-函数

LIYANG YANG

摘要。我们在数域上建立了一个定义在一般线性群$(n+1)$上的相对迹公式，该公式由一般线性群(n)上的尖点形式加权。谱侧是完整谱上一般线性群$(n+1)$ × 一般线性群(n)的Rankin-Selberg L-函数的加权平均，而几何侧由一般线性群(n)×一般线性群(n)的Rankin-Selberg L-函数以及某些显式全纯函数组成。该公式为数域上一般线性群$(n+1)$ × 一般线性群(n)的中心 L-值提供了新的结果：二阶矩计算，以及在层级方面的同时非消失。

目录

1. 引言 2
1.1. 相对迹公式 4
1.2. GL$(n+1)$ × GL(n) 的 L-函数二阶矩 5
1.3. GL$(n+1)$ × GL(n) 的 L-函数非消失 6
1.4. 本文结构 7
1.5. 符号 7
2. 相对迹公式与正则化 9
2.1. G 上的初等相对迹公式 9
2.2. 正则化（I）：变形与截断过程 12
2.3. 正则化（II）：核函数的处理 13
2.4. 正则化（III）：截断相对迹公式 16
2.5. 正则化（IV）：移除截断 17
2.6. 测试函数与自守权 18
3. 相对于小胞的轨道积分 18
4. 相对于大胞腔的轨道积分：I 22
4.1. 轨道积分 $\mathcal{F}_{1,1}J^{\mathrm{Big}}{}_{,T}$ Geo (f,s) 22
4.2. 轨道积分：$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}{}_{,T}$ Geo (f,s) 23
4.3. 亚纯延拓 28
4.4. 轨道积分：$\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}{}_{,T}$ Geo (f,s) 33
5. 相对于大胞腔的轨道积分：II 34
5.1. 消失轨道积分 35
5.2. 轨道变更 36
5.3. 轨道积分 J^{Big} Geo,Dual(f,s) 38
5.4. 轨道积分 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{,II}$ Geo,Big(f,s) 40
6. 谱侧：收敛与亚纯延拓 47
6.1. 右半平面中的收敛 47
6.2. 核函数的谱分解 50
6.3. J^{Reg} Eis (f,s) 到 $\mathbb{C}^2$ 的亚纯延拓 53
7. 奇点匹配 57
7.1. 奇异艾森斯坦周期 58

日期：2023年3月7日。

7.2. 几何侧与谱侧的奇点匹配 648. 亚纯相对迹公式 688.1. 谱侧 J^{Reg} 谱$(f,\ \mathbf{s})$ 688.2. 几何侧 J^{Reg} 几何$(f,\ \mathbf{s})$ 688.3. 相对迹公式：$\mathbf{s}$ $\in \mathcal{R}$ 698.4. 相对迹公式：$\mathbf{s}$ $\in \mathcal{R}^*$ 699. 相对迹公式的应用 709.1. Rankin-Selberg 的矩 L-函数 709.2. 同时非消失 74参考文献 78

1. 引言

设 F 是一个数域，其阿代尔环为 $\mathbb{A}_F$。设 χ 是 $\mathbb{A}_F^\times$. 上的一个二次 Hecke 特征。设 A =diag(一般线性群(1), 1)。 设 K^f 是与函数 f 相联系的自守核，该函数定义在 一般线性群(2, $\mathbb{A}_F$) 上，且模中心紧支撑。Jacquet [Jac86] 建立了一个相对迹公式，它是积分与其对应项之间的恒等式

$$\int_{A(F)\backslash A(\mathbb{A}_F)} \int_{A(F)\backslash A(\mathbb{A}_F)} \mathrm{K}^f(x,y)\chi(\det y)d^\times x d^\times y, \tag{1.1}$$

及其对应项

$$\sum_{(G^*,T^*)} \int_{A^*(F)\backslash A^*(\mathbb{A}_F)} \int_{A^*(F)\backslash A^*(\mathbb{A}_F)} \mathrm{K}^{f^*}(x^*,y^*)d^\times x^* d^\times y^*, \tag{1.2}$$

其中 E/F 是与 χ对应的二次扩张；求和遍历一对内形式 G^* (GL(2)) 及其极大环面 T^*，它与 $E^\times$ 在F上同构；而 f^* 是与 (G^*,T^*)相联系的测试函数。 借助其相对迹公式，Jacquet 为 Waldspurger 的一个重要结果给出了新的证明 [Wal85]。

注意，利用谱展开和 Rankin-Selberg 卷积，(1.1) 中的尖点谱是 $L(1/2,\pi)L(1/2,\pi\times\chi)$ 的加权和，其中 π 遍历 GL(2, $\mathbb{A}_F$) 上的尖点表示。基于 Jacquet的相对迹公式，Guo [Guo96] 成功证明，对所有尖点表示 π.， $L(1/2,\pi)L(1/2,\pi\times\chi)\geq 0$

另一方面，秉承 Arthur-Selberg 迹公式的思路，我们也可以从几何侧研究 (1.1) 的谱展开，从而为定量理解 Rankin-Selberg L-函数 $L(1/2,\pi)L(1/2,\pi\times\chi)$ 提供另一种视角。Ramakrishnan 和 Rogawski [RR05] 首次描述了 (1.1) 的几何侧，以推广 Duke 定理 [Duk95]。此类公式还有许多其他应用，例如 L-值的矩公式、纵向 Sato-Tate 分布、中心 L-值的非消失问题、次凸性问题，以及低位零点的分布（参见 [RR05], [FW09], [Tsu15], [KR19]）。

我们旨在研究高秩情形下的（1.1）型积分。令 $G=$一般线性群（$n+1$）和 $G'=$一般线性群（n）。令 π_1'， π_2' 为 G'（$\mathbb{A}_F$）的尖点表示。固定尖点形式$\phi_1'\in\pi_1'$ 和 $\phi_2'\in\pi_2'$。一种初步的推广原则上基于该积分的几何展开与谱展开相等这一事实

$$\int_{G'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)} \int_{G'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)} \mathrm{K}^f\left(\begin{pmatrix} x & \\ & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y & \\ & 1\end{pmatrix}\right)\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}dxdy. \tag{1.3}$$

若（1.3）收敛，这种等式便颇有意义，因为其谱侧由 Rankin–Selberg 周期的乘积构成；根据 [JPSS83], [JS90],[Jac09],，当 π 遍历 $G(\mathbb{A}_F)$ 的自守表示时，这些乘积表示 $L(1/2,\pi\times\pi_1')L(1/2,\widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}_2')$。因此，理解积分（1.3）的几何侧，将提供一种新的重要恒等式，可通过选取合适的 f 并计算或估计等式两侧，直接研究 GL$(n+1)\times$GL(n) 的 L-函数（而非使用 Kuznetsov 公式）。在 $U(3)\times U(2)$ 情形下，这样一个相对迹公式连同 Ichino–Ikeda 公式的渐近形式，是获得新的非消失与次凸性结果的关键要素。详情见 [MRY23] 。

然而，要从(1.3)得到这样一个理想的相对迹公式，至少存在两大障碍。

首先，与[DGG12], 中的情形不同，底层积分(1.3)一般并不收敛。因此需要进行正则化。此外，由于我们预期其在 L-函数的解析理论中有所应用，该正则化公式应当足够显式，以便对两侧进行具体计算或估计。因此， [JLR99] 和 [IY15] 中的截断方法似乎并不适合我们的目的。当 $n=1$ 且 F 为全实时，可以取阿基米德分量 f_∞ 为全纯离散级数的矩阵系数，从而使(1.3)收敛。这一点已在 [RR05], [FW09] 和 [Tsu15]中使用。然而，在 $n=1$ 的情形下，普遍情形（例如二阶矩情形）尚未得到研究。本文将处理谱侧的完整谱。

其次，当 $n>1$ 时，自守权 ϕ_1' 和 ϕ_2' 破坏了几何侧轨道积分的欧拉结构。例如，对于带有稳定子 G_γ 的 $\gamma\in G(F)$，相应的轨道积分可分解为

$$\int_{G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_F)}\phi_1'(hx)\overline{\phi_2'(hy)}dh \tag{1.4}$$

对某个 x， $y\in G(\mathbb{A}_F)$。 对于大多数 1.4 中的积分并不能分解为局部积分。对于这些最棘手的情形，必须应用柯西–施瓦茨不等式，将 γ 的（1.4）估计为尖点形式在 L^2 上限制后的范数，其中 $G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_F)$，处理起来相当微妙。这些缺点使得单独估计一般轨道积分变得困难（例如，参见 [MRY23]）。此外，由于艾森斯坦级数的傅里叶展开中含有退化项，通过（形式上的）展开，来自连续谱的周期无法分解。因此，即使忽略收敛问题，对（1.3）作初等展开也无法得到理想的相对迹公式。

本文有四个目标。

- 我们的首要目标是建立一个变形相对迹公式

(1.5) $J^{\mathrm{Reg}}\mathrm{Spec}(f,\mathrm{s};\phi_1',\phi_2')=J^{\mathrm{Reg}}\mathrm{Geo}(f,\mathrm{s};\phi_1',\phi_2')$，其中 $\mathrm{s}=(s_1,s_2)$，$\mathrm{Re}(s_1)$，$\mathrm{Re}(s_2)\geq 1$，这是关于两个复变量的全纯函数恒等式。谱侧 $J^{\mathrm{Reg}}\mathrm{Spec}(f,\mathrm{s};\phi_1',\phi_2')$ 是通过将（1.3）的剩余谱和连续谱中自守形式傅里叶展开的退化项移至几何侧而得到的。详情见 §2。展开并交换积分后，

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Spec}}(f,\mathrm{s};\phi_1',\phi_2')=\int_{\widehat{G(\mathbb{A}_F)}_{\mathrm{gen}}}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_\pi}\Psi(s_1,\pi(f)W_\phi,W'_{\phi_1'})\Psi(s_2,\widetilde{W}_\phi,\widetilde{W}'_{\phi_2'})d\mu_\pi,$$

其中 $G(\mathbb{A}_F)_{\mathrm{gen}}$ 是一般表示的空间， $W'_{\phi_i'}$（分别是 W_ϕ）为尖点形式 ϕ_i'（分别为 ϕ）的 Whittaker 函数， $i=1,2$，且$\Psi(s,W_\phi,W'_{\phi_1'})$是 Whittaker 形式中的 Rankin-Selberg 周期积分。由

[JPSS83], 中的被积函数 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Spec}}(f,\ \mathbf{s})$ 表示 $L(1/2+s_1,\ \pi\times\pi_1')L(1/2+s_2,\ \widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}_2')$。 注意，$J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Spec}}(f,\ \mathbf{s})$ 的尖点谱部分的贡献与（1.3）相同。

- 第二个目标是推导出（1.5）的谱侧和几何侧在 $\mathrm{Re}(s_1)>-1/(n+1)$，以及 $\mathrm{Re}(s_2)>-1/(n+1)$ 上的亚纯延拓。我们将证明两侧的绝对收敛性，以及奇异部分的消去。特别地，在 $\mathbf{s}=(0,0)$ 处的赋值给出了（1.3）所需的正则化。这解决了使发散积分（1.3）具有意义这一性质解析问题。

- 第三个目标是以适当的方式将几何侧的轨道积分连接起来，使其要么可分解，要么便于通过欧拉型积分进行估计（例如参见 §5）。

- 最后，我们将应用相对迹公式来计算二阶矩，并同时研究数域上 GL($n+1$) $\times$ GL(n) 的 Rankin-Selberg L-函数的非消失问题。

总之，相对迹公式 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Spec}}(f,\ \mathbf{s};\ \phi_1',\ \phi_2')=J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Geo}}(f,\ \mathbf{s};\ \phi_1',\ \phi_2')$ 作为亚纯函数恒等式，概述于下文的定理 A 中。完整描述见 §D 8.3 中的定理 E §8.4。

1.1. 相对迹公式。

相对迹公式的非正式描述如下。

定理 A。 记号同前。令 $n\geq 2$. 令 $G=$一般线性群$(n+1)$ 和$G'=$一般线性群(n)。令 π_1', π_2' 为 G' 上的酉尖点表示，底域为 F.。令 $\phi_i'\in\pi_i'$, $i=1,\ 2$。令 θ 为 $F\backslash\mathbb{A}_F$. 上非平凡的加性特征。令 P_0' 为 G'. 的米拉波利克子群。令 $\mathbf{s}=(s_1,\ s_2)\in\mathbb{C}^2$。令 f 为定义在 $G(\mathbb{A}_F)$上的连续函数，且模中心紧支集。于是

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Spec}}(f,\mathbf{s};\phi_1',\phi_2')=J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo}}(f,\boldsymbol{s};\phi_1',\phi_2'),\tag{1.6}$$

它们在区域 $\mathrm{Re}(s_1),\ \mathrm{Re}(s_2)\gg 1$. 中绝对收敛。这里，谱侧

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Spec}}(f,\mathbf{s};\phi_1',\phi_2')=\int_{\widehat{G(\mathbb{A}_F)}_{\mathrm{gen}}}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_\pi}\Psi(s_1,\pi(f)W_\phi,W'_{\phi_1'})\Psi(s_2,\widetilde{W}_\phi,\widetilde{W}'_{\phi_2'})d\mu_\pi,$$

以及几何侧

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo}}(f,\boldsymbol{s};\phi_1',\phi_2'):=J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small}}(f,\boldsymbol{s})+{}^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\boldsymbol{s})-J^{\mathrm{Reg},I}_{\mathrm{Geo,Big}}(f,\boldsymbol{s})+J^{\mathrm{Reg},II}_{\mathrm{Geo,Big}}(f,\boldsymbol{s}),$$

其中 $\iota(x):=\mathrm{diag}(x,1)$ 对所有 $x\in G'(\mathbb{A}_F)$, 均成立，且

$$\begin{aligned}
J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small}}(f,\boldsymbol{s}):=&\int_{P_0'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}f\left(\begin{pmatrix}y&u\\&1\end{pmatrix}\right)\theta(\eta xu)du\\
&\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}|\det x|^{s_1+s_2+1}|\det y|^{s_2}dydx,\\
J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\boldsymbol{s}):=&\int_{P_0'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}f\left(\begin{pmatrix}I_n&\\\eta x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&\\&1\end{pmatrix}\right)\\
&\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}|\det x|^{s_1+s_2}|\det y|^{s_2}dydx,\\
J^{\mathrm{Reg},I}_{\mathrm{Geo,Big}}(f,\boldsymbol{s}):=&\int_{P_0'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}|\det x|^{s_1+s_2+1}|\det y|^{s_2}\\
&\left[f\left(\begin{pmatrix}I_n&u\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&\\\eta x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&\\&1\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}I_n&\\\eta x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&u\\&1\end{pmatrix}\right)\right]dudydx,
\end{aligned}$$

$$J^{\mathrm{Reg},II}_{\mathrm{Geo,Big}}(f,\boldsymbol{s}) := \sum_{(\boldsymbol{\xi},t)\in F^n-\{\mathbf{0}\}}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{P'_0(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)} f\left(\iota(x)^{-1}\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \boldsymbol{\xi}\\ & 1 & t\\ & 1 & 1\end{pmatrix}\iota(xy)\right)$$
$$\phi'_1(x)\overline{\phi'_2(xy)}|\det x|^{s_1+s_2}|\det y|^{s_2}dxdy.$$

此外，(1.6) 可亚纯延拓至$\mathrm{Re}(s_1),\mathrm{Re}(s_2) > -1/(n+1)$。我们对上述积分作如下描述。

- 积分 $J_{\mathrm{Reg\ Geo,\ Small}}(f,\ \boldsymbol{s})$ 是一个 *Rankin-Selberg* 卷积，在 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>0$，绝对收敛，并表示 $L(1+s_1+s_2,\ \pi'_1\times\widetilde{\pi}'_2)$。
- 积分 $J_{\mathrm{Reg\ Geo,\ Dual}}(f,\ \boldsymbol{s})$ 是一个 *Rankin-Selberg* 卷积，在 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>1$，绝对收敛，并表示 $L(s_1+s_2,\ \pi'_1\times\widetilde{\pi}'_2)$。
- 积分 $J_{\mathrm{Reg}\ I\ \mathrm{Geo,\ Big}}(f,\ \boldsymbol{s})$ 在 $\mathrm{Re}(s_1),\ \mathrm{Re}(s_2)\gg 1$，绝对收敛，并可亚纯延拓至 $\mathrm{Re}(s_1),\ \mathrm{Re}(s_2) > -1/(n+1)$。
- 积分 $J_{\mathrm{Reg}\ II\ \mathrm{Geo,\ Big}}(f,\ \boldsymbol{s})$ 对所有 $\mathbf{s}\in\mathbb{C}^2$. 绝对收敛
- *JReg Geo(f, s; ϕ'_1,ϕ'_2)* 和 *JReg Spec(f, s; ϕ'_1,ϕ'_2)* 在 $s_1+s_2=\delta$, $\delta\in\{-1,0,1\}$ 上至多有简单极点，其他地方全纯。此外，*Res$_{s_1+s_2=\delta}$ ^{J}Reg Spec(f, s; ϕ'_1,ϕ'_2) = Res$_{s_1+s_2=\delta}$ ^{J}Reg Geo (f, s; ϕ'_1,ϕ'_2)* $\delta\in\{-1,0,1\}$.特别地，*(1.6)* 两侧的奇异部分彼此抵消。

- 几何侧 $J_{\mathrm{Reg\,Geo}}(f,\ \boldsymbol{s};\ \phi'_1,\ \phi'_2)$ 在层级方面具有稳定性，其含义见[MR12] 和 [FW09]。粗略地说，当层级足够大时，正则轨道积分恒等于零。参见 §5.6 中的定理5.4。

(*1.6*) 的精确描述(1.6) 见第D 节定理 §8.3 （当s 为一般值时）以及第E 节定理 §8.4 （当s 接近(0,0)时）。

注1.2. (i). 上标“Reg”（即正则化）表示：我们将谱侧中艾森斯坦级数的留数谱贡献和退化项从（1.3）移至几何侧（1.6）（参见 §2）。发散体现在 $L(1+s_1+s_2,\ \pi'_1\times\widetilde{\pi}'_2)$ 在 $s_1=s_2=0$ and $\pi'_1\simeq\pi'_2$. 处有一个单极点。(ii). 在 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Spec}}(f,\mathrm{s};\ \phi'_1,\ \phi'_2)$ 中，连续谱贡献的是沿临界线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$. 积分的 Rankin-Selberg L-函数的高阶矩

定理 A 解决了如何理解发散积分 (1.3) 这一定性解析问题。这为研究高秩中 Rankin-Selberg L-函数的均值提供了一种新方法。注意，谱侧J^{Reg} Spec$(f,0;\phi'_1,\phi'_2)$涉及中心 L-值的求和；借助L-函数解析理论中的技术，这些值常用于次凸性和非消失问题。此外，几何侧和谱侧都可表示为（几乎）可因子化的积分，因此一旦选定 f，便于进行具体计算或估计。特别地，几何侧 J^{Reg} Geo $(f,\mathrm{s};\ \phi'_1,\phi'_2)$不像 Kuznetsov 公式那样涉及微妙的 Kloosterman 和（例如参见 [Ye00], [Blo13]）。

我们在第 A 节 §9.1 和 §9.2 中给出了定理 L-函数的两侧的若干定量估计，从而对于 $n+1)\times\mathrm{GL}(n)$上的 数域取得了新的结果：在 L-值的完整谱上的中心 $\mathrm{GL}(n+1)$上的二阶矩计算，以及中心 L-值的非消失。见下文第 §1.2 节和第 §1.3 节。

1.2. **关于 L-函数二阶矩的** 一般线性群$(n+1)\times$一般线性群(n)。 在自守形式的解析理论中，研究相关自守 L-函数在适当族中的表现，并寻求其中的平均统计结果，一直是十分常见的研究主题（例如，参见 [IS00a]）。特别是，其渐近

赋值 的中心 二阶矩 L-值 一般线性群$(n+1)$ × 一般线性群(n) 的计算起着重要作用（参见 [BFK+18]，针对 $n=1$ 的情形）。随着底层群的秩（或 L-函数的次数）增加，这种计算的难度也会急剧上升。

利用相对迹公式定理 A，我们建立了数域上所有 L-值的一般线性群$(n+1)\times$一般线性群(n) 的中心 Rankin–Selberg 渐近二阶矩计算，其中 $n\geq 2$.

定理 B（二阶矩）。沿用前述记号。设 $\pi'\in\mathcal{A}_0([G'],\ \omega')$ 处处非分歧。设 $\mathfrak{N}\subsetneq\mathcal{O}_F$ 为一个理想，其范数为 $|\mathfrak{N}|$。则

$$\int_{\widehat{G(\mathbb{A}_F)}_{\mathrm{gen}}(\mathfrak{N})}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_\pi}\frac{|\beta_{\phi,\mathfrak{N}}|^2}{\alpha_{\phi,\mathfrak{N}}}\cdot\frac{|\Lambda(1/2,\pi\times\pi')|^2}{\mathbf{L}(\pi)}\cdot\mathcal{H}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty})d\mu_\pi$$
$$=c_{F,f_\infty}\cdot\mathcal{H}^{\heartsuit}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi'_\infty})\cdot\Lambda(1,\pi',\mathrm{Ad})|\mathfrak{N}|^n\log|\mathfrak{N}|+O(|\mathfrak{N}|^n),$$

其中，α_ϕ、$\mathfrak{n}$ 和 β_ϕ、$\mathfrak{n}$ 是局部因子（参见 *§9.1.1*），*L(π)*由（*9.3*）定义，$\mathcal{H}^{\heartsuit}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty})$（分别地，$\mathcal{H}^{\heartsuit}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi'_\infty})$）由 *(9.1)*（分别地，（*9.2*））定义，$\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}$（分别地，$\boldsymbol{\lambda}_{\pi'_\infty}$）是 π_∞（分别地，π'_∞）的 *Langlands* 参数，

$$c_{F,f_\infty}=n(n+1)2^{r_2(n-1)}\pi^{-r_2}|\mathfrak{D}_F|^{\frac{n}{2}}\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_F(s),$$

且隐含常数 $O(|\mathfrak{N}|^n)$ 取决于 F，π' 和 f_∞. 详见定理*9.1*，见 *§9.1*，其中有详细说明。

推论 1.4 (推论9.4)。沿用前文的记号。设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$. 中的一个大紧区域。设 $\pi'\in\mathcal{A}_0([G'],\omega')$ 处处非分歧。则

$$\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{A}_0(\mathfrak{N},\omega)\\ \boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}\in\mathcal{D}}}\frac{|L(1/2,\pi\times\pi')|^2}{L(1,\pi,\mathrm{Ad})}\ll_{\mathcal{D},\pi'}|\mathfrak{N}|^n\log|\mathfrak{N}|,\tag{1.7}$$

其中隐含常数取决于 π' 和 $\mathcal{D}$. 这里 $\mathcal{A}_0(\mathfrak{N},\omega)$ 表示 $G(\mathbb{A}_F)$ 中层级为 $\mathfrak{N}$ 且中心特征为 ω *(*参见定义*9.3*，见 *§9.1.1)*。

注记 1.5。注意，(1.7) 给出了层级方面的平均林德洛夫界：

$$\sum_{\pi\in\mathcal{A}_0(\mathfrak{N},\omega),\ \boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}\in\mathcal{D}}1\asymp_{\mathcal{D}}|\mathfrak{N}|^n.$$

1.3. L-函数在一般线性群$(n+1)\times$一般线性群(n)上的非消失。Rankin-Selberg L-函数在一般线性群$(n+1)\times$一般线性群(n)上的非消失传达了各种重要的算术信息，例如 Landau-Siegel 零点（参见 [IS00b]）、朗兰兹函子提升（参见 [GJR04]）、Gan-Gross-Prasad 猜想（参见 [Zha14a], [Zha14b]）、Whittaker 周期（参见 [GH16]）以及 Bloch-Kato 猜想（参见 [LTX+22]）。在许多此类例子中（例如 [LTX+22]），基域至少是 CM 域，而非有理数域 $\mathbb{Q}$。我们的目标是在一般数域上确立这些中心 L-值的非消失结果。

上述类型的许多低秩非消失结果已在$n\leq 2$上得到证明，$\mathbb{Q}$参见例如 [Duk95], [IS00b], [MRY23], [ST22]，此处列举远非穷尽。此外，在高秩情形下，少数其他情况下也已证明中心 L值的同时非消失，例如[Tsu21]（其中基域为 $\mathbb{Q}$）以及 [JN21]（其中假设拉马努金猜想成立，且基域为全实）。在这些情形中，相关的尖点表示族是无限。

借助相对迹公式定理 A，我们首次证明，对 一般n，无条件地同时获得 中心处的非消失结果

在数域上，一般线性群$(n+1)\times$一般线性群(n)的 Rankin-Selberg L-值。此外，相关的尖点表示族是有限的。

定理 C (同时非消失)。 设 F 是一个数域。设 $\mathfrak{N}_1'$, $\mathfrak{N}_2' \subseteq \mathcal{O}_F$ 为理想，使得 $\mathfrak{N}_1'\mathfrak{N}_2' \subsetneq \mathcal{O}_F$, 且 $\mathfrak{N}_1' + \mathfrak{N}_2' = \mathcal{O}_F$. 设 $\pi_j' \in \mathcal{A}_0([G'], \omega_j')$ 的算术导子为 $\mathfrak{N}_j'$, $j = 1, 2$。 进一步假设 $\pi_{1,v_*}' \simeq \pi_{2,v_*}'$ 在一个有限分裂位 v_*.

(1) 存在无穷多个 $\pi \in \mathcal{A}_0([G], \omega)$ 使得

$$L(1/2, \pi \times \pi_1')L(1/2, \pi \times \pi_2') \neq 0.$$

(2) 进一步假设 $\pi_{1,\infty}' \simeq \pi_{2,\infty}'$. 那么 $L(1/2, \pi\times\pi_1')L(1/2, \pi\times\pi_2') \neq 0$ 对某个 $\pi \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{N}; \mathfrak{N}_1', \mathfrak{N}_2', \sigma_{v_*}, \omega, \varepsilon)$成立。这里， $\mathcal{A}_0(\mathfrak{N}; \mathfrak{N}_1', \mathfrak{N}_2', \sigma_{v_*}, \omega, \varepsilon)$ 是 $G(\mathbb{A}_F)$ 的一个有限尖点表示集（参见 *§9.2.1* 中的定义 *9.8*）。

详见定理 *9.9* 中的详细描述。

注 1.7。 (i) 的非消失 $1/2$, $\pi \times \pi_1'$) L $(1/2$, $\pi \times \pi_2')$ 对某些$\pi \in \mathcal{A}_0$ $([G]$, $\omega)$ 可通过使用定理 A 的简便论证得到。 (ii) 推论 C 的第二部分更为微妙，因为

$$\#\mathcal{A}_0(\mathfrak{N}; \mathfrak{N}_1', \mathfrak{N}_2', \sigma_{v_*}, \omega, \varepsilon) \ll_{\mathfrak{N}_1', \mathfrak{N}_2', v_*} |\mathfrak{N}|^{n+O(\varepsilon)}$$

这是一个显式的有限 族，而集合 $\mathcal{A}_0([G], \omega)$ 是无限的。

推论 *1.8* (特殊情形)。设 π_1' 和 π_2' 是一般线性群$(n)/\mathbb{Q}$的尖点表示，其层级分别为 N_1 和 N_2。假设 $N_1N_2 > 1$、$(N_1, N_2) = 1$，以及 $\pi_{1,p}' \simeq \pi_{2,p}'$对某个 $p \nmid N_1'N_2'$.成立。固定 $\varepsilon > 0$。那么对于所有充分大的素数 N，若 $(N, pN_1N_2) = 1$，则存在一般线性群$(n+1)/\mathbb{Q}$ 的尖点表示 π，其层级$\asymp_{p,N_1,N_2} N$，并且 $\|\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}\| \leq N^\varepsilon$，使得

$$L(1/2, \pi \times \pi_1')L(1/2, \pi \times \pi_2') \neq 0.$$

这里 $\asymp_{p,N_1,N_2}$ 表示隐含常数依赖于 p, N_1 和 N_2, 并且 $\|\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}\|$是将 $\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}$ 视为 $\mathbb{C}^{n+1}$. 中的一点时的欧几里得范数

1.4. **本文结构**。 在 §2 中，我们介绍相对迹公式的框架并描述其正则化，该正则化不同于 [JLR99]。在 §3 至 §5 中，我们处理几何侧：验证在 $\mathbb{C}^2$ 中的某个锥内的收敛，并建立该锥外的亚纯延拓。谱侧在 §6中处理，我们证明在某个区域内绝对收敛，并进一步导出亚纯延拓。在 §7 中，我们证明谱侧和几何侧的亚纯部分完全一致。相对迹公式总结于 §8。在 §9 中，我们指定测试函数，并汇总前面各节关于两侧的估计，从而得到关于二阶矩计算和非消失问题的应用（参见 §9.1 和 §9.2）。

1.5. 记号。设 F 为一个数域，其整数环为 $\mathcal{O}_F$.。令 $[F:\ \mathbb{Q}]$ 为次数。令 N_F 为绝对范数。令 $\mathfrak{O}_F$ 为 F. 的不同理想。令 $\mathbb{A}_F$ 为 F. 的阿代尔群。令 Σ_F 为 F. 的赋值集合。记 $\Sigma_{F,\mathrm{fin}}$ (分别为 $\Sigma_{F,\infty}$) 为非阿基米德处（分别为阿基米德处）的集合。对于 $v \in \Sigma_F$，记相应的局部域为 F_v，其整数环为 $\mathcal{O}_{F_v}$。记 $\widehat{\ }$ 为 $\mathcal{O}_F = \prod_{v<\infty} \mathcal{O}_{F_v}$.。对于非阿基米德处 v，令 $\mathfrak{p}_v$ 为 $\mathcal{O}_{F_v}$. 中的极大素理想。给定一个整理想 $\mathcal{I}$，若 $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{p}_v$.，则称 $v \mid \mathcal{I}$。固定离散赋值环 $\mathcal{O}_{F_v}$. 的一个赋值参数 $\varpi_v \in \mathfrak{p}_v$。记 $e_v(\cdot)$ 为相对于 ϖ_v 的赋值，并将其归一化为 $e_v(\varpi_v) = 1$.。记 $\mathbb{F}_v = \mathcal{O}_{F_v}/\mathfrak{p}_v$ 为剩余域，其基数为 $\#\mathbb{F}_v = q_v$.。我们用 $v \mid \infty$ 表示一个阿基米德处 v，并在 v 为非阿基米德处时写作 $v < \infty$。令 $|\cdot|_v$ 为 F_v. 中的范数。置 $|\cdot|_\infty = \prod_{v|\infty} |\cdot|_v$

以及$|\cdot|_{\mathrm{fin}}=\prod_{v<\infty}|\cdot|_v$.。令 $|\cdot|_{\mathbb{A}_F}=|\cdot|_\infty\otimes|\cdot|_{\mathrm{fin}}$。在对 $\mathbb{A}_F^\times$ 或其关于 $F^\times$ 的商进行计算时，我们将简单地把$|\cdot|_{\mathbb{A}_F}$ 中的 $|\cdot|$ 写作。

记 Tr_F 为迹映射，并将其扩展到 $\mathbb{A}_F\to\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$.。设 $\psi_{\mathbb{Q}}$ 为 $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ 上的加法特征，使得 $\psi_{\mathbb{Q}}(t_\infty)=\exp(2\pi i t_\infty)$，其中 $t_\infty\in\mathbb{R}\hookrightarrow\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$.。令$\psi=\psi_{\mathbb{Q}}\circ\mathrm{Tr}_F$.。则 $\psi(t)=\prod_{v\in\Sigma_F}\psi_v(t_v)$，对于 $t=(t_v)_v\in\mathbb{A}_F$.。对于 $v\in\Sigma_F$，令 dt_v 为 F_v上的加法豪斯多夫测度，它相对于 ψ_v. 是自对偶的。于是 $dt=\prod_{v\in\Sigma_F}dt_v$是 $\mathbb{A}_F$上的标准玉河测度。令 $d^\times t_v=\zeta_{F_v}(1)dt_v/|t_v|_v$，其中 $\zeta_{F_v}(\cdot)$是局部戴德金ζ因子。特别地，对于所有有限位 $v.$，$\mathrm{Vol}(\mathcal{O}_{F_v}^\times,d^\times t_v)=\mathrm{Vol}(\mathcal{O}_{F_v},dt_v)=N_{F_v}(\mathfrak{D}_{F_v})^{-1/2}$。此外，$\mathrm{Vol}(F\backslash\mathbb{A}_F;\,dt_v)=1$，且 $\mathrm{Vol}(F\backslash\mathbb{A}_F^{(1)},d^\times t)=\operatorname{Res}_{s=1}\zeta_F(s)$，其中 $\mathbb{A}_F^{(1)}$是范数为 1 的阿代尔群 $\mathbb{A}_F^\times$的子群，而 $\zeta_F(s)=\prod_{v<\infty}\zeta_{F_v}(s)$是有限戴德金ζ函数。关于 dt 和 $d^\times t$ 的更多性质，可参见 [Lan94], 第 XIV 章。

设 $G=\mathrm{GL}(n+1)$ 和 $G'=\mathrm{GL}(n)$。以 Z（分别以 Z'）表示 G（分别为 G'）的中心。对于 $z'=\alpha I_n\in Z'(\mathbb{A}_F)$ $\alpha\in\mathbb{A}_F^\times$，我们简记为 $|z'_v|_v=|\alpha_v|_v,v\in\Sigma_F$.。设 $G'^0(\mathbb{A}_F)$ 为 $G'(\mathbb{A}_F)$ 的子群，由满足$|\det g'|=1.$ 的 $g'\in G'(\mathbb{A}_F)$ 构成。于是，子群 $Z'(\mathbb{A}_F)G'^0(\mathbb{A}_F)$ 在 $G'(\mathbb{A}_F)$ 中是开子群，且指数为 1（若 F 是函数域，则为 $n-1$）。因此我们可以写作 $G'(\mathbb{A}_F)=Z'(\mathbb{A}_F)G'^0(\mathbb{A}_F)$。设 $\overline{G}=Z\backslash G$ 和 $\overline{G'}=Z'\backslash G'.$。按照 Rankin-Selberg 理论中的惯例，我们将 $\overline{G'}$ 与 G'^0 等同。对于 $x\in G(\mathbb{A}_F)$ 或 $G'(\mathbb{A}_F)$，我们用 $x^\vee$ 表示 $x.$ 的转置逆。固定从 G' 到 G 的嵌入：

$$\iota:\ G'\longrightarrow G,\quad \gamma\mapsto\begin{pmatrix}\gamma & \\ & 1\end{pmatrix}.$$

对于矩阵 $g=(g_{i,\ j})\in G(\mathbb{A}_F)$，我们用 $E_{i,\ j}(g)=g_{i,\ j}$ 表示其第 (i,j) 个元素。对于向量 $\mathbf{v}=(v_1,\cdots,v_m)$，我们用 $E_i(\mathbf{v})=v_i$ 表示 $\mathbf{v}$ 的第 i 个分量。令 $m_1,m_2\in\mathbb{N}.$。我们将 $M_{m_1,\ m_2}$ 记作 $m_1\times m_2$ 矩阵群。

对于定义在 F 上的代数群 H，我们记作 $[H]:=H(F)\backslash H(\mathbb{A}_F)$。我们按如下方式在 $H(\mathbb{A}_F)$ 上赋予测度：对于 H 的每个幺幂群 U，我们在$U(\mathbb{A}_F)$ 上赋予哈尔测度，使得 $U(F)$ 赋予计数测度，且 $[U]$ 的测度为 1。我们在 $H(\mathbb{A}_F)$ 的极大紧子群 K 上赋予哈尔测度，使得 K 的总体积为 1。当 H 分裂时，我们也在 H 的极大分裂环面上赋予由 $\mathbb{A}_F^\times.$ 的玉河测度诱导的玉河测度。

设 ω和 ω_1,ω_2是定义在 $\mathbb{A}_F^\times$上的酉幂零类特征，并且在$\mathbb{R}_+^\times.$上平凡。记 $\mathcal{A}_0([G],\omega)$（分别为 $\mathcal{A}_0([G'],\omega_i)$）为$G(\mathbb{A}_F)$（分别为 $G'(\mathbb{A}_F)$）上中心特征为 ω（分别为 ω_i）的尖点表示集合，$i=1,2$。令 $\omega'=\omega_1\overline{\omega}_2.$

设 B（分别为 B'）是 G（分别为 G'）中的上三角矩阵群。设 T_B（分别为 $T_{B'}$）是 B（分别为 B'）的莱维子群。设 $A=Z\backslash T_B$ 和$A'=Z'\backslash T_{B'}$. 设 N（分别为 N'）是 B（分别为 B'）的幺幂根基。设 R' 是 G' 中类型为 $(1,n-2,1)$ 的标准抛物子群，并且 $R'_0=Z'\backslash R'.$ 令W为相对于 (B,T_B) 的 G 的 Weyl 群。设 $\Delta=\{\alpha_{1,2},\alpha_{2,3},\cdots,\alpha_{n,n+1}\}$为单根集合，对每个单根 $\alpha_{k,\ k+1}$, $1\le k\le n$，记w_k 为相应的反射。具体而言，对每个 $1\le k\le n$,

$$w_k=\begin{pmatrix}I_{k-1} & & \\ & S_2 & \\ & & I_{n-k}\end{pmatrix},\ \text{where } S_2=\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}.$$

对于 $1\le k\le n-1$，记 w'_k 为 G' 中满足 $\iota(w'_k)=w_k.$的唯一元素。于是，w_k生成相对于 $(B',T_{B'})$ 的 G' 的 Weyl 群 W'。令$\widetilde{w}'_j=w'_jw'_{j+1}\cdots w'_{n-1}$, $1\le j\le n-1.$记 $N'_j=N'/(\widetilde{w}'_jN'\widetilde{w}'^{-1}_j)$。记 $\widetilde{w}'_n=I_n$和 $N'_n=I_n.$。通过令 $\theta(u)=$，在 $[N]$上定义一般特征 θ

$\prod_{j=1}^{n}\psi(u_{j,\ j+1})$，对于 $u=(u_{i,\ j})_{1\le i,\ j\le n+1}\in N(\mathbb{A}_F)$。令 $\theta'=\theta\mid_{[\iota(N')]}$ 为 $[N']$.上的一般特征

设 P（分别为 P'）是 G（分别为 G'）中类型为 $(n,1)$（分别为 $(n-1,1)$）的标准抛物子群。设 $P_0=Z\backslash P$（分别为 $P_0'=Z'\backslash P'$）。我们用 Q 表示 $G.$的一个一般抛物子群

设 $Z'^{T}(\mathbb{A}_F)=\{z=\{\mathrm{diag}(a,a,\cdots,a)\in Z'(\mathbb{A}_F)\colon T^{-1}\le|a|\le T\}.$设 $[Z'^{T}]=\{z=\{\mathrm{diag}(a,a,\cdots,a)\in Z'(F)\backslash Z'(\mathbb{A}_F)\colon\quad T^{-1}\le|a|\le T\}.$记$\mathbf{s}=(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2.$

记 N_P（分别）为 P（分别）的幺幂根基。令 $\mathcal{S}(\mathbb{A}_F^n)$ 为 $\mathbb{A}_F^n.$ 上 Bruhat-Schwartz 函数的空间。令 $\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_F^n)$ 为其傅里叶变换为 $\widehat{\Phi}$ 的函数空间，并令 $\omega''=|\cdot|^{in\alpha}$ 为 $Z'(\mathbb{A}_F)$ 的一个酉特征。定义艾森斯坦级数

$$E(s,x;\Phi,\omega'')=\sum_{\delta\in P_0(F)\backslash\overline{G'}(F)}\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\Phi(z\eta\delta x)|\det zx|^{s}\omega''(z)d^{\times}z \tag{1.8}$$

在 $[G'].$ 上。那么，$E(s,x;\Phi,\omega'')$ 在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时绝对收敛，并可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，其表达式为

$$E(s,x;\Phi,\omega'')=E_+(s,x;\Phi,\omega'')+E_+^{\wedge}(s,x;\Phi,\omega'')+E_{\mathrm{Res}}(s,x;\Phi,\omega''), \tag{1.9}$$

其中

$$E_{\mathrm{Res}}(s,x;\Phi,\omega'')=-\frac{\Phi(0)|\det x|^{s}}{n(s+i\alpha)}+\frac{\widehat{\Phi}(0)|\det x|^{s-1}}{n(s-1+i\alpha)}$$

$$E_+(s,x;\Phi,\omega'')=\sum_{\delta\in P_0(F)\backslash\overline{G'}(F)}\int_{|z|\ge1}\Phi(z\eta\delta x)|\det zx|^{s}\omega''(z)d^{\times}z,$$

$$E_+^{\wedge}(s,x;\Phi,\omega'')=\sum_{\delta\in P_0(F)\backslash\overline{G'}(F)}\int_{|z|\ge1}\widehat{\Phi}(z\eta\delta x)|\det zx|^{1-s}\omega''^{-1}(z)d^{\times}z.$$

此外，$E_+(s,x;\ \Phi,\omega'')$ 和 $E_+^{\wedge}(s,x;\ \Phi,\omega'')$ 对所有 $s.$ 均绝对收敛。定义

$$\mathcal{R}:=\{\mathbf{s}=(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2:\ \mathrm{Re}(s_1),\ \mathrm{Re}(s_2)>-1/(n+1)\}. \tag{1.10}$$

定义 $K'=\prod_v K_v'$，其中每个 K_v' 都是 $G'(F_v)$ 的一个极大紧子群；当 $v<\infty.$时，$K_v'=G'(\mathcal{O}_{F_v})$

对于 $j\in\{1,2\}$，令 $\pi_j'=\otimes_{v\in\Sigma_F}\pi_{j,\ v}'\in\mathcal{A}_0([G'],\omega')$ 处处包含非分歧向量。取 $\phi_j'\in\pi_j'$ 为局部新形式，并令 $\langle\phi_j',\phi_j'\rangle=1.$

对于定义在 $G(\mathbb{A}_F)$ 上的函数 h，我们通过令 $h^*(g)=h(g^{-1})$ $g\in G(\overline{\mathbb{A}_F})$ 来定义 h^*。设 $F_1(s)$ $F_2(s)$ 为两个亚纯函数。若存在一个整函数 $E(s)$，使得 $F_1(s)=E(s)F_2(s)$，则记 $F_1(s)\sim F_2(s)$。如果存在绝对常数 c 和 C，使得 $c\beta\le\alpha\le C\beta.$，则记 $\alpha\asymp\beta$ for $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

全文中，我们遵循 ε-约定：也就是说，ε 始终为正数，可以取任意小，但在不同出现位置可以有所不同。

致谢 我非常感谢 Peter Sarnak 的鼓励和多次讨论。感谢 Dinakar Ramakrishnan、Djordje Milićević、Paul Nelson 和 Shouwu Zhang 提出的精准意见和宝贵建议。

2. 相对迹公式与正则化

2.1. 关于 G的初等相对迹公式。考虑一个光滑函数 $f\colon G(\mathbb{A}_F)\to\mathbb{C}$，它关于紧子群 K 在 $G(\mathbb{A}_F)$ 中左右 K-有限，按照 $Z(\mathbb{A}_F)$ 的酉特征 ω^{-1} 变换，并且模 $Z(\mathbb{A}_F)$ 具有紧支集。记这类函数的集合为 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_F)\ \omega^{-1})$。每个

$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_F)\ \omega^{-1})$ 定义了一个积分算子

$$R(f)\phi(g) = \int_{\overline{G}(\mathbb{A}_F)} f(g')\phi(gg')dg', \tag{2.1}$$

作用于函数空间 $L^2([G],\omega)$ 上，这些函数定义在 $[G]$ 上，在 $Z(\mathbb{A}_F)$ 的作用下按 ω 变换，并且在 $[\overline{G}]$. 上平方可积。该算子由核函数表示

$$\mathrm{K}^f(g_1,g_2) = \sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} f(g_1^{-1}\gamma g_2),\quad g_1,g_2 \in G(\mathbb{A}_F). \tag{2.2}$$

众所周知，$L^2([G],\omega)$ 可分解为尖点形式空间 $L^2_0([G],\omega)$ 与空间 $L^2_{\mathrm{Eis}}([G],\omega)$ 和 $L^2_{\mathrm{Res}}([G],\omega)$ 的直和，后两者分别由艾森斯坦级数和艾森斯坦级数的留数定义。于是，核函数 $\mathrm{K}(g_1,g_2)$ 可分解为

$$\mathrm{K}^f(g_1,g_2) = \mathrm{K}^f_0(g_1,g_2) + \mathrm{K}^f_{\mathrm{Eis}}(g_1,g_2) + \mathrm{K}^f_{\mathrm{Res}}(g_1,g_2). \tag{2.3}$$

记 $\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(g_1,g_2) = \mathrm{K}^f{}_{\mathrm{Eis}}(g_1,g_2) + \mathrm{K}^f{}_{\mathrm{Res}}(g_1,g_2)$。具体而言，谱展开为

$$\mathrm{K}^f_0(g_1,g_2) = \sum_{\pi\in\mathcal{A}_0([G],\omega)} \sum_{\phi\in\mathcal{B}_\pi} \pi(f)\phi(g_1)\overline{\phi(g_2)}, \tag{2.4}$$

其中，$\mathfrak{B}_\pi$ 是 π. 的一组标准正交基。由于测试函数 f 是 K-有限的，对 $\phi\in\mathcal{B}_\pi$ 的求和实际上是有限的。如果上下文中测试函数明确，我们通常省略上标 f。

设 π（分别地，π'）是 G（$\mathbb{A}_F$）上（分别地，G'（$\mathbb{A}_F$）上的）一个酉尖点表示。设 $\phi\in\pi$ 和 $\phi'\in\pi'$. 。那么周期积分

$$\mathcal{P}(\phi,\phi') = \int_{[G']} \phi(\iota(x))\phi'(x)dx.$$

是良定义的。此外，根据 Rankin-Selberg 理论，它是中心值 $L(1/2,\ \pi\times\pi')$ 的积分表示。将尖点核函数 2.4 的谱展开（$\mathrm{K}_0(g_1,\ g_2)$ 与此结合，我们便得到

$$J_0(f) = \iint \mathrm{K}_0(\iota(x),\iota(y))\phi'(x)\overline{\phi'(y)}dxdy = \sum_{\pi}\sum_{\phi\in\mathcal{B}_\pi} \mathcal{P}(\phi,\phi')\overline{\mathcal{P}(R(f)\phi,\phi')}, \tag{2.5}$$

其中，二重积分取遍 x、$y\in[G']$ 和 $\pi\in\mathcal{A}_0$（$[G]$，ω）。

由于 $\mathrm{K}_0(g_1,\ g_2)$ 在 $[G']\times[G']$ 上快速衰减，因此（2.5）左侧绝对收敛。所以，可以交换（2.5）中的积分。根据 Rankin-Selberg 理论，（2.5）大致给出了中心 L值在一般线性群$(n+1)\times$一般线性群(n) 上的二阶矩：

$$J_0(f) \approx \sum_{\pi} c_f(\pi,\pi')\left|L(1/2,\pi\times\pi')\right|^2, \tag{2.6}$$

其中 $c_f(\pi,\pi')$ 是一个依赖于 f和 π,π'. 的常数

为计算它，通常的策略是利用 (2.3)，将 $\mathrm{K}_0(g_1,g_2) = \mathrm{K}(g_1,g_2) - \mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(g_1,g_2)$ 代入 (2.5)，其中 $\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(g_1,g_2) = \mathrm{K}_{\mathrm{Eis}}(g_1,g_2) + \mathrm{K}_{\mathrm{Res}}(g_1,g_2)$，形式上可得

$$J_0(f) = J_{\mathrm{Geo}}(f) - J_{\mathrm{ER}}(f), \tag{2.7}$$

其中

$$J_{\mathrm{Geo}}(f) = \int_{[G']}\int_{[G']} \mathrm{K}(\iota(x),\iota(y))\phi'(x)\overline{\phi'(y)}dxdy,$$
$$J_{\mathrm{ER}}(f) = \int_{[G']}\int_{[G']} \mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(\iota(x),\iota(y))\phi'(x)\overline{\phi'(y)}dxdy.$$

相对迹公式的基本思想是计算（2.7）的右端。

几何侧：将（2.2）代入（2.7），则几何侧变为

$$J_{\mathrm{Geo}}(f)=\int_{[G']}\int_{[G']}\sum_{\gamma\in\overline{G}(F)}f(\iota(x)^{-1}\gamma\iota(y))\phi'(x)\overline{\phi'(y)}dxdy. \tag{2.8}$$

通过一些标准的几何操作，可以形式上将 $J_{\mathrm{Geo}}(f)$ 写成若干积分的线性组合：

$$J_{\mathrm{Geo}}(f)=\sum_{\gamma}\mathrm{Vol}([H_\gamma])\int_{H_\gamma(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)\times G'(\mathbb{A}_F)}f(\iota(x)^{-1}\gamma\iota(y))\phi'(x)\overline{\phi'(y)}dxdy,$$

其中，γ 遍历 $Z(F)\iota(G'(F))\backslash G(F)/\iota(G'(F))$ 的代表元，而 H_γ 是 γ. 的稳定子。我们称上述关于 x 和 y 的积分为加权轨道积分。为简便起见，我们将其称为轨道积分，如同 Jacquet 相对迹公式中的普通轨道积分。

谱侧：谱贡献 J_{ER}（f）可以写成 Eisenstein 级数周期积分的直积分。此外，在相对迹公式的一个简单版本中（例如，参见 [RR05] 和 [FW09]），可以选取适当的测试函数 f 以消去非尖点贡献 K_{ER}（g_1，g_2），从而J_{ER}（f）$=0$.

然而，许多轨道积分（例如，相对于 $\gamma\in\iota(G'(F))$的轨道积分）并不收敛。为克服这些解析障碍，需要对相对迹公式进行某种正则化。处理收敛问题最有力的方法之一是 Arthur截断过程（例如参见 [Art78] 和 [Art80]）。人们期望为 $J_{\mathrm{Geo}}(f)$ 和 $J_{\mathrm{ER}}(f)$ 构造修正截断，从而能够计算截断后的分布。文献 [IY15] 中针对单个 Rankin-Selberg 周期积分的正则化应当与此相关。然而，几何侧和谱侧所需的截断尚未建立。

我们不对核函数 $\mathrm{K}(x,y)$ 和 $\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(x,y)$进行截断，而是提出一种替代方法来解决收敛问题，并将（2.7）式右端表示为某些 L值，模去一些微小的尾项；在许多实际情形中，这些尾项会消失。我们的正则化包含四个主要步骤：

(I). 我们考虑某个变形 $J_0(f,\mathbf{s})$，它是两个复变量 $\mathbf{s}=(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2$ 的函数，并满足 $J_0(f)=J_0(f,\mathbf{s})$ 在$\mathbf{s}=(0,0)$。对中心 $Z'(\mathbb{A}_F)$ 施加初等截断，得到截断函数 $J_0^T(f,\mathbf{s})$，其中 $J_0^T(f,\mathbf{s})\to J_0(f,\mathbf{s})$，并且 $T\to\infty$. 此外，相应的几何侧和谱侧 $J_{\mathrm{Geo}}^T(f,\mathbf{s})$ 与 $J_{\mathrm{ER}}^T(f,\mathbf{s})$定义良好（即收敛），且满足

$$J_0^T(f,\mathbf{s})=J_{\mathrm{Geo}}^T(f,\mathbf{s})-J_{\mathrm{ER}}^T(f,\mathbf{s}).$$

详见下文第2.2 节。

(II). 我们将通过傅里叶展开，对 $J_{\mathrm{Geo}}^T(f,\mathbf{s})$ 和 $J_{\mathrm{ER}}^T(f,\mathbf{s})$ 引入一种更精细的分解，使得每一项对所有 $\mathbf{s}$ 都绝对收敛。这种处理使我们能够将 $J_{\mathrm{ER}}^T(f,\mathbf{s})$ 的奇异部分移至几何侧 $J_{\mathrm{Geo}}^T(f,\mathbf{s})$。详见第2.3 节。我们将证明谱侧的剩余贡献 $J^{\mathrm{Reg},\,T\,\text{谱}}(f,\mathbf{s})$ 具有良好的增长性质。

(III). 在 §2.4 中，我们进一步根据布鲁哈特分解将几何侧分解为 $J^{\mathrm{Reg},\,T\text{几何},\,\text{小}}(f,\mathbf{s})+J^{\mathrm{Reg},\,T\text{几何},\,\text{大}}(f,\mathbf{s})$，从而得到正则化相对迹公式（见（2.20））：

$$J_{\mathrm{Spec}}^{\mathrm{Reg},T}(f,\mathbf{s})=J_{\mathrm{Geo,Small}}^{\mathrm{Reg},T}(f,\mathbf{s})+J_{\mathrm{Geo,Big}}^{\mathrm{Reg},T}(f,\mathbf{s}). \tag{2.9}$$

(IV). 随后我们证明（2.9）在以下条件下成立：$\mathrm{Re}(s_1) \geq 1$ 且 $\mathrm{Re}(s_2) \geq 1$，取$T \to \infty$之后，由此在该处得到全纯函数相等。最后一个关键步骤是证明两边都可亚纯延拓，从而得到区域内亚纯函数之间的等式

$$\mathcal{R} := \{\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 : \ \mathrm{Re}(s_1) > -1/(n+1),\ \mathrm{Re}(s_2) > -1/(n+1)\}$$

(cf. (1.10) in §1.5).

本节将完成前三个步骤，而本文其余部分（即 §3–§7）将专门讨论步骤（IV）。

2.2. **正则化（I）：变形与截断过程。** 我们从一般情形开始。设 $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_F)\ \omega)$。设 $\pi_i' \in \mathcal{A}_0([G'], \omega_i)$，且 $\phi_i' \in \pi_i', 1 \leq i \leq 2$. 记作 $\omega' = \omega_1\overline{\omega}_2$. 令 $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$. 定义

$$J_0(f, \mathbf{s}; \phi_1', \phi_2') = \int_{[G']}\int_{[G']} \mathrm{K}_0^f(\iota(x), \iota(y))\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}|\det x|^{s_1}|\det y|^{s_2}dxdy. \tag{2.10}$$

其中 K_0^f 是相对于测试函数 f的核函数的尖点部分。由于 $\mathrm{K}_0(x, y)$ 在 $[G'] \times [G']$上快速衰减，因此上述积分绝对收敛。此外，当 $\phi_1' = \phi_2' = \phi'$ 且 $s_1 = s_2 = 0$时，则 $J_0(f, \mathbf{s})$ 化为 $J_0(f)$，其定义见（2.5）（参见 §2.1）。

为简化记号，以下将 $J_0(f, \mathbf{s})$ 记作 $J_0(f, \mathbf{s}; \phi_1', \phi_2')$，省略 ϕ_1' 和 ϕ_2'. 。同样的简写也适用于它的对应项。

为使相对迹公式 (2.7) 定义良好，我们对 $Z'(\mathbb{A}_F)$ 的中心 $G'(\mathbb{A}_F)$ 施以初等截断。对于 $T > 0$，令 $Z'^T(\mathbb{A}_F) = \{z = aI_n \in Z'(\mathbb{A}_F) : \ T^{-1} \leq |a| \leq T\}$. 记 $[Z'^T] = \{z = aI_n \in [Z'] : \ T^{-1} \leq |a| \leq T\}$.定义 $J_0^T(f, \mathbf{s})$ 为

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]} \mathrm{K}_0(\iota(z_1x), \iota(z_1z_2y)\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}$$
$$|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1 d^\times z_2.$$

由于 $J_0(f,\mathbf{s})$ 绝对收敛，因此

$$J_0(f, \mathbf{s}) = \lim_{T\to\infty} J_0^T(f, \mathbf{s}).$$

定义 $J_{\mathrm{ER}}^T(f,\mathbf{s})$ 为

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]} \mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(\iota(z_1x), \iota(z_1z_2y)\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}$$
$$|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1 d^\times z_2$$

$J_0^T(f,\mathbf{s})$ 的非尖点对应项。同样，定义 $J_{\mathrm{Geo}}^T(f,\mathbf{s})$ 为

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]} \mathrm{K}(\iota(z_1x), \iota(z_1z_2y))\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}$$
$$|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1 d^\times z_2.$$

注意，K 和 K_{ER} 在 $\overline{G'}(\mathbb{A}_F) \times \overline{G'}(\mathbb{A}_F)$上缓慢增长，而 ϕ' 在 $[\overline{G'}]$. 上快速衰减。因此，对于固定的T 和 $\mathbf{s}$ （实部固定），上述积分定义良好且绝对收敛。此外，由（2.3）可得:

$$J_0^T(f, \mathbf{s}) = J_{\mathrm{Geo}}^T(f, \mathbf{s}) - J_{\mathrm{ER}}^T(f, \mathbf{s}). \tag{2.11}$$

然而，当 $T \to \infty$. 时，$J_{\mathrm{Geo}}^T(f,\mathbf{s})$ 和 $J_{\mathrm{ER}}^T(f,\mathbf{s})$ 都不收敛。我们将证明 $J_{\mathrm{Geo}}^T(f,\mathbf{s})$ 和 $J_{\mathrm{ER}}^T(f,\mathbf{s})$ 的奇异部分彼此抵消；更确切地说，当 $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^2$ 、$\mathrm{Re}(s_1) \gg 0$ 且 $\mathrm{Re}(s_2) \gg 0$ 时，$J_{\mathrm{Geo}}^T(f,\mathbf{s})$ 和

$J^T_{\mathrm{ER}}(f,\mathbf{s})$ 收敛，因为 $T\to\infty$. 我们的论证依赖于下一小节中通过某种傅里叶展开对核函数进行的分解。

2.3. **正则化（II）：核函数的处理。** 我们将沿用 [Yan19] 和 [Yan21] 中的观察，通过反复进行泊松求和，将谱展开（2.3）改写为某种变体形式（见 §2.3 中的引理 2.2）。我们的正则化从这一谱展开出发，并将亚纯延拓的思想纳入相对迹公式。

2.3.1. 拟抛物傅里叶展开。 假设 $n\geq 2$. 令 ψ 为 $F\backslash\mathbb{A}_F$. 上非平凡的加性特征。那么对任意 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in F^n$，定义特征 $\psi_\alpha: N(\mathbb{A}_F)\to\mathbb{C}$ 为

$$\psi_\alpha(u)=\prod_{i=1}^{n}\psi\left(\alpha_i u_{i,i+1}\right),\quad \forall\ u=(u_{i,j})_{(n+1)\times(n+1)}\in N(\mathbb{A}_F).$$

记 $\psi_k=\psi_{(0,\cdots,0,1,\cdots,1)}$（其中前 $n+1-k$ 个分量为 0，其余 k 个分量为 1），并记 $\theta=\psi_{(1,\cdots,1)}$ 为定义惠特克函数时所用的标准泛特征。

对于 $1\leq k\leq n$，令 B_{n+1-k} 为一般线性群 GL$(n+1-k)$ 的标准伯雷尔子群（即由非奇异上三角矩阵构成的子群）；令 N_{n+1-k}为 B_{n+1-k}. 的幺幂根基。对于任意 i、$j\in\mathbb{N}$，令 $M_{i,\ j}$ 为 $i\times j$-矩阵的加法群概形。定义幺幂根基

$$N_{(k,1,\cdots,1)}=\left\{\begin{pmatrix} I_k & B\\ & D\end{pmatrix}:\ B\in M_{k,n+1-k},\ D\in N_{n+1-k}\right\},\ 1\leq k\leq n\ .$$

对于 $1\leq k\leq n$，定义广义拟抛物子群

$$R_k=\left\{\begin{pmatrix} A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}:\ A\in \mathrm{GL}(k),\ C\in M_{k,n+1-k},\ B\in N_{n+1-k}\right\}.$$

对于 $2\leq k\leq n$，定义 R_k 的子群 R_k^0 如下

$$\left\{\begin{pmatrix} A & B' & C\\ 0 & a & D\\ 0 & 0 & B\end{pmatrix}:\ A\in \mathrm{GL}(k-1),\ \begin{pmatrix} B' & C\\ a & D\end{pmatrix}\in M_{k,n+2-k},\ B\in N_{n+1-k}\right\}.$$

我们还定义 $R_0=R_1^0:=N_{(1,1,\cdots,1)}$ 为 $G=$ 的标准博雷尔子群 $n+1$GL$(n+1)$ 的幺幂根基。于是得到拟抛物傅里叶展开：

引理 2.1。 设 h 是定义在 $P_0(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$上的连续函数。那么有

$$h(x)=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{\delta_k\in R_{n+1-k}(F)\backslash R_n(F)}\int_{[N_{(n+1-k,1,\cdots,1)}]}h(u\delta_k x)\psi_{k-1}(u)du \tag{2.12}$$

如果右端绝对收敛且局部一致收敛。

2.3.2. 相对迹公式的重新表述。对于 $0\leq i,\ j\leq n$，定义

$$\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(g_1,g_2)=\sum_{\alpha_i\in R_{n+1-i}(F)\backslash R_n(F)}\ \sum_{\beta_j\in R_{n+1-j}(F)\backslash R_n(F)}\int_{[N_{(n+1-i,1,\cdots,1)}]}$$
$$\int_{[N_{(n+1-j,1,\cdots,1)}]}\mathrm{K}(u\alpha_i g_1,v\beta_j g_2)\psi_{i-1}(u)\psi_{j-1}(v)dudv.$$

记 $\mathcal{F}_0\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}(g_1,g_2)$ 为 $=\mathrm{K}(g_1,g_2)$，并且

$$\mathcal{F}_i\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}(g_1,g_2)=\sum_{\alpha_i\in R_{n+1-i}(F)\backslash R_n(F)}\int_{[N_{(n+1-i,1,\cdots,1)}]}\mathrm{K}(u\alpha_i g_1,g_2)\psi_{i-1}(u)du,$$

$$\mathcal{F}_0\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(g_1,g_2)=\sum_{\alpha_j\in R_{n+1-j}(F)\backslash R_n(F)}\int_{[N_{(n+1-j,1,\cdots,1)}]}\mathrm{K}(g_1,v\beta_j g_2)\psi_{j-1}(v)dv.$$

类似地，在上述定义中将 $\mathrm{K}(g_1,g_2)$ 替换为 $\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(g_1,g_2)$，即可定义 $\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(g_1,g_2)$。

引理 2.2. 沿用前述记号。设 $g_1,g_2\in G(\mathbb{A}_F)$. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_0(g_1,g_2)=&\mathcal{F}_0\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}(g_1,g_2)-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}(g_1,g_2)-\sum_{j=1}^{n}\mathcal{F}_0\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(g_1,g_2)\\&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(g_1,g_2)-\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\,\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(g_1,g_2).\end{aligned}$$

证明。 将 $\pi\in\mathcal{A}_0([G],\omega)$ 和 $\phi\in\pi$ 记作

$$W_\phi(x)=\int_{[N]}\phi(ux)\overline{\theta}(u)du,$$

与 ϕ. 相关联的 Whittaker 函数。取傅里叶-惠特克展开：

$$\phi(x)=\sum_{\gamma\in N(F)\backslash P_0(F)}W_\phi(\gamma x)=\sum_{\gamma\in N(F)\backslash P_0(F)}\int_{[N]}\phi(u\gamma x)\overline{\theta}(u)du. \tag{2.13}$$

这由（2.13）以及 K_0 的谱展开可得

$$\mathrm{K}_0(g_1,g_2)=\sum_{\gamma_1\in N(F)\backslash P_0(F)}\sum_{\gamma_2\in N(F)\backslash P_0(F)}\int_{[N]}\int_{[N]}\mathrm{K}_0(u\gamma_1 g_1,v\gamma_2 g_2)\overline{\theta}(u)\theta(v)dudv.$$

结合（2.3），我们可以将 $\mathrm{K}_0(g_1,g_2)$ 写成

$$\mathrm{K}_0(g_1,g_2)=\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\,\mathrm{K}(g_1,g_2)-\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\,\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(g_1,g_2). \tag{2.14}$$

由引理 2.1 可得以下表达式：

$$\mathcal{F}_0\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(g_1,g_2)=\sum_{i=1}^{n+1}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(g_1,g_2),\quad 0\le j\le n+1,$$

$$\mathcal{F}_i\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}(g_1,g_2)=\sum_{j=1}^{n+1}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(g_1,g_2),\quad 0\le i\le n+1,$$

由此，$\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\,\mathrm{K}(g_1,g_2)$ 等于

$$\mathcal{F}_0\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}(g_1,g_2)-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}(g_1,g_2)-\sum_{j=1}^{n}\mathcal{F}_0\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(g_1,g_2)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(g_1,g_2).$$

因此，由（2.14）及上述等式即可推出该引理。 □

注 2.3. 当 $n=1$, 引理 2.2 可由两次应用泊松求和公式得到。

由于 $\mathcal{F}_0\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}(g_1,\ g_2)=\mathrm{K}(g_1,\ g_2)$，由引理2.2可知，$\mathrm{K}(g_1,\ g_2)-\mathrm{K}_0(g_1,\ g_2)-\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\,\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(g_1,\ g_2)$ 等于

$$\sum_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}(g_1,g_2)+\sum_{j=1}^{n}\mathcal{F}_0\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(g_1,g_2)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(g_1,g_2). \tag{2.15}$$

注意，（2.15）中的核函数是几何的，即在（2.15）中出现的是 K，而不是 K_{ER}。于是，我们将非尖点核 $\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(g_1,g_2)=\mathrm{K}(g_1,g_2)-\mathrm{K}_0(g_1,g_2)$ 分解为非恒定傅里叶系数 $\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\,\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(g_1,g_2)$ 与几何核函数（2.15）之和。这一特征是我们对谱侧的处理与 Arthur 的截断方法之间的主要区别之一。

定义 2.4 ($\mathcal{F}_{i,j}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$)。令 $0\le i,j\le n$. 定义 $\mathcal{F}_{i,j}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 为

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(\iota(z_1x),\iota(z_1z_2y))\phi'_1(x)\overline{\phi'_2(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}$$
$$|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

引理 2.5。沿用此前的记号。令 $0\le i,j\le n$. 则 $\mathcal{F}_{i,j}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\boldsymbol{s})\equiv 0$除非 $i,j\in\{0,1\}$.

证明。只需证明 $\mathcal{F}_{i,j}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})\equiv 0$ 对于 $2\le i\le n$ 和 $0\le j\le n$. 根据 $\mathcal{F}_{i,j}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 的定义，我们只需证明

$$\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(\iota(z_1x),\iota(z_1z_2y))\phi'_1(x)\overline{\phi'_2(y)}|\det x|^{s_1}|\det y|^{s_2}dxdy=0. \tag{2.16}$$

对于 $2\le i\le n$ 和 $0\le j\le n$. 令

$$R'_k=\left\{\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}:\ A\in GL_k,\ C\in M_{k\times(n-k)},\ B\in N_{n-k}\right\}.$$

因此 $\iota(R'_k)=R_k\cap\iota(G')$。于是我们得到

$$R_{n+1-i}(F)\backslash R_n(F)=\iota(R'_{n+1-i}(F)\backslash G'(F)). \tag{2.17}$$

代入 $\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(x,y)$ 的定义到定义（2.4）中。注意到$i\ge 2$，于是由（2.17），（2.16）左边变为

$$\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\sum_{z\in Z'(F)}\sum_{\alpha_i}\phi'_1(x)\overline{\phi'_2(y)}h(\alpha_ix,z_1,z_2,z,y)|\det x|^{s_1}|\det y|^{s_2}dxdy$$
$$=\int_{[\overline{G'}]}\int_{R'_{n+1-i}(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\sum_{z\in Z'(F)}\phi'_1(x)\overline{\phi'_2(y)}h(x,z_1,z_2,z,y)|\det x|^{s_1}|\det y|^{s_2}dxdy,$$

其中 α_i 遍历 $R'_{n+1-i}(F)\backslash\overline{G'}(F)$，并且

$$h(x,z_1,z_2,z,y):=\int_{[N_{(n+1-i,1,\cdots,1)}]}\mathcal{F}_0\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}(u\iota(z_1zx),\iota(z_2y))\psi_{i-1}(u)du.$$

令 $N'_{n+1-i,i-1}$ 为 G' 中类型为 $(n+1-i,i-1)$ 的标准抛物子群的幺幂根基。于是通过变量替换，函数 $h(x)=h(x,z_1,z_2,z,y)$ 在 $N'_{n+1-i,i-1}(\mathbb{A}_F)$ 下左不变，即对于$v\in N'_{n+1-i,i-1}(\mathbb{A}_F)$，有 $h(x,z_1,z_2,z,y)=h(vx,z_1,z_2,z,y)$。对 $[N'_{n+1-i,i-1}]$ 积分后，我们便看到（2.16）左边等于

$$\int_{[\overline{G'}]}\int\sum_{z\in Z'(F)}\mathcal{P}_i(\phi'_1(x))\overline{\phi'_2(y)}h(x,z_1,z_2,z,y)|\det x|^{s_1}|\det y|^{s_2}dxdy, \tag{2.18}$$

其中 x 遍历区域 $R'_{n+1-i}(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)$，并且

$$\mathcal{P}_i(\phi'_1(x))=\int_{[N'_{n+1-i,i-1}]}\phi'_1(vx)dv$$

是 ϕ' 相对于 $[N'_{n+1-i,i-1}]$. 由于ϕ'_1 是尖点，$\mathcal{P}_i(\phi'_1(x))=0$ 对于 $i\ge 2$. 因此，所需的等式由 ϕ'_1 和（2.18）的尖点性推出。□

定义 2.6 ($J^{\mathrm{Reg},\ T\ \mathrm{Eis}}(f,\mathbf{s})$)。 记号沿用前文。令 $J^{\mathrm{Reg},\ T\ \mathrm{Eis}}(f,\mathbf{s})$ 为

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\,\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(\iota(z_1x),\iota(z_1z_2y))\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}$$
$$|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2,$$

注意， $J^{\mathrm{Reg},\ T\ \text{艾森斯坦项}}(f,\ \mathbf{s})$ 对于固定的 T 以及 $\mathbf{s}\in\mathbb{C}^2$ 绝对收敛， ϕ_1' 和 ϕ_2' 在 $[\overline{G'}]$. 上快速衰减。下标'Eis'表示，在 K_{ER} 的谱分解中，只有艾森斯坦谱会对积分作出贡献。详细讨论见§6 。接下来作如下定义。

定义 2.7 ($J^{\mathrm{Reg},\ T\ \text{谱}}(f,\mathbf{s})$)。 沿用前文的记号。定义

$$J^{\mathrm{Reg},T}_{\mathrm{Spec}}(f,\mathbf{s})=J^T_0(f,\mathbf{s})+J^{\mathrm{Reg},T}_{\mathrm{Eis}}(f,\mathbf{s}),\quad \mathbf{s}\in\mathbb{C}^2,\ T>0.$$

我们在 J_{Spec} 上加上上标'Reg'，以表示 $J^{\mathrm{Reg},\ T\ \text{谱}}(f,\mathbf{s})$ 是对 $J^T_0(f)+J^T_{\mathrm{ER}}(f)$ 作某种正则化。注意，由于我们将 K_{ER} 的一部分（即（2.15））写入几何侧， $J^{\mathrm{Reg},\ T\text{谱}}(f,\mathbf{0})\neq J^T_0(f)+J^T_{\mathrm{ER}}(f)$，其中 $\mathbf{0}=(0,0)$。尽管如此，我们总有 $J^T_0(f,\mathbf{0})=J^T_0(f)$，这是尖点谱的贡献。

使用 $J^{\mathrm{Reg},T\ \mathrm{Spec}}(f,\mathbf{s})$ 的一个主要优势是（参见 §6）

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Spec}}(f,\mathbf{s}):=\lim_{T\to\infty}J^{\mathrm{Reg},T}_{\mathrm{Spec}}(f,\mathbf{s})$$

在 $\mathrm{Re}(s_1)>1/2$ 和 $\mathrm{Re}(s_2)>1/2$时绝对收敛，因此在此区域内定义了一个关于两个变量的全纯函数$\mathbf{s}$。经过进一步研究，我们将得到 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Spec}}(f,\mathbf{s})$ 关于$\mathbf{s}\in\mathcal{R}:=\{(s_1,s_2):\mathrm{Re}(s_1)>-1/(n+1),\mathrm{Re}(s_2)>-1/(n+1)\}$ 的亚纯延拓，并通过函数方程进一步延拓至 $\mathbb{C}^2$。这避开了如下障碍：一般而言，当 $T\to\infty$.时， $J^T_0(f)+J^T_{\mathrm{ER}}(f)$ 不收敛

2.4. **正则化（III）：截断相对迹公式**。 根据 §2.2 和 §2.3中的准备工作，由引理 2.2 和 2.5 可得

(2.19) $$J^{\mathrm{Reg},T}_{\mathrm{Spec}}(f,\mathbf{s})=J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})-\mathcal{F}_{1,0}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})-\mathcal{F}_{0,1}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})+\mathcal{F}_{1,1}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s}).$$

回顾一下，$\mathcal{F}_{i,\ j}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\ \mathbf{s})$ 由第2.4 节§2.3中的定义给出。

由于 $\mathcal{F}_{i,j}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 是由整个核函数 $\mathrm{K}(x,y)$ 定义的，(2.19) 的右端可以视为四个相对迹公式的线性组合。通常，可以根据 $\iota(G'(F))\backslash\overline{G}(F)/\iota(G'(F))$ 的分解，将每个 $\mathcal{F}_{i,j}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 展开为轨道积分之和。然而，这种传统方法与我们在 G' 的中心 Z' 上所作的截断并不相容，因为某些轨道积分（例如相对于 $\gamma=\mathrm{Id}$ 的轨道积分）不收敛，我们称之为奇异轨道积分。因此，我们提出如下另一种策略来处理 (2.19) 的右端。

考虑布鲁哈特分解 $\overline{G}(F)=P_0(F)\sqcup P_0(F)w_nP_0(F)$，其中 w_n 是与米拉波利克子群 P_0 对应的韦伊元，而 G. 根据 (2.2)，我们可以写成 $\mathrm{K}(g_1,g_2)=\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(g_1,g_2)+\mathrm{K}^{\mathrm{Big}}(g_1,g_2)$，其中

$$\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(g_1,g_2)=\sum_{\gamma\in P_0(F)}f(g_1^{-1}\gamma g_2),\quad \mathrm{K}_{\mathrm{Big}}(g_1,g_2)=\sum_{\gamma\in P_0(F)w_nP_0(F)}f(g_1^{-1}\gamma g_2).$$

2.4.1. 小胞上的轨道积分。对于 $0\le i,\ j\le n+1$，定义

$$\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(g_1,g_2)=\sum_{\alpha_i\in R_{n+1-i}(F)\backslash R_n(F)}\ \sum_{\beta_j\in R_{n+1-j}(F)\backslash R_n(F)}\int_{[N_{(n+1-i,1,\cdots,1)}]}$$
$$\int_{[N_{(n+1-j,1,\cdots,1)}]}\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(u\alpha_ig_1,v\beta_jg_2)\psi_{i-1}(u)\psi_{j-1}(v)dudv.$$

类似于定义2.4，我们对 $0\le i,\ j\le n+1$，定义

$$\mathcal{F}_{i,j}^{\mathrm{Small}}J_{\mathrm{Geo}}^{T}(f,\mathbf{s}):=\int_{[Z'^{T}]}\int_{[Z'^{T}]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(\iota(z_1x),\iota(z_1z_2y))$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1|^{s_1}|\det z_1z_2|^{s_2}dxdyd^{\times}z_1d^{\times}z_2.$$

我们将 $\mathcal{F}_{i,\ j}^{\mathrm{Small}}\ J_{\mathrm{Geo}}^{T}(f,\mathbf{s})$ 称为小胞上的轨道积分。

定义 2.8 ($J^{\mathrm{Reg},\ T\ \mathrm{Geo},\ \mathrm{Small}}(f,\mathbf{s})$)。沿用之前的记号。定义相应的正则化几何侧 $J^{\mathrm{Reg},\ T\ \mathrm{Geo},\ \mathrm{Small}}(f,\mathbf{s})$ 为

$$\mathcal{F}_{0,0}^{\mathrm{Small}}J_{\mathrm{Geo}}^{T}(f,\mathbf{s})-\mathcal{F}_{1,0}^{\mathrm{Small}}J_{\mathrm{Geo}}^{T}(f,\mathbf{s})-\mathcal{F}_{0,1}^{\mathrm{Small}}J_{\mathrm{Geo}}^{T}(f,\mathbf{s})+\mathcal{F}_{1,1}^{\mathrm{Small}}J_{\mathrm{Geo}}^{T}(f,\mathbf{s}).$$

尽管 $J^{\mathrm{Reg},\ T\,\mathrm{Geo},\ \mathrm{Small}}(f,\mathbf{s})$ 中并非所有成分都在 $T\to\infty$ 时收敛，例如当 T 较大时，积分$\mathcal{F}_{0\ ,\ 0}^{\mathrm{Small}}\ J_{\mathrm{Geo}}^{T}(f,\mathbf{s})\approx T$，但我们将借助第 §3 节中的傅里叶展开（在此情形下实际上是泊松求和）证明，在假设 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>0.$ 的条件下，$J^{\mathrm{Reg},\ T\ \mathrm{Geo},\ \mathrm{Small}}(f,\mathbf{s})$ 在 $T\to\infty$ 时收敛。此外，它还可亚纯延拓至 $\mathbf{s}\in\mathbb{C}^2$.

2.4.2. 大胞腔上的轨道积分。对于 $0\le i,\ j\le n+1$，定义

$$\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}_{\mathrm{Big}}(g_1,g_2)=\sum_{\alpha_i\in R_{n+1-i}(F)\backslash R_n(F)}\ \sum_{\beta_j\in R_{n+1-j}(F)\backslash R_n(F)}\int_{[N_{(n+1-i,1,\cdots,1)}]}$$
$$\int_{[N_{(n+1-j,1,\cdots,1)}]}\mathrm{K}_{\mathrm{Big}}(u\alpha_ig_1,v\beta_jg_2)\psi_{i-1}(u)\psi_{j-1}(v)dudv.$$

类似于定义2.4，我们对 $0\le i,\ j\le n+1$，定义

$$\mathcal{F}_{i,j}^{\mathrm{Big}}J_{\mathrm{Geo}}^{T}(f,\mathbf{s}):=\int_{[Z'^{T}]}\int_{[Z'^{T}]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\,\mathrm{K}_{\mathrm{Big}}(\iota(z_1x),\iota(z_1z_2y))$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^{\times}z_1d^{\times}z_2.$$

我们将称$\mathcal{F}_{i\ ,\ j}^{\mathrm{Big}}\ J_{\mathrm{Geo}}^{T}(f,\mathbf{s})\ \ 0\le i,j\le n+1$为大胞腔上的轨道积分。我们将证明，当 $T\to\infty$时它们收敛，假设 $\mathrm{Re}(s_1)\ +\mathrm{Re}(s_2)>1.$

沿用前面的记号。于是我们得到正则化相对迹公式：

$$J_{\mathrm{Spec}}^{\mathrm{Reg},T}(f,\mathbf{s})=J_{\mathrm{Geo,Small}}^{\mathrm{Reg},T}(f,\mathbf{s})+J_{\mathrm{Geo,Big}}^{\mathrm{Reg},T}(f,\mathbf{s}),\tag{2.20}$$

其中 $\mathbf{s}=(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2$，且 $J^{\mathrm{Reg},\ T\text{几何},\ \text{大胞腔}}(f,\mathbf{s})$定义为

$$\mathcal{F}_{0,0}J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Big},T}(f,\mathbf{s})-\mathcal{F}_{1,0}J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Big},T}(f,\mathbf{s})-\mathcal{F}_{0,1}J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Big},T}(f,\mathbf{s})+\mathcal{F}_{1,1}J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Big},T}(f,\mathbf{s}).\tag{2.21}$$

2.5. 正则化（IV）：去除截断。根据§3–§7中的分析，我们将看到，当 $T\to\infty$时，$J^{\mathrm{Reg}},_T$几何项、小项$(f,\mathbf{s})$收敛，其范围为 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>0$；$J^{\mathrm{Reg}},_T$几何项、大胞腔项$(f,\mathbf{s})$在 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>1$的范围内收敛，当 $T\to\infty$时；并且 $J^{\mathrm{Reg}},_T$ 谱项$(f,\mathbf{s})$在 $\mathrm{Re}(s_1)\gg0$ 且 $\mathrm{Re}(s_2)\gg0.$ 时绝对收敛。因此，可以在区域 $\mathrm{Re}(s_1)\gg0$ 且 $\mathrm{Re}(s_2)\gg0$内，在(2.20)中取 $T\to\infty$，得到

$$J_{\mathrm{Spec}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s})=J_{\mathrm{Geo,Small}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s})+J_{\mathrm{Geo,Big}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s}),\tag{2.22}$$

作为$\mathbf{s}$ 在区域$\mathrm{Re}(s_1)\gg0$ 且$\mathrm{Re}(s_2)\gg0$.为了消除（2.22）中的截断，需要将其亚纯延拓至

$$\mathbf{s}\in\mathcal{R}:=\{(s_1,s_2):\ \mathrm{Re}(s_1)>-1/(n+1),\ \mathrm{Re}(s_2)>-1/(n+1)\}$$

仍是一项复杂的任务，将在 §3–§7中。

2.6. 测试函数与自守权。 回顾，$\pi_i' \in \mathcal{A}_0([G'],\omega_i), 1 \le i \le 2$. 设 $S \subset \Sigma_F$ 为一个包含阿基米德位置的有限集合，使得π_1' 和 π_2' 在 $v \in S$. 之外均非分歧。设 $\phi_i' \in \pi_i'$, $1 \le i \le 2$ 为尖点形式，对于所有 $v \notin S.$，它们均为右-$G'(\mathcal{O}_{F_v})$-不变。设 $\mathfrak{N} \subsetneq \mathcal{O}_F$ 为一个理想，使得$\{v \in \Sigma_{F,\mathrm{fin}} : \ v \mid \mathfrak{N}\} \cap S = \emptyset$. 记 $|\mathfrak{N}| := N_F(\mathfrak{N})$ 为 $\mathfrak{N}$. 的绝对范数

对于 $v \mid \mathfrak{N}$，令 $K_v = K_0(\mathfrak{p}_v^{e_v(\mathfrak{N})})$ 为层级为 $\mathfrak{p}_v$. 的Hecke同余子群。当 $v < \infty$ 和 $v \nmid \mathfrak{N}$ 时，设 $K_v = G(\mathcal{O}_{F_v})$。对于 $v \mid \infty$，令 K_v 为 $G(F_v)$ 的极大紧子群。令 $K_0(\mathfrak{N}) = \prod_v K_v$. 定义 $K' = \prod_v K_v'$，其中每个 K_v' 都是 $G'(F_v)$ 的极大紧子群，且当 $v < \infty$.时 $K_v' = G'(\mathcal{O}_{F_v})$

令 ω 为一个酉Hecke特征，它在 $v \mid \mathfrak{N}$. 之外非分歧。对于 $v \mid \mathfrak{N}$，定义 $G(F_v)$ 上的函数，其支集包含于 $Z(F_v)\backslash K_v$，如下:

$$f_v(z_v k_v) = \mathrm{Vol}(\overline{K_v})^{-1}\omega_v(z)^{-1}\omega_v(E_{n+1,n+1}(k_v))^{-1}, \ z_v \in Z(F_v), \ k_v \in K_v, \tag{2.23}$$

其中 $\overline{K_v}$ 是 $K_v = K_0(\mathfrak{p}_v^{e_v(\mathfrak{N})})$ 在 $\overline{G}(F_v)$ 中的像，而 $E_{n+1,\ n+1}(k_v)$ 是 $k_v \in K_v$. 的第 $(n+1, n+1)$ 个元素

记 $\mathcal{F}_S(\mathfrak{N}, \omega^{-1})$ 为函数 $f = \otimes_v f_v$,的线性组合空间，其中 f_v 在 2.23 中定义，当 $v \mid \mathfrak{N}$ 时；而当 $v \nmid \mathfrak{N}$时，

$$f_v(g_v) = \int_{Z(F_v)} \tilde{f}_v(z_v g_v)\omega_v(z_v) d^\times z_v$$

˜其中 f 定义如下

- $v \in S$设 $f_v\tilde{}$是定义在 $G(F_v)$ 上的连续函数，且具有紧支撑。
- $v \notin S$ 和 $v \nmid \mathfrak{N}$，令 $\tilde{f}_v = \mathrm{Vol}(K_v)^{-1}\mathbf{1}_{K_v}$.

从现在起，我们取 $f \in \mathcal{F}_S(\mathfrak{N}, \omega^{-1})$。这一限制 $\mathfrak{N} \neq \mathcal{O}_F$ 并非必要，但它简化了轨道积分 J^{Reg}、T Geo、Big$(f,\mathbf{s})$的计算。详见 §5.1 。实际上，这不会影响相对迹公式的一般性。

3. Orbital Integrals Relative to the Small Cell

本节将证明 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{,T\ \mathrm{Geo,Small}}(f,\mathbf{s})$，其定义为

$$\mathcal{F}_{0,0}^{\mathrm{Small}} J_{\mathrm{Geo}}^T(f,\mathbf{s}) - \mathcal{F}_{1,0}^{\mathrm{Small}} J_{\mathrm{Geo}}^T(f,\mathbf{s}) - \mathcal{F}_{0,1}^{\mathrm{Small}} J_{\mathrm{Geo}}^T(f,\mathbf{s}) + \mathcal{F}_{1,1}^{\mathrm{Small}} J_{\mathrm{Geo}}^T(f,\mathbf{s}),$$

当 $T \to \infty$ 时收敛，在区域 $\mathrm{Re}(s_1) + \mathrm{Re}(s_1) > 0$.

将 $\eta = (0, \cdots, 0, 1) \in F^n$. 记为。对于 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{A}_F^n$，我们设

$$\check{f}_P(\mathbf{x}; z_2, y) = \int_{N_P(\mathbb{A}_F)} f(u\iota(z_2 y)) \prod_{i=1}^n \overline{\psi}(x_i E_{i,n+1}(u)) du,$$

其中 $E_{i,j}(u)$ 是矩阵 u 的第 (i,j) 个元素，而 ψ 是定义一般特征 θ. 的 $F\backslash\mathbb{A}_F$ 上的加性特征

那么，对于所有 $z_2 \in \mathbb{A}_F^\times$ 和 $y \in \overline{G'}(\mathbb{A}_F)$，ˇ $f_P(\mathbf{x};\ z_2, y)$ 是 $\mathbb{A}_F^n$ 上的 Schwartz-Bruhat 函数。以ˇ $f_P(\mathbf{x};\ z_2, y)$ 作为光滑截面，我们将相应的艾森斯坦级数 $E(x,\ s;$ ˇ $f_P(\cdot, z_2, y))$ 定义为

$$E(x, s; \check{f}_P(\cdot; z_2, y)) = \sum_{\delta \in P_0'(F)\backslash \overline{G'}(F)} \int_{Z'(\mathbb{A}_F)} \check{f}_P(\eta z_1 x; z_2, y) |\det z_1 x|^s d^\times z_1,$$

当 $\mathrm{Re}(s) > 1$. 时绝对收敛

命题 3.1. 沿用前面的记号。设 $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2)$ 满足 $\mathrm{Re}(s_1 + s_2) > 0$. 则极限

$$J_{\mathrm{Geo,Small}}^{\mathrm{Reg}}(f, \boldsymbol{s}) := \lim_{T \to \infty} J_{\mathrm{Geo,Small}}^{\mathrm{Reg},T}(f, \boldsymbol{s})$$

存在且等于

$$\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\mathcal{P}(\boldsymbol{s};\phi_1',\phi_2',\check{f}_P(\cdot;z_2,y))\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_2y|^{s_2}dyd^\times z_2. \tag{3.1}$$

其中，周期积分 $\mathcal{P}(\boldsymbol{s};\ \phi_1',\ \phi_2',\ \check{f}_P(\cdot;\ z_2,\ y))$ 定义为

$$\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{R(y)\phi_2'(x)}E(x,s_1+s_2+1;\check{f}_P(\cdot;z_2,y))dx$$

是表示 L-函数 $L(s_1+s_2+1,\ \pi_1'\times\widetilde{\pi}_2')$ 。特别地，$J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Geo},\ \mathrm{Small}}(f,\ \boldsymbol{s})$ 延拓为一个亚纯函数，使得

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small}}(f,\boldsymbol{s})\sim\Lambda(s_1+s_2+1,\pi_1'\times\widetilde{\pi}_2').$$

证明。根据定义，对于 $g_1,g_2\in G(\mathbb{A}_F)$，有

$$\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1\,\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(g_1,g_2)=\int_{[N_P]}\sum_{\gamma\in P_0(F)}f(g_1^{-1}\gamma vg_2)dv,$$

$$\mathcal{F}_1\mathcal{F}_1\,\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(g_1,g_2)=\int_{[N_P]}\int_{[N_P]}\sum_{\gamma\in P_0(F)}f(g_1^{-1}u^{-1}\gamma vg_2)dudv.$$

由于 N_P 是 P_0 的正规子群，因此

$$\mathcal{F}_1\mathcal{F}_1\,\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(g_1,g_2)=\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1\,\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(g_1,g_2),$$

注意到 $[N_P]=N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A}_F)$ 的体积等于 1。因此，

$$\mathcal{F}^{\mathrm{Small}}_{0,1}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})=\mathcal{F}^{\mathrm{Small}}_{1,1}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s}).$$

因此 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{,T}\mathrm{Geo,Small}(f,\mathrm{s})=\mathcal{F}^{\mathrm{Small}}_{0}{}_{,0}\ \ J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathrm{s})-\mathcal{F}^{\mathrm{Small}}_{1}{}_{,0}\ \ J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathrm{s})$。由于 $\mathcal{F}_0\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(g_1,g_2)$ 作为关于 $g_1\in G(\mathbb{A}_F)$ 的函数，具有左 $P_0(F)$-不变性。因此，我们可以应用引理 2.1，推出

$$\mathcal{F}_0\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(g_1,g_2)-\mathcal{F}_1\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(g_1,g_2)=\sum_{i=2}^{n+1}\mathcal{F}_i\mathcal{F}_0\,\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(g_1,g_2). \tag{3.2}$$

与引理 2.5 的证明类似的论证可得 $\mathcal{F}_i^{\mathrm{Small}}{}_{,\ 0}\ \ J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\ \mathbf{s})=0$ 对 $2\le i\le n$. 因此，由（3.2）可得

$$J^{\mathrm{Reg},T}_{\mathrm{Geo,Small}}(f,\mathbf{s})=\mathcal{F}^{\mathrm{Small}}_{n+1,0}J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s}),$$

其定义如下

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\sum_{\alpha\in N(F)\backslash P_0(F)}\int_{[N]}\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}(u\alpha\iota(z_1x),\iota(z_1z_2y))\theta(u)du$$
$$\phi'(x)\overline{\phi'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

展开 $\mathrm{K}_{\mathrm{Small}}$ 并进行变量替换后，$J^{\mathrm{Reg}}{}_{,\ T\ \mathrm{Geo},\ \mathrm{Small}}(f,\mathbf{s})$ 变为

$$\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{N'(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\sum_{\delta\in N_P(F)}\int_{[N]}f(\iota(z_1x)^{-1}u^{-1}\delta^{-1}\iota(z_1z_2y))$$
$$\theta(u)du\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1|^{s_1}|\det z_1z_2|^{s_2}dxdyd^\times z_2d^\times z_1,$$

这里我们利用了以下事实：$N(F)\backslash P_0(F)\simeq N'(F)\backslash G'(F)$。

注意，$N(\mathbb{A}_F)=N_P(\mathbb{A}_F)\times\iota(N'(\mathbb{A}_F))$。于是 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{,\ T几何,\ 小}(f,\mathbf{s})$ 等于

$$\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{N'(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\int_{[N']}f(\iota(z_1x)^{-1}v^{-1}u^{-1}\iota(z_1z_2y))$$
$$\theta(v)dv\psi(E_{n,n+1}(u))du\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(z_2y)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_2d^\times z_1.$$

作变量替换后，上述积分变为

$$\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\int_{[N']} f(\iota(z_1x)^{-1}v^{-1}u^{-1}\iota(z_1z_2y))$$
$$\theta(v)\psi(E_{n,n+1}(u))du W_{\phi'_1}(x)\overline{\phi'_2(y)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdy\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}d^\times z_2 d^\times z_1,$$

where

$$W_{\phi'}(x) := \int_{[N']}\phi'(nx)\overline{\theta}(n)dn$$

是相对于一般特征 θ. 的 ϕ' 的 Whittaker 函数。再作一次变量替换可得，积分 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{,T\ 几何,小}(f,\mathbf{s})$ 等于

$$\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\check{f}_P(\eta z_1x;z_2,y)W_{\phi'_1}(x)\overline{W_{\phi'_2}(xy)}$$
$$\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1+s_2+1}|\det z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_2 d^\times z_1.$$

˘ 此外，由于 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>0$，且 f_P 是 $G(\mathbb{A}_F)$ 上的 Schwartz-Bruhat 函数，因此根据 Rankin-Selberg 理论，$\lim_{T\to\infty} J^{\mathrm{Reg}}{}_{,T\ 几何,小}(f,\mathbf{s})$ 存在，并等于绝对收敛积分

$$\iiint \check{f}_P(\eta x;z_2,y)W_{\phi'_1}(x)\overline{W_{\phi'_2}(xy)}|\det x|^s\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_2, \tag{3.3}$$

其中，$s=s_1+s_2+1$, x 遍历 $N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)$ y（分别地，z_2）遍历 $G'(\mathbb{A}_F)$（分别地，$Z'(\mathbb{A}_F)$）。因此，当 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>0$ 时，$J^{\mathrm{Reg}}\,\mathrm{Geo,Small}(f,\mathbf{s})$ 由 (3.3) 给出，且在该区域内绝对收敛。

˘ 由于艾森斯坦级数 $E(x,1+s_1+s_2;\ f_P(\cdot;\ z_2,y))$ 在区域 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>0$ 内绝对收敛，因此可以展开艾森斯坦级数，得到

$$\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\mathcal{P}(s;\phi',\check{f}_P(\cdot;z_2,y))dyd^\times z_2$$

等于

$$\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{P'_0(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\check{f}_P(\eta z_1x;z_2,y)\phi'_1(x)\overline{\phi'_2(xy)}$$
$$|\det z_1x|^{s_1+s_2+1}d^\times z_1 dxdyd^\times z_2.$$

对 ϕ'_1 和 ϕ'_2 进行傅里叶展开后，上述积分变为（3.3），从而证明了（3.1）。

根据 Rankin-Selberg 理论，周期积分 $\mathcal{P}(\mathbf{s};\ \phi'_1,\phi'_2,\check{}f_P(\cdot;\ z_2,y)$ 是 $\Lambda(s_1+s_2+1,\pi'_1\times\widetilde{\pi}'_2)$ 的积分表示。它可亚纯延拓至$\mathbb{C}$，且满足 $\mathcal{P}(\mathbf{s};\ \phi'_1,\phi'_2,\check{}f_P(\cdot;\ z_2,y)/\Lambda(s_1+s_2+1,\pi'_1\times\widetilde{\pi}'_2)$ 是整函数。此外，f 是 $\overline{G}(\mathbb{A}_F)$ 上的紧支撑函数。因此，由（3.1）可知，函数 $J^{\mathrm{Reg}}\,\mathrm{Geo,Small}(f,\mathbf{s})$ 也可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，使得 $J^{\mathrm{Reg}}\,\mathrm{Geo,Small}(f,\mathbf{s})/\Lambda(s_1+s_2+1,\pi'_1\times\widetilde{\pi}'_2)$ 是整函数。□

令 $\mathbf{v}'_j=\otimes_v\mathbf{v}'_{j,\ v}\in\pi'_j=\otimes_v\pi'_{j,\ v}$ 为与自守形式 ϕ'_j. 对应的向量。令 $W_{\phi'_j,\ v}$ 为与向量 $\mathbf{v}'_{j,\ v}$及由 ψ_v 诱导的一般特征相关联的局部 Whittaker 泛函，使得

$$W_{\phi'_2}(x)=\prod_{v\in\Sigma_F}W_{\phi'_2,v}(x_v).$$

令 $x_v\in G'(F_v)$。记 $\eta x_v=(x_{v,1},\ x_{v,2},\ \cdots,\ x_{v,n})$ 为 n 的第 x_v. 行。令 $s_2\in\mathbb{C}$. 。定义 $m_v(x_v,\ s_2)$ 为

$$\int_{G'(F_v)}\int_{N_P(F_v)} f_v(u_v\iota(y_v))|\det(y_v)|_v^{s_2}\overline{W_{\phi_2',v}(x_vy_v)}\prod_{i=1}^{n}\overline{\psi}_v(x_{v,i}E_{i,n+1}(u_v))du_vdy_v.$$

引理 3.2. 沿用上述记号。设 $v\notin S$. 那么

$$m_v(x_v,s_2)=\frac{\overline{W_{\phi_2',v}(x_v)}}{\mathrm{Vol}(K_v)N_{F_v}(\mathfrak{O}_{F_v})^{n/2}}\cdot\mathbf{1}_{(\mathfrak{O}_{F_v}^{-1})^n}(\eta x_v). \tag{3.4}$$

证明。 根据定义， $f_v(u_v\iota(y_v))$ 非消失当且仅当

$$u_v\iota(y_v)\in Z(F_v)K_v,\ \text{i.e.,}\ \lambda_vu_v\iota(y_v)\in K_v \tag{3.5}$$

对于某个 $\lambda_v\in F_v^{\times}$.。因此， $\lambda_v\in\mathcal{O}_{F_v}^{\times}$、 $y_v\in K_v'$和 $u_v\in N_P(\mathcal{O}_{F_v})$。于是，

$$f_v(u_v\iota(y_v))=\frac{1}{\mathrm{Vol}(K_v)}\mathbf{1}_{K_v'}(y_v)\cdot\mathbf{1}_{N_P(\mathcal{O}_{F_v})}(u_v).$$

因此，可以将积分 $m_v(x_v,s_2)$ 计算为

$$\int_{K_v'}\int_{N_P(\mathcal{O}_{F_v})} f_v(u_v\iota(y_v))|\det(y_v)|_v^{s_2}\overline{W_{\phi_2',v}(x_vy_v)}\prod_{i=1}^{n}\overline{\psi}(x_{v,i}E_{i,n+1}(u_v))du_vdy_v.$$

由于 $\overline{W_{\phi_2',v}(x_vy_v)}=\overline{W_{\phi_2',v}(x_v)}$ 对于 $y_v\in K_v'$, 于是

$$m_v(x_v,s_2)=\frac{\overline{W_{\phi_2',v}(x_v)}}{\mathrm{Vol}(K_v)}\cdot\widehat{\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{F_v}^n}}(\eta x_v).$$

于是，3.4）可由傅里叶变换 $\widehat{\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{F_v}^n}}$. □

由于（3.1）在 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>0$ 时绝对收敛，我们可以展开艾森斯坦级数 $E(x,s_1+s_2+1;\check{}f_P(\cdot;z_2,y))$ 并写成

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small}}(f,\mathbf{s})=\prod_{v\in\Sigma_F}J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small},v}(f_v,\mathbf{s}),$$

其中

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small},v}(f_v,\mathbf{s}):=\int_{N'(F_v)\backslash G'(F_v)}W_{\phi_1',v}(x_v)m_v(x_v,s_2)|\det x_v|_v^{s_1+s_2+1}dx_v.$$

命题 3.3。 沿用前述记号。则

$$\frac{J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small}}(f,\boldsymbol{s})}{W_{\phi_1'}(I_n)\overline{W_{\phi_2'}(I_n)}}=\frac{N_F(\mathfrak{D}_F)^{n(s_1+s_2+\frac{1}{2})}\Lambda(s_1+s_2+1,\pi_1'\times\widetilde{\pi}_2')}{\mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N}))}\prod_{v\in S}\mathcal{F}_v^{\natural}(f_v,\boldsymbol{s};\phi_1',\phi_2'),$$

其中

$$\mathcal{F}_v^{\natural}(f_v,\boldsymbol{s};\phi_1',\phi_2')=\frac{J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small},v}(f_v,\boldsymbol{s})}{L_v(s_1+s_2+1,\pi_{1,v}'\times\widetilde{\pi}_{2,v}')W_{\phi_1',v}(I_n)\overline{W_{\phi_2',v}(I_n)}}$$

是 $\boldsymbol{s}$ 的整函数。

证明。 令 $v\notin S$. 根据引理 3.2, $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}\ v}(f_v,\mathbf{s})$ 等于

$$\frac{N_{F_v}(\mathfrak{O}_{F_v})^{-\frac{n}{2}}}{\mathrm{Vol}(K_v)}\int_{N'(F_v)\backslash G'(F_v)}W_{\phi_1',v}(x_v)\overline{W_{\phi_2',v}(x_v)}\cdot\mathbf{1}_{(\mathfrak{O}_{F_v}^{-1})^n}(\eta x_v)|\det x_v|_v^{s_1+s_2+1}dx_v.$$

根据定义， ϕ_1' 和 ϕ_2' 是右 K_v'-不变的，即在 v. 处是球型的。于是，根据 Rankin-Selberg 理论，对于 $v\nmid\mathfrak{D}_F$，我们得到

$$J^{\mathrm{Reg},v}_{\mathrm{Geo,Small}}(f_v,\mathbf{s})=\frac{W_{\phi_1',v}(I_n)\overline{W_{\phi_2',v}(I_n)}}{\mathrm{Vol}(K_v)}\cdot L_v(s_1+s_2+1,\pi_{1,v}'\times\widetilde{\pi}_{2,v}').$$

现在我们假设 $v \mid \mathfrak{D}_F$. 。当 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 时，定义

$$I_v(s) := \int_{N'(F_v)\backslash G'(F_v)} W_{\phi'_1,v}(x_v)\overline{W_{\phi'_2,v}(x_v)} \cdot \mathbf{1}_{(\mathfrak{O}_{F_v}^{-1})^n}(\eta x_v)|\det x_v|_v^s dx_v.$$

利用岩泽分解 $G'(F_v) = N'(F_v)T_{B'}(F_v)K'_v$，将其写成 $x_v = n'_v\varpi_v^{\mathbf{m}}k'_v$ 和 $dx_v = dn'_v\delta_{B'}^{-1}(\varpi_v^{\mathbf{m}})dk'_v$，其中 $\mathbf{m} = (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$，且 $\varpi_v^{\mathbf{m}} := \mathrm{diag}(\varpi_v^{m_1}, \cdots, \varpi_v^{m_n})$。于是 $I_v(s)$ 等于

$$\int_{G'(\mathcal{O}_{F_v})} \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} W_{\phi'_1,v}(\varpi_v^{\mathbf{m}})\overline{W_{\phi'_2,v}(\varpi_v^{\mathbf{m}})} \cdot \mathbf{1}_{(\mathfrak{O}_{F_v}^{-1})^n}(\eta\varpi_v^{\mathbf{m}}k'_v)|\det(\varpi_v^{\mathbf{m}})|_v^s\delta_{B'}^{-1}(\varpi_v^{\mathbf{m}})dk'_v.$$

令 $\mathbf{m}' = (m_1, \cdots, m_{n-1}, 0)$。那么我们可以将上面的表达式改写为

$$I_v(s) = \sum_{\mathbf{m}'\in\mathbb{Z}^{n-1}} W_{\phi'_1,v}(\varpi_v^{\mathbf{m}'})\overline{W_{\phi'_2,v}(\varpi_v^{\mathbf{m}'})}|\det(\varpi_v^{\mathbf{m}'})|_v^s\delta_{B'}^{-1}(\varpi_v^{\mathbf{m}'}) \cdot l_v(s), \tag{3.6}$$

其中

$$l_v(s) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{K'_v} \mathbf{1}_{(\mathfrak{O}_{F_v}^{-1})^n}(\eta\varpi_v^m k'_v)q_v^{-nms}dk'_v$$

注意，$\min\{e_v(E_{n,\ 1}(k'_v)) \cdots, e_v(E_{n,\ n}(k'_v))\} = 0$. 于是

$$l_v(s) = \sum_{m\geq -e_v(\mathfrak{D}_{F_v})} \int_{K'_v} \mathbf{1}_{(\mathfrak{O}_{F_v}^{-1})^n}(\eta\varpi_v^m k'_v)q_v^{-nms}dk'_v,$$

且 $\mathbf{1}_{(\mathfrak{O}_{F_v}^{-1})^n}(\eta\varpi_v^m k'_v) \equiv 1$ 当 $m \geq -e_v(\mathfrak{D}_{F_v})$ 和 $k'_v \in K'_v$. 时。因此，

$$l_v(s) = \mathrm{Vol}(K'_v) \sum_{m\geq -e_v(\mathfrak{D}_{F_v})} q_v^{-nms} = \frac{N_{F_v}(\mathfrak{D}_{F_v})^{ns}}{1 - q_v^{-ns}} = N_{F_v}(\mathfrak{D}_{F_v})^{ns}\zeta_{F_v}(ns), \tag{3.7}$$

其中，ζ_{F_v} 是与 F_v.相关联的局部戴德金ζ函数

运用麦克唐纳公式（参见 [Mac79]），我们便有

$$\sum_{\mathbf{m}'\in\mathbb{Z}^{n-1}} W_{\phi'_1,v}(\varpi_v^{\mathbf{m}'})\overline{W_{\phi'_2,v}(\varpi_v^{\mathbf{m}'})}|\det(\varpi_v^{\mathbf{m}'})|_v^s\delta_{B'}^{-1}(\varpi_v^{\mathbf{m}'}) = \frac{L(s, \pi_{1,v} \times \widetilde{\pi}_{2,v})}{\zeta_{F_v}(ns)}. \tag{3.8}$$

于是命题 3.3 由（3.6）、（3.7）和（3.8）得出。 □

4. 相对于大胞腔的轨道积分：I

本节计算相对于大胞腔 $P_0(F)w_nP_0(F)$的轨道积分$\mathcal{F}_{1,1}J^{\mathrm{Big}}\mathrm{Geo}\ (f, \mathbf{s})$ $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}\mathrm{Geo}\ (f, \mathbf{s})$和$\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}\mathrm{Geo}\ (f, \mathbf{s})$。回顾一下，它们的定义见§2.4.2。

4.1. 轨道积分 $\mathcal{F}_{1,\ 1}J^{\mathrm{Big}}_{,\ T\ \mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$。

我们将利用 ϕ' 的尖点性证明，对于所有 $T > 0$ 以及 $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^2$.，$\mathcal{F}_{1,\ 1}J^{\mathrm{Big}}_{,\ T\ \mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$恒等于零

命题 4.1。沿用前面的记号。那么对于$\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^2$ 和 $T > 0$,

$$\mathcal{F}_{1,1}J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo}}(f, \boldsymbol{s}) = 0. \tag{4.1}$$

证明。用 P'_0 表示 G'. 的米拉波利克子群。令 $N_{P'}$ 为 P'_0. 的幺幂根基。根据定义，

$$\mathcal{F}_1\mathcal{F}_1\,\mathrm{K}_{\mathrm{Big}}(g_1, g_2) = \int_{[N_P]}\int_{[N_P]} \sum_{\gamma\in P_0(F)w_nP_0(F)} f(g_1^{-1}u^{-1}\gamma v g_2)dudv.$$

根据布鲁哈特分解，存在一个由有限多个两两不相交的 $P_0(F)$ 子群组成的集合 $\Phi(F)$，使得

$$P_0(F)w_nP_0(F) = P_0(F) \times \{w_n\} \times \Phi(F)$$

作为集合双射。因此，我们可以将 $\mathcal{F}_{1,\ 1}J^{\mathrm{Big},\ T\ \mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 表示为

$$\int_{[Z'^T]}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{[G']}}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\int_{[N_P]}\sum_{\beta\in\Phi(F)}f(\iota(z_1x)^{-1}u^{-1}w_n\beta v\iota(z_1z_2y))dudv$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

令 $u'\in N_{P'}(\mathbb{A}_F)$。注意到 $w_n\iota(u')w_n\in N_P(\mathbb{A}_F)$。因此

$$\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\int_{[N_P]}\sum_{\beta\in\Phi(F)}f(\iota(z_1x)^{-1}\iota(u')u^{-1}w_n\beta v\iota(z_1z_2y))dudv$$
$$=\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\int_{[N_P]}\sum_{\beta\in\Phi(F)}f(\iota(z_1x)^{-1}u^{-1}w_n\beta v\iota(z_1z_2y))dudv.$$

将其代入 $\mathcal{F}_{1,1}J^{\mathrm{Big},T\ \mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 的定义，并进行变量替换，我们得到 $\mathcal{F}_{1,1}J^{\mathrm{Big},T\ \mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 等于

$$\int_{[Z'^T]}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{[G']}}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\int_{[N_P]}\sum_{\beta\in\Phi(F)}f(\iota(z_1x)^{-1}u^{-1}w_n\beta v\iota(z_1z_2y))dudv$$
$$\phi_1'(u'x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2$$

对于任意 $u'\in N_{P'}(\mathbb{A}_F)$。对上述积分在 $u'\in[N_{P'}]$ 上积分，由 ϕ_1' 的尖点性，我们得到 $\mathcal{F}_{1,1}J^{\mathrm{Big},T\ \mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})\equiv 0$. □

4.2. **轨道积分：** $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},T\ \mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$。根据定义，

$$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})=\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{\overline{[G']}}\int_{\overline{[G']}}\int_{[N_P]}\sum_{\gamma}f(\iota(z_1x)^{-1}\gamma u\iota(z_1z_2y))$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dudxdyd^\times z_1d^\times z_2,$$

其中 γ 遍历 $Z(F)\backslash P(F)w_nP(F)$。

注意，对所有$\mathbf{s}$，$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},T\ \mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 都绝对收敛。接下来，我们对 $Z(F)\backslash P(F)w_nP(F)$ 作双陪集分解，以处理 $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},T\ \mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$。

引理 *4.2.* 记号同前。令 $\gamma=\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&1&\end{pmatrix}$. 则集合$\{w_n,\gamma\}$ 是 $Z(F)\iota(G'(F))\backslash P(F)w_nP(F)/P(F)$ 的完全代表元集。证明. 令 $g\in P(F)w_nP(F)$。假设 $g\notin\iota(G'(F))w_nP(F)$。那么存在$x\in G'(F)$ 和 $p\in P(F)$，使得

$$\iota(x^{-1})g=\begin{pmatrix}I_{n-2}&&&\\&-1&1&\\&&1&\end{pmatrix}w_n\begin{pmatrix}I_{n-2}&&&\\&1&1&\\&&1&\end{pmatrix}p=\gamma p,$$

因此，$g=\iota(x)\gamma p\in\iota(G'(F))\gamma P(F)$。现在我们需要验证 w_n 和 γ 不等价。反设 $\gamma\in\iota(G'(F))w_nP(F)$。注意，

$$\gamma=\begin{pmatrix}I_{n-1}&&\\&-1&1\\&&1\end{pmatrix}w_n\begin{pmatrix}I_{n-1}&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

通过比较 γ 的规范Bruhat形式与 $\iota(G'(F))w_nP(F)$ 中的元素，我们便得到矛盾，因为它不可能具有 (4.2) 的形式。 □

根据引理 4.2，我们定义 $\mathcal{F}^{\mathrm{Big},\ 1\ 0,\ 1}\ J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 如下：

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[N_P]}\sum_{\gamma\in\iota(G'(F))w_nP(F)/Z(F)} f(\iota(z_1x)^{-1}\gamma u\iota(z_1z_2y))du$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

引理 4.3. 沿用前面的记号。则 $\mathcal{F}^{\mathrm{Big},\ 1\ 0,\ 1}\ J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\ \boldsymbol{s})\equiv 0.$

证明。直接计算可得，w_n 的稳定子为

$$H_{w_n}(F)=\left\{\begin{pmatrix}A & U & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}A & & U\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\in\iota(G'(F))\times P_0(F)\right\}.$$

因此，$\mathcal{F}^{\mathrm{Big},\ 1\ 0,\ 1}\ J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 等于

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{H_{w_n}(F)\backslash(\overline{G'}(F)\times\overline{G'}(F))}\int_{[N_P]} f(\iota(z_1x)^{-1}w_nu\iota(z_1z_2y))du$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

令 $u'\in N_{P'}(\mathbb{A}_F)$。则 $w_n\iota(u')w_n\in N_P(\mathbb{A}_F)$。因此 $\mathcal{F}^{\mathrm{Big},\ 1\ 0,\ 1}\ J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 变为

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{H_{w_n}(F)\backslash(\overline{G'}(F)\times\overline{G'}(F))}\int_{[N_P]} f(\iota(z_1u'x)^{-1}w_nu\iota(z_1z_2y))du$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

作变量代换 $u'^{-1}x\mapsto x$，于是我们将 $\mathcal{F}^{\mathrm{Big},\ 1\ 0,\ 1}\ J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 重写为

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{H_{w_n}(F)\backslash(\overline{G'}(F)\times\overline{G'}(F))}\int_{[N_P]} f(\iota(z_1x)^{-1}w_nu\iota(z_1z_2y))du$$
$$\phi_1'(u'x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

对所有 $u\in N_{P'}(\mathbb{A}_F)$。将积分沿 u' 经过 $[N_{P'}]$，由 ϕ_1' 的尖点性可得 $\mathcal{F}^{\mathrm{Big},\ 1\ 0,\ 1}\ J^T_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})=0.$ □

因此，由引理 4.2 和 4.3 可得

$$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})=\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[N_P]}\sum_{\delta} f(\iota(z_1x)^{-1}\delta u\iota(z_1z_2y))\phi_1'(x)$$
$$\overline{\phi_2'(y)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dudxdyd^\times z_1\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}d^\times z_2,$$

其中 δ 遍历 $\iota(G'(F))\gamma P(F)/Z(F)$。

为便于研究 $\mathcal{F}_{0,\ 1}J^{\mathrm{Big},\ T\ \mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 的解析性质，我们引入如下记号。对于 $\mathbf{x}\in M_{1,\ n}(\mathbb{A}_F)$，令 $u(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}I_n & \mathbf{x}\\ & 1\end{pmatrix}$. 记作

$$f_P^\dagger(\mathbf{x};z_2,y)=\int_{N_P(\mathbb{A}_F)} f(u(\mathbf{x})n\iota(z_2y))dn. \tag{4.3}$$

那么 $f_P^\dagger$ 是定义在 $\mathbb{A}_F^n\times Z'(\mathbb{A}_F)\times\overline{G'}(\mathbb{A}_F)$ 上的 Schwartz-Bruhat 函数。定义

$$E_\gamma(x,s;f_P^\dagger(\cdot;z_2,y))=\sum_{\delta\in P_0(F)\backslash\overline{G'}(F)}\int_{Z'(\mathbb{A}_F)} f_P^\dagger(\eta z_1\delta x;z_2,y)|\det z_1x|^sd^\times z_1. \tag{4.4}$$

那么，当 $\mathrm{Re}(s)>1.$ 时，$E_\gamma(x,s;\ f_P^\dagger(\cdot;\ z_2,y))$ 绝对收敛。此外，对于固定的 $z_2\in Z'(\mathbb{A}_F)$ 和 $y\in\overline{G'}(\mathbb{A}_F)$，艾森斯坦级数 $E_\gamma(x,s;\ f_P^\dagger(\cdot;\ z_2,y))$ 可亚纯延拓至整个 s-平面（至多在 $s\in\{0,1\}$ 处有单极点），并满足连接 s 和 $1-s.$ 处赋值的函数方程

命题 4.4. 记号同前。设 $n \geq 2$. 。令 $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ 满足 $\mathrm{Re}(s_1+s_2) > 0$. 。那么

$$\mathcal{F}_{0,1} J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Big}}(f, \boldsymbol{s}) := \lim_{T\to\infty} \mathcal{F}_{0,1} J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Big},T}(f, \boldsymbol{s})$$

存在，并且等于绝对收敛积分

$$\int_{Z'(\mathbb{A}_F)} \int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)} \mathcal{P}(\boldsymbol{s}; \phi_2', f_P^\dagger(\cdot; z_2, y)) \omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)} |\det z_2 y|^{s_2} dy d^\times z_2, \tag{4.5}$$

其中 $\mathcal{P}$（$\boldsymbol{s}$; ϕ_2', $f_P^\dagger$（$\cdot$; z_2, y）定义为

$$\int_{[\overline{G'}]} \phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)} E_\gamma(x, s_1+s_2+1; f_P^\dagger(\cdot; z_2, y)) dx, \tag{4.6}$$

这是一个表示 Λ（$1+s_1+s_2$, $\pi_1' \times \widetilde{\pi}_2'$）。的 ***Rankin-Selberg*** 卷积。此外，

$$\mathcal{F}_{0,1} J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Big}}(f, \boldsymbol{s}) \ll |\mathfrak{N}|^{-n\,\mathrm{Re}(s_1+s_2)}, \quad \mathrm{Re}(s_1) + \mathrm{Re}(s_2) > 0,$$

其中隐含常数取决于 ϕ_1', ϕ_2' 和 f_S.

证明。回忆一下，P_0' 是 G'. 的米拉波利克子群。令

$$\Delta\iota(P_0') = \left\{ \left(\begin{pmatrix} p' & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p' & \\ & 1 \end{pmatrix} \right) : \ p' \in P_0' \right\}.$$

那么，γ的稳定子是 $H_\gamma = \Delta\iota(P_0')$。因此，$\mathcal{F}_{0,\ 1} J^{\mathrm{Big}}_{,\ T\,\mathrm{Geo}}(f, \mathbf{s})$ 等于

$$\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)} \int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)} \int_{\Delta P_0'(F)\backslash(\overline{G'}(\mathbb{A}_F)\times\overline{G'}(\mathbb{A}_F))} \int_{N_P(\mathbb{A}_F)} f(\iota(z_1 x)^{-1}\gamma u \iota(z_1 z_2 y))$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)} |\det z_1 x|^{s_1} |\det z_1 z_2 y|^{s_2} du dx dy d^\times z_1 d^\times z_2.$$

通过变量替换，我们有

$$\mathcal{F}_{0,1}^{\mathrm{Big}} J_{\mathrm{Geo}}^T(f, \mathbf{s}) = \int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)} \int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)} \int_{N_P(\mathbb{A}_F)} \int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)} \int_{P_0'(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)} f(u(\eta z_1 x) n \iota(z_2 y))$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)} |\det z_1 x|^{s_1+s_2+1} |\det z_2 y|^{s_2} dx d^\times z_1 dn d^\times z_2 dy,$$

这里我们将变量 $u \in N_P(\mathbb{A}_F)$替换为 n，以便与 $u(\eta z_1 x)$区分。因此，$\mathcal{F}_{0,\ 1} J^{\mathrm{Big}}_{,\ T\ \mathrm{Geo}}(f, \mathbf{s})$ 被以下表达式控制：

$$\mathcal{J} := \int_{G'(\mathbb{A}_F)} \int_{N_P(\mathbb{A}_F)} \int_{Z'(\mathbb{A}_F)} \int_{P_0'(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)} |f(u(\eta z_1 x) n \iota(y))|$$
$$|\phi_1'(x)\phi_2'(xy)| |\det z_1 x|^{\mathrm{Re}(s_1+s_2)+1} |\det y|^{\mathrm{Re}(s_2)} dx d^\times z_1 dn dy.$$

接下来证明 $\mathcal{J}$ 收敛。首先，我们刻画对 $f(u(\eta z_1 x) n \iota(z_2 y))$有贡献的 z_2、y 和 n 的取值范围。通过 Iwasawa 分解，我们可以用 $z_1 pk$、$p \in [P_0']$ 和 $k \in K'$. 重新参数化 $z_1 x$。固定 x（即交换积分次序），我们可以写出 $n = \begin{pmatrix} I_n & k^{-1}u \\ & 1 \end{pmatrix}$ 和 $y = k^{-1} z_2 a n' k'$，其中$a = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_{n-1}, 1) \in A'(\mathbb{A}_F)$ $k' \in K'$，且 $n' = \begin{pmatrix} u'' & u' \\ & 1 \end{pmatrix} \in N'(\mathbb{A}_F)$。那么$\mathcal{J}$ 等于

$$\int_{K'} \int_{K'} \int_{Z'(\mathbb{A}_F)} \int_{N'(\mathbb{A}_F)} \int_{A'(\mathbb{A}_F)} \int_{\mathbb{A}_F^n} \int_{Z'(\mathbb{A}_F)} \int_{[P_0']} \left| f\left(\begin{pmatrix} I_n & \\ \eta z_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 a n' k' & u \\ & 1 \end{pmatrix} \right) \right|$$
$$|\phi_1'(pk)\phi_2'(pan'k')| \text{行列式 } z_1 p|^{\mathrm{Re}(s_1+s_2)+1} dp d^\times z_1 du| \text{行列式 } z_2 a|^{\mathrm{Re}(s_2)} d^\times a dn' d^\times z_2 dk dk'.$$

写成 $z_{1,\ \mathrm{fin}} = z'/z$，其中 z，$z' \in \mathcal{O}_F - \{0\}$ 以及 z 和 z' 互素。通过引理 4.6、4.7 和 4.8 中的局部分析，我们可以推出

$$\mathcal{J} \ll \max_{y^* \in C} \int \iint \left| \phi_1'(p)\phi_2' \left(p \begin{pmatrix} z^{-1} I_{n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} y^* \right) \right| \frac{|\det p|^A d^\times z |z'|_{\mathrm{fin}}^{ns'} d^\times z' dp}{|z|_{\mathrm{fin}}^A \mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N}))}, \tag{4.7}$$

其中，p 遍历 $[P_0']$，z 遍历 $\mathcal{O}_F - \{0\}$，且 z 与 $\mathfrak{N}$ 互素，$z' \in \mathfrak{N}\mathcal{O}_F - \{0\}$，$s' = 1 + \mathrm{Re}(s_1 + s_2)$ C 是 $G'(\mathbb{A}_F)$ 中的一个紧集，由 supp f 确定；$A > 0$ 是一个依赖于 s 和 supp f 的常数

由于尖点形式 ϕ_1' 和 ϕ_2' 的快速衰减（例如参见 [MS12]），(4.7) 的右端收敛。特别地，$\mathcal{J} \ll |\mathfrak{N}|^{-ns'} / \mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N})) \ll |\mathfrak{N}|^{-n \mathrm{Re}(s_1+s_2)}$。

因此，当 $\mathrm{Re}(s_1) + \mathrm{Re}(s_2) > 0$ 时，

$$\mathcal{F}_{0,1} J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Big}}(f, \mathbf{s}) := \lim_{T \to \infty} \mathcal{F}_{0,1} J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Big},T}(f, \mathbf{s})$$

存在且等于 (4.5)。命题 4.4 的其余部分可由 Rankin-Selberg 理论推出。□

注 4.5：可以将 $\mathcal{F}_{0,\ 1} J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}}{}_{\gamma(0)}(f, \mathbf{s})$ 写成

$$\int_{[\overline{G'}]} \phi_1'(x)\overline{\phi'(x)} \iint_{G'(\mathbb{A}_F)} \sum_{\phi' \in \mathfrak{B}_{\pi_2'}} \overline{\langle \pi_2'(y)\phi_2', \phi' \rangle} E_\gamma(x, s'; f_P^\dagger(\cdot, s_2; z_2, y)) dy d^\times z_2 dx,$$

由此看来，$\mathcal{F}_{0,1} J^{\mathrm{Big}}$ Geo $_\gamma(0)(f, \mathbf{s})$ 很可能是一个 Rankin-Selberg 周期与一个 Godement-Jacquet 积分（参见 [GJ06]）的乘积。然而，局部计算表明，$f_P^\dagger(\mathbf{x}\ s_2; z_2, y)$ 作为 $z_2 y \in G'(\mathbb{A}_F) \subset M_{n\times n}(\mathbb{A}_F)$ 的函数，无法延拓为 $M_{n\times n}(\mathbb{A}_F)$ 上的 Schwartz-Bruhat 函数。在非阿基米德位置，z_1、y 与 n. 之间存在微妙的交织。详情请参见以下引理。

引理 *4.6.* 记号同前。设 $v \mid \infty$. 令 $\mathbf{c}_v = (c_1, \cdots, c_n) \in F_v^n$ 和 $\mathfrak{u}_v = t(u_1, \cdots, u_n) \in F_v^n$. 令 $n_v = \begin{pmatrix} I_n & \mathfrak{u}_v \\ & 1 \end{pmatrix}$. 假设 $f_v(u(\mathbf{c}_v) n_v \iota(y_v)) \neq 0$. 则 $c_l \ll 1$, $u_l \ll 1$, $1 \leq l \leq n$，其中隐含常数取决于 *supp* f_v；且 y_v 包含于由 *supp* f_v 确定的一个紧集内

证明。根据定义，$f_v(u(\mathbf{c}_v) n_v \iota(y_v)) \neq 0$ 相当于

$$\lambda \begin{pmatrix} I_n & \\ \mathbf{c}_v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & \mathfrak{u}_v \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_v & \\ & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{supp}\, \tilde{f}_v \tag{4.8}$$

对于某个 $\lambda \in F_v^\times$. 回顾 支撑 f_v 是 $G(F_v)$ 的一个紧子集。由 (4.8) 及其逆变换可知，对于 $1 \leq l \leq n$，有

$$\begin{cases} |\lambda c_l|_v \ll 1, \quad |\lambda|_v^{-1} \ll 1, \quad |\lambda^{-1} c_l|_v \ll 1 \\ |\lambda + \lambda c_l u_l|_v \ll 1, \ |\lambda u_l|_v \ll 1. \end{cases}$$

因此，$|c_l|_v \ll 1$, $|u_l|_v \ll 1$，其中隐含常数取决于支撑 f_v. 因此 $\begin{pmatrix} I_n & \\ \mathbf{c}_v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & \mathfrak{u}_v \\ & 1 \end{pmatrix}$ 属于一个由支撑 $\tilde{f}_v$. 决定的紧集。由此，$\lambda \mathrm{diag}(y_v, 1)$ 属于一个由支撑 f_v. 决定的紧集。结合 $|\lambda|_v^{-1} \ll 1$，我们进而推得 y_v 属于一个由支撑 $\tilde{f}_v$. □决定的紧集

引理 *4.7.* 采用前述记号。设 $v \notin S$. 令 $z_v = \varpi_v^{l_0} I_n \in Z'(F_v)$ 和 $n_v = \begin{pmatrix} I_n & \mathfrak{u}_v \\ & 1 \end{pmatrix} \in N_P(F_v)$，其中 $\mathfrak{u}_v = \begin{pmatrix} u_v & \\ u_v & ,2 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(F_v)$ 且 $u_{v,1} \in M_{n-1,1}(F_v)$。假设 $f_v(u(\eta z_v) n_v \iota(y_v)) \neq 0$.

- *If* $v \mid \mathfrak{N}$, *then* $l_0 \geq 1$, $y_v \in K'_v$, *and* $u_v \in N_P(\mathcal{O}_{F_v})$;
- *If* $v \nmid \mathfrak{N}$, *we have the following two possibilities:*
  (a) $l_0 \geq 0$, $y_v \in K'_v$, *and* $u_v \in N_P(\mathcal{O}_{F_v})$;
  (b) $l_0 \leq -1$, $y_v = \mathrm{diag}(\varpi_v^{-l_0} I_{n-1}, \varpi_v^{-2l_0})$, $u_{v,1} \in \varpi_v^{-l_0}\mathcal{O}_{F_v}^{n-1}$, *and* $u_{v,2} \in -\varpi_v^{-l_0} + \varpi_v^{-2l_0}\mathcal{O}_{F_v}$.

证明。 根据岩泽分解，$y_v = z_{2,v} a_v n'_v k_v$，其中 $n'_v = \begin{pmatrix} u'' & u' \\ & 1 \end{pmatrix} \in N'(F_v)$。那么 $f_v(u(\eta z_v) n_v \iota(y_v)) \neq 0$ 意味着

$$\lambda_v \begin{pmatrix} I_n & \\ \eta z_{1,v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{2,v} a_v n'_v & \mathfrak{u}_v \\ & 1 \end{pmatrix} \in K_v, \tag{4.9}$$

对于某个 $\lambda_v \in F_v^\times$，其中 K_v 在 §2.6 中定义。记 $z_{2,v}a_v = \mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n)$，以及 $t'_v = \mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_{n-1})$。则 $e_v(t_1) = e_v(t_2) = \cdots = e_v(t_{n-1}) = -e_v(\lambda_v)$ 且 $u''_v \in$ 一般线性群$(n-1, \mathcal{O}_{F_v})$。因此 (4.9) 化为

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \\ & 1 & \\ & z_{1,v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & \lambda_v t'_v u'_v & \lambda_v u_{v,1} \\ & \lambda_v t_n & \lambda_v u_{v,2} \\ & & \lambda_v \end{pmatrix} \in K_v,$$

因此 $\lambda_v t'_v u'_v, \lambda_v u_{v,1} \in \mathcal{O}_{F_v}^{n-1}$，并且

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ z_{1,v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_v t_n & \lambda_v u_{v,2} \\ & \lambda_v \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_{F_v}) \end{pmatrix} \cap K_v, \tag{4.10}$$

从而可知 $e_v(t_n) + 2e_v(\lambda_v) = 0$，通过考察行列式。因此 (4.10) 化为

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ z_{1,v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_v^{-1} & \lambda_v u_{v,2} \\ & \lambda_v \end{pmatrix} \in K_{2,v}, \tag{4.11}$$

其中 $K_{2,v}$ 在 $v \nmid \mathfrak{N}$ 时为一般线性群$(2, \mathcal{O}_{F_v})$，而 $K_{2,v}$ 是层级为 $\mathfrak{q}_v^{e_v}$ 的 Hecke同余子群$(\mathfrak{N})$，若 $v \mid \mathfrak{N}$.

- 假设 $e_v(\lambda_v) = 0$. 那么由 (4.11) 可得 $z_{1,v} \in \varpi^{e_v}$ $^{(\mathfrak{N})}$ d $u_{v,2} \in \mathcal{O}_{F_v}$. 因此，$t_v n'_v \in G'(\mathcal{O}_{F_v})$ $u_v \in \mathcal{O}_{F_v}^n$. 这就给出了情形（a）$\mathcal{O}_{F_v}$一个。
- 假设 $e_v(\lambda_v) \leq -1$. 记 $\lambda_v = \varpi_v^{-l}$, $l \geq 1$. 那么 (4.11) 变为

$$\begin{pmatrix} \varpi_v^l & u_{v,2}\varpi_v^{-l} \\ \varpi_v^{l_0+l} & \varpi_v^{l_0-l} u_{v,2} + \varpi_v^{-l} \end{pmatrix} \in K_{2,v}, \tag{4.12}$$

并且必有 $n \nmid \mathfrak{N}$。由 (4.12)、$l_0 = -l$ 和 $u_{v,2} \in -\varpi_v^l + \varpi_v^{2l}\mathcal{O}_{F_v}$.于是 $a_v = \mathrm{diag}(\varpi_v^{-l}, \cdots, \varpi_v^{-l}, 1)$ $z_{2,v} = \varpi_v^{2l} I_n$，以及 $n'_v \in N'(\mathcal{O}_{F_v})$；并且

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & & u_{v,1} \\ & 1 & u_{v,2} \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} I_{n-1} & & \varpi_v^l \mathcal{O}_{F_v}^{n-1} \\ & 1 & -\varpi_v^l + \varpi_v^{2l}\mathcal{O}_{F_v} \\ & & 1 \end{pmatrix} \subseteq N_P(\mathcal{O}_{F_v}).$$

这就是情形（b）。

因此，引理 4.7 得证。 □

引理 4.8。 沿用前面的记号。令 $v \in S \cap \Sigma_{F,\,\mathrm{fin}}$. 令 $n_v = \begin{pmatrix} I_n & \mathfrak{u}_v \\ & 1 \end{pmatrix}$.令 $l_0 \leq -1$.

假设 $f_v(u(\eta\varpi_v^{l_0}) n_v \iota(y_v)) \neq 0$。则

$$\begin{cases} u_v \in \varpi_v^{-l_0} C_1 \\ y_v \in \mathrm{diag}(\varpi_v^{-l_0} I_{n-1}, \varpi_v^{-2l_0}) C_2, \end{cases} \tag{4.13}$$

˜其中，$C_1 \subset M_{n,1}(F_v)$ 和 $C_2 \subset G'(F_v)$ 是由支撑 f_v.确定的紧集

证明。令 $d_v^{\pm}=\min_{1\le i,j\le n+1}\{e_v(E_{i,j}(x_v)):\quad x_v\in$ 支撑 $\tilde{f}_v$ 或 $x_v^{-1}\in$ 支撑 $\tilde{f}_v\}$. 根据定义，$f_v(\eta\varpi_v^{l_0})n_v\iota(y_v))\neq 0$ 等于

$$\lambda\begin{pmatrix} I_n & \\ \eta\varpi_v^{l_0} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_v & \mathfrak{u}_v \\ & 1\end{pmatrix}\in\operatorname{supp}\tilde{f}_v \tag{4.14}$$

对于某个 $\lambda\in F_v^\times$. 因此 $e_v(\lambda)\le -d_v^-$通过考察 $(n+1,n+1)$-元处的元素（4.14）的逆矩阵。又，$-e_v(\lambda)+l_0\ge d_v^-$.

由岩泽分解，$y_v=t_vn_v'k_v'$，其中 $n_v'=\begin{pmatrix} u_v'' & u_v' \\ & 1\end{pmatrix}\in N'(F_v)$，且$t_v=\operatorname{diag}(t_1,\cdots,t_{n-1},t_n)$，以及$t_v'=\operatorname{diag}(t_1,\cdots,t_{n-1})$。记 $\mathfrak{u}_v=\begin{pmatrix} u_v & {}^{1} \\ u_v & {}_{,2}\end{pmatrix}\in M_{n,\mathbf{1}}(F_v)$，其中$u_{v,1}\in M_{n-1,\mathbf{1}}(F_v)$。于是（4.14）变为

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \\ & 1 & \\ & \varpi_v^{l_0} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_vt_v'u_v'' & \lambda_vt_v'u_v' & \lambda_vu_{v,1} \\ & \lambda_vt_n & \lambda_vu_{v,2} \\ & & \lambda_v\end{pmatrix}\in\operatorname{supp}\tilde{f}_v.$$

因此 $\lambda_vt_v'u_v''$和$\lambda_vu_{v,\ 1}$的支集包含在一个紧集中。特别地，$d_v^+\le e_v(\lambda_v)+e_v(t_l)\le -d_v^-$，$1\le l\le n-1$，从而 u_v' 也包含在一个紧集中。因此

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \\ & 1 & \\ & \varpi_v^{l_0} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \\ & \lambda_vt_n & \lambda_vu_{v,2} \\ & & \lambda_v\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & \mathrm{GL}(2,F_v)\end{pmatrix}\cap\operatorname{supp}\tilde{f}_v.$$

分析上述约束，我们推导出

$$\begin{cases} d_v^++d_v^--2l_0\le e_v(t_n)\le -d_v^+-d_v^--2l_0 \\ d_v^++l_0\le e_v(\lambda)\le -d_v^-+l_0,\ e_v(\lambda_v)+e_v(u_{v,2})\ge d_v^+ \\ d_v^+\le e_v(\lambda_v)+e_v(t_l)\le -d_v^-,\ 1\le l\le n-1.\end{cases}$$

因此，式（4.13）成立。 □

4.3. 亚纯延拓。 现在我们证明$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}\ \gamma(0)}(f,\mathbf{s})$的亚纯延拓。利用泊松求和，可以将 $E_\gamma(x,s;\ f_P^\dagger(\cdot,s_2;\ z_2,y))$写为

$$E_{\gamma,+}(x,s;f_P^\dagger(\cdot;z_2,y))+E_{\gamma,+}^\wedge(x,s;f_P^\dagger(\cdot;z_2,y))+E_{\gamma,\mathrm{Res}}(x,s;f_P^\dagger(\cdot;z_2,y)),$$

其中

$$E_{\gamma,+}(x,s;f_P^\dagger(\cdot;z_2,y)):=\sum_\delta\int_{|z_1|\ge 1}f_P^\dagger(\eta z_1\delta x;z_2,y)|\det z_1x|^sd^\times z_1,$$

$$E_{\gamma,\ +}^\wedge(x,s;\ f_P^\dagger(\cdot;\ z_2,y)):=\sum_\delta\int_{|z_1|\ge 1}\hat{}f_P^\dagger(\eta z_1\delta\,{}^{\mathrm{t}}x^{-1};\ z_2,y)\overline{\omega}'\omega'(z_1)|\text{行列式 }z_1x|^{1-s}d^\times z_1,$$

$$E_{\gamma,}{}^{\text{实数域}}(x,s;\ f_P^\dagger(\cdot;\ z_2,y)):=-\frac{f_P^\dagger(0;\ z_2,y)|\text{行列式 }x|^s}{n(s)}+\frac{\hat{}f_P^\dagger(0;\ z_2,y)|\det x|^{s-1}}{n(s-1)}.$$

此处，δ遍历 $P_0(F)\backslash\overline{G'}(F)$ $|z_1|\ge 1$表示带有 $|z_1|\ge 1$的 $z_1\in Z'(\mathbb{A}_F)$，并且

$$\hat{f}_P^\dagger(\mathbf{x};z_2,y):=\int_{\mathbb{A}_F^n}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}f(u(\mathbf{c})n\iota(z_2y))\theta(\mathbf{x}\cdot{}^{\mathrm{t}}\mathbf{c})dnd\mathbf{c}.$$

注意，$E_{\gamma,+}(x,s;\ f_P^\dagger(\cdot;\ z_2,y))$ 和 $E_{\gamma,+}^\wedge(x,s;\ f_P^\dagger(\cdot;\ z_2,y))$ 对所有 (s_1,s_2) 都绝对收敛。$\in\mathbb{C}^2$. 定义（至少形式上）$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}\ +}(f,\mathbf{s})$ 为

$$\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}E_{\gamma,+}(x,s';f_P^\dagger(\cdot;z_2,y))\overline{\omega}'(z_2)|\det z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_2,$$

其中我们将$\overline{G'}$ 与 G'^0. 视为相同

同样，以类似的方式定义 $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},\wedge}_{\mathrm{Geo},+}(f,\mathbf{s})$（分别为 $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Res}}(f,\mathbf{s})$）：将 $E^{\wedge}_{\gamma,+}(x,s';f^{\dagger}_P(\cdot;z_2,y))$（分别为 $E_{\gamma,\mathrm{Res}}(x,s';f^{\dagger}_P(\cdot;z_2,y))$）插入，以替代 Eisenstein 级数 $E_{\gamma,+}(x,s';f^{\dagger}_P(\cdot;z_2,y))$。于是（至少形式上）

$$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})=\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo},+}(f,\mathbf{s})+\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},\wedge}_{\mathrm{Geo},+}(f,\mathbf{s})+\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Res}}(f,\mathbf{s}). \tag{4.15}$$

根据命题 4.4，(4.15) 的两边在 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>0$.中均有定义

引理 4.9。沿用前述记号。积分 $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}}{}_{+}(f,\boldsymbol{s})$ 在 $\mathbb{C}^2$. 中绝对收敛。特别地，$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}}{}_{+}(f,\boldsymbol{s})$ 是整函数，并满足以下估计

$$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo},+}(f,\boldsymbol{s})\ll|\mathfrak{N}|^{-n\,\mathrm{Re}(s_1+s_2)},$$

其中隐含常数依赖于 $\boldsymbol{s}$ ϕ_1', ϕ_2' 和 f_S.

证明。证明与命题 4.4的证明类似。写作 $z_{1,\mathrm{fin}}=z'/z$，其中z、$z'\in\mathcal{O}_F-\{0\}$和 z，且 z' 互素。由引理 4.6 可得$|z_{1,\infty}|_\infty\ll 1$。因此 $|\det pz_1|\geq 1$迫使 $|z'|_{\mathrm{fin}}\gg|z|_{\mathrm{fin}}|\det p|^{-\frac{1}{n}}$.。由式 (4.7) 可知$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}}{}_{+}(f,\mathbf{s})$ 是

$$\ll\max_{y^*\in C}\int_{[P_0']}\iint\left|\phi_1'(p)\phi_2'\left(p\begin{pmatrix}z^{-1}I_{n-1}&\\&1\end{pmatrix}y^*\right)\right||\det p|^A\frac{d^\times z}{|z|^A_{\mathrm{fin}}}|z'|^{ns'}_{\mathrm{fin}}d^\times z'dp,$$

其中 $z\in\mathcal{O}_F-\{0\}$ 且 z 与 $\mathfrak{N}$, $z'\in\mathfrak{N}\mathcal{O}_F-\{0\}$ 互素，满足$|z'|_{\mathrm{fin}}\gg|z|_{\mathrm{fin}}|\det p|^{-\frac{1}{n}}$.因此，$\mathcal{F}_{0,\ 1}J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}}{}_{+}(f,\mathbf{s})$ 是

$$\ll\frac{|\mathfrak{N}|^{-n\,\mathrm{Re}(s')}}{\mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N}))}\max_{y^*\in C}\int_{[P_0']}\int_{\widehat{\mathcal{O}_F}-\{0\}}\left|\phi_1'(p)\phi_2'\left(p\begin{pmatrix}z^{-1}I_{n-1}&\\&1\end{pmatrix}y^*\right)\right|\frac{|\det p|^{A+|s'|+\frac{1}{n}}d^\times zdp}{|z|^{A+n|s'|+1}_{\mathrm{fin}}},$$

由于尖点形式快速衰减，该级数收敛。 □

注4.10。• 注意，在命题 4.4 中，收敛域由艾森斯坦级数的收敛域决定。在引理 4.9 中，我们根据 $E_{\gamma,\ +}(x,s;f^{\dagger}_P(\cdot;z_2,y))$ 的全纯性得到了整性。

- 不使用 [MS12]，，也可以通过将尖点形式展开为惠特克函数，得到更显式的上界（参见[Yan23b], §8）。

我们还需要引理 4.7 的以下推广。

引理 4.11。记号同前。设 $v\notin S$.令 $\mathbf{c}_v=(c_1,\cdots,c_n)\in F_v^n$且 $\mathfrak{u}_v={}^{\mathrm{t}}(u_1,\cdots,u_n)\in F_v^n$.令 $n_v=\begin{pmatrix}I_n&\mathfrak{u}_v\\&1\end{pmatrix}$.

(i). 对于 $v\mid\mathfrak{N}$，有 $\min_{1\leq i\leq n}\{e_v(c_i)\}\geq e_v(\mathfrak{N})$。 *(ii)* 。设 $\min_{1\leq i\leq n}\{e_v(c_i)\}\geq 0$. 则 $f_v(u(\mathbf{c}_v)n_v\iota(y_v))\neq 0$，除非 $y_v\in K_v'$，$\mathbf{c}_v\in\mathcal{O}_{F_v}^n$ 且 $\mathfrak{u}_v\in\mathcal{O}_{F_v}^n$. *(iii)* 。设 $e_v(c_{i_0})=\min_{1\leq i\leq n}\{e_v(c_i)\}=-l\leq -1$. 则 $f_v(u(\mathbf{c}_v)n_v\iota(y_v))\neq 0$，除非 $u_i\in\varpi_v^l\mathcal{O}_{F_v}$、$1\leq i<n$ 和 $u_n\in-c_{i_0}^{-1}+\varpi_v^{2l}\mathcal{O}_{F_v}$，并且

$$y_v=w_{n-1}\cdots w_{i_0}\begin{pmatrix}\varpi_v^lI_{n-1}&\\&\varpi_v^{2l}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{n-1}&\\\mathbf{c}_v'&1\end{pmatrix}k_v',$$

其中，w_j 是在 K' 中实现的、对应于第 j 个单根的韦伊元，$\mathbf{c}_v'\in\varpi_v^{-l}M_{\mathfrak{u}_v\mathbf{c}_v}+\mathcal{O}_{F_v}^{n-1}$，其中 $M_{\mathfrak{u}_v\mathbf{c}_v}\in\mathcal{O}_{F_v}^{n-1}$ 是由 $w_{i_0}\cdots w_{n-1}\mathfrak{u}_v\mathbf{c}_v$，$1\leq i\leq n-1$. 的第 $(n,\ i)$ 个条目组成的向量

证明。假设 $f_v(u(\mathbf{c}_v)n_v\iota(y_v))\neq 0$，这相当于

$$\lambda_v\begin{pmatrix}I_n&\\\mathbf{c}_v&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_v&\mathfrak{u}_v\\&1\end{pmatrix}\in K_v,\ \text{i.e.,}\ \lambda_v\begin{pmatrix}y_v&\mathfrak{u}_v\\\mathbf{c}_vy_v&1+\mathbf{c}_v\mathfrak{u}_v\end{pmatrix}\in K_v \tag{4.16}$$

对于某个 $\lambda_v \in \varpi_v^{\mathbb{Z}}$. 对（4.16）取逆得到

$$\lambda_v^{-1}\begin{pmatrix} y_v^{-1}+y_v^{-1}\mathfrak{u}_v\mathbf{c}_v & -y_v^{-1}\mathfrak{u}_v \\ -\mathbf{c}_v & 1\end{pmatrix}\in K_v. \tag{4.17}$$

由（4.17）可推出 $e_v(\lambda_v) \leq 0$. 我们可以写成 $\lambda_v = \varpi_v^{-l'}$， $l' \geq 0$.

(1) 假设 $v \mid \mathfrak{N}$. 。由克拉默法则，存在 $k_v \in K_v'$ 使得

$$k_v\begin{pmatrix} I_n & \\ \mathbf{c}_v & 1\end{pmatrix}k_v^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & \\ & \eta\varpi_v^{\min_{1\leq i\leq n}\{e_v(c_i)\}} & 1\end{pmatrix}.$$

将其代入（4.16），再由引理 4.7 可得（i）成立。

(2) 假设 $l' = 0$. 。那么由（4.17），$\mathbf{c}_v \in \mathcal{O}_{F_v}^n$, $y_v^{-1}\mathfrak{u}_v \in \mathcal{O}_{F_v}^n$, 从而$y_v^{-1} \in M_{n\times n}(\mathcal{O}_{F_v})$。由（4.16），我们有 $y_v \in M_{n,\,n}(\mathcal{O}_{F_v})$。因此， $y_v \in K_v'$, $\mathbf{c}_v \in \mathcal{O}_{F_v}^n$, 且 $\mathfrak{u}_v \in \mathcal{O}_{F_v}^n$.

(3) 假设 $l' \geq 1$. 。由于 K_v 是一个群，分析（$n+1$）行（4.17）可得 $l' = -\max_{1\leq i\leq n}\{e_v(c_i)\} = -l$. 。令 i_0 为满足 $e_v(c_{i_0}) = -l$. 的最小指标。用岩泽分解形式$w_{i_0}\cdots w_{n-1}y_v = t_v n_v' k_v'$参数化 y_v，其中 w_j 是在 K' 中实现的韦伊元，对应于第 j 个单根， $t_v = (\varpi_v^{l_1},\cdots,\varpi_v^{l_n})$ 是伯雷尔子群的下三角幺幂根基，且 $k_v' \in K_v'$. 。考虑（4.16）的行列式和对角元素可得

$$\begin{cases} l_1+l_2+\cdots+l_n = (n+1)l \\ l_1 \geq l,\ l_1 \geq l,\ \cdots,\ l_n \geq l.\end{cases} \tag{4.18}$$

考察（$n+1, n$）位置的条目（4.16）可得 $\lambda_v c_{i_0}\varpi_v^{l_n} \in \mathcal{O}_{F_v}$，即 $l_n \geq 2l$. 。结合（4.18），我们进而推出 $l_1 = \cdots = l_{n-1} = l$ 以及 $l_n = 2l$. 。由于左上角的（$n-1$）$\times$（$n-1$）块属于 $M_{n-1,n-1}(\mathcal{O}_{F_v})$，因此， n_v' 的左上角（$n-1$）$\times$（$n-1$）块属于 $M_{n-1,n-1}(\mathcal{O}_{F_v})$。因此，我们可以写成 $w_{i_0}\cdots w_{n-1}y_v = t_v n_v'' k_v''$，其中$n_v'' = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ \mathbf{c}_v' & 1\end{pmatrix}$ 满足 $\mathbf{c}_v' \in F_v^{n-1}$,

$k_v'' \in K_v'$. 。此外，我们可以假设$k_v'' = 1$，因为 f_v 是右 $\iota(K_v')$ 不变的。

现在我们考虑 $n\times n$（4.17）的左上

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ -\mathbf{c}_v' & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & \varpi_v^{-l}\end{pmatrix} w_{i_0}\cdots w_{n-1}\cdot(I_n+\mathfrak{u}_v\mathbf{c}_v) \in M_{n,n}(\mathcal{O}_{F_v}). \tag{4.19}$$

由（$n+1$）列（4.16）可得 $e_v(u_i) \geq l$, $1 \leq i \leq n$. 因此，$\mathfrak{u}_v\mathbf{c}_v \in M_{n\times n}(\mathcal{O}_{F_v})$。因此，由（4.19）可推出

$$\mathbf{c}_v' - \varpi_v^{-l}M_{\mathfrak{u}_v\mathbf{c}_v} \in \mathcal{O}_{F_v}^{n-1},\quad e_v(1+u_nc_{i_0}) \geq l.$$

因此，引理4.11得证。 □

现在我们继续考察$\mathcal{F}_{0,\ 1}J^{\mathrm{Big}}_{,\ \wedge\ \mathrm{Geo}\ +}(f,\mathbf{s})$的解析性质。

命题 4.12。 函数$\mathcal{F}_{0,\ 1}J^{\mathrm{Big}}_{,\ \wedge\ \mathrm{Geo}\ +}(f,\ \boldsymbol{s})$在该区域内绝对收敛

$$\mathcal{R} := \big\{\mathbf{s} = (s_1,s_2) \in \mathbb{C}^2 :\ \mathrm{Re}(s_1),\ \mathrm{Re}(s_2) > -1/(n+1)\big\}, \tag{4.20}$$

并且可延拓为其中的全纯函数。此外，

$$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},\wedge}_{\mathrm{Geo},+}(f,\boldsymbol{s}) = O(|\mathfrak{N}|^{2+n\,\mathrm{Re}(s_1+s_2)}),\quad \boldsymbol{s}\in\mathcal{R}, \tag{4.21}$$

其中隐含常数取决于 ε, $\boldsymbol{s}$ ϕ_1', ϕ_2' 和 f_S.

证明。 展开艾森斯坦级数 $E^{\wedge}_{\gamma,+}(x,s';\ f^{\dagger}_P(\cdot;\ I_n,y))$，进行变量替换$x\mapsto {}_{\mathrm{t}}x^{-1}$，记 $x=pk,\ p\in[P'_0]$ 和 $k\in K'$, $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{,\wedge\ \text{几何}\ +}(f,\mathbf{s})$ 被以下表达式控制

$$\mathcal{J}:=\int_{K'}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\Big|\int_{\mathbb{A}_F^n}f(u(\mathbf{c})n\iota(y))\theta(\eta z_1 k\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{c})d\mathbf{c}\Big|$$
$$\int_{\substack{p\in[P'_0]\\ |\det pz_1|\geq 1}}\big|\overline{\phi'_1(pk)}\phi'_2(pk\,{}^{\mathrm{t}}y^{-1})\big|dpdn|\det z_1|^{-\mathrm{Re}(s_1+s_2)}d^{\times}z_1|\det y|^{\mathrm{Re}(s_2)}dydk.$$

作变量替换 $\mathbf{c}\mapsto k^{-1}\mathbf{c}$ $n\mapsto \iota({}^{\mathrm{t}}k)n\iota({}^{\mathrm{t}}k^{-1})$ $y\mapsto {}_{\mathrm{t}}ky$，得到

$$\mathcal{J}=\int_{K'}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\Big|\int_{\mathbb{A}_F^n}f(u(\mathbf{c})n\iota(y))\theta(\eta z_1\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{c})d\mathbf{c}\Big|dn$$
$$\int_{[P'_0]}\big|\overline{\phi'_1(pk)}\phi'_2(p\,{}^{\mathrm{t}}y^{-1})\big|\mathbf{1}_{|\det pz_1|\geq 1}dp|\det z_1|^{-\mathrm{Re}(s_1+s_2)}d^{\times}z_1|\det y|^{\mathrm{Re}(s_2)}dydk.$$

由正交性，$z_{1,\mathrm{fin}}$ 在 $Z'(\mathfrak{N}^{-1}\mathcal{I})$ 中的支集，其中 $\mathcal{I}$ 是一个分式理想，取决于 $\mathrm{supp}\,f_S$. 记 $\mathcal{Z}=Z'(F_\infty)Z'(\mathfrak{N}^{-1}\mathcal{I})$。

设 $\|\phi'_2\|_\infty$ 为 ϕ'_2. 的上确界范数。那么

$$\int_{|\det pz_1|\geq 1}\big|\overline{\phi'_1(pk)}\phi'_2(p\,{}^{\mathrm{t}}y^{-1})\big|dp\leq\|\phi'_2\|_\infty\int_{[P'_0]}\big|\phi'_1(pk)\big|\mathbf{1}_{|\det pz_1|\geq 1}dp.$$

因此，

$$\mathcal{J}\ll\int_{\mathcal{Z}}|\det z_1|^{-\mathrm{Re}(s_1+s_2)}\Big[\prod_{v\in\Sigma_F}\mathcal{J}_v(z_{1,v})\Big]\int_{K'}\int_{[P'_0]}\big|\phi'_1(pk)\big|\mathbf{1}_{|\det pz_1|\geq 1}dpdkd^{\times}z_1,$$

其中 $\mathcal{J}_v(z_{1,v})$ 定义为

$$\int\int\Big|\int_{F_v^n}f_v(u(\mathbf{c}_v)n_v\iota(y_v))\int_{\mathcal{O}^{\times}_{F_v}}\theta_v(\eta\beta_v z_{1,v}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{c}_v)d^{\times}\beta_v d\mathbf{c}_v\Big|dn_v|\det y_v|_v^{\mathrm{Re}(s_2)}dy_v$$

若 $v<\infty$，其中 y_v （分别地， n_v）遍历 $G'(F_v)$ （分别地， $N_P(F_v)$）；并定义为

$$\int_{G'(F_v)}\int_{N_P(F_v)}\Big|\int_{F_v^n}f_v(u(\mathbf{c}_v)n_v\iota(y_v))\theta_v(\eta z_{1,v}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{c}_v)d\mathbf{c}_v\Big|dn_v|\det y_v|_v^{\mathrm{Re}(s_2)}dy_v$$

若 $v\mid\infty$。对 β_v 的积分来自变量替换 $z_1\mapsto z_1\prod_{v<\infty}\beta_v$，以及对 β_v 的积分。

令 $v\in\Sigma_F$. 令 $l(\mathbf{c}_v)=\min_{1\leq j\leq n}\{e_v(c_j)\}$，其中 $\mathbf{c}_v=(c_1,\cdots,c_n)$。

- 假设 $v\notin S$ 且 $v\nmid\mathfrak{N}.$，则 $\mathcal{J}_v(z_{1,v})=\mathcal{J}_v^+(z_{1,v})+\mathcal{J}_v^-(z_{1,v})$，其中 $\mathcal{J}_v^+(z_{1,v})$ 定义为

$$\int_{G'(F_v)}\int_{N_P(F_v)}\Big|\int_{F_v^n}f_v(u(\mathbf{c}_v)n_v\iota(y_v))\theta_v(\eta z_{1,v}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{c}_v)\mathbf{1}_{l(\mathbf{c}_v)\geq 0}d\mathbf{c}_v\Big|dn_v|\det y_v|_v^{\mathrm{Re}(s_2)}dy_v,$$

并且 $\mathcal{J}_v^-(z_{1,v})$ 的定义类似，只需将 $\mathbf{1}_{l(\mathbf{c}_v)\geq 0}$ 替换为 $\mathbf{1}_{l(\mathbf{c}_v)<0}$.

根据引理 4.11 我们有 $\mathcal{J}_v^+(z_{1,v})=1$，而 $\mathcal{J}_v^-(z_{1,v})$ 为

$$\ll\sum_{l\leq -1}|z_{1,v}|_v^{-1}q_v^{-(n-1)l}q_v^{(n+1)l}q_v^{(n+1)l\,\mathrm{Re}(s_2)}\ll|z_{1,v}|_v^{-1}q_v^{-2-(n+1)\,\mathrm{Re}(s_2)},\tag{4.22}$$

其中隐含常数是绝对的。这里 $q_v^{(n-1)l}$是来自c_1的贡献，$\cdots$，c_{n-1}，而来自 c_n的贡献是$|z_{1,v}|_v^{-1}$这归因于 Ramanujan 和 $\int_{\mathcal{O}^{\times}_{F_v}}\theta_v(\eta\beta_v z_{1,v}\,{}_{\mathrm{t}}\mathbf{c}v)d^{\times}\beta_v$。因子 $q_v^{-(n+1)l}$(分别对应 $q_v^{-(n+1)l\,\mathrm{Re}(s_2)}$) 是根据引理 n_v (分别对应 y_v) 得到的来自 4.11第二部分的贡献。

- 假设 $v\mid\mathfrak{N}.$ 由引理4.11 的第一部分 $l(\mathbf{c}v)\geq e_v(\mathfrak{N})$。因此

$$\mathcal{J}_v(z_{1,v})=\mathcal{J}_v^+(z_{1,v})\ll q_v^{-ne_v(\mathfrak{N})}\|f_v\|_\infty\mathbf{1}_{e_v(z_{1,v})\geq -e_v(\mathfrak{N})}.$$

• 假设 $v \mid \infty$. 由引理4.6 积分 $\mathcal{J}_v(z_{1,v})$ 收敛，因为 $\mathfrak{c}_v$、 n_v 和 y_v 的支撑是紧的。这里我们注意到，阿基米德傅里叶变换是 $z_{1,v}$. 的施瓦茨函数 h_v

• 假设 $v \in S \cap \Sigma_F$,fin. 简记为 $l = l(\mathfrak{c}_v) = \min_{1\le j\le n}\{e_v(c_j)\}$.若 $l \ge 0$，则 $f_v(u(\mathfrak{c}_v)n_v\iota(y_v)) \ne 0$，除非 $u_v \in C_1$ 且 $y_v \in C_2$，其中$C_1 \subset F_v^n$和 $C_2 \subset G'(F_v)$ 是由 supp f_v.确定的紧集。若 $l \le -1$，则存在一个（依赖于 $\mathfrak{c}_v$ 的） $k_0 \in K_v'$，使得$\iota(k_0^{-1})u(\mathfrak{c}_v)\iota(k_0) = u(\eta\varpi_v^l)$。利用引理 4.8，我们进而推出$f_v(u(\mathfrak{c}_v)n_v\iota(y_v)) \ne 0$，除非 $u_v \in \varpi_v^{-l}C_1'$ 且 $y_v \in \varpi_v^{-l}K_v'\,\mathrm{diag}(I_{n-1}, \varpi_v^{-l})C_2'$，
其中 $C_1' \subset F_v^n$ 和 $C_2' \subset G'(F_v)$ 是由 f_v. 的支撑所确定的紧集。与 (4.22) 类似，我们推得 $\mathcal{J}_v^-(z_{1,v}) \ll |z_{1,v}|_v^{-1}(1+q_v^{-2-(n+1)\mathrm{Re}(s_2)})$，其中隐含常数取决于 f_v. 的支撑。注意，在 S. 中只有有限多个 v。因此，$\prod_{v\in S\cap\Sigma_{F,\mathrm{fin}}}\mathcal{J}_v^-(z_{1,v}) \ll \prod_{v\in S\cap\Sigma_{F,\mathrm{fin}}}|z_{1,v}|_v^{-1}$.

写作 $|z_{1,\ \mathrm{fin}}|_{\mathrm{fin}} = m^{-1}$, $m \in |\mathfrak{N}|^{-1}M_S^{-1}\mathbb{Z}_{\ge 1}$，其中 $M_S \in \mathbb{Q}$ 由 f_S. 的支撑所确定。综合以上讨论，我们进而推得 $\mathcal{J}$ 为

$$\ll \frac{|\mathfrak{N}|^{-n}}{\mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N}))}\int_{Z'(F_\infty)}|\det z_{1,\infty}|_\infty^{-\mathrm{Re}(s_1+s_2)}\prod_{v|\infty}\mathcal{J}_v(z_{1,v})\int_{K'}\int_{[P_0']}\left|\phi_1'(pk)\right|$$
$$\prod_{v\in\Sigma_{F,\mathrm{fin}}}(1+O(q_v^{-2-(n+1)\mathrm{Re}(s_2)}))\sum_{\substack{\mathfrak{m}:\ N_F(\mathfrak{m})=m\\ m\in|\mathfrak{N}|^{-1}M_S^{-1}\mathbb{Z}_{\ge1}\\ m^n\le|\det z_{1,\infty}|_\infty|\det p|}} m^{1+n\,\mathrm{Re}(s_1+s_2)}dpdkd^\times z_1,$$

其中 $\mathfrak{m}$ 是 F 中的分式理想，而 $N_F(\mathfrak{m})$ 是绝对范数。

因此，当 $-2-(n+1)\,\mathrm{Re}(s_2) < -1$，即 $\mathrm{Re}(s_2) > -1/(n+1)$ 时，

$$\mathcal{J} \ll \frac{|\mathfrak{N}|^{-n}}{\mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N}))}\cdot(|\mathfrak{N}|M_S)^{2+n\,\mathrm{Re}(s_1+s_2)}\int_{Z'(F_\infty)}|\det z_{1,\infty}|_\infty^{2/n}\prod_{v|\infty}\mathcal{J}_v(z_{1,v})d^\times z_1$$
$$\int_{K'}\int_{[P_0']}\left|\phi_1'(pk)\right||\det p|^{\frac{2}{n}+\mathrm{Re}(s_1+s_2)}\mathbf{1}_{|\det p|\ge(|\mathfrak{N}|M_S)^{-n}}dpdk.$$

由于 ϕ_1' 在 $Z'(\mathbb{A}_F)P_0'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)$上快速衰减，因此

$$\int_{K'}\int_{[P_0']}\left|\phi_1'(pk)\right||\det p|^{\frac{2}{n}+\mathrm{Re}(s_1+s_2)}dpdk < \infty.$$

此外，由 f_∞ 的支集可知

$$\int_{Z'(F_\infty)}|\det z_{1,\infty}|_\infty^{2/n}\prod_{v|\infty}\mathcal{J}_v(z_{1,v})d^\times z_1 < \infty.$$

因此（4.21）得证。 □

命题 4.13。 函数 $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo,Res}}(f,\boldsymbol{s})$ 在$s_1+s_2 \in \{0,-1\}$之外绝对收敛，并可延拓为 $\mathcal{R}$ 上的亚纯函数，其可能的简单极点位于 $s_1+s_2 \in \{0,-1\}$.

证明。 这里省略证明，因为它与命题4.12的证明非常相似（但更简单）。 □

结合命题 4.4、4.12和4.13，我们推得以下结论。

定理 4.14。 沿用前文的记号。则 $\mathcal{F}_{0,\ 1}J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}}(f,\ \boldsymbol{s})$ 在 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2) > 0$ 中绝对收敛，并可亚纯延拓至区域 $\mathcal{R}$ (参见(4.20))，其至多在以下位置有简单极点：
$s_1+s_2 \in \{0,-1\}$.

此外，对于 $\mathbf{s}\in\mathcal{R}$，$\mathcal{F}_0$ 的全纯部分，${}_1J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}}(f,\boldsymbol{s})$ 满足

$$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo},+}(f,\boldsymbol{s})\ll|\mathfrak{N}|^{-n\,\mathrm{Re}(s_1+s_2)},\quad \mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},\wedge}_{\mathrm{Geo},+}(f,\boldsymbol{s})=O(|\mathfrak{N}|^{2+n\,\mathrm{Re}(s_1+s_2)}),$$

其中，隐含常数取决于 π_1'、π_2' 和 f_S。

4.4. **轨道积分：** $\mathcal{F}_1、{}_0J^{\mathrm{Big}}、{}_T\mathrm{Geo}(f,\mathbf{s})$。与引理 4.2 类似，集合 $\{w_n,\gamma\}$是 $Z(F)P(F)\backslash P(F)w_nP(F)/\iota(G'(F))$ 的完全代表元集。与引理 4.3 类似，我们可以将 $\mathcal{F}_1、{}_0J^{\mathrm{Big}}、{}_T\,\mathrm{Geo}\,(f,\mathbf{s})$ 化简为

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{\overline{[G']}}\int_{\overline{[G']}}\int_{[N_P]}\sum_{\gamma\in Z(F)\backslash P(F)\gamma\iota(G'(F))}f(\iota(z_1x)^{-1}u\gamma\iota(z_2y))$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_2y|^{s_2}dudxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

回想一下，对于 $\mathbf{x}\in M_{n,\,1}(\mathbb{A}_F)$，我们定义 $u(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}I_n&\mathbf{x}\\&1\end{pmatrix}$。记

$${}^\dagger f_P(\mathbf{x};z_2,y)=\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}f(nu(\mathbf{x})\iota(z_2y))dn.$$

那么 ${}^\dagger f_P$ 是 $\mathbb{A}_F^n\times Z'(\mathbb{A}_F)\times\overline{G'}(\mathbb{A}_F)$ 上的 Schwartz-Bruhat 函数。定义

$$E_\gamma(x,s;{}^\dagger f_P(\cdot;z_2,y))=\sum_\delta\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}{}^\dagger f_P(\eta z_1\delta x;z_2,y)|\det z_1x|^sd^\times z_1,$$

当 $\mathrm{Re}(s)>1.$ 时，该积分绝对收敛。此处，δ 遍历 $P_0(F)\backslash\overline{G'}(F)$。此外，固定 $z_2\in Z'(\mathbb{A}_F)$ 和 $y\in\overline{G'}(\mathbb{A}_F)$ 后，$E_\gamma(x,s;{}^\dagger f_P(\cdot;z_2,y))$ 可亚纯延拓至整个 s-平面，并满足函数方程，该方程联系 s 和 $1-s.$ 处的赋值。与命题 4.4 类似，我们得到如下结果：

命题 4.15. 沿用前述记号。设 $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2)$ 满足 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>0.$ 那么

$$\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo}}(f,\boldsymbol{s}):=\lim_{T\to\infty}\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo}}(f,\boldsymbol{s})$$

存在，且可表示为绝对收敛积分

$$\int_{\overline{[G']}}\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\mathcal{P}(\boldsymbol{s};\phi_2',{}^\dagger f_P(\cdot;z_2,y))\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det(z_2y)|^{s_2}d^\times z_2dy,$$

其中，$\mathcal{P}(\boldsymbol{s};\phi_2',f_P^\dagger(\cdot;z_2,y))$ 定义为

$$\int_{\overline{[G']}}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}E_\gamma(x,s_1+s_2+1;{}^\dagger f_P(\cdot;z_2,y))dyd^\times z_2,$$

这是一个 *Rankin-Selberg* 卷积，表示 $\Lambda(1+s_1+s_2,\pi_1'\times\tilde{\pi}_2')$。此外，

$$\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo}}(f,\boldsymbol{s})\ll|\mathfrak{N}|^{-n(s_1+s_2)},\quad \mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>0,$$

其中隐含常数依赖于 π_1', π_2', 和 f_S。

与命题 4.12 和 4.13 平行地，我们得到

定理 4.16. 沿用前述记号。那么，$\mathcal{F}_{1,\,0}J^{\mathrm{Big}}{}_{\text{几何}}(f,\boldsymbol{s})$ 在 $\{(s_1,\,s_2)\in\mathbb{C}^2,\ \mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>0\}$，绝对收敛，并可亚纯延拓至区域 $\mathcal{R}$，且至多在 $s_1+s_2\in\{0,-1\}.$ 处有单极点

此外，对于 $\mathbf{s}\in\mathcal{R}$，$\mathcal{F}_{1,\,0}J^{\mathrm{Big}}{}_{\text{几何}}(f,\,\boldsymbol{s})$ 的全纯部分满足

$$\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo},+}(f,\boldsymbol{s})\ll|\mathfrak{N}|^{-n\,\mathrm{Re}(s_1+s_2)},\quad \mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big},\wedge}_{\mathrm{Geo},+}(f,\boldsymbol{s})=O(|\mathfrak{N}|^{2+n\,\mathrm{Re}(s_1+s_2)}),$$

其中隐含常数取决于 π_1'、π_2'，以及 f_S。

证明。 记 $\mathcal{F}_{1,\ 0}J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}}(f、\ \mathbf{s};\ \phi_1'、\ \phi_2')$ 为 $\mathcal{F}_{1,\ 0}J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}}(f、\ \mathbf{s})$，以突出尖点形式 ϕ_1' 和 ϕ_2' 及其阶的依赖关系。注意，经过变量替换后，

$$\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s};\phi_1',\phi_2') = \mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo}}(f^\vee,\mathbf{s}^\vee;\phi_2',\phi_1'), \tag{4.23}$$

其中，对于 $\mathbf{s}=(s_1,s_2)$，$\mathbf{s}^\vee:=(s_2,s_1)$；对于 $g\in G(\mathbb{A}_F)$ $f^\vee(g):=f(g^{-1})$。这里$\mathcal{F}_{0,\ 1}J^{\mathrm{Big}}{}_{\text{几何}}(f^\vee,\mathbf{s}^\vee;\phi_2',\phi_1')$ 表示将 f（分别为 $\mathbf{s}$）替换为 $f^\vee$（分别为 $\mathbf{s}^\vee$）后的积分，并交换尖点形式 ϕ_1' 和 ϕ_2'。

那么定理4.16 由（4.23）以及定理4.14的证明得出。 □

注记4.17。等式（4.23）给出了 $\mathcal{F}_{0,\ 1}J^{\mathrm{Big}}{}_{\text{几何}}(f,\mathbf{s})$ 与 $\mathcal{F}_{1,\ 0}J^{\mathrm{Big}}{}_{\text{几何}}(f,\mathbf{s})$ 之间的显式关系。

5. Orbital Integrals Relative to the Big Cell: II

本节讨论分布 $\mathcal{F}_{0,\ 0}J^{\mathrm{Big}}{}_{,\ T\ \text{几何}}(f,\mathbf{s})$，其定义如下

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{\overline{[G']}}\int_{\overline{[G']}}\sum_{\gamma\in P_0(F)w_nP_0(F)} f(\iota(z_1x)^{-1}\gamma\iota(z_1z_2y))\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}$$
$$\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

积分 $\mathcal{F}_{0,\ 0}J^{\mathrm{Big}}{}_{,\ T\ \text{几何}}(f,\mathbf{s})$ 的解析性质比 $\mathcal{F}_{0,\ 1}J^{\mathrm{Big}}{}_{,\ T\ \text{几何}}(f,\mathbf{s})$ 和 $\mathcal{F}_{1,\ 0}J^{\mathrm{Big}}{}_{,\ T\ \text{几何}}(f,\mathbf{s})$ 的解析性质更微妙。我们将通过双陪集分解，把 $\mathcal{F}_{0,\ 0}J^{\mathrm{Big}}{}_{,\ T\ \text{几何}}(f,\mathbf{s})$ 写成轨道积分的线性组合。这是处理几何侧的一种典型方法。注意，轨道积分并非纯粹几何的，因为 $\mathcal{F}_{0,\ 0}J^{\mathrm{Big}}{}_{,\ T\ \text{几何}}(f,\mathbf{s})$ 涉及一些自守信息（例如，ϕ_1'）。处理这些积分需要一些新的成分。令

$$\gamma_1=\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \\ & & 1\\ & 1 & \end{pmatrix},\quad \gamma_2=\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \\ & & 1\\ & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \gamma_3=\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \\ & 1 & 1\\ & 1 & \end{pmatrix},$$
$$\gamma_4=\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \tau\\ & & 1\\ & 1 & \end{pmatrix},\quad \gamma_5=\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \tau\\ & & 1\\ & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \gamma_6=\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \tau\\ & 1 & 1\\ & 1 & \end{pmatrix},$$
$$\gamma_\tau=\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \tau\\ & 1 & \\ & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \gamma(t)=\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \\ & 1 & t\\ & 1 & 1\end{pmatrix},\quad t\in F-\{1\},$$

其中 $\tau={}_t(1,0,\cdots,0)\in F^{n-1}$. 令 $\Phi_1=\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5,\gamma_6\}$. 记 $\Phi_2=\{\gamma_\tau,\gamma(t):t\in F-\{1\}\}$.

引理 5.1。 沿用前文的记号。则 $\Phi:=\Phi_1\sqcup\Phi_2$ 构成 $\iota(G')(F)\backslash P_0(F)w_nP_0(F)/\iota(G')(F)$ 的完全代表元集。

证明。 令 $g\in P_0(F)w_nP_0(F)$。由布鲁哈特分解，我们可以写成 $g=p_1w_np_2$，其中 $p_1,p_2\in P_0(F)$。令 $p_1=m_1n_1$, $p_2=m_2n_2$ 为列维分解。我们不妨假设

$$n_1=\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \\ & 1 & \alpha_1\\ & & 1\end{pmatrix},\quad n_2=\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \beta\tau\\ & 1 & \alpha_2\\ & & 1\end{pmatrix},\quad \alpha_1,\alpha_2,\beta\in F.$$

- 假设 $\alpha_1=\alpha_2=0$. 那么 $g\in\iota(G')(F)\gamma_1\iota(G')(F)\bigcup\iota(G')(F)\gamma_4\iota(G')(F)$。
- 假设 $\alpha_1=0$ 但是 $\alpha_2\neq 0$. 那么

$$g\in\iota(G')(F)\gamma_2\iota(G')(F)\bigcup\iota(G')(F)\gamma_5\iota(G')(F).$$

- 假设 $\alpha_1\neq 0$ 但是 $\alpha_2=0$. 那么
$$g\in\iota(G')(F)\gamma_3\iota(G')(F)\bigcup\iota(G')(F)\gamma_6\iota(G')(F).$$
- 设 $\alpha_1\alpha_2\neq 0$，且 $\beta=0$. 则 $g\in\iota(G')(F)\gamma(t)\iota(G')(F)$ 对某个$t\in F-\{1\}$.

- 设 $\alpha_1\alpha_2\neq 0$，且 $\beta\neq 0$.
  - 若 $\alpha_1\alpha_2=-1$，则 $g\in\iota(G')(F)\gamma_\tau\iota(G')(F)$。
  - 若 $\alpha_1\alpha_2\neq -1$，则 $g\in\iota(G')(F)\gamma(t)\iota(G')(F)$ 对某个 $t\in F-\{0,1\}$.

这里我们利用了以下事实:
$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & c\tau & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix} n_1w_n\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \\ & 1 & \alpha_2\\ & & 1\end{pmatrix}=n_1w_n\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \\ & 1 & \alpha_2\\ & & 1\end{pmatrix}.$$
因此，我们有
$$P_0(F)w_nP_0(F)=\bigcup_{\gamma\in\Phi}\iota(G')(F)\gamma\iota(G')(F). \tag{5.1}$$
由 Bruhat 标准形的唯一性，(5.1) 中的并是不交的。 □

对于 $\delta\in\Phi$，用 $\mathcal{O}_\delta(F)$ 表示 δ在 $P_0(F)w_nP_0(F)$ 中的轨道。令
$$H'_\delta=\left\{(x,y)\in G'\times G':\ \iota(x)\delta=\delta\iota(y)\right\}$$
为 δ. 的稳定子。那么 $\mathcal{O}_\delta(F)=\iota(H'_\delta\backslash(G'(F)\times G'(F)))$。

根据引理 5.1 ，我们可以将 $\mathcal{F}_{0,0}J^{\mathrm{Big}}{}_{,T\ \mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 分解为
$$\mathcal{F}_{0,0}J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})=\sum_{\delta\in\Phi}J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo},\delta}(f,\mathbf{s}), \tag{5.2}$$
其中
$$J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo},\delta}(f,\mathbf{s}):=\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\sum_{\gamma\in\mathcal{O}_\delta(F)}f(\iota(z_1x)^{-1}\gamma\iota(z_1z_2y))$$
$$\phi'_1(x)\overline{\phi'_2(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$
将 $\mathcal{O}_\delta(F)=\iota(H'_\delta\backslash(G'(F)\times G'(F)))$ 代入上述定义，重写 $J^{\mathrm{Big},\ T\mathrm{Geo}\ \delta}(f,\mathbf{s})$ 为
$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in H'_\delta(F)\backslash(G'(F)\times G'(F))}f(\iota(z_1^{-1}x^{-1}\gamma_1^{-1})\delta\iota(\gamma_2z_1z_2y))$$
$$\phi'_1(x)\overline{\phi'_2(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$
注意，核函数 $K(g_1,g_2)$ 是绝对收敛的，并且分别关于 g_1 和 g_2. 缓慢递增。此外，ϕ' 在 $[\overline{G'}]$上快速衰减，因此$\mathcal{F}_{0,0}J^{\mathrm{Big}}{}_{,T}\ \mathrm{Geo}\ (f,\mathrm{s})$ 绝对收敛。因此，(5.2) 定义良好，并且同样绝对收敛。我们需要证明，可以将极限 $T\to\infty$ 取入轨道积分分解 (5.2) 中。事实上，我们将证明，对于所有满足 $\mathrm{s}\in\mathbb{C}^2$ 的情形，(5.2) 的这种极限形式都是允许的，从而定义了 s 的一个整函数。

5.1. 消失轨道积分。 在本小节中，我们将证明 $J^{\mathrm{Big},\ T\mathrm{Geo}\ \delta}(f,\mathbf{s})\equiv 0$（当 $\gamma\in\Phi_1$. 时）。这是 f_v, $v\mid\mathfrak{N}$.的支集所导致的结果。

引理 5.2。 记号同前。令 $\gamma\in\Phi_1$. 则
$$J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo},\delta}(f,\boldsymbol{s})\equiv 0.$$
证明。 令 $v\mid\mathfrak{N}$. 考虑 $f_v(\iota(z_{1,\ v}x_v)^{-1}\gamma\iota(z_{2,\ v}y_v))$，其中 $\gamma\in\Phi_1$.

（I）。假设 $\gamma=\gamma_1$. 则

$$\iota(z_{1,v}x_v)^{-1}\gamma\iota((z_{1,v}z_{2,v}y_v)=\begin{pmatrix}*&**&0\end{pmatrix}\in G(F_v),$$

也就是说，$\iota(z_{1,v}x_v)^{-1}\gamma\iota(z_{1,v}z_{2,v}y_v)$ 的最后一行形如 $(*,\cdots,*,0)$。因此，$\iota(z_{1,v}x_v)^{-1}\gamma\iota(z_{1,v}z_{2,v}y_v)\notin Z(F_v)K_v$ 的 $(n+1,n+1)$ 项非消失。因此，$f_v(\iota(z_{1,v}x_v)^{-1}\gamma_1\iota(z_{1,v}z_{2,v}y_v))=0$.

(II). 设 $\gamma=\gamma_2$. 考虑岩泽分解

$$z_{1,v}x_v=b_vk_v,\quad z_{2,v}y_v=z_{1,v}^{-1}b_v'k_v',$$

其中 $b_v,b_v'\in B'(F_v)$ 和 $k_v,k_v'\in K_v'=G'(\mathcal{O}_{F_v})$。注意，$\iota(K_v')\subset K_v$.所以

$$f_v(\iota(z_{1,v}x_v)^{-1}\gamma_1\iota(z_{1,v}z_{2,v}y_v))=f_v(\iota(b_v)^{-1}\gamma_2\iota(b_v')).$$

然而，直接计算可得

$$\iota(b_v)^{-1}\gamma_2\iota(b_v')=\begin{pmatrix}*&*\\0&**&1\end{pmatrix}\in G(F_v),$$

也就是说，$\iota(b_v)^{-1}\gamma_2\iota(b_v')$ 的倒数第二行是 $(0,\cdots,0,*)$，其中前n 项为零。因此，它不可能属于 $Z(F_v)K_v$，即 Hecke同余子群。因此，$f_v(\iota(z_{1,v}x_v)^{-1}\gamma_2\iota(z_{1,v}z_{2,v}y_v))=0$.

(III). 假设 $\gamma=\gamma_3$. 那么取逆并按照情形 II 中的类似论证，我们得到 $f_v(\iota(z_{1,v}x_v)^{-1}\gamma_3\iota(z_{2,v}y_v))=0$.

综上，我们有 $f_v(\iota(z_{1,v}x_v)^{-1}\gamma\iota(z_{1,v}z_{2,v}y_v))=0$ 对所有 $\gamma\in\Phi$, $z_{1,v}x_v,z_{2,v}y_v\in G'(F_v)$，从而证明了引理 5.2。□

由引理 5.1 和引理 5.2 可得

$$\mathcal{F}_{0,0}J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Big},T}(f,\mathbf{s})=J_{\mathrm{Geo},\gamma(0)}^{\mathrm{Big},T}(f,\mathbf{s})+J_{\mathrm{Geo},\gamma_\tau}^{\mathrm{Big},T}(f,\mathbf{s})+\sum_{t\in F-\{0,1\}}J_{\mathrm{Geo},\gamma(t)}^{\mathrm{Big},T}(f,\mathbf{s}).\tag{5.3}$$

遵循 [RR05] 中的约定，我们将其称为

$$J_{\mathrm{Geo,reg}}^{\mathrm{Big},T}(f,\mathbf{s}):=\sum_{t\in F-\{0,1\}}J_{\mathrm{Geo},\gamma(t)}^{\mathrm{Big},T}(f,\mathbf{s}).\tag{5.4}$$

正则 轨道积分。记 $J^{\mathrm{Big},T}\mathrm{Geo,Dual}(f,\mathbf{s})=J^{\mathrm{Big},T}\mathrm{Geo}\,\gamma(0)(f,\mathbf{s})$。我们将看到$J^{\mathrm{Big},T}\mathrm{Geo,Dual}(f,\mathbf{s})$ 是 $J^{\mathrm{Big},T}\mathrm{Geo,Small}(f,\mathbf{s})$ 通过函数方程得到的“对偶”。

当 (s_1,s_2) 趋近于 $(0,0)$ 时，轨道积分 $J^{\mathrm{Big},T}\mathrm{Geo,Dual}(f,\mathbf{s})$ 将作为主要项之一占主导地位；而 $J^{\mathrm{Big},T}\mathrm{Geo}\,\gamma_\tau(f,\mathbf{s})$ 与正则轨道积分$J^{\mathrm{Big},T}\mathrm{Geo}\,\gamma(t)(f,\mathbf{s})$ 之和，当 t遍历 $F-\{0,1\}$时，将被证明是微小的误差项。此外，如果测试函数 f 模中心具有紧支集，那么只要 $|\mathfrak{N}|$ 足够大，$\mathcal{F}_{0,0}J^{\mathrm{Big},T}\mathrm{Geo}\,\gamma(t)(f,\mathbf{s})\equiv0$ 对所有 $t\neq0$ 均成立。因此，我们将得到 [MR12] 和 [FW09]意义下的稳定性。这里我们回顾一下：$v\mid\mathfrak{N}$ 是我们将局部测试函数取为某个海克同余子群的特征函数的地方（参见 §2.6）。

5.2. 轨道变更。 $\gamma(0)$ $\gamma(t)$ 和 γ_τ 的稳定子不同，这使得相应轨道积分的解析性质存在显著差异。我们将采用不同的方法处理它们。对于 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(t)$，我们仅使用轨道积分的通常处理方法。然而，γ_τ 的稳定子不太理想。因此，尽管原始轨道是相对的，我们仍通过将其改写为不交的共轭类并来对这些轨道进行另一种处理。

5.2.1. 轨道积分 $J^{\mathrm{Big},\ T\,\mathrm{Geo},\ \mathrm{Dual}}(f,\boldsymbol{s})$。 注意到， $G'\times G'$ 中 $\gamma(0)$ 的稳定子是 $\Delta P_0'(F)$，即 G'. 的米拉波利克子群 P_0' 的对角嵌入。因此

$$J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo},\mathrm{Dual}}(f,\mathbf{s})=\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{P_0'(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}f(\iota(z_1x)^{-1}\gamma(0)\iota(z_1z_2xy))$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1+s_2}|\det z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

的解析性质 $J^{\mathrm{Big},\ T\,\mathrm{Geo},\ \mathrm{Dual}}(f,\ \mathbf{s})$ 将在 §5.3中给出。

5.2.2. 轨道积分 $J^{\mathrm{Big},\ T\,\mathrm{Geo}\,\gamma_\tau}(f,\boldsymbol{s})$。 直接计算可知， γ_τ 的稳定子为 $\Delta S_0(F)$，其中 S_0 是形如以下形式的矩阵群

$$\begin{pmatrix}1&\mathbf{b}&c_1\\&A&\mathbf{c}'\\&&1\end{pmatrix},\quad A\in\mathrm{GL}(n-2),\ \mathbf{b}\in M_{1,n-2},\ c_1\in M_{1,1},\mathbf{c}'\in M_{n-2,1}.$$

经过变量替换，我们得到

$$J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo},\gamma_\tau}(f,\mathbf{s})=\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{S_0(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}f(\iota(z_1x)^{-1}\gamma_\tau\iota(z_1z_2xy))$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1+s_2}|\det z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

然而，通常处理轨道积分的方法并不适用，因为处理该积分颇为不便:

$$\int_{[S_0]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}|\det x|^{s_1+s_2}|\det y|^{s_2}dxdy.$$

因此，我们提出另一种处理方法。设 $\Phi_0(F)$ 是 $S_0(F)\backslash P_0'(F)$ 的一组完备代表元。设 N_j为一般线性群$(j+1)$中类型为$(j,1)$的标准抛物子群的幺幂根基。因此，N_j中的矩阵均为上三角矩阵。根据布鲁哈特分解，我们可以取

$$\Phi_0(F)=\bigsqcup_{j=1}^{n-2}\begin{pmatrix}\mathrm{GL}(1,F)&\\&I_{n-1}\end{pmatrix}w_1w_2\cdots w_j\begin{pmatrix}N_j(F)&\\&I_{n-j-1}\end{pmatrix}$$

若 $n\geq 3$，且 $\Phi_0(F)=\begin{pmatrix}\text{一般线性群}(1,F)&\\&1\end{pmatrix}$ 若 $n=2$.

定义

$$\mathcal{S}(F):=\left\{\gamma_1^{-1}\gamma_\tau\gamma_1:\ \gamma_1\in\Phi_0(F)\right\}.$$

设 $\Phi_0'(F)$ 是 $P_0'(F)\backslash G'(F)$ 的一组完备代表元。那么 $\gamma\in\mathcal{O}_{\gamma_\tau}(F)$ 可唯一地写成 $\gamma_1^{-1}\gamma_2\gamma_1$，其中 $\gamma_1\in\Phi_0'(F)$，且 $\gamma_2\in\mathcal{S}(F)$。那么$J^{\mathrm{Big},T\,\mathrm{Geo}\,\gamma_\tau}(f,\mathbf{s})$ 变为

$$\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{P_0'(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\sum_{\gamma\in\mathcal{S}(F)}f(\iota(z_1x)^{-1}\gamma\iota(z_1z_2xy))$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1+s_2}|\det z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

根据定义， $\mathcal{S}(F)$由以下形式的矩阵组成

$$\begin{pmatrix}I_{n-1}&&\boldsymbol{\xi}\\&1&\\&1&1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\xi}={}^{\mathrm{t}}(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\in M_{n-1,1}(F)-\mathbf{0}.$$

5.2.3. 轨道积分 $J^{\mathrm{Big},\ T\text{几何}\ \gamma(t)}(f,\boldsymbol{s})$：$t\neq 0,1$. 令 $t\in F-\{0,1\}$. $\gamma(t)$ 的稳定子为 ΔH，即 H 的对角嵌入，其中 $H=\mathrm{diag}(\text{一般线性群}(n-1),1)$ 是 P_0'. 的 Levi 分量。作变量替换可得

$$J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo},\gamma(t)}(f,\mathbf{s})=\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{H(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)} f(\iota(z_1x)^{-1}\gamma(t)\iota(z_1z_2xy))$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1+s_2}|\det z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

注意到 $P_0'(F)=H(F)N_{P'}(F)$，其中 $N_{P'}(F)$ 是$P'(F)$ 的幺幂根基。定义

$$\mathcal{S}^*(F):=\Big\{\gamma_1^{-1}\gamma(t)\gamma_1:\ \gamma_1\in N_{P'}(F)\Big\}.$$

类似于 §5.2.2 ，我们可以将 $J^{\mathrm{Big},\ T\ \mathrm{Geo}\ \gamma(t)}(f,\mathbf{s})$ 改写为

$$\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{P_0'(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\sum_{\gamma\in\mathcal{S}^*(F)} f(\iota(z_1x)^{-1}\gamma(t)\iota(z_1z_2xy))$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1+s_2}|\det z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2.$$

根据定义，$\mathcal{S}^*(F)$ 由如下形式的矩阵组成

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \boldsymbol{\xi}\\ & 1 & t\\ & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}={}^{\mathrm{t}}(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\in M_{n-1,1}(F).$$

5.3. **轨道积分** $J^{\mathrm{Big}\ \mathrm{Geo},\ \mathrm{Dual}}(f,\mathbf{s})$。令 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{A}_F^n$. 回忆 $u(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} I_n & \mathbf{x}\\ & 1\end{pmatrix}$.

记 $f^\dagger(\mathbf{x}\ z_2,y)=f(u(\mathbf{x})\iota(z_2y))$。于是 $f^\dagger$ 是 $\mathbb{A}_F^n\times Z'(\mathbb{A}_F)\times\overline{G'}(\mathbb{A}_F)$ 上的 Schwartz-Bruhat 函数。

令 $\mathrm{Re}(s)>1$. 定义 $E_{\mathrm{Dual}}(x,s;\ f^\dagger(\cdot,z_2,y))$ 为

$$\sum_{\delta\in P_0(F)\backslash\overline{G'}(F)}\int_{Z'(\mathbb{A}_F)} f^\dagger(\eta z_1\delta x,z_2,y)|\det z_1x|^s d^\times z_1. \tag{5.5}$$

于是，对固定的 $z_2\in Z'(\mathbb{A}_F)$ 和 $y\in\overline{G'}(\mathbb{A}_F)$，艾森斯坦级数 $E_{\mathrm{Dual}}(x,s;\ z_2,y;\ f^\dagger)$ 可亚纯延拓至整个 s-平面，并满足连接在 s 和 $1-s$. 处赋值的函数方程

命题 5.3。沿用上述记号。设 $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2)$ 满足 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>1$. 则

$$J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\boldsymbol{s}):=\lim_{T\to\infty}J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\boldsymbol{s})$$

绝对收敛，并且等于

$$\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\mathcal{P}(s_1+s_2;\phi_1'.\phi_2',f^\dagger(\cdot,y))\overline{\omega}'(z_2)|\det z_2y|^{s_2}dyd^\times z_2, \tag{5.6}$$

其中

$$\mathcal{P}(s;\phi_1',\phi_2',f^\dagger(\cdot,y))=\int_{[\overline{G'}]}\phi'(x)\overline{R(y)\phi'(x)}E_{\mathrm{Dual}}(x,s;f^\dagger(\cdot,z_2,y))dx$$

是表示 L-函数 $\Lambda(s_1+s_2,\pi_1'\times\widetilde{\pi}_2')$ 的 Rankin-Selberg 周期。特别地，$J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\boldsymbol{s})/\Lambda(s_1+s_2,\pi_1'\times\widetilde{\pi}_2')$ 是整函数。

证明。直接计算可知， $\gamma(0)$ 的稳定子是 $H'_{\gamma(0)}=\Delta P'_0$，即 G' 的米拉波利克子群到其乘积群 $P'_0\times P'_0$. 中的对角嵌入。因此，轨道积分 $J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\mathbf{s})$ 变为

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Delta P'_0(F)\backslash(G'(F)\times G'(F))} f(\iota(z_1^{-1}x^{-1}\gamma_1^{-1})\gamma(0)\iota(\gamma_2 z_1 z_2 y))$$
$$\phi'_1(x)\overline{\phi'_2(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1 d^\times z_2.$$

经过变量替换后，我们将 $J^{\mathrm{Big},T}_{\text{几何,对偶}}(f,\mathbf{s})$ 写作

$$\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)} f(\iota(z_1^{-1}x^{-1})\gamma(0)\iota(z_1z_2xy))\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}$$
$$\int_{P'_0(F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\phi'_1(x)\overline{\phi'_2(xy)}|\det z_1x|^{s}|\det z_1z_2xy|^{s_2}dxd^\times z_1dyd^\times z_2.$$

令 $\eta=(0,\cdots,0,1)\in F^n$. 那么 $J^{\mathrm{Big},T}_{\text{几何 }\gamma(0)}(f,\mathbf{s})$ 等于

$$\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{[\overline{G'}]}\phi'_1(x)\overline{\phi'_2(xy)}E^T_{\mathrm{Dual}}(x,s_1+s_2;f^\dagger(\cdot,z_2,y))dxdyd^\times z_2, \tag{5.7}$$

其中 $E^T_{\mathrm{Dual}}(x,s;\ f^\dagger(\cdot,z_2,y))$ 是由下式定义的截断艾森斯坦级数

$$\sum_{\delta\in P_0(F)\backslash\overline{G'}(F)}\int_{Z'^T(\mathbb{A}_F)}f^\dagger(\eta z_1\delta x,z_2,y)|\det z_1x|^s d^\times z_1.$$

注意，当 $\mathrm{Re}(s)>1$. 时， $E_{\mathrm{Dual}}(x,s;\ f^\dagger(\cdot,z_2,y))$ 绝对收敛。那么

$$\lim_{T\to\infty}E^T_{\mathrm{Dual}}(x,s;z_2,y)=E_{\mathrm{Dual}}(x,s;z_2,y;f^\dagger),\quad \mathrm{Re}(s_1+s_2)>0.$$

还要注意，除非 y 属于 $G'(\mathbb{A}_F)$ 的某个紧集，否则 $f(u(\mathbf{x})\iota(y))\neq 0$ 对 $\mathbf{x}$ 一致成立。因此， $J^{\mathrm{Big}}{}_{\text{几何 }\gamma(0)}(f,\mathbf{s})$ 等于

$$\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\int_{\overline{G'}(\mathbb{A}_F)}\int_{[\overline{G'}]}\phi'_1(x)\overline{\phi'_2(xy)}E_{\mathrm{Dual}}(x,s_1+s_2;z_2,y;f^\dagger)dxdyd^\times z_2,$$

它绝对收敛。因此，5.6) 成立。 □

注5.4. 在某些选择 f(例如， $f=f^*$)下，可以得到 $J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}\ \gamma(0)}(f,\mathbf{s})$和 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{GeoSmall}}(f,\mathbf{s})$在 $s_1+s_2=0$. 处具有相同的特殊值（若它们不是全纯的，则具有相同的留数）。这一现象的一个特殊情形是[RR05], 中的两个幺幂轨道积分相等这解释了杜克定理 [Duk95]) 前导项中的因子 2。

记

$$l_v(x_v,s_2)=\int_{G'(F_v)}f_v(u(\eta x_v)\iota(y_v))|\det(y_v)|_v^{s_2}\overline{W_{\phi'_2,v}(x_vy_v)}dy_v.$$

由于5.6)在$\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>1$时绝对收敛，我们可以展开艾森斯坦级数并写成

$$J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\mathbf{s})=\prod_{v\in\Sigma_F}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Dual},v}(f_v,\mathbf{s}), \tag{5.8}$$

其中

$$J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Dual},v}(f_v,\mathbf{s}):=\int_{N'(F_v)\backslash G'(F_v)}W_{\phi'_1,v}(x_v)l_v(x_v,\eta x_v,s_2)|\det x_v|_v^{s_1+s_2}dx_v.$$

因此（5.6）是可分解的。接着，我们将（5.8）右端的局部积分 $J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo}\ \gamma(0)\ v}(f_v,\mathbf{s})$ 计算为局部 L-因子 $L_v(s_1+s_2,\pi'_{1,v}\times\widetilde{\pi}'_{2,v})$，若 $v<\infty$.

命题 5.5。 沿用前面的记号。则

$$\frac{J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\boldsymbol{s})}{W_{\phi_1'}(I_n)\overline{W_{\phi_2'}(I_n)}}=\frac{\Lambda(s_1+s_2,\pi_1'\times\widetilde{\pi}_2')}{\mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N}))|\mathfrak{N}|^{n(s_1+s_2)}}\prod_{v|\infty}\mathcal{F}_v^{\dagger}(f_v,\boldsymbol{s};\phi_1',\phi_2'),\tag{5.9}$$

其中

$$\mathcal{F}_v^{\dagger}(f_v,\boldsymbol{s};\phi_1',\phi_2')=\frac{J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Dual},v}(f_v,\boldsymbol{s})}{L_v(s_1+s_2,\pi_{1,v}'\times\widetilde{\pi}_{2,v}')W_{\phi_1',v}(I_n)\overline{W_{\phi_2',v}(I_n)}}\tag{5.10}$$

是关于$\boldsymbol{s}$.的整函数

证明。 假设 $v<\infty$。根据定义，当且仅当 $u(\eta x_v)\iota(y_v)\in Z(F_v)K_v$，即 $\lambda_v u(\eta x_v)\iota(y_v)\in K_v$ 对某个 $\lambda_v\in F_v^{\times}$. 成立时， $f_v(u(\eta x_v)\iota(y_v))$ 非消失。取逆后，我们得到

$$\begin{pmatrix}\lambda_v^{-1}y_v^{-1}&\\&\lambda_v^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&\\-\eta x_v&1\end{pmatrix}\in K_v.$$

因此，$\lambda_v\in\mathcal{O}_{F_v}^{\times}$、 $y_v\in K_v'$和$\eta x_v\in\mathfrak{N}\mathcal{O}_{F_v}^n$，由此推得

$$l_v(x_v,s_2)=\frac{\overline{W_{\phi_2',v}(x_v)}}{\mathrm{Vol}(K_v)}\cdot\mathbf{1}_{\mathfrak{N}\mathcal{O}_{F_v}^n}(\eta x_v).\tag{5.11}$$

因此， $J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo,\ Dual}\ v}(f,\mathbf{s})$ 等于

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(K_v)}\int_{N'(F_v)\backslash G'(F_v)}W_{\phi_1',v}(x_v)\overline{W_{\phi_2',v}(x_v)}\cdot\mathbf{1}_{\mathfrak{N}\mathcal{O}_{F_v}^n}(\eta x_v)|\det x_v|_v^{s_1+s_2}dx_v.$$

根据定义， ϕ_1' 和 ϕ_2' 是右 K_v'-不变的，即在 v. 处为球型。由 Rankin-Selberg 理论（参见例如[JPSS83]），我们得到

$$J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Dual},v}(f_v,\mathbf{s})=\frac{W_{\phi_1',v}(I_n)\overline{W_{\phi_2',v}(I_n)}}{\mathrm{Vol}(K_v)|\mathfrak{N}|^{n(s_1+s_2)}}\cdot L_v(s_1+s_2,\pi_{1,v}'\times\widetilde{\pi}_{2,v}'),$$

且（5.10）是整函数。因此，当5.9）成立。由于$\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>1$. 满足条件的 v 只有有限多个，且 $v\mid\infty$，每个 $\mathcal{F}_v^{\dagger}(f_v,\ \mathbf{s};\ \phi_1',\ \phi_2')$ 都是整函数，因此（5.9）可作为亚纯函数的等式延拓到整个复平面。于是命题5.5 得证。□

5.4. 轨道积分 $J^{\mathrm{Reg},\ II\ \text{几何},\ \text{大}}(f,\mathbf{s})$。本节我们研究

$$J^{\mathrm{Reg},II}_{\mathrm{Geo,Big}}(f,\mathbf{s}):=\lim_{T\to\infty}\Big[J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo},\gamma_\tau}(f,\mathbf{s})+J^{\mathrm{Big},T}_{\mathrm{Geo,reg}}(f,\mathbf{s})\Big].$$

其中 $J^{\mathrm{Big},\ T\text{几何}\ \gamma_\tau}(f,\ \mathbf{s})$ 和 $J^{\mathrm{Big},\ T\text{几何},\ \text{正则}}(f,\ \mathbf{s})$ 分别由（5.3）和（5.4）定义。

我们将证明 $J^{\mathrm{Reg},\ II\ \mathrm{Geo},\ \mathrm{Big}}(f,\ \mathbf{s})$ 对所有 $\mathbf{s}$ 都绝对收敛。 此外，正则轨道积分 $\lim_{T\to\infty}J^{\mathrm{Big},\ T\mathrm{Geo},\ \mathrm{reg}}(f,\ \mathbf{s})$ 在 [MR12] 和 [FW09]的意义下是稳定的。

定理 5.6。 记号同前。对于 $n\geq 1$，有如下结论。

(1) 积分 $J^{\mathrm{Reg},\ II\ \mathrm{Geo},\ \mathrm{Big}}(f,\ \boldsymbol{s})$ 等于

$$\sum_{\substack{(\boldsymbol{\xi},t)\in F^n\\(\boldsymbol{\xi},t)\neq\boldsymbol{0}}}\int_{P_0'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}f\left(\iota(x)^{-1}\begin{pmatrix}I_{n-1}&&\boldsymbol{\xi}\\&1&t\\&1&1\end{pmatrix}\iota(xy)\right)\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}|\det x|^{s_1+s_2}|\det y|^{s_2}dydx,$$

它绝对收敛。

(2) 假设 $|\mathfrak{N}|$ 足够大，且 f_S 固定。那么 $J^{\mathrm{Reg},\ II\ 几何,\ 大}(f,\ \boldsymbol{s})$ 等于

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{\xi}\in F^{n-1}\\ \boldsymbol{\xi}\neq \boldsymbol{0}}}\int_{P_0'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)} f\left(\iota(x)^{-1}\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \boldsymbol{\xi}\\ & 1 & 1\\ & & 1\end{pmatrix}\iota(xy)\right)$$
$$\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}|\det x|^{s_1+s_2}|\det y|^{s_2}dydx,$$

以及 $J^{\mathrm{Reg},\ II\ 几何,\ 大}(f,\ \boldsymbol{s})\ll|\mathfrak{N}|$，其中隐含常数依赖于 $\boldsymbol{s}$ f_S，ϕ_1' 并且 ϕ_2'. 特别地，$J^{\mathrm{Reg},\ II\ 几何,\ 大}(f,\ \boldsymbol{s})\equiv 0$ 如果 $n=1$.

5.4.1. 利用柯西–施瓦茨不等式进行整体约化。由柯西–施瓦茨不等式，

$$\left|J^{\mathrm{Reg},II}_{\mathrm{Geo,Big}}(f,\mathbf{s})\right|\leq\sqrt{\mathcal{J}^{\mathrm{Reg},II}_{\mathrm{Geo,Big}}(f,\phi_1',s_1)\tilde{\mathcal{J}}^{\mathrm{Reg},II}_{\mathrm{Geo,Big}}(f,\phi_2',s_2)},$$

其中 $\mathcal{J}_{正则\ II\ 几何,\ 大}(f,\phi_1',s)$ 定义为

$$\sum_{\substack{(\boldsymbol{\xi},t)\in F^n\\ (\boldsymbol{\xi},t)\neq\mathbf{0}}}\iint\left|f\left(\iota(x)^{-1}\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \boldsymbol{\xi}\\ & 1 & t\\ & & 1\end{pmatrix}\iota(xy)\right)\right||\phi_1'(x)|^2|\det x|^{2\,\mathrm{Re}(s)}dxdy,$$

并且 $\tilde{\mathcal{J}}_{正则\ II\ 几何,\ 大}(f,\phi_2',s)$ 定义为

$$\sum_{\substack{(\boldsymbol{\xi},t)\in F^n\\ (\boldsymbol{\xi},t)\neq\mathbf{0}}}\iint\left|f\left(\iota(x)^{-1}\begin{pmatrix} I_{n-1} & & \boldsymbol{\xi}\\ & 1 & t\\ & & 1\end{pmatrix}\iota(xy)\right)\right||\phi_2'(xy)|^2|\det xy|^{2\,\mathrm{Re}(s)}dxdy,$$

其中 x（分别地，y）遍历 $P_0'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)$（分别地，$G'(\mathbb{A}_F)$）。

定义 f^{-1}为 $f^{-1}(g)=f(g^{-1})$ $g\in G(\mathbb{A}_F)$。作变量代换 $x\mapsto xy^{-1}$和$y\mapsto y^{-1}$，并交换积分次序，我们便得到

$$\tilde{\mathcal{J}}^{\mathrm{Reg},II}_{\mathrm{Geo,Big}}(f,\phi_2',s)=\mathcal{J}^{\mathrm{Reg},II}_{\mathrm{Geo,Big}}(f^{-1},\phi_2',-s).$$

因此，只需证明 $\mathcal{J}_{\mathrm{Reg}\ II\,\mathrm{Geo,Big}}(f,\phi_1',s)$ 绝对收敛即可。

5.4.2. 有理点的计数。根据西格尔的结果，关于 $[P_0']$ 的每个元素都可表示为 $b=ak^*\in A^*(F_\infty)\times\Omega^*$ 的形式，其中

$$A^*(F_\infty):=\left\{\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_{n-1},1)\in T_{B'}(F_\infty):\ |a_{1,v}|_v\geq\cdots\geq|a_{n-1,v}|_v,\ v\mid\infty\right\},$$

且 Ω^* 是 $P_0'(\mathbb{A}_F)$ 中一个充分大的固定紧集。令 $\mathcal{V}$为满足如下条件的有理素数集合：当 $v\notin\mathcal{V}$. 时，$k_v^*\in G'(\mathcal{O}_{F_v})$。因此 $\mathcal{V}$ 是固定的，仅依赖于 Ω^*。

Now we analyze $f\left(\iota(x)^{-1}\begin{pmatrix} I_{n-1} & & (1-t)\boldsymbol{\xi}\\ & 1 & t\\ & & 1\end{pmatrix}\iota(xy)\right)$ to determine the sup-

x 和 y. 的支撑。由岩泽分解，可写作 $x=zbk$, $z\in\mathbb{A}_F$,$b=ak^*\in[P_0']\subset A^*(F_\infty)$ $\times\Omega^*$，并且 $k\in K'$.。因此

$$f\left(\iota(x)^{-1}\begin{pmatrix} I_{n-1} & & (1-t)\boldsymbol{\xi}\\ & 1 & t\\ & & 1\end{pmatrix}\iota(xy)\right)$$

分解为乘积 $\mathfrak{F}_\infty\mathfrak{F}_{\mathrm{fin}}$，其中

$$\mathfrak{F}_\infty:=f_\infty\left(\iota(z_\infty ak_\infty^*k_\infty)^{-1}\begin{pmatrix} I_{n-1} & & (1-t)\boldsymbol{\xi}\\ & 1 & t\\ & & 1\end{pmatrix}\iota(z_\infty ak_\infty^*k_\infty y_\infty)\right)\tag{5.12}$$

以及 $\mathfrak{F}_{\mathrm{fin}} := \prod_{v<\infty}\mathfrak{F}_v$，其中

$$\mathfrak{F}_v := f_v\left(\iota(z_v k_v^* k_v)^{-1}\begin{pmatrix} I_{n-1} & & (1-t)\boldsymbol{\xi} \\ & 1 & t \\ & 1 & 1\end{pmatrix}\iota(z_v k_v^* k_v y_v)\right),\quad v<\infty. \tag{5.13}$$

引理 5.7. 记号同前。定义 $\mathfrak{X}(f;C)$ 为

$$\left\{(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},t)\in F^n:\ \xi_j\in|\mathfrak{N}|C^{-1}\mathcal{O}_F,\ \frac{t}{t-1}\in|\mathfrak{N}|C^{-1}\mathcal{O}_F,\ 1\le j<n\right\}.$$

那么存在一个依赖于 $\otimes_{v\in S\cap\Sigma_{F,\mathrm{fin}}}$ 支撑 f_v 的整数 $C\in\mathbb{Z}$，使得$\prod_{v<\infty}\mathfrak{F}_v=0$ 除非 $(\boldsymbol{\xi},t)\in\mathfrak{X}(f;C)$。此外，

$$\int_{Z'(F_v)}\int_{G'(F_v)}\left|f_v\left(\iota(z_v k_v^* k_v)^{-1}\begin{pmatrix} I_{n-1} & & (1-t)\boldsymbol{\xi} \\ & 1 & t \\ & 1 & 1\end{pmatrix}\iota(z_v k_v^* k_v y_v)\right)\right| dy_v d^\times z_v$$

为 $\ll q^{ne_v(\mathfrak{N})v}\qquad\big(\big|\text{最小值}\{e_v(t)\ -e_v(t-1)\ e_v(\xi_j):\ \ 1\le j\le n-1\}\big|+\big|e_v(t-1)\big|+1\big)$,其中隐含常数依赖于 S.

证明。写作 $\boldsymbol{\xi}={}^{\mathrm{t}}(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\in F^{n-1}$. 令 $v<\infty$，写作 $z_v=\varpi_v^r I_n$.

(A) 假设 $r\ge 0$. 。由克拉默法则，存在 $k_v^{(1)}\in G(\mathcal{O}_{F_v})$，使得

$$\iota(z_v)^{-1}\begin{pmatrix} I_{n-1} & & (1-t)\boldsymbol{\xi} \\ & 1 & t \\ & 1 & 1\end{pmatrix}\iota(z_v)=(1-t)k_v^{(1)}\begin{pmatrix} \frac{1}{1-t}I_{n-1} & & \varpi_v^{-r}\boldsymbol{\xi} \\ & \frac{1}{1-t} & \frac{\varpi_v^{-r}t}{1-t} \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

(B) 假设 $r<0$. 。由克拉默法则，存在 $k_v^{(2)}\in G(\mathcal{O}_{F_v})$，使得

$$\iota(z_v)^{-1}\begin{pmatrix} I_{n-1} & & (1-t)\boldsymbol{\xi} \\ & 1 & t \\ & 1 & 1\end{pmatrix}\iota(z_v)=\varpi_v^{-r}(1-t)k_v^{(2)}\begin{pmatrix} \frac{\varpi_v^r}{1-t}I_{n-1} & & \boldsymbol{\xi} \\ & \frac{\varpi_v^{2r}}{1-t} & \frac{\varpi_v^r}{1-t} \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

令 $t\in F-\{1\}$. 。考虑以下各种情形。

(1) 令 $v\notin S\cup\mathcal{V}$ 和 $v\nmid\mathfrak{N}$.

- 假设 $e_v(t-1)\ge 0$. 。那么根据情形（B）以及 f_v 的支集，必有 $r\ge 0$. 。因此

$$\mathfrak{F}_v=f_v\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{1-t}I_{n-1} & & \varpi_v^{-r}\boldsymbol{\xi} \\ & \frac{1}{1-t} & \frac{\varpi_v^{-r}t}{1-t} \\ & & 1\end{pmatrix}\iota(k_v^* k_v y_v)\right)\neq 0$$

当且仅当存在某个 $\lambda_v\in F_v^\times$，使得

$$\lambda_v\begin{pmatrix} \frac{1}{1-t}I_{n-1} & & \varpi_v^{-r}\boldsymbol{\xi} \\ & \frac{1}{1-t} & \frac{\varpi_v^{-r}t}{1-t} \\ & & 1\end{pmatrix}\iota(k_v^* k_v y_v)\in G(\mathcal{O}_{F_v}), \tag{5.14}$$

这就迫使 $\lambda_v\in\mathcal{O}_{F_v}^\times$, $y_v\in(t-1)K_v'$，并且

$$\begin{cases} e_v(t)-e_v(t-1)\ge r\ge 0 \\ e_v(\xi_j)\ge r\ge 0,\ 1\le j\le n-1.\end{cases}$$

- 假设 $e_v(t-1)\le -1$. 那么 $e_v(t)=e_v(t-1)$。由情形（B）可得 $e_v(t-1)\le r\le -1$；在情形（A）中，我们有 $0\le r\le$

$e_v(t)-e_v(t-1)$，这意味着 $r=0$. 因此

$$\mathfrak{F}_v=\begin{cases} f_v\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{1-t}I_{n-1} & & \boldsymbol{\xi} \\ & \frac{1}{1-t} & \frac{t}{1-t} \\ & & 1 \end{pmatrix}\iota(k_v^*k_vy_v)\right), & \text{if } r=0 \\ f_v\left(\begin{pmatrix} \frac{\varpi_v^r}{1-t}I_{n-1} & & \boldsymbol{\xi} \\ & \frac{\varpi_v^{2r}}{1-t} & \frac{p^r}{1-t} \\ & & 1 \end{pmatrix}\iota(k_v^*k_vy_v)\right), & \text{if } r<0. \end{cases} \tag{5.15}$$

因此，$\mathfrak{F}_v\neq 0$ 除非 $\boldsymbol{\xi}\in\mathcal{O}_{F_v}^{n-1}$ 且 $e_v(t)-e_v(t-1)\geq 0$ 若 $r=0$，且 $\mathfrak{F}_v\neq 0$ 除非 $\boldsymbol{\xi}\in\mathcal{O}_{F_v}^{n-1}$ 且 $r-e_v(t-1)\geq 0$ 若 $r<0$.在 $r<0$ 的情形下，$r-e_v(t-1)\geq 0$ 意味着 $e_v(t-1)\leq r<0$.所以 $e_v(t)-e_v(t-1)=0$.

因此，在上述情形下，我们有 $\mathfrak{F}_v\neq 0$ 除非

$$\begin{cases} e_v(t)-e_v(t-1)\geq 0 \\ e_v(\xi_j)\geq 0,\ 1\leq j\leq n-1 \end{cases}$$

且 $y_v\in(t-1)K_v'$ 或 $(t-1)\begin{pmatrix}\varpi_v^{-r} & \\ & \varpi_v^{-2r}\end{pmatrix}K_v'$.

（2）令 $v\in S$ 或 $v\in\mathcal{V}$. 根据定义，支撑 f_v 是 $Z(F_v)D_v$，其中 D_v 是 $G(F_v)$ 的一个紧集。因此，类似于（6.3），存在某个 $\lambda_v\in F_v^\times$使得

$$\lambda_v\begin{pmatrix} \frac{1}{1-t}I_{n-1} & & \varpi_v^{-r}\boldsymbol{\xi} \\ & \frac{1}{1-t} & \frac{\varpi_v^{-r}t}{1-t} \\ & & 1 \end{pmatrix}\iota(k_v^*k_vy_v)\in\iota(k_v^*k_v)D_v \tag{5.16}$$

若 $r\geq 0$；且若 $r<0$，则有

$$\lambda_v\begin{pmatrix} \frac{\varpi_v^r}{1-t}I_{n-1} & & \boldsymbol{\xi} \\ & \frac{\varpi_v^{2r}}{1-t} & \frac{p^r}{1-t} \\ & & 1 \end{pmatrix}\iota(k_v^*k_vy_v)\in\iota(k_v^*k_v)D_v. \tag{5.17}$$

注意，（6.3.2）和（6.3.3）均意味着

$$\begin{cases} e_v(t)-e_v(t-1)\geq -C \\ e_v(\xi_j)\geq -C,\ 1\leq j\leq n-1. \end{cases}$$

对于某个常数 $C\geq 0$，其至多依赖于 S，且 y_v 支撑在 K_v' 的一个紧子集的平移中（至多依赖于 t 和 r）。

(3) 最后，我们考虑 $v\mid\mathfrak{N}$. 的情形。于是 $v\notin\mathcal{V}$.。由 Iwasawa 分解，我们可以将 $k_v^*k_vy_v=\varpi_v^{r'}a_v'u_v'k_v'$ 写为某些 $r'\in\mathbb{Z}$、$a_v'\in\overline{T_{B'}}(F_v)$、$u_v'\in N'(F_v)$ 和 $k_v'\in K_v'$.。由于 $f_v=$体积$(K_v)^{-1}\mathbf{1}_{Z(F_v)K_v}$，于是

$$\mathfrak{F}_v=f_v\left(\begin{pmatrix} * & * & \varpi_v^{-r}(1-t)\boldsymbol{\xi} \\ & \varpi_v^{r'} & \varpi_v^{-r}t \\ & \varpi_v^{r+r'} & 1 \end{pmatrix}\right)$$

and thus $\mathfrak{F}_v \neq 0$ unless $\lambda_v \begin{pmatrix} * & * & \varpi_v^{-r}(1-t)\boldsymbol{\xi} \\ & \varpi_v^{r'} & \varpi_v^{-r}t \\ & \varpi_v^{r+r'} & 1 \end{pmatrix} \in K_v$ for some $\lambda_v \in F_v$, which leads to that

$$\begin{cases} e_v(\lambda_v) + r' = 0,\ e_v(\lambda_v) \geq 0, \\ e_v(\lambda_v) + r + r' \geq e_v(\mathfrak{N}) \geq 1, \\ e_v(\lambda_v) - r + e_v(t) \geq 0, \\ e_v(\lambda_v) - r + e_v(1-t) + e_v(\xi_j) \geq 0,\ 1 \leq j \leq n-1, \\ 2e_v(\lambda_v) + r' + e_v(1-t) = 0. \end{cases} \tag{5.18}$$

注意，(5.18) 中最后一个约束来自右下角 2×2 的行列式。因此 $r \geq e_v(\mathfrak{N})$ $e_v(1-t) = -e_v(\lambda_v) \leq 0$，并且$e_v(\xi_j) \geq r \geq e_v(M)$ $1 \leq j \leq n-1$.

此外，根据假设 $\mathfrak{F}_v \neq 0$，可知 y_v 的支撑包含在 K_v' 的某个平移中（至多依赖于 t 和 r）。

综合以上讨论可知，除非（$\boldsymbol{\xi}$, t）$\in \mathfrak{X}$（f; C），否则 $\prod_{v<\infty} \mathfrak{F}_v = 0$。此外，对于 $v < \infty$, r的可能取值为 $\leq \left| \min\{e_v(t) - e_v(t-1) \quad e_v(\xi_j) : 1 \leq j \leq n-1\} \right| + \left| e_v(t-1) \right| + 1$; 若 $e_v(\xi_1) =$, 则其值等于1。$\cdots = e_v(\xi_{n-1}) = e_v(t) = e_v(t-1) = 0$; y_v 的支集是 K_v' 中紧子集 C_v' 的一个平移（至多依赖于 t 和 r），并且 $C_v' = K_v'$ 若$e_v(\xi_1) = \cdots = e_v(\xi_{n-1}) = e_v(t) = e_v(t-1) = 0$.。因此，引理5.7由以下事实得出：$\|f_v\|_v \ll q_v^{ne_v(\mathfrak{N})}$，其中隐含常数依赖于 S. □。

引理 5.8。记号同前。

(1) 存在 x, y 使得 $\mathfrak{F}_\infty = 0$，除非 $(\boldsymbol{\xi}, t)$ 满足

$$|\xi_j|_v \ll |z_v a_{j,v}|_v,\ 1 \leq j \leq n-1,\ |t|_v \ll |z_v|_v \ll |t-1|_v,\ v \mid \infty, \tag{5.19}$$

其中 $\mathfrak{F}_\infty$ 由 (5.12)定义，且 y_∞ 遍历一个紧集 $\mathcal{Y}_\infty(t) = \prod_{v|\infty} \mathcal{Y}_v(t)$ 由 $k_\infty^* k_\infty$、f_∞ 和 t 确定：

$\mathcal{Y}_v(t) := (k_v^* k_v)^{-1} \cdot \{z_v' \operatorname{diag}(a_1', \cdots, a_{n-1}', 1) u_v k_v' :\ |t-1|_v^{-1} \ll |z_v'|_v \ll |t-1|_v,$ $1 \ll |a_{j,v}'|_v \ll |t-1|_v,\ 1 \leq j < n,\ u_v$ 属于由 $f_\infty\}$. 确定的一个紧集

这里所有隐含常数都依赖于 支撑 f_∞,

(2) 当 $|\mathfrak{N}|$ 足够大时，$\mathfrak{F}_\infty \mathfrak{F}_{\text{fin}} = 0$，除非 $t = 0$. *(3)* 对于所有 $\mathfrak{N} \subseteq \mathcal{O}_F$，满足 $\mathfrak{F}_\infty \mathfrak{F}_{\text{fin}} \neq 0$ 的 $t \in F$ 的数量为 $O(1)$，其中隐含常数 $O(1)$ 取决于 $\mathfrak{N}$ 和 支撑 f_S.

证明。根据定义，$\mathfrak{F}_\infty \neq 0$ 意味着

$$\lambda_\infty \iota(z_\infty a k_\infty^* k_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} I_{n-1} & & (1-t)\boldsymbol{\xi} \\ & 1 & t \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} \iota(z_\infty a k_\infty^* k_\infty y_\infty) \in \mathcal{D}_\infty \tag{5.20}$$

对于某个 $\lambda_\infty \in F_\infty^\times$，其中 $\mathcal{D}_\infty$ 是由 supp f_∞. 决定的 $G(F_\infty)$ 的一个紧集

将 $k_\infty^* k_\infty y_\infty = z_\infty' a' u_\infty k_\infty'$ 写成伊wasawa坐标：$z_\infty' \in F_\infty^\times$, $a' =$diag$(a_1', \cdots, a_{n-1}', 1) \in T_{B'}(F_\infty)$ $u_\infty \in N'(F_\infty)$ 并且 $k_\infty' \in K_\infty'$。那么（5.20）变为

$$\lambda_\infty \iota(z_\infty a)^{-1} \begin{pmatrix} I_{n-1} & & (1-t)\boldsymbol{\xi} \\ & 1 & t \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} \iota(z_\infty z_\infty' a a' u_\infty) \in \mathcal{D}_\infty', \tag{5.21}$$

其中 $\mathcal{D}_\infty' := \iota(k_\infty^* k_\infty) \mathcal{D}_\infty \iota(k_\infty'^{-1})$.

记 $\mathcal{M}_\infty = \prod_{v|\infty} \mathcal{M}_v$ 为（5.21）左端的矩阵。于是（5.21）变为 $\mathcal{M}_\infty \in \mathcal{D}_\infty' = \prod_{v|\infty} \mathcal{D}_v'$，这是一个紧集。令 $v \mid \infty$.

考虑 $\mathcal{M}_v$ 的左上角 $(n-1)\times n$，我们推导出 u_v 位于由 supp f_∞ 决定的紧集内，并且 $|a'_{j,\ v}|_v \asymp |\lambda_v|_v^{-1}$, $1\le j\le n-1$.

将 $\mathcal{M}_v$ 的第 $(n,n+1)$ 个条目与 $\mathcal{M}_v^{-1}$ 的第 $(n+1,n)$ 个条目相乘，我们得到 $\left|\frac{t}{t-1}\right|_v \ll 1$.。结合第 $(i,n+1)$ 个条目 $1\le j\le n-1$，可得

$$|\lambda_v a_{j,v}^{-1} z_v^{-1}(t-1)\xi_v|_v \ll 1,\ 1\le j\le n-1.$$

考虑 $\mathcal{M}_v^{-1}$ 的第 $(n+1,n+1)$ 个条目，我们得到 $|\lambda_v|_v|t-1|_v \gg 1$. 因此$|a_j^{-1}$, $_v z_v^{-1}\xi_v|_v \ll 1$, $1\le j\le n-1$.

考虑 $\mathcal{M}_v$ 的第 $(n,n+1)$ 个条目和 $\mathcal{M}_v$ 的第 $(n+1,n+1)$ 个条目，我们推得 $|\lambda_v|_v \ll 1$ 以及 $|z_v|_v \gg |t|_v$.。考虑 $\mathcal{M}_v^{-1}$ 的第 $(n+1,n)$ 个条目和 $\mathcal{M}_v$ 的第 $(n+1,n+1)$ 个条目，我们推得 $|z_v|_v \ll |t-1|_v$.

因此，5.19）成立，且 $1\ll|\lambda_v|_v^{-1}\ll|t-1|_v$. 所以

$$1\ll|a'_{j,v}|_v\ll|t-1|_v,\quad 1\le j\le n-1.$$

将 $\mathcal{M}_v$ 的第 (n,n) 个元素与 $\mathcal{M}_v^{-1}$ 的第 $(n+1,n+1)$ 个元素相乘，我们得到 $|z'_v|_v \ll |t-1|_v$. 将 $\mathcal{M}_v$ 的第 $(n+1,n+1)$ 个元素与 $\mathcal{M}_v^{-1}$ 的第 (n,n) 个元素相乘，我们得到 $|z'_v|_v \gg |t-1|_v^{-1}$. 所以 $|t-1|_v^{-1}\ll|z'_v|_v\ll|t-1|_v$. 综合以上讨论，我们得出 $y_\infty\in\mathcal{Y}_\infty(t)$。

注意，$|t|_v\ll|z_v|_v\ll|t-1|_v$ 这意味着 $\left|\frac{t}{t-1}\right|_v\ll 1$. 假设 $|\mathfrak{N}|$足够大，且 $\mathfrak{F}_\infty\mathfrak{F}_{\text{fin}}\neq 0$. 那么根据引理 5.7 我们有 $\left|\frac{t}{t-1}\right|_v\ge C^{-1}|\mathfrak{N}|$，它很大。这与 $\left|\frac{t}{t-1}\right|_v\ll 1$. 因此，当 $|\mathfrak{N}|$ 足够大时，$\mathfrak{F}_\infty\mathfrak{F}_{\text{fin}}=0$ 除非 $t=0$.

当 $\mathfrak{N}$ 任意时，我们注意到存在 $O(1)$ 个整数 $m\in\mathcal{O}_F$ 满足 $\frac{t}{t-1}=C^{-1}|\mathfrak{N}|m$ 和 $\left|\frac{t}{t-1}\right|_\infty\ll 1$. □

5.4.3. 定理 5.6 的证明。令 $\mathfrak{X}^\dagger(a,z_\infty)$ 为有理点集合 $\mathbf{0}\neq(\boldsymbol{\xi},t)\in\mathfrak{X}(f;\ C)$（参见引理 5.7），其满足约束（5.19）。

进行变量替换 $\boldsymbol{\xi}\mapsto(1-t)\boldsymbol{\xi}$，$\mathcal{J}^{\text{Reg }II\text{ Geo, Big}}(f,\phi'_1,s)$ 变为

$$\sum_{\substack{(\boldsymbol{\xi},t)\in F^n\\(\boldsymbol{\xi},t)\neq\mathbf{0}}}\iint\left|f\left(\iota(x)^{-1}\begin{pmatrix}I_{n-1}&&(1-t)\boldsymbol{\xi}\\&1&t\\&1&1\end{pmatrix}\iota(xy)\right)\right|\left|\phi'_1(x)\right|^2|\det x|^{2\,\mathrm{Re}(s)}dxdy,$$

其中，x（分别为 y）遍历 $P'_0(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)$（分别为 $G'(\mathbb{A}_F)$）。这里我们利用了如下事实：当 $t=1$ 时，$f(\cdots)=0$，从而在变量替换 $\boldsymbol{\xi}\mapsto(1-t)\boldsymbol{\xi}$. 时排除 $t=1$ 的情形。交换积分次序后，$\mathcal{J}^{\text{Reg }II\text{ Geo, Big}}(f,\phi'_1,s)$ 为

$$\ll\int_{A^*(F_\infty)}I(\phi'_1,a)\left[\max_{\substack{k^*\in\Omega^*\\k\in K'}}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\sum_{(\boldsymbol{\xi},t)}\left|\mathfrak{F}_\infty\cdot\mathfrak{F}_{\text{fin}}\right|d^\times z dy\right]\frac{|\det a|_\infty^{2\,\mathrm{Re}(s)}d^\times a}{\delta_{B'}(a)},$$

其中 $\mathfrak{F}_\infty$ 和 $\mathfrak{F}_{\text{fin}}$ 分别由（5.12）和（5.13）定义，$(\boldsymbol{\xi},\ t)\in\mathfrak{X}^\dagger(a,\ z_\infty)$，并且

$$I(\phi'_1,a):=\int_{K'}\int_{\Omega^*}\left|\phi'_1(ak^*k)\right|^2dk^*dk.$$

令 $E(t):=1+|t-1|_\infty^{\varepsilon}+|t-1|_\infty^{-\varepsilon}+|t/(t-1)|_\infty^{\varepsilon}$. 根据引理 5.7和上确界范数 $\|f\|_\infty\ll 1$，积分 $\mathcal{J}^{\text{Reg }II\text{ Geo、Big}}(f,\phi'_1,s)$ 为

$$\ll|\mathfrak{N}|^n\int_{A^*(F_\infty)}I(\phi'_1,a)\left[\max_{\substack{k^*_\infty\in\Omega^*_\infty\\k_\infty\in K'_\infty}}\int\int\sum_{(\boldsymbol{\xi},t)}E(t)\left|\mathfrak{F}_\infty\right|d^\times z_\infty dy_\infty\right]\frac{|\det a|_\infty^{2\,\mathrm{Re}(s)}d^\times a}{\delta_{B'}(a)},$$

其中，y_∞（分别地，z_∞）遍历 $G'(F_\infty)$（分别为 $F_\infty^\times$），且 $(\boldsymbol{\xi},t)\in\mathfrak{X}^\dagger(a,z_\infty)$。

根据引理 5.7，$(\boldsymbol{\xi},\ t)\in\mathfrak{X}^{\dagger}(a,\ z_\infty)$ 可参数化为

$$\frac{t}{t-1}=|\mathfrak{N}|C^{-1}m,\ \ \xi_j=|\mathfrak{N}|C^{-1}m_j,\ \ m,\ m_j\in\mathcal{O}_F,\ 1\le j\le n-1.$$

结合引理 5.8中的（5.19），可得 $|m|_\infty\ll C^{[F:\mathbb{Q}]}|\mathfrak{N}|^{-[F:\mathbb{Q}]}$，并且

$$|m_j|_\infty\ll C^{[F:\mathbb{Q}]}|\mathfrak{N}|^{-[F:\mathbb{Q}]}|z_\infty a_j|_\infty\ll C^{[F:\mathbb{Q}]}|\mathfrak{N}|^{-[F:\mathbb{Q}]}|t-1|_\infty|a_j|_\infty,\ 1\le j<n.$$

当 $t=0$，$|t-1|_\infty=1$. 假设 $t\neq 0$. 则 $m\neq 0$. 因此 $|C^{-1}|\mathfrak{N}|m-1|_\infty\gg_{C^{-[F:\ \mathbb{Q}]}}$，这意味着 $|t-1|_\infty\ll C^{[F:\mathbb{Q}]}\ll 1$. 综上，我们有 $|t-1|_\infty\ll 1$. 注意，集合 $\mathcal{Y}_v(t)$（参见引理 5.8）非空的条件是 $|t-1|_v\gg 1$ 对所有 $v\mid\infty$. 因此$|t-1|_v\asymp 1$ 对所有 $v\mid\infty$. 因此，$|z_v|_v\ll 1$，$v\mid\infty$.

此外，若 $t\neq 0$，则 $|m|_\infty\ge 1$. 。由参数化 $\frac{t}{t-1}=|\mathfrak{N}|C^{-1}m$ 可得 $|t|_\infty\gg(1+C^{[F:\mathbb{Q}]}|\mathfrak{N}|^{-[F:\mathbb{Q}]})^{-1}$. 因此，

$$\mathfrak{X}^{\dagger}(a,z_\infty)\mathbf{1}_{t\neq 0}\subseteq\mathfrak{X}^{\heartsuit}(a)\mathbf{1}_{|z_\infty|_\infty\gg(1+C^{[F:\mathbb{Q}]}|\mathfrak{N}|^{-[F:\mathbb{Q}]})^{-1},\ |z_v|_v\ll 1,\ v|\infty}\tag{5.22}$$

其中集合 $\mathfrak{X}^{\heartsuit}(a)$定义为

$$\big\{(\boldsymbol{\xi},t)\in\mathfrak{X}(f;C):\ |t/(t-1)|_\infty\ll 1,\ |t-1|_v\asymp 1,\ v\mid\infty;\ |\xi_j|_\infty\ll|a_j|_\infty,\ j<n\big\}.$$

特别地，对于固定的 a.，$(\boldsymbol{\xi},t)$ 仅取有限多个值

由引理 5.8 和（5.22），可得

$$\max_{\substack{k_\infty^*\in\Omega_\infty^*\\ k_\infty\in K_\infty'}}\int_{F_\infty^\times}\int_{G'(F_\infty)}\sum_{\substack{(\boldsymbol{\xi},t)\in\mathfrak{X}^{\dagger}(a,z_\infty)\\ t\neq 0}}E(t)\big|\mathfrak{F}_\infty\big|dy_\infty d^\times z_\infty\ll\#\mathfrak{X}^{\heartsuit}(a)\ll 1,$$

其中隐含常数取决于 f_S 和 $\mathfrak{N}$.

另一方面，当 $t=0$，由引理 5.8 可知 y_∞ 的支集是紧的，且$|z|_v\ll 1$，$v\mid\infty$. 由于 $(\boldsymbol{\xi},\ t)\neq\mathbf{0}$，必有 $\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$. 因此，$\xi_1\neq 0$，这意味着$|m_1|_\infty\gg 1$. 所以由（5.19）可得 $|\mathfrak{N}|^{[F:\mathbb{Q}]}C^{-[F:\mathbb{Q}]}\ll|z_\infty|_\infty|a_1|_\infty$. 因此，

$$\max_{\substack{k_\infty^*\in\Omega_\infty^*\\ k_\infty\in K_\infty'}}\int_{F_\infty^\times}\int_{G'(F_\infty)}\sum_{\substack{(\boldsymbol{\xi},t)\in\mathfrak{X}^{\dagger}(a,z_\infty)\\ t=0}}E(t)\big|\mathfrak{F}_\infty\big|dy_\infty d^\times z_\infty$$

被.....所主控

$$\int_{\substack{|z_\infty|_\infty\gg\frac{|\mathfrak{N}|^{[F:\mathbb{Q}]}|a_1|_\infty^{-1}}{C^{[F:\mathbb{Q}]}}\\ |z_v|_v\ll 1,\ v|\infty}}\prod_{j=1}^{n-1}\Big[1+\frac{C^{[F:\mathbb{Q}]}|z_\infty|_\infty|a_j|_\infty}{|\mathfrak{N}|^{[F:\mathbb{Q}]}}\Big]^{1+\varepsilon}d^\times z_\infty\ll\frac{|a_1|_\infty^{(n-1)(1+\varepsilon)}}{|\mathfrak{N}|^{(n-1)[F:\mathbb{Q}]}},$$

其中隐含常数依赖于 n、ε 和 f_S.

因此，由于 ϕ_1' 的快速衰减，$\mathcal{J}_{\text{正规化 }II\text{ 几何，大}}(f,\phi_1',s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)$ 位于 $\mathbb{R}$.的一个紧集内时收敛

特别地，当 $|\mathfrak{N}|$ 较大时，约束 $|m|_\infty\ll C^{[F:\mathbb{Q}]}|\mathfrak{N}|^{-[F:\mathbb{Q}]}$ 迫使 $m=0$，即 $t=0$. 因此 $J^{\mathrm{Big}}_{T\text{ 几何，正则}}(f,\mathbf{s})\equiv 0$，于是

$$\mathcal{J}^{\mathrm{Reg},II}_{\mathrm{Geo,Big}}(f,\phi_1',s)\ll|\mathfrak{N}|\int_{A^*(F_\infty)}I(\phi_1',a)|a_1|_\infty^{(n-1)(1+\varepsilon)}\frac{|\det a|_\infty^{2\,\mathrm{Re}(s)}d^\times a}{\delta_{B'}(a)}\ll|\mathfrak{N}|.$$

因此定理 5.6成立。

6. 谱侧：收敛与亚纯延拓

本节重点讨论当截断参数 T 趋于无穷时，谱侧 $J^{\mathrm{Reg},T}\,\mathrm{Spec}\,(f,\mathbf{s})$ 的收敛性，其中 $\mathbf{s}=(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2$。回顾 $J^{\mathrm{Reg},T}\mathrm{Spec}\,(f,\mathbf{s}):=J^{\mathrm{Reg},T}\mathrm{Eis}\,(f,\mathbf{s})+J_0^T(f,\mathbf{s})$（参见 §2.2）。由于 K_0 在 $[\overline{G}]\times[\overline{G}]$ 上快速衰减，函数 $J_0^T(f,\mathbf{s})$ 处处绝对收敛；因此，当 $T\to\infty$ 时，

$$J_0(f,\mathbf{s})=\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{A}_0([G],\omega)\\ \phi\in\mathcal{B}_\pi}}\int_{[G']}\pi(f)\phi(\iota(x))\phi_1'(x)|\det x|^{s_1}dx\int_{[G']}\overline{\phi(\iota(y))\phi_2'(y)}|\det y|^{s_2}dy,$$

其中 $\mathcal{B}_\pi$ 是 π. 注意，$\mathcal{B}_\pi$ 是有限集，因为 f 是 K有限的。接下来只需证明 $J^{\mathrm{Reg},T\,\mathrm{Eis}}(f,\mathbf{s})$ 当 $T\to\infty$, 时的收敛性，这将通过纯粹的解析论证在 §6.1 中完成，条件是 $\mathrm{Re}(s_1)$和 $\mathrm{Re}(s_2)$ 足够大。

6.1. **右半平面中的收敛**。回顾一下，$J^{\mathrm{Reg},T\,\mathrm{Eis}}(f,\mathbf{s})$ 定义为

$$\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_{[\overline{G'}]}\int_{[\overline{G'}]}\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(\iota(z_1x),\iota(z_1z_2y))\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}$$
$$|\det z_1x|^{s_1}|\det z_1z_2y|^{s_2}dxdyd^\times z_1d^\times z_2,$$

由于 ϕ_1' 和 ϕ_2' 在 $[\overline{G'}]$上快速衰减，因此对固定的 $T>0$，$J^{\mathrm{Reg},T\,\mathrm{Eis}}(f,\mathbf{s})$ 绝对收敛，因而定义了 $\mathbf{s}$ 的一个全纯函数。$\in\mathbb{C}^2$. 接下来，我们希望令$T\to\infty$ 趋于无穷，以消去截断。然而，当 T 趋于无穷时，收敛性相当微妙。我们先定义 $\lim_{T\to\infty}J^{\mathrm{Reg},T\,\mathrm{Eis}}(f,\mathbf{s})$。

由谱分解，$\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}=\mathrm{K}-\mathrm{K}_0,$，这意味着 $\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}=\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\mathrm{K}-\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\mathrm{K}_0$. 由傅里叶展开可得 $\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\mathrm{K}_0=\mathrm{K}_0$。因此，我们可以写成 $J^{\mathrm{Reg},T\,\mathrm{Eis}}(f,\mathbf{s})=J^T_{\mathrm{Kl}}(f,\mathbf{s})-J_0^T(f,\mathbf{s})$，其中

$$J^T_{\mathrm{Kl}}(f,\mathbf{s}):=\int_{[Z'^T]}\int_{[Z'^T]}\int_X\int_X J_{\mathrm{Kuz}}(\iota(z_1x),\iota(z_1z_2y))\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}|\det z_1x|^{s_1}$$
$$|\det z_1z_2y|^{s_2}\omega'(z_1)\overline{\omega_2(z_2)}dxdyd^\times z_1d^\times z_2,$$

关于 $X=N'(\mathbb{A}_F)\backslash\overline{G'}(\mathbb{A}_F)$，以及对于 $g_1,g_2\in G(\mathbb{A}_F)$，

$$J_{\mathrm{Kuz}}(g_1,g_2):=\int_{[N]}\int_{[N]}\mathrm{K}(n_1g_1,n_2g_2)\theta(n_1)\overline{\theta}(n_2)dn_1dn_2.$$

注意，$J_{\mathrm{Kuz}}(g_1,g_2)$ 是 $G(\mathbb{A}_F)$ 上的库兹涅佐夫型相对迹公式。我们将证明，$J_{\mathrm{Kuz}}(\iota(x)\ \iota(y))$ 可由一个控制函数控制。

设 $x,y\in A(\mathbb{A}_F)$ 由 $x=\mathrm{diag}(x_1\cdots x_n,\cdots,x_1x_2,x_1,1)$ 给出，且 $y=\mathrm{diag}(y_1\cdots y_n,\cdots,y_1y_2,y_1,1)\in A(\mathbb{A}_F)$。若函数 $\mathcal{G}$ 在 $A(\mathbb{A}_F)$ 上满足 $\times A(\mathbb{A}_F)$，且是如下形式的正函数，则称其为控制函数：

$$\mathcal{G}(x,y)=\xi(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)\cdot\left(|x_1x_2\cdots x_n|^{-M}+|y_1y_2\cdots y_n|^{-M}\right)$$

其中 $M\geq0$ 和 ξ 是定义在 $(\mathbb{A}_F^\times)^{2n}$. 上的 Schwartz-Bruhat 函数

命题6.1。沿用上述记号。设 $T_{B'}$ 是 B'. 的 *Levi*子群。则作为 $(x,\ y)\in T_{B'}(\mathbb{A}_F)\times T_{B'}(\mathbb{A}_F)$ $J_{\mathrm{Kuz}}(\iota(x)\ \iota(y))$ 的函数，它可由定义在 $A(\mathbb{A}_F)\times A(\mathbb{A}_F)$ 上的有限个规范函数之和控制。

证明。根据核函数 $\mathrm{K}(x,y)$ 的定义，我们有

$$J_{\mathrm{Kuz}}(\iota(x),\iota(y))=\int_{[N]}\int_{[N]}\sum_{\gamma\in\overline{G}(F)}f(\iota(x)^{-1}n_1^{-1}\gamma n_2\iota(y))\theta(n_1)\overline{\theta}(n_2)dn_1dn_2,$$

由于 $\mathrm{K}(x,y)$ 连续且 $[N]$ 是紧集，该积分绝对收敛。

接下来我们考虑双陪集 $N(F)\backslash\overline{G}(F)/N(F)$，其中的元素形式为 wa，这里 w 是一个韦伊元，且 $a\in A(F)$。令

$$H_{wa}:=\left\{(n_1,n_2)\in N\times N:\ n_1^{-1}wan_2a^{-1}w^{-1}\in Z\right\}$$

是相对于代表元 $wa.$ 的稳定子Then

$$J_{\mathrm{Kuz}}(\iota(x),\iota(y))=\sum_{wa\in\Phi}\int f(\iota(x)^{-1}n_1^{-1}wan_2\iota(y))\theta(n_1)\overline{\theta}(n_2)dn_1dn_2,$$

其中，Φ 是 $N(F)\backslash\overline{G}(F)/N(F)$ 的完备代表元集合，并且 $(n_1,n_2)\in H_{wa}(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)\times N(\mathbb{A}_F)$。因此，$J_{\mathrm{Kuz}}(\iota(x)\ \iota(y))$ 变为

$$\sum_{wa\in\Phi}C_{wa}\int_{H_{wa}(\mathbb{A}_F)\backslash N(\mathbb{A}_F)\times N(\mathbb{A}_F)}f(\iota(x)^{-1}n_1^{-1}wan_2\iota(y))\theta(n_1)\overline{\theta}(n_2)dn_1dn_2,$$

其中

$$C_{wa}=\int_{[H_{wa}]}\theta(n_1')\overline{\theta}(n_2')dn_1'dn_2'.$$

我们称 $wa\in\Phi$ 是相关的，如果 $C_{wa}\neq 0$，即 $\theta(n_1')\overline{\theta}(n_2')$ 在 $H_{wa}(\mathbb{A}_F)$ 上是平凡的。记 Φ^* 为 $\Phi.$ 中相关元素的集合。根据 [Gol87] 中相关轨道的分类（另见 [JR92] 中的命题 1），可以取如下实现：Φ^* 由 wa 构成，其中 w 是标准抛物子群 $P\subseteq G$ 内的最长韦伊元，该抛物子群的类型为 $(k_1,\cdots,k_r)$，并且 $a\in Z(F)\backslash\mathrm{diag}(T_{k_1}(F)\ \cdots,T_{k_r}(F))$（模去一些进一步的关系），其中 T_{k_j} 是一般线性群 $\mathrm{GL}(k_j)$ 的极大分裂环面。例如，当 $P=B$ 为伯雷尔子群时，则 $w=I_n$、$a=I_n$ 和 $H_{wa}=N.$ 因此，

$$J_{\mathrm{Kuz}}(\iota(x),\iota(y))=\sum_{wa\in\Phi^*}\mathrm{vol}([H_{wa}])J_{\mathrm{Kuz}}(\iota(x),\iota(y);wa),$$

其中 $J_{\mathrm{Kuz}}(\iota(x)\ \iota(y);\ wa)$ 定义为

$$\int_{H_{wa}(\mathbb{A}_F)\backslash N(\mathbb{A}_F)\times N(\mathbb{A}_F)}f(\iota(x)^{-1}n_1^{-1}wan_2\iota(y))\theta(n_1)\overline{\theta}(n_2)dn_1dn_2.$$

根据 Φ^* 的定义，每个 w 都唯一对应一个包含 $w.$ 的（即最小的）抛物子群 P。假设 $w\neq I_n.$，那么由列维分解，只需考虑极端情形：$P=G$，且 w 是最长韦伊元。

回忆一下，测试函数 f 是双-K-有限的。因此存在某个紧子群 $K_0\subset G(\mathbb{A}_{F,\mathrm{fin}})$，使得 f 是双-K_0-不变的。令 $K_0=\prod_{v<\infty}K_{0,v}.$。注意，$J_{\mathrm{Kuz}}(\iota(x)\ \iota(y);\ wa)=\prod_{v\leq\infty}J_{\mathrm{Kuz},v}(\iota(x_v)\ \iota(y_v);\ wa)$，其中局部因子 $J_{\mathrm{Kuz},v}(\iota(x_v)\ \iota(y_v);\ wa)$ 定义为

$$\int_{H_{wa}(F_v)\backslash N(F_v)\times N(F_v)}f_v(\iota(x_v)^{-1}n_1^{-1}wan_2\iota(y_v))\theta_v(n_1)\overline{\theta}_v(n_2)dn_1dn_2.$$

那么对每个有限位 v，$J_{\mathrm{Kuz},v}(\iota(x_v)\ \iota(y_v);\ wa)$ 都是双-$K_{0,v}$-不变的。因此存在一个紧子群 $N_{0,v}\subseteq K_{0,v}\cap N(F_v)$，它仅依赖于 f_v，使得

$$J_{\mathrm{Kuz},v}(\iota(x_v),\iota(y_v);wa)=J_{\mathrm{Kuz},v}(\iota(x_vu_v),\iota(y_vu_v');wa),\ \text{for all } u_v,u_v'\in N_{0,v}.$$

另一方面，

$$J_{\mathrm{Kuz},v}(\iota(x_vu_v),\iota(y_vu_v');wa)=\theta(x_vu_vx_v^{-1})\overline{\theta}(y_vu_v'y_v^{-1})J_{\mathrm{Kuz},v}(\iota(x_v),\iota(y_v);wa).$$

存在一个常数 C_v，仅依赖于N_0、v 和 θ，使得 $\theta(x_vu_vx_v^{-1})=1$且 $\overline{\theta}(y_vu_v'y_v^{-1})=1$ 当且仅当 $|\alpha_i(x_v)|_v\leq C_v$ 且 $|\alpha_i(y_v)|_v\leq C_v$，其中 α_i是相对于 $B.$ 的 $G(F)$的单根。注意，对于除有限多个$v<\infty$以外的所有$v<\infty$，$K_{0v}=G(\mathcal{O}_{F,v})$。因此我们可以取相应的 $C_v=1.$。于是对于任意 x_v，$y_v\in A(F_v)$ J_{Kuz}，$_v(\iota(x_v)\ \iota(y_v);\ wa)\neq 0$推出 $|\alpha_i(x_v)|_v\leq C_v$，并且

$|\alpha_i(y_v)|_v \le C_v$、 $1 \le i \le n-1$和 $C_v = 1$ 对除有限多个有限位 v.以外的所有有限位均成立。将该紧集记为

$$A_{f,\mathrm{fin}} = \Big\{ a = (a_v) \in A(\mathbb{A}_{F,\mathrm{fin}}) : \ |\alpha_i(a_v)|_v \le C_v, \ 1 \le i \le n-1 \Big\}.$$

于是， $\mathrm{supp} J_{\mathrm{Kuz},v}(\iota(x_v)\ \iota(y_v);\ wa) \subseteq (A(\mathbb{A}_{F,\infty})A_{f,\mathrm{fin}}) \times (A(\mathbb{A}_{F,\infty})A_{f,\mathrm{fin}})$。

对于任意 $g = \otimes_v (g_{i,j,v}) \in G(\mathbb{A}_F)$。我们定义 $\|g_v\|_v = \max_{i,j} |g_{i,j,v}|_v$ if $v < \infty$; 并且

$$\|g_v\|_v = \Big[\sum_{i,j} |g_{i,j,v}|_v^2 \Big]^{1/2}, \ \text{if } v \mid \infty.$$

于是 $\|g_v\|_v = 1$ 对几乎所有的 $v.$ ，高度函数 $\|g\| = \prod_v \|g_v\|_v$ 因而定义良好，是一个有限乘积。此外，由于 $\mathrm{supp}\, f_v$ 和 $\mathrm{supp}\, J_{\mathrm{Kuz}}(f, x;\ wa) \subseteq A(\mathbb{A}_{F,\infty})A_{f,\mathrm{fin}}$ 的紧致性，我们有 $\|w^{-1}x_v w x_v a\|_v \le C'_v$，其中某个常数 C'_v 仅取决于 f_v、 $v < \infty$; 并且对于几乎所有的 v,

现在我们考察阿基米德积分 $J_{\mathrm{Kuz},v}(\iota(x_v)\ \iota(y_v);\ wa)$，即 $v \mid \infty$.注意到 f_v 在 $\overline{G}(F_v)$ 上是紧支撑的。因此，除非 $n_1^{-1},_v g_v w n_{2,v} \in \mathrm{supp}\, f_v$， 否则 $J_{\mathrm{Kuz},v}(\iota(x_v)\ \iota(y_v);\ wa) = 0$, 其中 $g_v = \iota(x_v)^{-1} wa\iota(y_v) w^{-1}$. 于是我们有 $\|n_1^{-1},_v g_v w n_{2,v} w^{-1}\|_v \le C_v$ ，其中某个常数 C_v 仅依赖于 f. 直接计算（或由 [Jac09] 的引理 5.1）可得 $\|n_{1,v}\|_v + \|n_{2,v}\|_v + \|g_v\|_v \le C'_v$ ，其中某个常数 C'_v 仅依赖于 f. 因此， $f_v(n_{1,v} g_v w n_{2,v})$ 关于 $n_{1,v}$ 的支集是紧的，并且 $n_{2,v}$.。因此，除非 $n_{1,v}$, $n_{2,v}$ 遍历 $N(F_v)$ 的一个紧集且 $\|g\|_v$ 有界，否则 $J_{\mathrm{Kuz},v}(\iota(x_v)\ \iota(y_v);\ wa) = 0$。

对于 $\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1 \cdots \alpha_n, \cdots, \alpha_1, 1) \in A(\mathbb{A}_F)$， 记为

$$\theta_\alpha(u) = \prod_{i=1}^{n-1} \psi_{F/\mathbb{Q}}(\alpha_i u_{i,i+1}), \quad \forall\ u = (u_{i,j})_{n\times n} \in N(\mathbb{A}_F).$$

那么 $J_{\mathrm{Kuz},\ v}(\iota(x_v)\ \iota(y_v);\ wa)$ 等于

$$\delta_w(\iota(x))\delta_w(\iota(y)) \int_{H_{wa}(\mathbb{A}_F)\backslash N(\mathbb{A}_F)\times N(\mathbb{A}_F)} f(n_1^{-1}\iota(x)^{-1} wa\iota(y) n_2)\theta_x(n_1)\overline{\theta}_y(n_2) dn_1 dn_2,$$

其中 δ_w 是与 w. 关联的抛物子群的模特征

由于 n_1 和 n_2 位于由 $\mathrm{supp}\, f$ 决定的紧集内，因此对于固定的 $a \in A(F)$ $v \mid \infty$，其第 v 个分量

$$\int_{H_{wa}(\mathbb{A}_F)\backslash N(\mathbb{A}_F)\times N(\mathbb{A}_F)} f(n_1^{-1}\iota(x)^{-1} wa\iota(y) n_2)\theta_x(n_1)\overline{\theta}_y(n_2) dn_1 dn_2$$

是 (x, y) 的施瓦茨函数，因为它是 $G(F_\infty)$ 上一个紧支撑光滑函数的傅里叶变换。因此，对每个 a, 函数 $J_{\mathrm{Kuz},\ v}(\iota(x_v)\ \iota(y_v);\ wa)$ 是 $A(\mathbb{A}_F)\times A(\mathbb{A}_F)$ 上的 Schwartz-Bruhat 函数。此外， $J_{\mathrm{Kuz},\ v}(\iota(x_v)\ \iota(y_v);\ wa)$ 除非 $x^{-1}wayw^{-1} \in A^* := \{t \in A(\mathbb{A}_F) : \ \|t\| \le \prod_v C'_v\}.$, 否则为 0

根据高度的性质 $\|\cdot\|$ （例如，参见 [Art05] 第70页），有

$$\#\left(w^{-1}x \cdot A^* \cdot wy^{-1} \cap A(F)\right) \le C \cdot (|\det x|^M + |\det x|^{-M})(|\det y|^M + |\det y|^{-M}),$$

对于某些常数 C 和 M ，它们取决于支撑 f. 因此，

$$\sum_{a\in A(F)} |J_{\mathrm{Kuz}}(f, x; wa)| = \sum_{\substack{a\in A(F) \\ a\in w^{-1}x\cdot A^*\cdot wy^{-1}}} |J_{\mathrm{Kuz}}(f, x; wa)|$$

是有限个 Schwartz-Bruhat 函数的和。因此，对于某个 $M \ge 0$ 以及 $A(\mathbb{A}_F) \times A(\mathbb{A}_F)$ 上的 Schwartz-Bruhat 函数 ξ， $|J_{\mathrm{Kuz}}(f, x;\ wa)|$ 被 $\xi(x, y)\cdot(|x_1 \cdots x_n|^{-M} + |y_1 \cdots y_n|^{-M})$ 控制。

剩下的情形是 $w = I_n$，即 $P = B$. 在这种情形下

$$\sum_{a\in A(F)} J_{\mathrm{Kuz}}(f,x;wa) = \delta_w(y)\int_{N(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}yn)\overline{\theta}_y(n)dn$$

也是一个 Schwartz-Bruhat 函数，其自变量为 (x,y)，注意到 $x^{-1}y$ 的支集包含于 $\mathbb{A}_F^\times$. 的一个紧集内。因此，它受某个控制函数支配。于是命题 6.1 得证。□

推论 6.2。设 $\mathbf{s} = (s_1,s_2) \in \mathbb{C}^2$ 满足 $\mathrm{Re}(s_1) \gg 0$ 且 $\mathrm{Re}(s_2) \gg 0$.则 $J_{\mathrm{Kl}}^T(f,\mathbf{s})$ 绝对收敛且一致收敛；当 $T \to \infty$时，其收敛至函数$J_{\mathrm{Kl}}(f,\mathbf{s})$，该函数定义为

$$\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)} J_{\mathrm{Kuz}}(x,y)\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)}|\det x|^{s_1}|\det y|^{s_2}dxdy.$$

证明。根据命题6.1，函数 $J_{\mathrm{Kuz}}(x,y)$ 受某个控制函数支配。因此，当 $\mathrm{Re}(s_1)$ 和 $\mathrm{Re}(s_2)$ 足够大时，被积函数 $J_{\mathrm{Kuz}}(x,y)\overline{\phi_1'(x)\phi_2'(y)}|\det x|^{s_1}|\det y|^{s_2}\delta_{B'}^{-1}(x)\delta_{B'}^{-1}(y)$ 在$T_{B'}(\mathbb{A}_F)\times T_{B'}(\mathbb{A}_F)$ 上快速衰减。因此，根据支配控制定理，当 $T\to\infty$ 时，$J_{\mathrm{Kl}}^T(f,\mathbf{s})$ 绝对收敛且一致收敛，极限函数为 $J_{\mathrm{Kl}}(f,\mathbf{s})$. □

注记 6.3. 除非需要它们缓慢增长，否则我们基本上不会用到 ϕ_1' 和 ϕ_2' 的尖点性。因此，当 6.2 中的结论在 ϕ_1' 和 ϕ_2' 为艾森斯坦级数时仍然成立。

根据推论 6.2，当 $\mathrm{Re}(s_1)$ 和 $\mathrm{Re}(s_2)$ 足够大时，函数 $J^{\mathrm{Reg},T}$ 艾森斯坦级数$(f,\mathbf{s}) = J_{\mathrm{Kl}}^T(f,\mathbf{s}) - J_0^T(f,\mathbf{s})$ 在 $T\to\infty$. 时收敛。因此我们可以定义

$$J_{\mathrm{Eis}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s}) := \lim_{T\to\infty} J_{\mathrm{Eis}}^{\mathrm{Reg},T}(f,\mathbf{s}) = J_{\mathrm{Kl}}(f,\mathbf{s}) - J_0(f,\mathbf{s}), \tag{6.1}$$

当 $\mathrm{Re}(s_1) \gg 0$ 且 $\mathrm{Re}(s_2) \gg 0$时，该式绝对收敛；其收敛性取决于测试函数 f.

然而，J^{Reg} 艾森斯坦级数 $(f,\mathbf{s})$ 未必处处收敛，例如，当 $\pi_1' \simeq \pi_2'$. 时，它可能在平面 $s_1+s_2=1$ 上发散。我们克服这一问题的策略是将 J^{Reg} 艾森斯坦级数 $(f,\mathbf{s})$ 亚纯延拓至 $\mathbb{C}^2$，这与 [Yan21] 类似。为此，我们将对核函数 K_{ER} 作谱分解，并（交换积分次序后）将 J^{Reg} 艾森斯坦级数 $(f,\mathbf{s})$ 写成无穷多个 Rankin-Selberg 周期积分之和。交换积分次序的论证见 §6.2（参见命题 6.4）。

6.2. 核函数的谱分解。在本小节中，我们简要回顾约化群自守表示的谱理论，然后将这些结果应用于非尖点核函数 $\mathrm{K}_{\mathrm{ER}} = \mathrm{K}_{\mathrm{Res}} + \mathrm{K}_{\mathrm{Eis}}$。

令 $X(G)_F$ 为 $G.$ 的 F-有理特征空间。记 $\mathfrak{a}_G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(G)_F,\mathbb{R})$。令 $\mathfrak{a}_G^* = X(G)_F\otimes\mathbb{R}.$。设 Q 是 G 中类型为 $(n_1,\cdots,n_l)$ 的标准抛物子群。令 M_Q（分别为 N_Q）表示 $Q.$ 的莱维子群（分别为幺幂根基）。令 $X(M_Q)_F$ 为 $M_Q.$ 的 F-有理特征空间。记 $\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_{M_Q} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(M_Q)_F,\mathbb{R})$，并令 $\mathfrak{a}_Q^* = \mathfrak{a}_{M_Q}^* = X(M_Q)_F\otimes\mathbb{R}.$。用 $\mathfrak{a}_0$（分别用 $\mathfrak{a}_0^*$）表示 $\mathfrak{a}_B$（分别为 $\mathfrak{a}_B^*$）。阿贝尔群 $X(M_Q)_F$ 有一组由有理特征组成的典范基 $\chi_i: m\to\det m_i$，其中 $m = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_l\end{pmatrix} \in M_Q.$。接着，我们选取 $\{n_i\chi_i^{-1} : 1\le i\le l\}$ 作为 $\mathfrak{a}_Q^*$ 的一组基，并在 $\mathfrak{a}_Q$ 上选取一组对偶基，以将 $\mathfrak{a}_Q$ 和 $\mathfrak{a}_Q^*$ 均识别为 $\mathbb{R}^l.$。此外，定义

$$H_{M_Q}(m) = \left(\frac{\log|\det m_1|}{n_1},\cdots,\frac{\log|\det m_l|}{n_l}\right) \in \mathfrak{a}_Q,$$

其中 $m=\mathrm{diag}(m_1,\cdots,m_l)\in M_Q(\mathbb{A}_F)$。记 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为在上述选定的识别下，$\mathfrak{a}_Q$ 和 $\mathfrak{a}_Q^*$ 所对应的一对元素。为简化记号，我们也将 H_Q 记作 H_{M_Q}。

于是根据谱理论（例如参见 [Art79] 第 256 页和第 263 页），希尔伯特空间 $L^2(Z_G(\mathbb{A}_F)N_Q(\mathbb{A}_F)M_Q(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))$ 分解为右 $G(\mathbb{A}_F)$-不变子空间，其分解由谱数据 $\chi=\{(M,\sigma)\}$ 决定。其中，二元组 (M,σ) 由 G 的一个莱维子群 M 和一个尖点表示 $\sigma\in\mathcal{A}_0\left(Z(\mathbb{A}_F)\backslash M^1(\mathbb{A}_F)\right)$ 构成，其中 $M^1(\mathbb{A}_F):=\left\{m\in M(\mathbb{A}_F):\ H_M(m)=0\right\}$；而等价类 (M,σ) 源于等价关系 $(M,\sigma)\sim(M',\sigma')$，当且仅当 M 被某个 Weyl 群元素 w 共轭为 M'，且 $\sigma'=\sigma^w$ 作用于 $Z(\mathbb{A}_F)\backslash M^1(\mathbb{A}_F)$。令 $\mathfrak{X}$ 为这些二元组 $\chi=\{(M,\sigma)\}$ 的等价类集合，于是有

$$L^2(Q):=L^2\left(Z_G(\mathbb{A}_F)N_Q(\mathbb{A}_F)M_Q(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)\right)=\bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}}L^2(Q)_\chi, \tag{6.2}$$

其中，$L^2(Q)_\chi$ 由满足下述条件的函数 $\phi\in L^2(Z_G(\mathbb{A}_F)N_Q(\mathbb{A}_F)M_Q(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))$ 组成：对于 G 的每个标准抛物子群 Q_1，若 $Q_1\subset Q$，则对几乎所有的$x\in G(\mathbb{A}_F)$，该函数的投影

$$m\mapsto x.\phi_{Q_1}(m)=\int_{N_{Q_1}(F)\backslash N_{Q_1}(\mathbb{A}_F)}\phi(nmx)dn$$

到 $L^2\left(Z_G(\mathbb{A}_F)M_{Q_1}(F)\backslash M_{Q_1}^1(\mathbb{A}_F)\right)$ 中尖点形式空间的投影，在$M_{Q_1}^1(\mathbb{A}_F)$下变换为表示 σ 的和，其中 $(M_{Q_1},\sigma)\in\chi_.$。若在 χ 中不存在这样的配对，则 $x.\phi_{Q_1}$ 将与 $\mathcal{A}_0\left(Z_G(\mathbb{A}_F)M_{Q_1}(F)\backslash M_{Q_1}^1(\mathbb{A}_F)\right)$. 正交。将这类 ϕ 组成的空间记为$\mathcal{H}_Q$。令 $\mathcal{H}_{Q,\chi}$ 为 $\mathcal{H}_Q$ 的子空间，使得对于任意 $(M,\sigma)\notin\chi$，若 $M=M_{Q_1}$ 且 $Q_1\subset Q$，我们有

$$\int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A}_F)^1}\int_{N_{Q_1}(F)\backslash N_{Q_1}(\mathbb{A}_F)}\psi_0(m)\phi(nmx)dn=0,$$

对于任意 $\psi_0\in L_0^2\left(M(F)\backslash M(\mathbb{A}_F)^1\right)_\sigma$，以及几乎所有 $x.$，这引出了朗兰兹关于将 $\mathcal{H}_Q$ 分解为正交直和 $\mathcal{H}_Q=\bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}}\mathcal{H}_{Q,\chi}$. 的结果。设 $\mathcal{B}_Q$ 是 $\mathcal{H}_Q$ 的一组标准正交基，则我们可以选取 $\mathcal{B}_Q=\bigcup_{\chi\in\mathfrak{X}}\mathcal{B}_{Q,\chi}$，其中 $\mathcal{B}_{Q,\chi}$是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{Q,\chi}$. 的一组标准正交基。我们可以假设每个 $\mathcal{B}_{Q,\chi}$ 中的向量都是 K-有限的纯张量。

给定谱数据 $\chi=\{(M_Q,\sigma)\}$，以及 $\lambda\in\mathfrak{a}_Q^*\otimes\mathbb{C}$，我们有诱导表示 $\mathcal{I}_Q(\cdot,\lambda):=\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_F)}_{Q(\mathbb{A}_F)}\sigma_\cdot e^{\langle\lambda,H_M(\cdot)\rangle}$，其表示空间为$\mathcal{H}_{Q_\cdot}$。具体而言，对于 $\phi\in\mathcal{H}_Q$，有

$$(\mathcal{I}_Q(y,\lambda)\phi)(x)=\phi(xy)e^{\langle\lambda+\rho_Q,H_{M_Q}(xy)\rangle}e^{-\langle\lambda+\rho_Q,H_{M_Q}(x)\rangle},\quad x,y\in G(\mathbb{A}_F),$$

其中 ρ_Q 是 (Q,A_Q) 的正根半和。相应的艾森斯坦级数定义为

$$E(x,\phi,\lambda)=\sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)}\phi(\delta x)e^{\langle\lambda+\rho_Q,H_{M_Q}(\delta x)\rangle}.$$

令 $\chi=\{(M,\sigma)\}\in\mathfrak{X}$. 定义

$$\mathrm{K}_\chi(x,y)=\sum_Q\frac{1}{n_Q}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{\dim A_Q/A_G}\int_{i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}E(x,\mathcal{I}(\lambda,f)\phi,\lambda)\overline{E(y,\phi,\lambda)}d\lambda,$$

其中，Q 遍历包含 M 的标准抛物子群，n_Q 是 $\mathfrak{a}_Q$ 中室的数量，并且

$$E(x,\mathcal{I}(\lambda,f)\phi,\lambda)=\int_{G(\mathbb{A}_F)}\tilde{f}(y)E(xy,\phi,\lambda)dy. \tag{6.3}$$

由 [Art79] 核函数 K_{ER} 具有如下分解：$\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(x,\ y)\ =\sum_{\chi}\mathrm{K}\chi(x,\ y)$，其中 χ 遍历适当的谱数据。

将 K_{ER} 的谱分解代入上式，我们得到

命题 6.4. 记号同前。设 $n\geq 1$. 令 $\mathrm{Re}(s_1),\mathrm{Re}(s_2)\ \gg 0$.则有绝对收敛的谱展开

$$J_{\mathrm{Eis}}^{\mathrm{Reg}}(f,\boldsymbol{s})=\sum_{\chi}\sum_{Q}\frac{1}{n_Q}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{\dim A_Q/A_G}\int_{i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_{\phi}(\lambda,s_1,s_2)d\lambda, \tag{6.4}$$

其中 $\mathcal{H}_{\phi}(\lambda,s_1,s_2):=\Psi_{\lambda}(s_1,\mathcal{I}(\lambda,f)\phi,\phi_1')\Psi_{\lambda}(\overline{s_2},\phi,\phi_2')$ 满足

$$\Psi_{\lambda}(s_1,\mathcal{I}(\lambda,f)\phi,\phi_1')=\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}\int_{[N]}E(ux,\mathcal{I}(\lambda,f)\phi,\lambda)\overline{\theta}(u)duW_1'(x)|\det x|^{s_1}dx$$
$$\Psi_{\lambda}(s_2,\phi,\phi_2')=\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}\int_{[N]}E(ux,\phi,\lambda)\overline{\theta}(u)duW_2'(x)|\det x|^{s_2}dx.$$

证明。本文中记 $J^{\mathrm{Reg}}\mathrm{Eis}\,(f,s_1,s_2;\ \phi_1',\phi_2')$ 为 $J^{\mathrm{Reg}}\mathrm{Eis}\,(f,\mathrm{s})$。首先假设 f 具有形式 $h*h^*$，其中 $h^*(g):=h({}^{\mathrm{t}}g^{-1})\ \ g\in G(\mathbb{A}_F)$。于是由 (6.1)，函数 $J^{\mathrm{Reg}}\mathrm{Eis}\,(f,s_1,s_2;\ \phi_1',\phi_2')$ 等于

$$\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}W_{\infty}(\iota(x),\iota(y))W_1'(x)\overline{W_2'(y)}\det x|^{s_1}|\det y|^{s_2}dxdy,$$

其中，W_1'（分别地，W_2'）是与 ϕ_1'（分别地，ϕ_2'）相关联的 Whittaker 函数，并且

$$W_{\infty}(g_1,g_2):=\int_{[N]}\int_{[N]}\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(ug_1,vg_2)\theta(u)\overline{\theta(v)}dudv,\quad g_1,g_2\in G(\mathbb{A}_F).$$

利用谱分解 $\mathrm{K}_{\mathrm{ER}}(x,y)\ =\sum_{\chi}\mathrm{K}\chi(x,y)$，函数 $J^{\mathrm{Reg}}\,\mathrm{Eis}\,(f,s_1,s_2;\ \phi_1',\phi_2')$ 等于

$$\iint\sum_{\chi}\sum_{Q}\frac{1}{n_Q}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{\dim A_Q/A_G}\int\sum_{\phi}\mathcal{W}_{1,\chi}(x,\lambda;\phi)\overline{\mathcal{W}_{2,\chi}(y,\lambda;\phi)}d\lambda dxdy, \tag{6.5}$$

其中，$x,y\in N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)\ \ \lambda\in i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*$, ϕ 遍历$\mathfrak{B}_{Q,\chi}$，且对于 $1\leq j\leq 2$,

$$\mathcal{W}_{j,\chi}(x,\lambda;\phi):=W_j'(x)|\det x|^{s_j}\int_{[N]}E(u\iota(x),\mathcal{I}(\lambda,h)\phi,\lambda)\overline{\theta}(u)du.$$

$J^{\mathrm{Reg}}\,\mathrm{Eis}\,(f,s_1,s_2;\ \phi_1',\phi_2')$ 对固定的 ϕ_1',ϕ_2'，当 $\mathrm{Re}(s_1)\ \gg 0$ 且 $\mathrm{Re}(s_2)\ \gg 0$. 时绝对收敛。特别地，$J^{\mathrm{Reg}}\,\mathrm{Eis}\,(f,s_j,\overline{s_j};\ \phi_j',\phi_j')\ <\infty$ 当 $\mathrm{Re}(s_j)\ \gg 0$, $j=1$ 时。2. 将 $\tilde{J}^{\mathrm{Reg}}\,\mathrm{Eis}\,(f,s_j,\overline{s_j};\ \phi_j',\phi_j')$ 定义为（至少形式上）

$$\iint\sum_{\chi}\sum_{Q}\frac{1}{n_Q}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{\dim A_Q/A_G}\int\sum_{\phi}\left|\mathcal{W}_{j,\chi}(x,\lambda;\phi)\overline{\mathcal{W}_{j,\chi}(y,\lambda;\phi)}\right|d\lambda dxdy, \tag{6.6}$$

这恰好是 $J^{\mathrm{Reg}}\,\mathrm{Eis}\,(f,s_1,s_2;\ \phi_1',\phi_2')$，其中 $\mathcal{W}_{1,\chi}(x,\lambda;\ \phi)\mathcal{W}_{2,\chi}\overline{(y,\lambda;\ \phi)}$ 替换为$|\mathcal{W}_{j,\chi}(x,\lambda;\ \phi)\mathcal{W}_{j,\chi}(y,\overline{\lambda;\ \phi})|$, $1\leq j\leq 2$.

根据 Minkowski积分不等式， $\tilde{J}^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis}}(f,s_j,\overline{s_j};\phi_j',\phi_j')$ 有如下界：

$$\begin{aligned}&\left[\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}\left[\sum_{\chi}\sum_{Q}\frac{1}{n_Q}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{\dim A_Q/A_G}\int_{i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\right.\right.\\&\left.\left.\times\left|\int_{[N]}E(u\iota(x),\mathcal{I}(\lambda,h)\phi,\lambda)\overline{\theta}(u)du\right|^2d\lambda\right]^{\frac{1}{2}}|W'(x)||\det x|^{\mathrm{Re}(s_j)}dx\right]^2\\=&\left[\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}\left[W_\infty(\iota(x),\iota(x))\right]^{\frac{1}{2}}|W'(x)||\det x|^{\mathrm{Re}(s_j)}dx\right]^2,\end{aligned}$$

根据命题 6.1，当 $\mathrm{Re}(s_j)\gg 0.$ 时收敛。因此（6.6）收敛。结合 Cauchy不等式，（6.5）绝对收敛。我们可以交换（6.5）中的积分，从而将 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis}}(f,s_1,\overline{s_2};\phi_1',\phi_2')$ 写为

$$\sum_{\chi}\sum_{Q}\frac{1}{n_Q}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{\dim A_Q/A_G}\int\sum_{\phi}\Psi_\lambda(s_1,\mathcal{I}(\lambda,f)\phi,\phi_1')\overline{\Psi_\lambda(s_2,\phi,\phi_2')}d\lambda, \tag{6.7}$$

其中 λ 遍历 $i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*$， ϕ 遍历 $\mathfrak{B}_{Q,\chi}$.

对于一般的测试函数 f，我们可以应用 Dixmier-Malliavin分解，将其写成有限个卷积乘积之和：$f=\sum_j h_{1,j}*h_{2,j}$. 然后（6.4）由（6.7）和柯西–施瓦茨不等式得到。□

随后，我们在下文第 §6.3节中研究每个周期积分 $\mathcal{H}_\phi$（λ， s_1， s_2）作为亚纯函数的解析性质，并证明

$$\sum_{\chi}\sum_{Q}\frac{1}{n_Q}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{\dim A_Q/A_G}\int_{i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda$$

对所有$\mathrm{s}\in\mathbb{C}^2$都绝对收敛，其中 χ 遍历 $\mathfrak{X}$ 减去两个尖点数据。这将使我们能够得到 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis}}(f,\mathrm{s})$的亚纯延拓，如下所示。

6.3. Eis (f,s)的亚纯延拓至 $\mathbb{C}^2$。令 $n\geq 1.$ 令$\mathrm{s}=(s_1,s_2)$满足$\mathrm{Re}(s_1)\gg 0$ 且$\mathrm{Re}(s_2)\gg 0.$ 。令 Q 为 G的一个抛物子群，其类型为$(n_1,\cdots,n_l)$ $l\geq 2.$令 $\chi=\{(M_Q,\sigma)\}$ 为一个尖点数据，其中$\sigma=\sigma_1\otimes\cdots\otimes\sigma_l$是莱维子群 $M_Q.$ 的一个尖点表示。记

$$\mathcal{J}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')=\frac{1}{n_Q}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{\dim A_Q/A_G}\int_{i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda.$$

将 $\lambda=(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_l)$ 记作 $\lambda_1+\cdots+\lambda_l=0.$ 根据[JPSS83] 和 [Jac09] 中的讨论，我们有

$$\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)\sim\frac{\prod_{j=1}^{l}\Lambda(s_1+1/2+\lambda_j/n_j,\pi_1'\times\sigma_j)\Lambda(s_2+1/2-\lambda_j/n_j,\widetilde{\pi}_2'\times\widetilde{\sigma}_j)}{\prod_{\substack{i\leq l\\ j\leq l\\ i\neq j}}\Lambda(1+\lambda_i/n_i-\lambda_j/n_j,\sigma_i\times\widetilde{\sigma}_j)\Lambda(1-\lambda_i/n_i+\lambda_j/n_j,\widetilde{\sigma}_i\times\sigma_j)}.$$

注意到，右端作为完整 L 函数的有理函数，是亚纯的。因此，我们得到 $\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)$ 关于 $\lambda\in i\mathfrak{a}_P^*/i\mathfrak{a}_G^*$，$(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2.$ 的亚纯延拓。此外，若 $\sigma_j\simeq\widetilde{\pi}_1'$ 和 $\sigma_j\simeq\pi_2'$ 均不成立，则 $\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)$ 是整函数。特别地，若 $l\geq 3.$，则 $\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)$ 是整函数。

定义 6.5。如果 $l\geq 3$，或 $l=2$ 且 $\sigma_j\not\simeq\widetilde{\pi}_1'$、$\sigma_j\not\simeq\pi_2'$、$1\leq j\leq 2$，则称 $\mathcal{J}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 为正则；如果 $l=2$、$\pi_1'\not\simeq\pi_2'$，且 $\sigma_j\simeq\widetilde{\pi}_1'$ 或 $\sigma_j\simeq\pi_2'$、$1\leq j\leq 2$，则称其为半奇异；如果 $l=2$、$\pi_1'\simeq\pi_2'$，且 $\sigma_1\simeq\widetilde{\pi}_1'$ 或 $\sigma_2\simeq\widetilde{\pi}_1'.$，则称其为奇异

令 $\mathfrak{X}^{\mathrm{reg}}$ 由满足 $\mathcal{J}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 为正则的 $\chi\in\mathfrak{X}$ 组成。令 $\mathfrak{X}^{\text{semi-sing}}$（分别地，$\mathfrak{X}^{\mathrm{sing}}$）由满足 $\mathcal{J}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 为半奇异（分别地，奇异）的 $\chi\in\mathfrak{X}$ 组成。则 $\#\mathfrak{X}^{\text{semi-sing}}=4$ 且 $\#\mathfrak{X}^{\mathrm{sing}}=2$.

设 $*$ 是 {reg、semi-sing、sing}. 中的一个脚本。我们定义

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Eis},*}(f,\mathbf{s}):=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^*}\sum_Q\frac{1}{n_Q}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{\dim A_Q/A_G}\int\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda, \tag{6.8}$$

其中 λ 遍历 $i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*\simeq i\mathbb{R}$.

定理 6.6. 沿用前面的记号。则

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Eis}}(f,\mathbf{s})=J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Eis,reg}}(f,\mathbf{s})+J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Eis,semi\text{-}sing}}(f,\mathbf{s})+J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Eis,sing}}(f,\mathbf{s}),$$

其中，对于所有满足 $\in\mathbb{C}^2$ 的 s，J^{Reg} *Eis,reg(f, s)* 绝对收敛；J^{Reg} *Eis,semi-sing(f, s)* 可全纯延拓至 $\mathbb{C}^2$；而 J^{Reg} *Eis,sing(f, s)* 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}^2$，其可能的（简单）极点位于 $s_1+s_2=1$ 和 $s_1+s_2=0$.。特别地，J^{Reg} *Eis (f, s)* 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}^2$，其可能的（简单）极点位于 $s_1+s_2=1$ 和 $s_1+s_2=0$.

证明。 定理 6.6由下文的引理 6.7、6.8 和 6.9 可得。 □

6.3.1. 正则周期。 设 $\chi\in\mathfrak{X}^{\mathrm{reg}}$. 则 $\mathcal{H}_\phi(\lambda,\ s_1,\ s_2)$ 可延拓为关于 λ，s_1 且 s_2. 回忆一下（参见（6.8））

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Eis,reg}}(f,\mathbf{s}):=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^{\mathrm{reg}}}\sum_Q\frac{1}{n_Q}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{\dim A_Q/A_G}\int_{i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda.$$

引理 6.7. 沿用前面的记号。则 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis},\ \mathrm{reg}}(f,\ \mathbf{s})$ 对所有 $\mathbf{s}\in\mathbb{C}^2$. 都绝对收敛。特别地，$J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis},\ \mathrm{reg}}(f,\ \mathbf{s})$ 是整函数。

证明。 设 $\chi\in\mathfrak{X}^{\mathrm{reg}}$. 根据定义，$\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)$ 是整函数，而且在竖直条带内有界（参见 [Jac09]）。由命题 6.4 存在 $c=c_{f,\ \phi_1',\ \phi_2'}>0$使得 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis},\ \mathrm{reg}}(f,\mathbf{s})$ 在 $\mathrm{Re}(s_1)\geq c$ 且 $\mathrm{Re}(s_2)\geq c$. 时绝对收敛

设 $f=h*h^*$ 和 $s_1=\overline{s_2}=s\in\mathbb{C}$ 任意。令 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis},\ \mathrm{reg}\ j}(f,\mathbf{s})$ 为 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis},\ \mathrm{reg}}(f,\mathbf{s})$ 的对应对象，其中将 ϕ_1' 和 ϕ_2' 替换为 ϕ_j' 和 ϕ_j'，$1\leq j\leq 2$. 注意，当 $\chi=\{(M,\sigma)\}\in\mathfrak{X}^{\mathrm{reg}}$ 时，对偶的 $\widetilde{\chi}=\{(M,\widetilde{\sigma})\}\in\mathfrak{X}^{\mathrm{reg}}$.。于是由函数方程可得 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis},\ \mathrm{reg}\ j}(f,\mathbf{s})=J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis},\ \mathrm{reg}\ j}(f,-\mathbf{s})$ $1\leq j\leq 2$.

令 $c_0=|s|+c$.。由极大原理，存在 s_ϕ，满足 $\mathrm{Re}(s_\phi)=c_0$ 或 $\mathrm{Re}(s_\phi)=-c_0$，使得

$$|\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)|\leq|\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_\phi,\overline{s_\phi})| \tag{6.9}$$

对于所有 $\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\ \chi}$ 以及所有 $\chi\in\mathfrak{X}^{\mathrm{reg}}$.。注意到

$$\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\left|\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)\right|=\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\left|\Psi_\lambda(s,\mathcal{I}(\lambda,h)\phi,\phi_j')\right|^2.$$

结合（6.9）与函数方程，我们得出

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^{\mathrm{reg}}}\sum_Q\frac{1}{n_Q}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{\dim A_Q/A_G}\int_{i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\left|\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)\right|d\lambda \tag{6.10}$$

被 $\tilde{J}^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis}}(f,c_0,c_0;\ \phi_j',\phi_j')$ 在（6.6）中定义的支配。因此（6.10）收敛。这证明了6.7 在 $f=h*h^*$ 且 $s_1=\overline{s_2}$. 时，引理成立。一般情形可由Dixmier-Malliavin分解和Cauchy不等式推出。□

6.3.2. 半奇异周期。 从 $\chi\in\mathfrak{X}^{\text{semi-sing}}$ 到 $J^{\text{Reg}}{}_{\text{Eis}}(f,\mathbf{s})$ 的贡献为

$$J^{\text{Reg}}_{\text{Eis,semi-sing}}(f,\mathbf{s}):=\frac{1}{2}\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^{\text{semi-sing}}}\sum_{Q}\frac{1}{2\pi i}\int_{i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda.$$

令 $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\pi_1',\pi_2')$ 为 L-函数$\Lambda(s,\pi_1'\otimes\omega\omega'^{-1})\Lambda(s,\widetilde{\pi}_1'\otimes\omega\omega'^{-1})\Lambda(s,\pi_2'\otimes\omega\omega'^{-1})\Lambda(s,\widetilde{\pi}_2'\otimes\omega\omega'^{-1})$ 的一个标准（开）无零区域（例如参见 [Bru06]）。边界 $\partial\mathcal{D}$ 严格位于 $\mathrm{Re}(s)=1.$ 的左侧。令 $\mathcal{C}=\big\{c\in\mathbb{C}:1-(1+n^{-1})c\in\mathcal{D},\ 1+(1+n^{-1})c\in\mathcal{D}\big\}.$。则 $\mathcal{C}$ 是直线 $\mathrm{Re}(s)=0.$ 的一个“邻域”。边界 $\partial\mathcal{C}$ 有两个分支。令 $\partial\mathcal{C}^+$ 为 $\mathrm{Re}(s)>0.$ 中的分支。

引理 6.8. 沿用前述记号。则 $J^{\text{Reg}}{}_{\text{Eis, semi-sing}}(f,\mathbf{s})$ 可解析延拓为全纯函数，延拓到 $\mathbb{C}^2.$

证明。 由 [JPSS83]和 [Jac09] 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)\sim&\frac{L(s_1+1/2+\lambda,\pi_1'\times\sigma_1)L(s_1+1/2-\lambda/n,\pi_1'\times\sigma_2)}{L(1+(1+n^{-1})\lambda,\sigma_1\times\widetilde{\sigma}_2)}\\&\times\frac{L(s_2+1/2-\lambda,\pi_2'\times\widetilde{\sigma}_1)L(s_2+1/2+\lambda/n,\widetilde{\pi}_2'\times\widetilde{\sigma}_2)}{L(1-(1+n^{-1})\lambda,\sigma_2\times\widetilde{\sigma}_1)}.\end{aligned}$$

注意，$\#\mathfrak{X}^{\text{semi-sing}}=4.$ 因此，我们可以逐一考察。不失一般性，可设 $\chi=\{(M_Q,\sigma)\}$，其中 Q 是 $(1,n)$ 型，且 $\sigma=\sigma_1\otimes\sigma_2$满足 $\sigma_2\simeq\widetilde{\pi}_1'$ 和 $\sigma_1=\omega\omega'^{-1}.$ 注意， $\pi_1'\not\simeq\pi_2'.$ 于是

$$\frac{L(s_2+1/2-\lambda,\pi_2'\times\widetilde{\sigma}_1)L(s_2+1/2+\lambda/n,\widetilde{\pi}_2'\times\widetilde{\sigma}_2)}{L(1-(1+n^{-1})\lambda,\sigma_2\times\widetilde{\sigma}_1)}$$

对所有 $\lambda\in\mathcal{C}.$ 均为全纯函数。记为

$$J^{\text{Reg}}_\chi(f,\mathbf{s}):=\frac{1}{2\pi i}\int_{i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda,\tag{6.11}$$

它在 $s_1>1/2.$ 时为全纯函数。令 $s_1>1/2$ 和 $s_1\in1/2+\mathcal{C}.$ 于是

$$J^{\text{Reg}}_\chi(f,\mathbf{s})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{C}^+}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda-\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\operatorname*{Res}_{\lambda=n(s_1-1/2)}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2),$$

它是关于 $s_1\in1/2+\mathcal{C}$ 和 $s_2\in\mathbb{C}.$ 的全纯函数。当 $\mathrm{Re}(s_1)\le1/2$时，

$$J^{\text{Reg}}_\chi(f,\mathbf{s})=\frac{1}{2\pi i}\int_{i\mathfrak{a}_P^*/i\mathfrak{a}_G^*}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda-\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\operatorname*{Res}_{\lambda=n(s_1-1/2)}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2),$$

其在其中是全纯的。因此，我们得到 $J^{\text{Reg}}_\chi(f,\mathbf{s})$ 在 $(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2.$ 上的解析延拓

其余 3 种情形可用类似的论证处理。总之，我们得到 $J^{\text{Reg}}{}_{\text{Eis, semi-sing}}(f,\mathbf{s})$ 在 $(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2.$ 上的解析延拓 □

6.3.3. 奇异周期。 对 $J^{\text{Reg}}{}_{\text{Eis}}(f,\mathbf{s})$ （参见（6.8））的贡献为

$$J^{\text{Reg}}_{\text{Eis,sing}}(f,\mathbf{s}):=\frac{1}{2}\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^{\text{sing}}}\sum_{Q}\frac{1}{2\pi i}\int_{i\mathfrak{a}_Q^*/i\mathfrak{a}_G^*}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda.\tag{6.12}$$

定义辅助函数

$$\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2'):=\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\operatorname*{Res}_{\lambda=n(s_1-1/2)}\Psi_\lambda(s_1,\mathcal{I}(\lambda,f)\phi,\phi_1')\overline{\Psi_\lambda(\overline{s_2},\phi,\phi_2')}\tag{6.13}$$

类似地

$$\widetilde{\mathcal{G}}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2') := \sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}} \operatorname*{Res}_{\lambda=n(1/2-s_2)} \Psi_\lambda(s_1,\mathcal{I}(\lambda,f)\phi,\phi_1')\overline{\Psi_\lambda(\overline{s_2},\phi,\phi_2')}. \tag{6.14}$$

引理 6.9. 沿用前述记号。则 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis,sing}}(f,\mathbf{s})$ 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}^2$, 其可能的（简单）极点位于 $s_1+s_2=1$ 和 $s_1+s_2=0$.

证明。由于 $\#\mathfrak{X}^{\mathrm{sing}}=2$，只需考虑 $J^{\mathrm{Reg}}\,\mathrm{Eis,sing}(f,\mathbf{s})$ 的每一项。我们可以假设 $\chi=\{(M_Q,\sigma)\}$，其中 Q 是 $(1,n)$ 型，且 $\sigma=\sigma_1\otimes\sigma_2$ 满足 $\sigma_2\simeq\widetilde{\pi}_1'\simeq\widetilde{\pi}_2'$, $\sigma=\omega\omega'^{-1}$. 。那么由 [JPSS83] 和 [Jac09]，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)\sim&\frac{L(s_1+1/2+\lambda,\pi'\times\sigma_1)L(s_1+1/2-\lambda/n,\pi'\times\widetilde{\pi}')}{L(1+(1+n^{-1})\lambda,\pi'\times\sigma_1)}\\&\times\frac{L(s_2+1/2-\lambda,\widetilde{\pi}'\times\widetilde{\sigma}_1)L(s_2+1/2+\lambda/n,\pi'\times\widetilde{\pi}')}{L(1-(1+n^{-1})\lambda,\widetilde{\pi}'\times\widetilde{\sigma}_1)}.\end{aligned}$$

令 $J^{\mathrm{Reg}}_\chi(f,\mathbf{s})$ 定义见 (6.11)。则 $J^{\mathrm{Reg}}_\chi(f,\mathbf{s})$ 在 $\mathrm{Re}(s_1)>1/2$ 且 $\mathrm{Re}(s_2)>1/2$. 时绝对收敛。设 $s_1>1/2$, $s_1\in1/2+\mathcal{C}$，且 $\mathrm{Re}(s_2)>1/2$。那么由柯西积分公式，$J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis,sing}}(f,\mathbf{s})$ 等于

$$\frac{1}{2}\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^{\mathrm{sin}}}\left[\sum_Q\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{C}^+}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda-\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')\right], \tag{6.15}$$

其中 $\mathcal{G}_\chi(s_1,\ s_2,\ \phi_1',\ \phi_2')$ 由（6.13）定义。注意到

$$\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')\sim\frac{L(s_2+\frac{n+1}{2}-ns_1,\widetilde{\pi}'\times\widetilde{\sigma}_1)L(s_1+s_2,\pi'\times\widetilde{\pi}')}{L(1+\frac{n+1}{2}-(n+1)s_1,\widetilde{\pi}'\times\widetilde{\sigma}_1)}.$$

于是，$\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$延拓为一个亚纯函数，其区域满足$s_1\in1/2+\mathcal{C}$或 $\mathrm{Re}(s_1)\le1/2$，以及 $s_2\in\mathbb{C}$，并且在 $s_1+s_2=0$和 $s_1+s_2=1$. 上至多具有简单极点。然后我们需要延拓该函数

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{C}^+}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda,\quad s_1>1/2,\ s_1\in1/2+\mathcal{C},\ \mathrm{Re}(s_2)>1/2. \tag{6.16}$$

由 $\mathcal{H}_\phi$（λ, s_1, s_2）的解析性质，（6.16）延拓为区域 $s_1\in\mathcal{D}^-=\{s\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(s)<1/2$ 或 $s\in1/2+\mathcal{C}\}$，以及 $s_2\in\mathcal{D}^+=\{s\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(s)>1/2$ 或 $s\in1/2-\mathcal{C}\}$. 令 $s_2\in\mathcal{D}^+$ 满足 $\mathrm{Re}(s_2)\le1/2$. 则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{C}^+}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{i\mathfrak{a}_P^*/i\mathfrak{a}_G^*}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda+\widetilde{\mathcal{G}}_\chi,$$

其中 $\widetilde{\mathcal{G}}_\chi=\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 由（6.14）定义。

注意，$\frac{1}{2\pi i}\int_{i\mathfrak{a}_P^*/i\mathfrak{a}_G^*}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda$ 在 $s_1\in\mathcal{D}^-$且 $\mathrm{Re}(s_2)<1/2$. 时是全纯的。此外，我们有

$$\widetilde{\mathcal{G}}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')\sim\frac{L(s_1+\frac{n+1}{2}-ns_2,\pi'\times\sigma_1)L(s_1+s_2,\pi'\times\widetilde{\pi}')}{L(1+\frac{n+1}{2}-(n+1)s_2,\pi'\times\sigma_1)},$$

这意味着 $\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 可延拓为亚纯函数，其定义区域为 $s_2\in\mathcal{D}^-$ 且 $s_1\in\mathbb{C}$，并且至多在 $s_1+s_2=0$和 $s_1+s_2=1$. 上有单极点

因此，我们得到 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis,sing}}(f,\mathbf{s})$到 $\mathbb{C}^2$的亚纯延拓，其在 $s_1+s_2=0$ 和 $s_1+s_2=1$. 上至多有简单极点 □

7. 奇点匹配

令 $n\geq 1$. 令 $\mathbf{s}=(s_1,s_2)\in\mathcal{R}$. 在本节中，我们令 Q 为 G 中类型为$(1,n)$的抛物子群，其Levi子群为 M_Q. 假设 $\pi_1'\simeq\pi_2'\simeq\pi'$. 令$\phi_j'\in\pi_j'$, $1\leq j\leq 2$. 令 $\chi=\{(M_Q,\sigma)\}$ 为一个尖点数据，使得 $\sigma=\sigma_1\otimes\sigma_2$，其中 $\sigma_2\simeq\widetilde{\pi}'$ 且 $\sigma_1=\omega\omega'^{-1}$. 记

$$\mathcal{J}_\chi(f,\mathbf{s},\phi_1',\phi_2')=\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\frac{1}{2\pi i}\int_{i\mathfrak{a}_Q/i\mathfrak{a}_G}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)d\lambda,$$

其中 $\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2):=\Psi_\lambda(s_1,\mathcal{I}(\lambda,f)\phi,\phi_1')\Psi_\lambda(\overline{s_2},\overline{\phi},\phi_2')$。注意，$\mathcal{J}_\chi(f,\mathbf{s}\,\phi_1',\phi_2')$ 正是（6.11）中定义的积分。此处我们使用记号 $\mathcal{J}_\chi(f,\mathbf{s}\ \phi_1',\phi_2')$，以突出其对 ϕ_1' 和 ϕ_2'. 的依赖

我们将 $\mathcal{J}_\chi(f,\mathbf{s}\ \phi_1',\phi_2')$ 亚纯延拓至 $\mathbb{C}^2$，其在 $s_1+s_2=0$ 和 $s_1+s_2=1$ 上可能具有简单极点（参见 §6.3.3）。本节将用 f、 ϕ_1' 和 ϕ_2'. 显式计算 $\mathcal{J}_\chi(f,\mathbf{s}\ \phi_1',\phi_2')$ 的亚纯部分。主要结果是，谱侧的奇异性（即 $\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$（参见 (6.13)）和 $\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$（参见（6.14））与几何侧的奇异性彼此抵消。事实上，我们将证明，在函数方程下， $\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$（分别为 $\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$）与 $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}\mathrm{Geo}({}^{\mathrm{t}}f,\mathbf{s})$（分别为 $\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}\mathrm{Geo}({}^{\mathrm{t}}f,\mathbf{s})$）密切相关，其中 t f 由 t $f(g)=f({}^{\mathrm{t}}g)$ 定义。

定义艾森斯坦级数 $E_P^\dagger(x,s;\widehat{f}_P,y)$ 为

$$\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}f\left(u(\mathbf{x})n\iota(y)\right)\theta(\eta\delta zx\mathfrak{u})d\mathbf{x}dn|\det zx|^s d^\times z,\tag{7.1}$$

其中记 $n=\begin{pmatrix}I_n'(F)&\mathfrak{u}\\&1\end{pmatrix}\in N_P(\mathbb{A}_F)$。

于是，当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时， $E_P^\dagger(x,s;\widehat{f}_P,y)$ 绝对收敛，并具有函数方程，且可亚纯延拓至 $s\in\mathbb{C}$. 。类似地，由下式定义的艾森斯坦级数$\widetilde{E}_P^\dagger(x,s_1+s_2;\widehat{f}_P,y)$

$$\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}f\left(nu(\mathbf{x})\iota(y)\right)\theta(\eta\delta zx\mathfrak{u})d\mathbf{x}dn|\det zx|^s d^\times z$$

具有相同的解析性质。回顾（参见（6.13））

$$\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2'):=\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\operatorname*{Res}_{\lambda=n(s_1-1/2)}\Psi_\lambda(s_1,\mathcal{I}(\lambda,f)\phi,\phi_1')\overline{\Psi_\lambda(\overline{s_2},\phi,\phi_2')}.$$

由 [JPSS83]和 [Jac09] 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\phi(\lambda,s_1,s_2)\sim&\frac{L(s_1+1/2+\lambda,\pi_1'\times\sigma_1)L(s_1+1/2-\lambda/n,\pi_1'\times\sigma_2)}{L(1+(1+n^{-1})\lambda,\sigma_1\times\widetilde{\sigma}_2)}\\&\times\frac{L(s_2+1/2-\lambda,\pi_2'\times\widetilde{\sigma}_1)L(s_2+1/2+\lambda/n,\widetilde{\pi}_2'\times\widetilde{\sigma}_2)}{L(1-(1+n^{-1})\lambda,\sigma_2\times\widetilde{\sigma}_1)}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')\sim\frac{L(s_2-ns_1+\frac{n+1}{2},\widetilde{\pi}_2'\otimes\overline{\omega'\omega})L(s_1+s_2,\pi_1'\times\widetilde{\pi}_2')}{L(1-(n+1)s_2+\frac{n+1}{2},\widetilde{\pi}_2'\otimes\overline{\omega'\omega})},$$

它在 $s_1=1-s_2$. 处有一个简单的

本节的主要结果如下。

定理 7.1。 沿用之前的记号。则 $\mathcal{G}_\chi(s_1,\ s_2,\ \phi_1',\ \phi_2')$ 等于

$$-\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{[G']}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}E_P^\dagger(x,s_1+s_2;\widehat{f}_P,y)dx\overline{\omega'}(y)|\det y|^{s_2}dy.\tag{7.2}$$

~同样， $\mathcal{G}_\chi(s_1,\ s_2,\ \phi_1',\ \phi_2')$ 等于

$$\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}\widetilde{E}_P^\dagger(x,s_1+s_2;\widehat{f}_P,y)dx\overline{\omega'}(y)|\det y|^{s_2}dy.$$

~此外， $\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ （分别为 $\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$）可亚纯延拓至

$$\mathcal{R}:=\big\{\mathbf{s}=(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2:\ \mathrm{Re}(s_1),\ \mathrm{Re}(s_2)>-1/(n+1)\big\}.$$

7.1. 奇异艾森斯坦周期。 沿用上述记号。回顾

$$H_Q:M_Q(\mathbb{A}_F)\to\mathbb{R}^2,\ m=\begin{pmatrix}m_1&\\&m_2\end{pmatrix}\mapsto H_Q(m)=\left(\log|\det m_1|,\frac{\log|\det m_2|}{n}\right).$$

令 ρ_Q 为 (Q,A_Q) 的正根半和。则 $e^{\rho_Q H_Q(m)}=\delta_Q^{1/2}(m)=|\det m_1|^{n/2}|\det m_2|^{-1/2}$ 对于 $m=\begin{pmatrix}m_1&\\&m_2\end{pmatrix}\in M_Q(\mathbb{A}_F)$。

令 π' 和 σ_2 分别为 $G'(\mathbb{A}_F)$ 的尖点自守表示，其中心特征分别为 ω' 和 ω。令 $\sigma_1=\omega'\omega^{-1}$.

用 $\mathcal{A}_0^Q$ 表示函数 $\phi:\ G(\mathbb{A}_F)\longrightarrow\mathbb{C}$ 组成的空间，使得对 $m\in M_Q(\mathbb{A}_F)$ $u\in N_Q(\mathbb{A}_F)$ $a\in\mathrm{diag}(1,A_{G'})$， $\phi(amug)=1\delta_Q^{\frac{1}{2}}\phi(g)$，且对于所有 $k\in K$，函数 $m\mapsto\phi(mk)$ 是 $G'(\mathbb{A}_F)$ 上的尖点自守形式。于是 $\mathcal{A}_0^Q$ 分解为 $M_Q(\mathbb{A}_F)$ 的尖点表示 σ 对应的 $\mathcal{A}_0^Q{}_{,\sigma}$ 的直和。我们可以通过 $\phi\mapsto\delta_Q^{-1/2}\pi(g)\phi$ 将 $\mathcal{A}_0^Q$ 与表示 $\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_F)}_{Q(\mathbb{A}_F)}\mathcal{A}_0([M_Q])$ 等同。令$\lambda\in\mathbb{C}$. 用 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda,-\lambda)$ 表示。用 $\boldsymbol{\lambda}H_Q(m)$ 表示向量 $\boldsymbol{\lambda}$和 H_Q. 的点积。设 $\phi_{\boldsymbol{\lambda}}(g)=\phi(mk)e^{\boldsymbol{\lambda}H_Q}(m)$，其中 $g=umk$ 是 Iwasawa 分解，满足 $u\in N_Q(\mathbb{A}_F)$ $m=\begin{pmatrix}m_1&\\&m_2\end{pmatrix}\in M_Q(\mathbb{A}_F)$，且 $k\in K$.

在作用 $\mathcal{I}(g,s)\phi=\big(\phi(\cdot g)_{\boldsymbol{\lambda}+\rho_Q}\big)_{-\boldsymbol{\lambda}-\rho_Q}$ 下，空间 $\mathcal{A}_0^Q$ 成为 $\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_F)}_{Q(\mathbb{A}_F)}\mathcal{A}_0([M_P])\otimes\alpha^\lambda$，其中 $\alpha(\mathrm{diag}(m_1,m_2))=|\det m_2|^{-1/n}|\det m_1|$. 定义艾森斯坦级数:

$$E(g,\phi,\lambda)=\sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)}\phi_{\boldsymbol{\lambda}+\rho_Q}(\delta g),$$

它在 $\mathrm{Re}(\lambda)>\rho_Q$ 时绝对收敛，并可亚纯延拓至整个复平面，且满足函数方程。此外，它在竖直线 $\mathrm{Re}(\lambda)=0$. 上全纯

设 $\phi\in\mathcal{A}_0^Q{}_{,\sigma}$ 其中 $\sigma=\sigma_1\otimes\sigma_2$ 是 $Q(\mathbb{A}_F)$ 的 Levi子群的尖点表示。令

$$W_\lambda(g)=\int_{[N]}E(ug,\phi,\lambda)\overline{\theta}(u)du,\quad\mathrm{Re}(\lambda)\gg0.$$

设 $v\in\Sigma_F$. 记 $\sigma_{v,\ \lambda}=$诱导$^{G(F_v)}_{Q(F_v)}\sigma_v\otimes\alpha_v^\lambda\cdot$ 展开艾森斯坦级数可知（例如参见[Sha10], 第 122 页）， $W_\lambda(g)$ 是可分解的:

$$W_\lambda(g)=\prod_{v\in\Sigma_F}W_{\lambda,v}(g_v),$$

其中每个因子$W_{\lambda,\ v}(g_v)$ 都可由 Jacquet 积分给出。

令 $W'=\prod_{v\in\Sigma_F}W_v'$为与尖点表示 π'. 相关的 Whittaker 函数。定义 Rankin-Selberg 卷积为

$$\Psi_\lambda(s,\phi,\phi')=\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}W_\lambda\left(\begin{pmatrix}x&\\&1\end{pmatrix}\right)W'(x)|\det x|^s dx,\quad\mathrm{Re}(s)\gg0.\tag{7.3}$$

形如 $\Psi_\lambda(s,\ \phi,\ \phi')$ 的积分将在我们的正则化相对迹公式的谱侧中发挥重要作用。它们实际上是 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis}}\ (f,\ \mathbf{s})$的可能非全纯部分，即连续谱的贡献。我们将在本节研究 $\Psi_\lambda(s,\ \phi,\ \phi')$ 的解析性质，并计算其可能的极点和留数。结合对整个谱侧收敛性的进一步处理，我们将推导出其亚纯延拓，从而得到谱侧的正则化。见下文第 6 节。

根据 [JPSS83] 和 [Jac09] 所建立的局部理论，积分

$$\Psi_{\lambda,v}(s,\phi_v,\phi_v'):=\int_{N'(F_v)\backslash G'(F_v)} W_{\lambda,v}\left(\begin{pmatrix} x_v & \\ & 1\end{pmatrix}\right) W_v'(x_v)|\det x_v|_v^s dx_v$$

在一个全纯因子意义下表示兰金–塞尔伯格 L函数 $L_v(s+1/2,\sigma_v\times\pi_v'\otimes e^{\boldsymbol{\lambda}H_Q})$，该因子在除有限多个赋值外均为 $L_v(1-2\lambda,\sigma_1\times\sigma_2)^{-1}$。因此，当 $\mathrm{Re}(s)$ 和 $\mathrm{Re}(\lambda)$ 足够大时，(7.3) 定义良好。当 $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ 时，$\Psi_\lambda(s,\phi,\phi')$ 的收敛性也可通过使用修正的截断算子加以验证；详情参见 [IY15] 。

注意，$L(s+1/2,\sigma\times\pi'\otimes e^{\boldsymbol{\lambda}H_Q})=L(s+1/2+\lambda,\sigma_1\times\pi')L(s+1/2-\lambda/n,\sigma_2\times\pi')$。因此，除非 $\sigma_2\equiv\widetilde{\pi}'$，否则 $\Psi_\lambda(s,\phi,\phi')$ 可亚纯延拓至；在这种情况下，$\Psi_\lambda(s,\phi,\phi')$ 在 $s=\pm1/2-\lambda$ 处有一个单极点，并在其他地方全纯。

我们将计算 Ψ_λ（$s,\ \phi,\ \phi'$）的更明确表达式，并计算在 $s=1/2$处可能出现的留数。在GL(2)的情形下，这已在[JL70]中完成。然而，高秩情形似乎尚未得到研究。

在对 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis}}(f,\mathbf{s})$ 进行正则化的过程中，我们必须将 $\Psi_\lambda(s,\phi,\phi')$ 视为同时关于 s 和 λ. 的函数。因此，在计算中，我们采用戈德芒截面（参见 [God95]）于 $\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_F)}_{P(\mathbb{A}_F)}\sigma\otimes e^{\boldsymbol{\lambda}H_Q}$，而不是标准截面；当限制到紧子群 K.时，后者与 λ 无关

注意，$\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_F)}_{P(\mathbb{A}_F)}\sigma\otimes e^{\boldsymbol{\lambda}H_Q}$是对所有赋值$v\in\Sigma_F$取相应定义空间 $\mathrm{Ind}^{G(F_v)}_{Q(F_v)}\sigma_v\otimes e^{\boldsymbol{\lambda}H_{Q,\ v}}$的受限张量积。我们可以将纯张量截面 $\phi\in\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_F)}_{P(\mathbb{A}_F)}\sigma\otimes e^{\boldsymbol{\lambda}H_Q}$写成 $\phi=\otimes_v\phi_v$，其中，对于除有限多个 $v\in\Sigma_F$.之外的所有 $\phi_v\in$，均有 $\mathrm{Ind}^{G(F_v)}_{Q(F_v)}\sigma_v\otimes e^{\boldsymbol{\lambda}H_{Q,\ v}}$以及 $\phi_v\equiv 1$

设 v 是一个有限位，使得 σ_v 非分歧。令 Φ_v 为 $M_{n\times(n+1)}(\mathcal{O}_{F_v})$的特征函数。则函数 $h_v(g_v,\lambda)$定义如下：

$$\sigma_{1,\lambda,v}(\det g_v)|\det g_v|_v^{\frac{n}{2}}\int_{G'(F_v)}\Phi_v[(0,g_v')g_v]\phi_{2,-\lambda,v}(g_v'^{-1})\sigma_{1,\lambda,v}(\det g_v')|\det g_v'|_v^{\frac{n+1}{2}}dg_v'^{-1},$$

是 $\mathrm{Ind}^{G(F_v)}_{Q(F_v)}\sigma_v\otimes e^{\boldsymbol{\lambda}H_{Q,v}}$中的一个截面，其中$\phi_{2,-\lambda,v}$是$\sigma_{2,-\lambda,v}$. 中的一个向量。直接计算可得

$$h_v(I_{n+1},\lambda)=L_v(1+2\lambda,\sigma_{1,v}\times\widetilde{\sigma}_{2,v}).$$

因此，函数 $\phi_v^*(g_v,\lambda):=h_v(g_v,\lambda)/L_v(1+2\lambda,\sigma_{1,v}\times\widetilde{\sigma}_{2,v})$是一个标准截面，即 $\phi_v^*(k_v,\lambda)\equiv 1$, $\forall\ k_v\in K_v$.

设 $\mathcal{S}(n\times(n+1)\ \mathbb{A}_F)$为 $M_{n\times(n+1)}(\mathbb{A}_F)$上的 Bruhat-Schwartz 函数空间。则$\phi^*_{\Phi,\phi_2}(g,\lambda)$定义如下：

$$\frac{\sigma_{1,\lambda}(\det g)|\det g|^{\frac{n}{2}}}{L(1+2\lambda,\sigma_1\times\widetilde{\sigma}_2)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\Phi[(0,g')g]\phi_{2,-\lambda}(g'^{-1})\sigma_{1,\lambda}(\det g')|\det g'|^{\frac{n+1}{2}}dg',\tag{7.4}$$

是 $\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_F)}_{P(\mathbb{A}_F)}\sigma\otimes e^{\boldsymbol{\lambda}H_Q}$ 中的一个整体截面，其中 $\Phi\in\mathcal{S}(n\times(n+1)\ \mathbb{A}_F)$，且 $\phi_{2,\ -\lambda}$是 $\sigma_{2,\ -\lambda}$. 中的一个向量。结合 [JPSS83]（第6节，第428页中的命题）和 [Jac09]（命题7.1，第98页）中发展出的局部理论，我们得出 $\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_F)}_{P(\mathbb{A}_F)}\sigma\otimes e^{\boldsymbol{\lambda}H_Q}$的每个整体截面都是 $F(\lambda)\phi^*_{\Phi,\ \phi_2}(g,\lambda)$的有限和，其中 $\Phi\in\mathcal{S}(n\times$

$(n+1)$ $\mathbb{A}_F$) $\phi_2 \in \sigma_2$，并且对于除有限多个赋值外的所有赋值， $F(\lambda)=\prod_v F_v(\lambda)$ 都是关于 λ 且带有$F_v(\lambda) \equiv 1$ 的初等函数。

记 $u=\begin{pmatrix} I_n & \mathfrak{u} \\ & 1 \end{pmatrix} \in N_P(\mathbb{A}_F)$。令 $\chi=\{(M_Q,\sigma)\}$. 令 $w=\begin{pmatrix} & 1 \\ I_n & \end{pmatrix}$. 定义与 $\phi \in \mathfrak{B}_{Q,\chi}$ 相关的向量值艾森斯坦级数为

$$e_v(x,\phi,s):=\sum_{\delta \in P'(F)\backslash G'(F)} \int_{Z'(\mathbb{A}_F)} \int_{N_P(\mathbb{A}_F)} \phi(wu)\overline{\theta}(\eta\delta zxu)d\mathfrak{u}|\det zx|^s d^\times z.$$

由泊松求和， $e_v(x,\phi,s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时绝对收敛，并且满足函数方程，且可亚纯延拓至 $\lambda \in \mathbb{C}$，可能的（简单）极点位于 $s \in \{0,1\}$.

命题 7.2。 记号同前。令 $\chi=\{(M_Q,\sigma)\}$ 和 $\phi \in \mathfrak{B}_{Q,\chi}$.则

$$\Psi_\lambda(s,\phi,\phi')=\int_{[G']} \phi'(x)\sigma_2'(x)e_v(x,\phi,s+1/2-\lambda/n)dx. \tag{7.5}$$

特别地， $\Psi_\lambda(s,\phi,\phi')$ 当 $\sigma_2 \not\simeq \widetilde{\pi}'$, 时是全纯的；而当 $\sigma_2 \simeq \widetilde{\pi}'$, $\Psi_\lambda(s,\phi,\phi')$是亚纯的，在 $s-\lambda/n=1/2$和 $s-\lambda/n=-1/2$.上至多有简单极点

证明。 将 $\phi^*(g)=\phi^*_{\Phi,\phi_2}(g,\lambda)$ 代入 Jacquet 积分

$$W^*_\lambda(g)=\int_{N(\mathbb{A}_F)} \phi^*(w_n^l ug)\overline{\theta}(u)du, \tag{7.6}$$

其中 w_n^l 是 (G,B) 的 Weyl 群中的最长元。我们可以写成 $w_n^l=\begin{pmatrix} & 1 \\ w_{n-1}^l & \end{pmatrix}$,

其中 w_{n-1}^l 是相对于 (G',B') 这一对的最长韦伊元。记 $N(\mathbb{A}_F) \ni u=\begin{pmatrix} u' & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \mathfrak{u} \\ & 1 \end{pmatrix}$。然后经过变量替换 $g' \mapsto w_{n-1}^l u'g'$ ，得到

$$W^*_\lambda(g)=\frac{\sigma_{1,\lambda}(\det g)|\det g|^{\frac{n}{2}}}{L(1+(1+n^{-1})\lambda,\sigma_1\times\widetilde{\sigma}_2)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)} W_{2,-\lambda}(g')\sigma_{1,\lambda}(\det g'^{-1})|\det g'|^{-\frac{n+1}{2}}dg' \\ \times\int_{\mathbb{A}_F^n}\Phi[(g'^{-1},g'^{-1}\mathfrak{u})g]\overline{\theta}(\eta\mathfrak{u})d\mathfrak{u},$$

其中

$$W_{2,-\lambda}(g'):=\int_{[N']}\phi_{2,-\lambda}(w_{n-1}u'g')\overline{\theta}(u')du'$$

是 $\mathcal{W}_{\sigma_2}$ 中的一个向量，$_{-\lambda}$ 是与 $\sigma_{2,-\lambda}=\sigma_2\otimes|\det(\cdot)|^{-\lambda/n}$. 相关联的 Whittaker 模型。定义 $\widehat{\Phi}_2(x,\mathfrak{c})=\int_{\mathbb{A}_F^n}\Phi(x,\mathfrak{u})\overline{\theta}({}^t\mathfrak{u}\mathfrak{c})d\mathfrak{u}$, 其中 $x\in M_{n\times n}(\mathbb{A}_F)$ 且 $\mathfrak{c}\in M_{n\times 1}(\mathbb{A}_F)$。那么由 (7.6)，由 (7.3) 定义的 Rankin–Selberg 积分变为

$$\Psi_\lambda(s,\phi^*,\phi')=\frac{1}{L(1+(1+n^{-1})\lambda,\sigma_1\times\widetilde{\sigma}_2)}\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}W'(x)\sigma_{1,\lambda}(\det x) \\ |\det x|^{s+\frac{n}{2}}dx\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\widehat{\Phi}_2(g'x,\eta g'^{-1})W_{2,-\lambda}(g'^{-1})\sigma_{1,\lambda}(\det g')|\det g'|^{\frac{n-1}{2}}dg',$$

当 $\mathrm{Re}(s)$ 和 $\mathrm{Re}(\lambda)$ 足够大时，该式绝对收敛。

将变量 $g'\mapsto g'x^{-1}$ 替换为，以得到

$$\Psi_\lambda(s,\phi^*,\phi')=\frac{1}{L(1+(1+n^{-1})\lambda,\sigma_1\times\widetilde{\sigma}_2)}\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}W'(x)|\det x|^{s+\frac{1}{2}}dx \\ \int_{G'(\mathbb{A}_F)}\widehat{\Phi}_2(g',\eta xg'^{-1})W_{2,-\lambda}(xg'^{-1})\sigma_{1,\lambda}(\det g')|\det g'|^{\frac{n-1}{2}}dg'.$$

将 x 替换为 xg'，然后 $L(1+(1+n^{-1})\lambda,\sigma_1\times\widetilde{\sigma}_2)\Psi_\lambda(s,\phi^*,\phi')$ 变为

$$\int W_{2,-\lambda}(x)\int_{G'(\mathbb{A}_F)}W'(xy)\sigma_{1,\lambda}(\det y)|\det y|^{s+\frac{n}{2}}\widehat{\Phi}_2(y,\eta x)dy|\det x|^{s+\frac{1}{2}}dx, \tag{7.7}$$

其中 x 遍历 $N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)$。根据 [JPSS83] 和 [Jac09]，存在 ξ 上的基本幂等元 $G'(\mathbb{A}_F)$，使得 $R(\xi)(\Phi(y,\cdot)\sigma_{1,\lambda}(\det y))=\Phi(y,\cdot)\sigma_{1,\lambda}(\det y)$ 对所有 y. 成立。于是我们可以将上述表达式改写为

$$\int W_{2,-\lambda}(x)|\det x|^{s+\frac{1}{2}}dx\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\widehat{\Phi}_2(y,\eta x)\sigma_{1,\lambda}(\det y)|\det y|^{s+\frac{n}{2}}R(\xi)\pi'(y)W'(x)dy,$$

其中 x 遍历 $N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)$。

注意，算子 $R(\xi)$ 是到 $\mathcal{W}(\pi')$ 的有限维子空间（即 π'. 的 Whittaker 模型）上的投影。令 $\{W_j':\ j\in J\}$ 为该子空间的标准正交基，其中 J 是一个有限指标集。于是

$$R(\xi)\pi'(y)W'=\sum_{j\in J}\langle R(\xi)\pi'(y)W',W_j'\rangle W_j'=\sum_{j\in J}\langle\pi'(y)W',W_j'\rangle W_j',$$

其中 $y\in$ 支撑 Φ. 所以

$$\Psi_\lambda(s,\phi^*,\phi')=\frac{1}{L(1+(1+n^{-1})\lambda,\sigma_1\times\widetilde{\sigma}_2)}\sum_{j\in J}\int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)}W_j'(x)W_{2,-\lambda}(x)$$
$$|\det x|^{s+\frac{1}{2}}dx\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\widehat{\Phi}_2(y,\eta x)\langle\pi'(y)W',W_j'\rangle\sigma_{1,\lambda}(\det y)|\det y|^{s+\frac{n}{2}}dy.$$

第一个积分是 $L(s+1/2,\pi'\times\sigma_{2,-\lambda})=L(s+1/2-\lambda/n,\pi'\times\sigma_2)$ 的 Rankin-Selberg 卷积，第二个积分是 $L(s+1/2,\pi'\times\sigma_{1,\lambda})=L(s+1/2+\lambda,\pi'\times\sigma_1)$ 的 Godement-Jacquet 积分，它是整函数。

根据 Rankin-Selberg 理论，(7.7) 在 $\mathrm{Re}(s)-\mathrm{Re}(\lambda)/n>1/2$ 时绝对收敛，并可亚纯延拓至 $\lambda\in\mathbb{C}$，可能在以下位置有（简单）极点：$\lambda=n(s-1/2)$ 和 $\lambda=n(s+1/2)$ 当 $\pi'\simeq\widetilde{\sigma}_2$.

现在我们继续推导 $\Psi_\lambda(s,\phi^*,\phi')$ 的亚纯延拓。定义

$$\widehat{\Phi}_2^\sharp(y,\eta g'):=\int_{\mathbb{A}_F^n}\Phi(y,\mathfrak{u})\overline{\theta}(\eta g'\mathfrak{u})d\mathfrak{u} \tag{7.8}$$

对所有 $g'\in G'(\mathbb{A}_F)$。定义艾森斯坦级数

$$E(x,\widehat{\Phi}_2(y,\cdot),\lambda):=\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{Z'(\mathbb{A}_F)}\widehat{\Phi}_2^\sharp(y,\eta\delta zx)|\det zx|^{s+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{n}}d^\times z,$$

当 $\mathrm{Re}(s)-\mathrm{Re}(\lambda)/n>1/2.$ 时绝对收敛。此外，根据泊松求和，$E(x,\widehat{\Phi}_2(y,\cdot)\lambda)$ 可亚纯延拓至 $(s,\lambda)\in\mathbb{C}^2$，其在直线 $s-\lambda/n=1/2$ 上至多有单极点 $s-\lambda/n=-1/2.$。设 $\mathrm{Re}(s)-\mathrm{Re}(\lambda)/n>1/2.$。则 $L(1+(1+n^{-1})\lambda,\sigma_1\times\widetilde{\sigma}_2)\Psi_\lambda(s,\phi^*,\phi')$ 等于

$$\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\sigma_{1,\lambda}(\det y)|\det y|^{s+\frac{n}{2}}\left[\int_{[G']}\phi_2(x)(\pi'(y)\phi')(x)E(x,\widehat{\Phi}_2(y,\cdot),\lambda)dx\right]dy.$$

因此 $\int_{[G']}\phi_2(x)(\pi'(y)\phi')(x)E(x,\widehat{\Phi}_2(y,\cdot)\lambda)dx$ 等于

$$\int_{[G']}\phi_2(x)(\pi'(y)\phi')(x)\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}\Phi(y,\mathfrak{u})\overline{\theta}(\eta\delta x\mathfrak{u})d\mathfrak{u}|\det x|^{s+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{n}}dx$$
$$=\int_{[G']}\phi_2(x)(\pi'(y)\phi')(x)\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}\Phi(y,x^{-1}\mathfrak{u})\overline{\theta}(\eta\delta\mathfrak{u})d\mathfrak{u}|\det x|^{s-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{n}}dx.$$

结合 $\Phi(y,\mathfrak{u}) = \Phi[(y,0)\iota(y^{-1})u\iota(y)] = \Phi[(0,y)w\iota(y^{-1})u\iota(y)]$ 以及变量替换 $x \mapsto xy^{-1}$ 和 $y \mapsto yx$，上述积分变为

$$\int_{[G']}\int_{G'(\mathbb{A}_F)} \sigma_{1,\lambda}(\det yx)|\det yx|^{s+\frac{n}{2}}\phi_2(y^{-1})\phi'(x)$$
$$\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)} \Phi[(\mathbf{0},y)wu\iota(x)]\overline{\theta}(\eta\delta\mathfrak{u})d\mathfrak{u}|\det y|^{-s+\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{n}}dydx,$$

用 $\phi^*_{\Phi,\ \phi_2}(g,\ \lambda)$ 由 (7.4) 定义，结果为

$$\int_{[G']}\phi'(x)\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\phi^*_{\Phi,\phi_2}(w\iota(x)u,\lambda)\overline{\theta}(\eta\delta x\mathfrak{u})d\mathfrak{u}|\det x|^{s+1}dx.$$

设 $\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\ \chi}$. 利用分解 $\phi = \sum F(\lambda)\phi^*_{\Phi,\ \phi_2}(\cdot,\lambda)$ 得到

$$\Psi_\lambda(s,\phi,\phi') = \int_{[G']}\phi'(x)\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\phi(w\iota(x)u)\overline{\theta}(\eta\delta x\mathfrak{u})d\mathfrak{u}|\det x|^{s+1-\frac{\lambda}{n}}dx.$$

注意，$\phi(w\iota(x)u) = |\det x|^{-\frac{1}{2}}(\sigma_2(x)\phi)(wu)$。于是 $\Psi_\lambda(s,\phi,\phi')$ 变为

$$\int_{[G']}\phi'(x)\sigma_2(x)\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\phi(wu)\overline{\theta}(\eta\delta x\mathfrak{u})d\mathfrak{u}|\det x|^{s+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{n}}dx. \tag{7.9}$$

因此，(7.5) 可由 (7.9) 得出。 □

推论 7.3。沿用前述记号。设 $\chi = \{(M_Q,\ \sigma)\}$ 其中 $\pi'\simeq\widetilde{\sigma}_2$. 设$\phi\in\mathfrak{B}_{R,\ \chi}$. 记为 $w = \begin{pmatrix} & & 1\\ & I_n & \\ 1 & & \end{pmatrix}$. 于是

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=n(s-1/2)}\Psi_\lambda(s,\phi,\phi') = -\int_{[\overline{G'}]}\phi'(x)\phi(w\iota(x))|\det x|^{\frac{1}{2}}dx. \tag{7.10}$$

推论 7.4. 沿用前述记号。设 $\chi = \{(M_Q,\sigma)\}$ 满足 $\pi'\simeq\widetilde{\sigma}_2$. 令$\phi\in\mathfrak{B}_{R,\chi}$. 则$\operatorname*{Res}_{\lambda=n(s-1/2)}\Psi_\lambda(s,\mathcal{I}(\lambda,f)R(w^{-1})\phi,\phi')$ 等于

$$-\int_{[\overline{G'}]}\phi'(x)\int_{\mathbb{A}_F^n}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_K f(u(\mathbf{x})\iota(y)k)\phi(w\iota(xy)kw^{-1})|\det x|^{\frac{1}{2}}|\det y|^{\frac{3}{2}-s}dkdydx.$$

特别地，$\operatorname*{Res}_{\lambda=n(s-1/2)}\Psi_\lambda(s,\mathcal{I}(\lambda,f)R(w^{-1})\phi,\phi')$ 是关于 s. 的整函数

证明。由 (6.3) 和推论 7.3 $\operatorname*{Res}_{\lambda=n(s-1/2)}\Psi_\lambda(s,\mathcal{I}(\lambda,f)R(w^{-1})\phi,\phi')$ 等于

$$-\int_{\overline{G}(\mathbb{A}_F)}f(y)\int_{[\overline{G'}]}\phi'(x)\phi(w\iota(x)yw^{-1})e^{\langle\boldsymbol{\lambda},H_Q(w\iota(x)yw^{-1})\rangle}|\det x|^s dxdy. \tag{7.11}$$

令 $wyw^{-1} = umk$ 为岩泽分解，使得 $um\in\overline{Q}(\mathbb{A}_F)$。将 $\overline{Q}$ 的 Levi 分量识别为 $\mathrm{diag}(1,G')$。于是

$$H_Q(w\iota(x)yw^{-1}) = H_Q(w\iota(x)w^{-1}um) = H_Q(w\iota(x)w^{-1}m) = |\det xm|^{\frac{1}{n}} = |\det xy|^{\frac{1}{n}}.$$

因此，(7.11) 经进一步变量替换 $y\mapsto w^{-1}yw$， 得到

$$-\int_{[\overline{G'}]}\phi'(x)\int_{\overline{G}(\mathbb{A}_F)}f(w^{-1}yw)\phi(w\iota(x)w^{-1}y)|\det x|^{\frac{1}{2}}|\det y|^{\frac{3}{2}-s}dydx. \tag{7.12}$$

由于 f 在 $\overline{G}(\mathbb{A}_F)$ 上具有紧支集，因此 （7.12）对所有 $s\in\mathbb{C}$ 都绝对收敛，从而定义了一个关于 s. 的整函数。因此推论 7.4 得证。 □

利用上述准备工作，我们现在可以证明定理7.1 。

定理7.1的证明。注意，在求和中可以用 ϕ 替换为 $R(w^{-1})\phi$ 。

$$\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}} \Psi_\lambda(s_1,\mathcal{I}(\lambda,f)\phi,\phi_1')\overline{\Psi_\lambda(\overline{s_2},\phi,\phi_2')}.$$

因此， $\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 等于

$$\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}} \overline{\Psi_{n(s_1-1/2)}(\overline{s_2},R(w^{-1})\phi,\phi_2')}\operatorname*{Res}_{\lambda=n(s_1-1/2)}\Psi_\lambda(s_1,\mathcal{I}(\lambda,f)R(w^{-1})\phi,\phi_1').$$

由命题 7.2 和推论 7.4， $\mathcal{G}_\chi(s_1,\ s_2,\ \phi_1',\ \phi_2')$ 是

$$\begin{aligned}
&-\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\int_{[\overline{G'}]}\int_{N_Q(\mathbb{A}_F)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_K f\left(w^{-1}u'\begin{pmatrix}1&\\&y\end{pmatrix}kw\right)\\
&\phi\left(\begin{pmatrix}1&\\&x\end{pmatrix}u'\begin{pmatrix}1&\\&y\end{pmatrix}k\right)\phi_1'(x)|\det x|^{\frac12}|\det y|^{\frac32-s_1}dkdu'dydx\\
&\int_{[G']}\overline{\phi_2'(h)}\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\overline{\phi(w\iota(h)uw^{-1})}\theta(\eta\delta h\mathfrak{u})du|\det h|^{s_2+s_1+\frac12}dh.
\end{aligned}$$

对于 $g\in G(\mathbb{A}_F)$，我们将 $\mathfrak{F}(g;\ s_1)$ 定义为

$$\int_{N_Q(\mathbb{A}_F)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)} f\left(w^{-1}u'\begin{pmatrix}1&\\&y\end{pmatrix}gw\right)\pi'(y^{-1})\phi_1'(I_n)|\det y|^{1-s_1}dydu'. \tag{7.13}$$

记 $g=zu''\begin{pmatrix}1&\\&x\end{pmatrix}k\in G(\mathbb{A}_F)$，其中 $z\in Z(\mathbb{A}_F)$ $u''\in N_Q(\mathbb{A}_F)$。则

$$\mathfrak{F}(g;s_1)=\omega^{-1}(z)|\det x|^{s_1-1}\pi'(x)\mathfrak{F}(k;s_1),$$

表示 $\mathfrak{F}(\cdot;\ s_1)\ \in\Pi_{s_1}:=\mathrm{Int}^{G(\mathbb{A}_F)}{}_{Q(\mathbb{A}_F)}\widetilde{\sigma}\otimes e^{\langle(n(1/2-s_1)\ n(s_1-1/2))\ H_Q(\cdot)\rangle}$，其中 $\sigma=\sigma_1\otimes\sigma_2$ 与 $\sigma_1=\omega\omega'^{-1}$ 以及 $\sigma_2=\widetilde{\pi}'$. 。记为

$$\phi(g;s_1):=\phi\left(zu'\begin{pmatrix}1&\\&x\end{pmatrix}k\right)|\det x|^{3/2-s_1}.$$

于是 $\phi(g;\ s_1)\ =\omega(z)|\det\ x|^{1-s_1}(\mathbf{1}\otimes\widetilde{\pi}'(x))\phi(k;\ 1-s_1)$。因此 $\phi(\cdot;\ s_1)\ \in\widetilde{\Pi}_{s_1}$，即表示 Π_{s_1}. 的对偶表示

采用上述记号，函数 $-\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 可写为

$$\sum_\phi\langle\langle\mathfrak{F}(\cdot;s_1),\phi(\cdot;s_1)\rangle\rangle\int_{[G']}\overline{\phi_2'(h)}\sum_\delta\int\overline{\phi(w\iota(h)uw^{-1})}\theta(\eta\delta h\mathfrak{u})du|\det h|^{s_2+s_1+\frac12}dh,$$

其中 $\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}$, δ（分别为 u）遍历 $P'(F)\backslash G'(F)$（分别为 $N_P(\mathbb{A}_F)$），且

$$\langle\langle\mathfrak{F}(\cdot;s_1),\phi(\cdot;s_1)\rangle\rangle:=\int_{[\overline{G'}]}\int_K\mathfrak{F}\left(\begin{pmatrix}1&\\&x\end{pmatrix}k;s_1\right)\phi\left(\begin{pmatrix}1&\\&x\end{pmatrix}k;s_1\right)dkdx$$

~是 Π_{s_1} 与 Π_{s_1}. 的一对。由正交性可得

$$\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{Q,\chi}}\langle\langle\mathfrak{F}(\cdot;s_1),\phi(\cdot;s_1)\rangle\rangle\overline{\phi\left(\begin{pmatrix}1&\\&h\end{pmatrix}\right)}|\det h|^{-\frac12+s_1}=\mathfrak{F}\left(\begin{pmatrix}1&\\&h\end{pmatrix};s_1\right). \tag{7.14}$$

由（7.14）可知，函数 $\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 变为

$$-\int_{[G']}\overline{\phi_2'(h)}\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\mathfrak{F}(w\iota(h)uw^{-1};s_1)\theta(\eta\delta h\mathfrak{u})du|\det h|^{s_2+1}dh.$$

按照（7.13），展开 $\mathfrak{F}(w\iota(h)uw^{-1};\ s_1)$，将其写成 $\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 如下形式

$$-\int_{[G']}\overline{\phi_2'(h)}\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\theta(\eta\delta h\mathfrak{u})du|\det h|^{s_2+1}dh$$
$$\int_{N_Q(\mathbb{A}_F)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}f\left(w^{-1}u'\begin{pmatrix}1&\\&yh\end{pmatrix}wu\right)\pi'(y^{-1})\phi_1'(I_n)|\det y|^{1-s_1}dydu'.$$

对变量 $y\mapsto yh^{-1}$ 和 $h\mapsto hy$ 作替换，将上述积分化为

$$-\int_{[G']}\overline{\phi_2'(hy)}\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\theta(\eta\delta hy\mathfrak{u})du|\det hy|^{s_1+s_2}dh$$
$$\int_{N_Q(\mathbb{A}_F)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}f\left(w^{-1}u'\begin{pmatrix}1&\\&y\end{pmatrix}wu\right)\phi_1'(h)|\det y|^{1-s_1}dydu',$$

再对变量 $\mathfrak{u}\mapsto y^{-1}\mathfrak{u}$ 作一次替换后，得到

$$-\int_{[G']}\overline{\phi_2'(hy)}\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G'(F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}\theta(\eta\delta h\mathfrak{u})du|\det h|^{s_1+s_2}dh$$
$$\int_{N_Q(\mathbb{A}_F)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}f\left(w^{-1}u'wu\iota(y)\right)\phi_1'(h)|\det y|^{s_2}dydu'.$$

展开后，我们看到上述积分变为 (7.2)。此外，我们有函数方程 $E_P^\dagger(x,s;\widehat{f}_P,y)=E_\gamma(x,1-s;f_P^\dagger(\cdot;z_2,y))$，其由 §4.2 中的 (4.4) 定义。

对艾森斯坦级数 $E_P^\dagger(x,s_1+s_2;\widehat{f}_P,y)$ 应用泊松求和，并仿照命题 4.4、4.12 和引理 4.13 的证明，我们看到 $\mathcal{G}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 可亚纯延拓至 $\mathcal{R}=\{\mathbf{s}=(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2:\mathrm{Re}(s_2)>-1/(n+1)\}$。$\widetilde{\mathcal{G}}_\chi(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 的解析性质可类似证明。□

7.2. **几何侧与谱侧的奇点匹配**。根据命题3.3、引理 5.5以及定理 4.14、4.16和 5.6，几何侧

$$J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s})=J_{\mathrm{Geo,Small}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s})-\mathcal{F}_{1,0}J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Big}}(f,\mathbf{s})-\mathcal{F}_{0,1}J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Big}}(f,\mathbf{s})$$
$$+J_{\mathrm{Geo,Dual}}^{\mathrm{Big}}(f,\mathbf{s})+J_{\mathrm{Geo,Big}}^{\mathrm{Reg},II}(f,\mathbf{s})$$

在 $\mathrm{Re}(s_1)+\mathrm{Re}(s_2)>1$ 中绝对收敛，并且可亚纯延拓至区域 $\mathcal{R}$，在 $s_1+s_2\in\{0,1\}$处至多有简单极点，其中

$$\mathcal{R}=\{\mathbf{s}=(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2:\ \mathrm{Re}(s_1),\ \mathrm{Re}(s_2)>-1/(n+1)\}. \tag{7.15}$$

根据定理6.6 谱侧

$$J_{\mathrm{Spec}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s})=J_0(f,\mathbf{s})+J_{\mathrm{Eis,reg}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s})+J_{\mathrm{Eis,semi\text{-}sing}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s})+J_{\mathrm{Eis,sing}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s}) \tag{7.16}$$

在 $\mathrm{Re}(s_1)$、$\mathrm{Re}(s_2)\gg 1$ 中绝对收敛，并且可亚纯延拓至区域 $\mathcal{R}$，在 $s_1+s_2\in\{0,1\}$. 处至多有简单极点。特别地，右端只有$J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis、sing}}(f,\mathbf{s})$ 可能是亚纯的，其余项均为全纯函数。

注意，亚纯项 $J^{\mathrm{Reg}}\mathrm{Geo,Small}(f,\mathbf{s})$ $\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}\mathrm{Geo}(f,\mathbf{s})$ $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}\mathrm{Geo}(f,\mathbf{s})$,$J^{\mathrm{Big}}\mathrm{Geo,Dual}(f,\mathbf{s})$ 和 $J^{\mathrm{Reg}}\mathrm{Eis,sing}(f,\mathbf{s})$ 可以表示为涉及形式为 (1.8) 的 Eisenstein 级数 $E(s,x,y;\Phi,\omega'')$ 的积分（例如 §4.2 中由 (4.4) 定义的 $E_\gamma(x,1-s;f_P^\dagger(\cdot;z_2,y))$，或 §7 中由 (7.1) 定义的 $E_P^\dagger(x,s;\widehat{f}_P,y)$），其参数由 y 连续取值，且具有如下形式

$$J(s)=\iint h(x,y)E(s,x,y;\Phi,\omega'')dxdy \tag{7.17}$$

对于某个连续函数 h. 根据分解 (1.9)，我们可以将 $E(s,x,y;\Phi,\omega'')$ 分解为三部分，从而得到 $J(s)$ 的一个分解:

$$J(s)=J_+(s)+J_+^{\wedge}(x,s)+J_{\mathrm{Res}}(s), \tag{7.18}$$

w其中 $J_+(s)$ 和 $J_+^{\wedge}(x,s)$ 是全纯的，而 $J_{\mathrm{Res}}(s)$ 可能只是亚纯的。将 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})$ 的亚纯部分定义为 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Geo,Res}}(f,\mathbf{s})$，即

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small,Res}}(f,\mathbf{s})-\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Res}}(f,\mathbf{s})-\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Res}}(f,\mathbf{s})+J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo},\gamma(0),\mathrm{Res}}(f,\mathbf{s}).$$

记 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Spec}}(f,\mathbf{s})$ 的亚纯部分为 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis,sing,Res}}(f,\mathbf{s})$。

现在我们计算 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Geo,Res}}(f,\mathbf{s})$ 和 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Eis,sing,Res}}(f,\mathbf{s})$，并证明它们彼此相等。本节的主要结果如下。

命题 7.5。沿用上述记号。则 $J^{\mathrm{Reg}}\mathit{Geo,Res}(f,s)-J^{\mathrm{Reg}}\mathit{Eis,sing,Res}(f,s)$ 在 $\mathcal{R}$ 中全纯。特别地，在区域 $s\in\{(s_1,s_2)\in\mathcal{R}:\mathrm{Re}(s_1)<1/2,\mathrm{Re}(s_2)<1/2\}$ 内，亚纯函数

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small,Res}}(f,\boldsymbol{s})+J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Dual,Res}}(f,\boldsymbol{s})-\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Res}}(f,\boldsymbol{s})-\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Res}}(f,\boldsymbol{s})$$
$$+\mathcal{G}_{\chi,\mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')-\widetilde{\mathcal{G}}_{\chi,\mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$$

等于

$$-J^{\mathrm{Reg},0}_{\mathrm{Geo,Small,Res}}(f,\boldsymbol{s})-J^{\mathrm{Big},1}_{\mathrm{Geo,Dual,Res}}(f,\boldsymbol{s}),$$

它在区域 $\mathrm{Re}(s_1+s_2)<1$. *Here* $J^{\mathrm{Big}}{}_{,1\ \mathrm{Geo,Dual,Res}}(f,\boldsymbol{s})$ 中全纯

$$\frac{1}{n(s_1+s_2-1)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}f(u(\boldsymbol{x})\iota(y))\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}d\boldsymbol{x}dy,$$

且 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{,0\ \mathrm{Geo,Small,Res}}(f,\boldsymbol{s})$ 等于

$$-\frac{1}{n(s_1+s_2+1)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}f(u\iota(y))\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}dudy.$$

此命题的证明将在下文第7.2.6 节给出。

7.2.1. 的亚纯部分 $J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\boldsymbol{s})$. 根据命题 5.3, $J^{\mathrm{Big}}{}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\mathbf{s})$ 为

$$\iint\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}E_{\mathrm{Dual}}(x,s_1+s_2;f^{\dagger}(\cdot,z_2,y))dx\overline{\omega}'(z_2)|\det z_2y|^{s_2}dyd^{\times}z_2,$$

其中 z_2(分别 y) 遍历 $Z'(\mathbb{A}_F)$(分别 $\overline{G'}(\mathbb{A}_F)$)，且艾森斯坦级数$E_{\mathrm{Dual}}(x,s_1+s_2;f^{\dagger}(\cdot,z_2,y))$ 定义于第5.3节。

对 $E_{\mathrm{Dual}}(x,s_1+s_2;f^{\dagger}(\cdot,z_2,y))$ 执行泊松求和可得

$$J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Dual,Res}}(f,\mathbf{s})=J^{\mathrm{Big},0}_{\mathrm{Geo,Dual,Res}}(f,\mathbf{s})+J^{\mathrm{Big},1}_{\mathrm{Geo,Dual,Res}}(f,\mathbf{s}), \tag{7.19}$$

其中 $J^{\mathrm{Big}}{}_{,\ 1\ \mathrm{Geo,\ Dual,\ Res}}(f,\mathbf{s})$ 等于

$$\frac{1}{n(s_1+s_2-1)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}f(u(\mathbf{x})\iota(y))\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}d\mathbf{x}dy,$$

以及 $J^{\mathrm{Big}}{}_{,\ 0\ \mathrm{Geo,\ Dual,\ Res}}(f,\mathbf{s})$ 等于

$$-\frac{1}{n(s_1+s_2)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}f(\iota(y))\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}dy. \tag{7.20}$$

7.2.2. J^{Reg} Geo,Small(f, s) 的亚纯部分。固定 $s_2 \in \mathbb{C}$. 根据命题 3.1 和 (3.1), 函数 J^{Reg} Geo,Small(f, s) 在 $s_1 = -s_2$ 处有一个单极点，该极点继承自艾森斯坦级数 $E(x, s_1 + s_2 + 1;\ f_P(\cdot;\ z_2, y))$。根据泊松求和， $E(x, s_1 + \frown s_2 + 1;\ \check{}\, f_P(\cdot;\ z_2, y))$ 的留数为 $n^{-1}\omega'(z_1)\omega_2(z_2)|\det\ z_2 y|^{s_2}\widehat{f_P(0;\ z_2, y)}$。注意， $\check{}\, f_P\widehat{\ }$ 是逆傅里叶变换，因此傅里叶变换 f_P 会还原为 $f_\cdot$。于是，类似于 §7.2.1 中的论证，我们得到

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small,Res}}(f, \mathbf{s}) = J^{\mathrm{Reg},0}_{\mathrm{Geo,Small,Res}}(f, \mathbf{s}) + J^{\mathrm{Reg},1}_{\mathrm{Geo,Small,Res}}(f, \mathbf{s}), \tag{7.21}$$

其中 J^{Reg}, 1 几何, 小, 留数(f,s) 等于

$$\frac{1}{n(s_1+s_2)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)} f(\iota(y))\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}dy, \tag{7.22}$$

并且 J^{Reg}, 0 几何, 小, 留数(f,s) 等于

$$-\frac{1}{n(s_1+s_2+1)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)} f(u\iota(y))\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}dudy,$$

由（7.20）和（7.22可得以下消去结论。

引理 7.6。 沿用前述记号。则

$$J^{\mathrm{Big},0}_{\mathrm{Geo,Dual,Res}}(f, \boldsymbol{s}) + J^{\mathrm{Reg},1}_{\mathrm{Geo,Small,Res}}(f, \boldsymbol{s}) = 0.$$

7.2.3. $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}$ Geo(f, s) 的亚纯部分。记 $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}$ Geo,Res(f, s) 为 $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}$ Geo(f, s) 的亚纯部分，该部分继承自艾森斯坦级数 $E_\gamma(x, s_1 + s_2 + 1;\ f_P^\dagger(\cdot;\ z_2, y))$. 根据命题 4.4，我们有

$$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Res}}(f, \mathbf{s}) = \mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},0}_{\mathrm{Geo,Res}}(f, \mathbf{s}) + \mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},1}_{\mathrm{Geo,Res}}(f, \mathbf{s}), \tag{7.23}$$

其中 $\mathcal{F}_{0,\ 1}J^{\mathrm{Big}}$, 1 Geo, Res($f$,s) 等于

$$\frac{1}{n(s_1+s_2)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)} f(u(\mathbf{x})n\iota(y))\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}dnd\mathbf{x}dy,$$

并且 $\mathcal{F}_{0,\ 1}J^{\mathrm{Big}}$, 0 Geo, Res($f$,s) 等于

$$-\frac{1}{n(s_1+s_2+1)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)} f(n\iota(y))\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}dndy.$$

7.2.4. $\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}$ Geo(f, s) 的亚纯部分。记 $\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}$ Geo,Res(f, s) 为 $\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}$ Geo(f, s) 的亚纯部分，它继承自艾森斯坦级数 $E_\gamma(x, s_1 + s_2 + 1;\ {}^\dagger f_P(\cdot;\ z_2, y))$。根据命题 4.15，我们有

$$\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo,Res}}(f, \mathbf{s}) = \mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big},0}_{\mathrm{Geo,Res}}(f, \mathbf{s}) + \mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big},1}_{\mathrm{Geo,Res}}(f, \mathbf{s}), \tag{7.24}$$

其中 $\mathcal{F}_{1,\ 0}J^{\mathrm{Big}}$, 1 Geo, Res($f$,s) 等于

$$\frac{1}{n(s_1+s_2)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)} f(nu(\mathbf{x})\iota(y))\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}dnd\mathbf{x}dy,$$

并且 $\mathcal{F}_{1,\ 0}J^{\mathrm{Big}}$, 0 Geo, Res($f$,s) 等于

$$-\frac{1}{n(s_1+s_2+1)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)} f(n\iota(y))\int_{[\overline{G'}]}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}dndy.$$

引理 7.7。 沿用前述记号。 n

$$J^{\mathrm{Reg},0}_{\mathrm{Geo,Small,Res}}(f, \boldsymbol{s}) = \mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},0}_{\mathrm{Geo,Res}}(f, \boldsymbol{s}) = \mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big},0}_{\mathrm{Geo,Res}}(f, \boldsymbol{s})$$

在区域 $\mathrm{Re}(s_1 + s_2) > -1$. 内全纯

7.2.5. J^{Reg} Eis,sing(f,s) 的亚纯部分。用 $\mathcal{G}_{\chi,\mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 表示 $\mathcal{G}_{\chi}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 的亚纯部分。对定理 7.1 中定义的艾森斯坦级数 $E_P^{\dagger}(x,s_1+s_2;\widehat{f}_P,y)$ 应用泊松求和，类似于 §7.2.3 中的计算，我们有

$$\mathcal{G}_{\chi,\mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')=\mathcal{G}^1_{\chi,\mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')+\mathcal{G}^0_{\chi,\mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2'), \tag{7.25}$$

其中，$\mathcal{G}^1_{\chi,\ \mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 定义为

$$-\frac{1}{n(s_1+s_2-1)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}f(u(\mathbf{x})\iota(y))\int_{[G']}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}d\mathbf{x}dy,$$

且 $\mathcal{G}^0_{\chi,\ \mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 定义为

$$\frac{1}{n(s_1+s_2)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}f(u(\mathbf{x})n\iota(y))\int_{[G']}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}dnd\mathbf{x}dy.$$

~设 $\mathcal{G}_{\chi,\ \mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 为 $\mathcal{G}_{\chi}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 的亚纯部分。则

$$\widetilde{\mathcal{G}}_{\chi,\mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')=\widetilde{\mathcal{G}}^1_{\chi,\mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')+\widetilde{\mathcal{G}}^0_{\chi,\mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2'), \tag{7.26}$$

其中，$\widetilde{\mathcal{G}}^1_{\chi,\ \mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 定义为

$$\frac{1}{n(s_1+s_2-1)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}f(u(\mathbf{x})\iota(y))\int_{[G']}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}d\mathbf{x}dy,$$

且 $\widetilde{\mathcal{G}}^0_{\chi,\ \mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 定义为

$$-\frac{1}{n(s_1+s_2)}\int_{G'(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F^n}\int_{N_P(\mathbb{A}_F)}f(nu(\mathbf{x})\iota(y))\int_{[G']}\phi_1'(x)\overline{\phi_2'(xy)}dx|\det y|^{s_2}dnd\mathbf{x}dy.$$

由于尖点数据 (χ,M_Q) 同构于 $\{(\chi',M_P)\}$，其中 χ' 与 $\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_F)}_{P(\mathbb{A}_F)}\widetilde{\pi}'\otimes\omega\omega'^{-1}$. 相关。于是，由 §6.3 中的（6.15），函数 J^{Reg} Eis,sing$(f,\mathrm{s})+\mathcal{G}_{\chi}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ 在 $-1/4\le\mathrm{Re}(s_1)\le 1/2$ 时全纯，并且

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Eis,sing}}(f,\mathbf{s})+\mathcal{G}_{\chi}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')-\widetilde{\mathcal{G}}_{\chi}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$$

在区域 $-1/4\le\mathrm{Re}(s_1)<1/2$，且 $-1/4\le\mathrm{Re}(s_2)<1/2$.因此，由（7.25）和（7.26），得到

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Eis,sing}}(f,\mathbf{s})=J^{\mathrm{Reg},0}_{\mathrm{Eis,sing}}(f,\mathbf{s})+J^{\mathrm{Reg},1}_{\mathrm{Eis,sing}}(f,\mathbf{s})+J^{\mathrm{Reg,hol}}_{\mathrm{Eis,sing}}(f,\mathbf{s}), \tag{7.27}$$

其中 $J^{\mathrm{Reg},1}$ Eis,sing$(f,\mathrm{s})=-\mathcal{G}^1_{\chi}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$ $J^{\mathrm{Reg},0}$ Eis,sing$(f,\mathrm{s})=-\mathcal{G}^0_{\chi}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')+\widetilde{\mathcal{G}}^0_{\chi}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2')$，且 $J^{\mathrm{Reg},\mathrm{hol}}$ Eis,sing(f,s) 在区域 $\mathcal{R}$. 内全纯

引理 7.8. 沿用前面的记号。令 $s\in\mathcal{R}$. 那么

$$J^{\mathrm{Reg},1}_{\mathrm{Eis,sing}}(f,\mathbf{s})=J^{\mathrm{Big},1}_{\mathrm{Geo},\gamma(0),\mathrm{Res}}(f,\boldsymbol{s})=\widetilde{\mathcal{G}}^1_{\chi,\mathrm{Res}}(s_1,s_2,\phi_1',\phi_2'),$$
$$J^{\mathrm{Reg},0}_{\mathrm{Eis,sing}}(f,\mathbf{s})=-\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big},1}_{\mathrm{Geo}}(f,\boldsymbol{s})-\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big},1}_{\mathrm{Geo}}(f,\boldsymbol{s}).$$

证明。 引理 7.8 可由以下计算得出：§7.2.1、§7.2.3、§7.2.4以及 §7.2.5。□

7.2.6. 命题 7.5的证明。 在下面的证明中，我们沿用前面各小节 §7.2.1–7.2.5中的记号。

证明。注意，当 $\mathrm{s}\in\mathcal{R}$, $\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}$,0 Geo,Res$(f,\mathrm{s})$（参见 §7.2.1）、$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}$,0 Geo,Res$(f,\mathrm{s})$（参见 §7.2.3）以及 $\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}$,0 Geo,Res$(f,\mathrm{s})$（参见 §7.2.4）时，它们都是全纯的。因此，由分解 (7.19)、(7.21)、(7.23)、(7.24)、(7.27) 以及引理 7.6、7.7 和 7.8 可得命题 7.5。□

8. 亚纯相对迹公式

设 π_1', π_2' 是 F. 上一般线性群 n 的酉尖点表示。设 $\phi_i' \in \pi_i', i = 1, 2$。令 $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$，其中 $\mathrm{Re}(s_1) > 1/2$，$\mathrm{Re}(s_2) > 1/2$.。令 $f \in \mathcal{F}_S(\mathfrak{N}, \omega^{-1})$（参见 §2.6）。考虑

$$J^{\mathrm{Reg}}(f, \mathbf{s}) := \iint J_{\mathrm{Kuz}}\left(\begin{pmatrix} x & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & \\ & 1 \end{pmatrix}\right) \phi_1'(x)\overline{\phi_2'(y)} |\det x|^{s_1} |\det y|^{s_2} dx dy,$$

其中 x 和 y 遍历 $N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)$，且对于 g_1， $g_2 \in G(\mathbb{A}_F)$，

$$J_{\mathrm{Kuz}}(g_1, g_2) := \int_{[N]} \int_{[N]} \mathrm{K}(u_1 g_2, u_2 g_2) \theta(u_1) \overline{\theta}(u_2) du_1 du_2.$$

这里， θ 是 $[N]$ 的一个固定非分歧一般特征，而 $\mathrm{K} = \mathrm{K}^f$ 是与 f. 相关联的核函数

8.1. 谱侧 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Spec}}(f, \mathbf{s})$。记 $\widehat{G(\mathbb{A}_F)}$ 为在 $L^2([G], \omega)$ 的谱分解中出现的不可约酉自守表示的同构类集合。令 $G(\mathbb{A}_F)^{\mathrm{gen}}(\mathfrak{N})$ 表示 $G(\mathbb{A}_F)$ 中层级为 $\mathfrak{N} \subseteq \mathcal{O}_F$ 的一般表示所构成的子类。在 $G(\mathbb{A}_F)^{\mathrm{gen}}$ 上固定一个自守 Plancherel 测度 $d\mu_{\mathrm{aut}}$，使之与 $G(\mathbb{A}_F)$ 上的不变概率测度相容。

对于 $\pi \in \widehat{G(\mathbb{A}_F)}_{\mathrm{gen}}(\mathfrak{N})$，存在一个标准抛物子群 Q，属于 G，使得 π 对应于尖点数据 $\chi = \{(M_Q, \sigma)\}$（参见 §6.2），其中 M_Q 是 Q. 的 Levi 分量。定义

$$\mathfrak{B}_\pi = \left\{\phi \in \mathfrak{B}_{Q,\chi} : \phi \text{ is right-} K_\infty \otimes K_0(\mathfrak{N})\text{-invariant}\right\}.$$

根据 Weyl 定律， $\mathfrak{B}_\pi$ 是一个有限集。

对 K 作谱展开并交换积分后，我们得到 $J^{\mathrm{Reg}}(f, \mathbf{s})$的谱侧：

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Spec}}(f, \mathbf{s}) = \int_{\widehat{G(\mathbb{A}_F)}_{\mathrm{gen}}(\mathfrak{N})} \sum_{\phi \in \mathfrak{B}_\pi} \Psi(s_1, \pi(f) W_\phi, W'_{\phi_1'}) \Psi(s_2, \widetilde{W}_\phi, \widetilde{W}'_{\phi_2'}) d\mu_\pi, \tag{8.1}$$

其中 $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ 满足 $\mathrm{Re}(s_1)$、$\mathrm{Re}(s_2) \gg 1$，且 $\Psi(s, W_\phi, W'_{\phi_i'})$ 是 Whittaker 形式中的 Rankin-Selberg 周期积分：

$$\Psi(s, W_\phi, W'_{\phi_i'}) = \int_{N'(\mathbb{A}_F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)} W_\phi\left(\begin{pmatrix} x & \\ & 1 \end{pmatrix}\right) W'_{\phi_i'}(x) |\det x|^s dx, \quad \mathrm{Re}(s) \gg 1.$$

这里， $W_\phi(g) := \int_{[N]} \phi(ng)\overline{\theta}(n) dn$ 是与 ϕ. 相关联的 Whittaker 函数

在 §6 和 §7 中，我们证明 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Spec}}(f, \mathbf{s})$ 在锥域$\mathrm{Re}(s_1) > 1/2$，$\mathrm{Re}(s_2) > 1/2$，绝对收敛，并且它可以亚纯延拓至$\mathbf{s} \in \mathcal{R}$（参见 §（1.10）§1.5）。特别地，§6.3 中详细描述了该延拓，并在 §7.1中分析了奇异部分。

8.2. 几何侧 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Geo}}(f, \mathbf{s})$。将$\mathrm{K}(x, y)$的几何展开代入 $J^{\mathrm{Reg}}(f, \mathbf{s})$后，我们便得到其几何侧 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Geo}}(f, \mathbf{s})$。根据 §3–§5中的结果，我们得到如下分解

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo}}(f, \mathbf{s}) = J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small}}(f, \mathbf{s}) + {}^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f, \mathbf{s}) - J^{\mathrm{Reg},I}_{\mathrm{Geo,Big}}(f, \mathbf{s}) + J^{\mathrm{Reg},II}_{\mathrm{Geo,Big}}(f, \mathbf{s}).$$

参见其中的记号和定义。

根据命题 3.1、4.4、4.15、5.3，定理 4.14、4.16、5.6 和 6.6，几何侧 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\text{几何}}(f, \mathbf{s})$ 在 $\mathrm{Re}(s_1) > 1/2$、$\mathrm{Re}(s_2) > 1/2$ 时绝对收敛，并且可亚纯延拓至 $\mathcal{R}$.

8.3. **相对迹公式：$\mathbf{s} \in \mathcal{R}$。** 结合第 §3–§7节，相对迹公式可概述如下。

定理 D。 沿用前述记号。设 $f \in \mathcal{F}_S(\mathfrak{N}, \omega^{-1})$. 则

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Spec}}(f, \mathbf{s}) = J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo}}(f, \boldsymbol{s}), \tag{8.2}$$

它们在以下区域内绝对收敛：$\mathrm{Re}(s_1), \mathrm{Re}(s_2) \gg 1$. 此外，(8.2) 可亚纯延拓至$\mathrm{Re}(s_1)$, $\mathrm{Re}(s_2) > -1/(n+1)$. 下面给出上述积分的描述。

- 积分 $J_{\mathrm{Reg\ Geo,Small}}(f, \boldsymbol{s})$ 是一个 ***Rankin-Selberg*** 卷积，在$\mathrm{Re}(s_1) + \mathrm{Re}(s_2) > 0$, 区域内绝对收敛，并表示 $L(1 + s_1 + s_2, \pi_1' \times \widetilde{\pi}_2')$。
- 积分 $J_{\mathrm{Reg\ Geo,Dual}}(f, \boldsymbol{s})$ 是一个 ***Rankin-Selberg*** 卷积，在$\mathrm{Re}(s_1) + \mathrm{Re}(s_2) > 1$, 区域内绝对收敛，并表示 $L(s_1 + s_2, \pi_1' \times \widetilde{\pi}_2')$。
- 积分 $J_{\mathrm{Reg}\ I\ \mathrm{Geo,Big}}(f, \boldsymbol{s})$ 在 $\mathrm{Re}(s_1), \mathrm{Re}(s_2) \gg 1$, 中绝对收敛，并可亚纯延拓至 $\mathrm{Re}(s_1), \mathrm{Re}(s_2) > -1/(n+1)$。
- 积分 $J_{\mathrm{Reg}\ II\ \mathrm{Geo,Big}}(f, \boldsymbol{s})$ 对所有 $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^2$.均绝对收敛
- $J_{\mathrm{Reg\ Geo}}(f, \boldsymbol{s}; \phi_1', \phi_2')$ 和 $J_{\mathrm{Reg\ Spec}}(f, \mathbf{s}; \phi_1', \phi_2')$ 在 $s_1 + s_2 = \delta$, $\delta \in \{-1, 0, 1\}$, 上至多有简单极点，并且在其他地方全纯。此外，

$$\operatorname*{Res}_{s_1+s_2=\delta} J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Spec}}(f, \mathbf{s}) = \operatorname*{Res}_{s_1+s_2=\delta} J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo}}(f, \boldsymbol{s}), \quad \delta \in \{-1, 0, 1\}.$$

  特别地，（8.2）两侧的奇异部分相互抵消。详见第 *7.2* 节。

- 几何侧在层级方面具有稳定性，其含义是 [MR12]和 [FW09]。粗略地说，当层级足够大时，正则轨道积分恒等于零。详见第*5.6* 节*5.4*。

注记 8.2. 注意，(8.2)两边都依赖于尖点形式ϕ_1' 和 ϕ_2'. 。为简化记号，我们将 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Spec}}(f, \mathbf{s}; \phi_1', \phi_2')$（分别为 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Geo}}(f, \mathbf{s}; \phi_1', \phi_2')$）记作 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Spec}}(f, \mathbf{s})$（分别记作 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Geo}}(f, \mathbf{s})$ 。

8.4. **相对迹公式：$\mathbf{s} \in \mathcal{R}^*$.** 在许多关键应用中，我们希望在定理 D 中取 $\mathbf{s} = (0,0)$ 。回顾（参见定理 6.6）

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Spec}}(f, \mathbf{s}) = J_0(f, \mathbf{s}) + J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Eis,reg}}(f, \mathbf{s}) + J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Eis,semi\text{-}sing}}(f, \mathbf{s}) + J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Eis,sing}}(f, \mathbf{s}),$$

当 $\mathbf{s}$ 接近 (0,0) 时，它已不再具有（8.1）的形式。

本节将对（8.2）作一修正，使其在 $\mathbf{s}$ 接近 (0,0) 时更便于处理。 定义

$$\mathcal{R}^* := \big\{\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 : \ |\mathrm{Re}(s_1)| < 1/(n+1), \ |\mathrm{Re}(s_2)| < 1/(n+1)\big\}.$$

对于 $\mathbf{s} \in \mathcal{R}^*$，令

$$J^{\mathrm{Reg},\heartsuit}_{\mathrm{Spec}}(f, \mathbf{s}) := J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Spec}}(f, \mathbf{s}) + \mathcal{G}_\chi(\mathbf{s}, \phi_1', \phi_2') - \widetilde{\mathcal{G}}_\chi(\mathbf{s}, \phi_1', \phi_2'),$$

其中 $\mathcal{G}_\chi(\mathbf{s}\ \phi_1', \phi_2')$ 和 $\mathcal{G}_\chi(\mathbf{s}\ \phi_1', \phi_2')$ 分别由（6.13）和（6.14）定义。根据 §3–§5 中的结果，我们得到如下分解

$$J^{\mathrm{Reg},\heartsuit}_{\mathrm{Geo}}(f, \mathbf{s}) = J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small}}(f, \mathbf{s}) + {}^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f, \mathbf{s}) - J^{\mathrm{Reg},I,\heartsuit}_{\mathrm{Geo,Big}}(f, \mathbf{s}) + J^{\mathrm{Reg},II}_{\mathrm{Geo,Big}}(f, \mathbf{s}),$$

其中积分 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{,I,\heartsuit\ \mathrm{Geo,Big}}(f, \mathbf{s})$ 定义为

$$\mathcal{F}_{0,1} J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo}}(f, \mathbf{s}) + \mathcal{F}_{1,0} J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo}}(f, \mathbf{s}) - \mathcal{G}_\chi(\mathbf{s}, \phi_1', \phi_2') + \widetilde{\mathcal{G}}_\chi(\mathbf{s}, \phi_1', \phi_2').$$

注意，$\mathcal{G}_\chi(\mathbf{s}\phi_1', \phi_2')$ 和 $\widetilde{\mathcal{G}}_\chi(\mathbf{s}\phi_1', \phi_2')$ 可以写成轨道积分（参见定理 7.1），无论它们最初是否出现在谱侧。

定理 E。 设记号同上。令$\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathcal{R}^*$. 则

$$J^{\mathrm{Reg},\heartsuit}_{\mathrm{Spec}}(f, \boldsymbol{s}) = J^{\mathrm{Reg},\heartsuit}_{\mathrm{Geo}}(f, \boldsymbol{s}), \tag{8.3}$$

作为 $\mathcal{R}^*$. 中全纯函数的等式。此外,

$$J^{\mathrm{Reg},\heartsuit}_{\mathrm{Spec}}(f, \boldsymbol{s}) = \int_{\widehat{G(\mathbb{A}_F)}_{\mathrm{gen}}(\mathfrak{N})} \sum_{\phi \in \mathfrak{B}_\pi} \Psi(s_1, \pi(f)W_\phi, W'_{\phi'_1}) \Psi(s_2, \widetilde{W}_\phi, \widetilde{W}'_{\phi'_2}) d\mu_\pi, \tag{8.4}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$, 它绝对收敛。这里我们将 $\Psi(s_1, \pi(f)W_\phi, W'_{\phi'_1}) \Psi(s_2, W_\phi, W'_{\phi'_2})$ 与其亚纯延拓等同起来。

当 $\phi'_1 = \phi'_2$ 且 f 具有如下形式 $h * h^*$ 其中某个函数为 h, $J^{\mathrm{Reg},\heartsuit}_{\mathrm{Spec}}(f, \mathbf{0})$ 是 非负 项之和，因此可以舍弃其中一些项（例如连续谱），从而对其余项导出上界。我们将在下文 §9.1 中利用这一事实。

9. 相对迹公式的应用

9.1. **Rankin-Selberg L-函数的矩**。现在我们应用定理 D 和E 来计算数域上 Rankin-Selberg L-值的二阶矩，其中 一般线性群$(n+1)\times$一般线性群(n)。

9.1.1. 局部与整体数据的选取。 假设$\Sigma_{F,\infty}$ 由 r_1 个实位和 r_2 个复位组成。

设 $\pi' \in \mathcal{A}_0([G'], \omega')$处处非分歧。设 $\phi' \in \pi'$ 为一个新向量，其对应的 Whittaker 函数 $W' = \otimes_v W'_v$满足 $W'(I_n) = 1$. 取$\pi'_1 = \pi'_2 = \pi'$, 且 $\phi'_1 = \phi'_2 = \phi'$.

设 $S = \Sigma_{F,\infty}$. 取 $f = f_\infty \otimes f_{\mathrm{fin}} \in \mathcal{F}_S(\mathfrak{N}, \omega^{-1})$ （参见 §2.6）。假设 f_∞ 是双-K_∞-不变的。记 $\mathcal{H}_{f_\infty}$ 为 f_∞的 Harish-Chandra 变换，即对于不可约可容许的非分歧表示 π_∞ （属于 $G(F_\infty)$),

$$\int_{G'(F_\infty)} f_\infty(g_\infty) W_\infty(g'_\infty g_\infty) = \mathcal{H}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}) W_\infty(g'_\infty) \tag{9.1}$$

对于所有 $g'_\infty \in G(F_\infty)$，其中 W_∞ 是 π_∞的 Whittaker 模型中的球向量，且 $\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}$ 是 π_∞.的 Langlands 参数

由于 f_∞ 是双 K_∞ 不变的，且 W'_∞ 是球型的，因此

$$\int_{G'(F_\infty)} f_\infty \left(\begin{pmatrix} y_\infty & \\ & 1 \end{pmatrix} \right) W'_\infty(x_\infty y_\infty) = \mathcal{H}^\heartsuit_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi'_\infty}) W'_\infty(x_\infty) \tag{9.2}$$

对所有 $x_\infty \in G'(F_\infty)$，其中 $\boldsymbol{\lambda}'_{\pi_\infty}$ 是 π'_∞. 的朗兰兹参数

对于 $\phi \in \mathfrak{B}_\pi$, 令 $W_\phi = \otimes_v W_{\phi,v}$ 为相应的惠特克向量。假设 $\pi = \pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_m$，其中每个 π_j 都是尖点的， $1 \le j \le m$. 令

$$\mathbf{L}(\pi) := \prod_{j=1}^m \Lambda(1, \pi_j, \mathrm{Ad}) \cdot \prod_{1 \le j_1 < j_2 \le m} |\Lambda(1, \pi_{j_1} \times \widetilde{\pi}_{j_2})|^2. \tag{9.3}$$

那么根据 Rankin-Selberg 理论（参见 [JPSS83]）和朗兰兹–沙希迪方法,

$$\langle \phi, \phi \rangle = (n+1) \alpha_{\phi,\mathfrak{N}} |W(I_{n+1})|^2 \cdot \mathbf{L}(\pi), \tag{9.4}$$

其中我们用 $\mathrm{L}_v(\pi_v)$ 表示 $\mathrm{L}(\pi)$ 的第 v 个分量，并且

$$\alpha_{\phi,\mathfrak{N}} := \prod_{v|\mathfrak{N}} \frac{\zeta_v(n+1)}{\mathbf{L}_v(\pi_v)} \int_{N'(F_v)\backslash G'(F_v)} \left| W_{\phi,v}(\iota(x_v)) \right|^2 dx_v. \tag{9.5}$$

特别是， $\mathbf{L}(\pi) = \Lambda(1, \pi,$ 伴随$)$ 如果 π 是尖点的。类似于 (9.4)， 我们有

$$\Psi(0, W_\phi, W') = \beta_{\phi,\mathfrak{N}} W(I_{n+1}) W'(I_n) \cdot \Lambda(1/2, \pi \times \pi'), \tag{9.6}$$

其中 $\beta_{\phi,\mathfrak{N}}$ 定义为

$$\lim_{s\to 0}\prod_{v|\mathfrak{N}}\frac{1}{L_v(1/2+s,\pi_v\times\pi_v')}\int_{N'(F_v)\backslash G'(F_v)}W_{\phi,v}(\iota(x_v))W'(x_v)|\det x_v|_v^s dx_v.$$

定理 9.1。沿用上述记号，则

$$\begin{aligned}&\int_{\widehat{G(\mathbb{A}_F)}_{\mathrm{gen}}(\mathfrak{N})}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_\pi}\frac{|\beta_{\phi,\mathfrak{N}}|^2}{\alpha_{\phi,\mathfrak{N}}}\cdot\frac{|\Lambda(1/2,\pi\times\pi')|^2}{\mathbf{L}(\pi)}\cdot\mathcal{H}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty})d\mu_\pi\\ =&c_{F,f_\infty}\cdot\mathcal{H}_{f_\infty}^{\heartsuit}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi'_\infty})\cdot\Lambda(1,\pi',\mathrm{Ad})|\mathfrak{N}|^n\log|\mathfrak{N}|+O(|\mathfrak{N}|^n),\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{L}(\pi)$ 由 (9.3) 定义，$\mathcal{H}_{f_\infty}^{\heartsuit}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty})$ (相应地，$\mathcal{H}_{f_\infty}^{\heartsuit}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi'_\infty})$由 (9.1)（相应地，(9.2)）定义，

$$c_{F,f_\infty}=n(n+1)2^{r_2(n-1)}\pi^{-r_2}|\mathfrak{D}_F|^{\frac{n}{2}}\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_F(s),$$

$O(|\mathfrak{N}|^n)$ 中的隐含常数取决于 F，π' 和 f_∞.

注记 9.2。利用 c-函数 f_∞，可通过其 Harish-Chandra 变换显式写出 $\mathcal{H}_{f_\infty}$ (参见 [Wal92])。因此，可以推导出 $\mathcal{H}_{f_\infty}^{\heartsuit}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi'_\infty})$与 $\mathcal{H}_{f_\infty}^{\heartsuit}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty})$之间的显式关系。

定义 9.3。令 $\mathcal{A}_0(\mathfrak{N},\omega)$ 为 $\mathcal{A}_0([G],\omega)$ 中酉尖点表示的同构类集合，这些表示在 $K_0(\mathfrak{N})$ 下右不变。

推论 9.4. 沿用上述记号。则

$$\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{A}_0(\mathfrak{N},\omega)\\ \boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}\in\mathcal{D}}}\frac{|L(1,\pi\times\pi')|^2}{L(1,\pi,\mathrm{Ad})}\ll|\mathfrak{N}|^n\log|\mathfrak{N}|,$$

其中 $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}^{n+1}$ 是一个紧子集，$\mathcal{A}_0(\mathfrak{N},\omega)$ 由定义 9.3给出，且隐含常数依赖于 $\mathcal{D}$，π' 和 f_∞.

9.1.2. 几何侧的渐近行为。令 $\mathbf{s}=(s,0)$。定义

$$\begin{aligned}J_{\mathrm{Geo,Small}}^{\mathrm{Reg,hol}}(f,\mathbf{s})&:=J_{\mathrm{Geo,Small}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s})-s^{-1}\operatorname*{Res}_{s=0}J_{\mathrm{Geo,Small}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s}),\\ J_{\mathrm{Geo,Dual}}^{\mathrm{Reg,hol}}(f,\mathbf{s})&:=J_{\mathrm{Geo,Dual}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s})-s^{-1}\operatorname*{Res}_{s=0}J_{\mathrm{Geo,Dual}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s}).\end{aligned}$$

于是 $J^{\mathrm{Reg},\ \text{hol 几何侧},\ \text{小}}(f,\mathbf{s})$ 和 $J^{\mathrm{Reg},\ \text{hol 几何侧},\ \text{对偶}}(f,\mathbf{s})$ 在 $s=0$. 附近全纯

引理 9.5. 沿用上述记号。则 $J^{\mathrm{Reg},\ \text{hol 几何侧},\ \text{小}}(f,\mathbf{0})=O(|\mathfrak{N}|^n)$，其中隐含常数依赖于 F，π' 和 f_∞.

证明。由命题3.3 可得

$$J_{\mathrm{Geo,Small}}^{\mathrm{Reg}}(f,\mathbf{s})=\frac{|\mathfrak{D}_F|^{n(s+\frac{1}{2})}L(s+1,\pi'\times\widetilde{\pi}')}{\mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N}))}\cdot\mathcal{I}_\infty(f_\infty,s),$$

其中 $|\mathfrak{D}_F|:=N_F(\mathfrak{D}_F)$，且

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\infty(f_\infty,s):=\int_{N'(F_\infty)\backslash G'(F_\infty)}\int_{G'(F_\infty)}\int_{F_\infty^n}&f_\infty\left(\begin{pmatrix}y_\infty & u_\infty\\ & 1\end{pmatrix}\right)\theta_\infty(\eta x_\infty u_\infty)\\ &W'_\infty(x_\infty)\overline{W'_\infty(x_\infty y_\infty)}|\det x_\infty|_\infty^{1+s}du_\infty dy_\infty dx_\infty.\end{aligned}$$

记 $L(s+1,\pi'\times\widetilde{\pi}')=a_{-1}s^{-1}+a_0+O(s)$，以及 $|\mathfrak{D}_F|^{ns+\frac{n}{2}}\mathcal{I}_\infty(f_\infty,s)=b_0+b_1s+O(s^2)$。则

$$J_{\mathrm{Geo,Small}}^{\mathrm{Reg,hol}}(f,\mathbf{0})=\frac{a_{-1}b_1+a_0b_0}{\mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N}))}\ll|\mathfrak{N}|^n,$$

其中隐含常数取决于 F、π' 和 f_∞. □

引理 9.6. 沿用上述记号，则

$$J^{\mathrm{Reg,hol}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\boldsymbol{0}) = c'_{F,f_\infty}\mathcal{H}^{\heartsuit}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi'_\infty})\Lambda(1,\pi',\mathrm{Ad})|\mathfrak{N}|^n\log|\mathfrak{N}| + O(|\mathfrak{N}|^n), \tag{9.7}$$

其中 $\mathcal{H}^{\heartsuit}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi'_\infty})$ 由(9.2)定义，且

$$c'_{F,f_\infty} = n2^{r_2(n-1)}\pi^{-r_2}|\mathfrak{D}_F|^{\frac{n}{2}}\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_F(s),$$

且 $O(|\mathfrak{N}|^n)$ 中的隐含常数取决于 F、π' 和 f_∞.

证明。设 $s<0$. 由命题 5.3 以及艾森斯坦级数的函数方程 $E_{\mathrm{Dual}}(x,\ s;\ f^\dagger(\cdot,\ z_2,\ y))$ 由（5.5 定义，我们有

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\mathbf{s}) = \prod_{v\in\Sigma_F}\mathcal{I}^{\heartsuit}_v(f_v,s)$$

其中

$$\mathcal{I}^{\heartsuit}_v(f_v,s) := \int_{N'(F_v)\backslash G'(F_v)}\int_{G'(F_v)}\int_{F_v^n} f_v\left(\begin{pmatrix} I_n & \\ c_v & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_v & \\ & 1\end{pmatrix}\right)\theta_v(\eta x_v\ {}^{\mathrm{t}}c_v)$$
$$\overline{W'_v(x_v)}W'_v(x_v\ {}^{\mathrm{t}}y_v^{-1})|\det x_v|_v^{1-s}dc_v dy_v dx_v.$$

类似于命题5.5，我们有

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\mathbf{s}) = \frac{|\mathfrak{D}_F|^{n(-s+\frac{1}{2})}L(1-s,\pi'\times\widetilde{\pi}')}{\mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N}))|\mathfrak{N}|^{ns}}\cdot\mathcal{I}^{\heartsuit}_\infty(f_\infty,s),$$

其中 $\mathcal{I}^{\heartsuit}_\infty(f_\infty,s) = \prod_{v\in\Sigma_{F,\infty}}\mathcal{I}^{\heartsuit}_v(f_\infty,s)$，即，

$$\mathcal{I}^{\heartsuit}_\infty(f_\infty,s) = \int_{N'(F_\infty)\backslash G'(F_\infty)}\int_{G'(F_\infty)}\int_{F_\infty^n} f_\infty\left(\begin{pmatrix} I_n & \\ c_\infty & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_\infty & \\ & 1\end{pmatrix}\right)\theta_\infty(\eta x_\infty\ {}^{\mathrm{t}}c_\infty)$$
$$\overline{W'_\infty(x_\infty)}W'_\infty(x_\infty\ {}^{\mathrm{t}}y_\infty^{-1})|\det x_\infty|_\infty^{1-s}du_\infty dy_\infty dx_\infty.$$

记 $L(1-s,\pi'\times\widetilde{\pi}') = -a'_{-1}s^{-1}+a'_0+O(s)$，以及 $|\mathfrak{D}_F|^{-ns+\frac{n}{2}}|\mathfrak{N}|^{-ns}\mathcal{I}^{\heartsuit}_\infty(f_\infty,s)$ $=b'_0 - b'_1 s + O(s^2)$。则

$$J^{\mathrm{Reg,hol}}_{\mathrm{Geo,Small}}(f,\mathbf{0}) = \frac{a'_{-1}b'_1 + a'_0 b'_0}{\mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N}))} = \frac{a'_{-1}b'_1}{\mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N}))} + O(|\mathfrak{N}|^n),$$

其中隐含常数依赖于 F、π' 和 f_∞. 。根据定义，

$$b'_1 = |\mathfrak{D}_F|^{\frac{n}{2}}\int_{N'(F_\infty)\backslash G'(F_\infty)}\int_{G'(F_\infty)}\int_{F_\infty^n} f_\infty\left(\begin{pmatrix} I_n & \\ c_\infty & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_\infty & \\ & 1\end{pmatrix}\right)\theta_\infty(\eta x_\infty\ {}^{\mathrm{t}}c_\infty)$$
$$\overline{W'_\infty(x_\infty)}W'_\infty(x_\infty\ {}^{\mathrm{t}}y_\infty^{-1})|\det x_\infty|_\infty\log(|\det x_\infty|_\infty|\mathfrak{D}_F|^n|\mathfrak{N}|^n)dc_\infty dy_\infty dx_\infty.$$

因此 $b'_1 = b''_1 + O(|\mathfrak{N}|^n)$，其中

$$b''_1 = |\mathfrak{D}_F|^{\frac{n}{2}}\int_{N'(F_\infty)\backslash G'(F_\infty)}\int_{G'(F_\infty)}\int_{F_\infty^n} f_\infty\left(\begin{pmatrix} I_n & \\ c_\infty & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_\infty & \\ & 1\end{pmatrix}\right)\theta_\infty(\eta x_\infty\ {}^{\mathrm{t}}c_\infty)$$
$$\overline{W'_\infty(x_\infty)}W'_\infty(x_\infty\ {}^{\mathrm{t}}y_\infty^{-1})|\det x_\infty|_\infty\log(|\mathfrak{N}|^n)dc_\infty dy_\infty dx_\infty.$$

设 $H = \mathrm{diag}(\text{一般线性群}(n-1),1)$ 且 $N_H = N'\cap H$. 。由岩泽分解，

$$b''_1 = C_{n,F}\int_{G'(F_\infty)}\int_{K'_\infty}\int_{Z'(F_\infty)}\int_{F_\infty^n} f_\infty\left(\begin{pmatrix} I_n & \\ c_\infty & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_\infty & \\ & 1\end{pmatrix}\right)\theta_\infty(\eta z_\infty k_\infty\ {}^{\mathrm{t}}c_\infty)$$
$$\int_{N_H(F_\infty)\backslash H(F_\infty)}\overline{W'_\infty(h_\infty k_\infty)}W'_\infty(h_\infty k_\infty\ {}^{\mathrm{t}}y_\infty^{-1})dh_\infty dc_\infty|\det z_\infty|_\infty d^\times z_\infty dy_\infty,$$

其中 $C_{n,F} := n|\mathfrak{D}_F|^{\frac{n}{2}}\log|\mathfrak{N}|$. 根据 Kirillov模型理论，我们有

$$\int\overline{W'_\infty(h_\infty k_\infty)}W'_\infty(h_\infty k_\infty\ {}^{\mathrm{t}}y_\infty^{-1})dh_\infty = \int\overline{W'_\infty(h_\infty)}W'_\infty(h_\infty\ {}^{\mathrm{t}}y_\infty^{-1})dh_\infty, \tag{9.8}$$

其中 h_∞ 遍历 $N_H(F_\infty)\backslash H(F_\infty)$。

令 $v \mid \infty$. 。对于 $y_v \in G'(F_v)$，定义 $\mathcal{J}_v(y_v)$ 如下：

$$\int_{K_v'}\int_{Z'(F_v)}\int_{F_v^n} f_v\left(\begin{pmatrix} I_n & \\ c_v & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_v & \\ & 1\end{pmatrix}\right)\theta_v(\eta z_v k_v\, {}^{\mathrm{t}}c_v)dc_v|\det z_v|_v d^\times z_v dk_v.$$

若 v 为实数，则 $v \mid \infty$, $K_v' = \mathrm{O}(n)$；若 v 为复数，则 $K_v' = \mathrm{U}(n)$。利用 K_v' 的哈尔测度分解为球面上的测度，可得

$$\mathcal{J}_v(y_v) = d_v\int_{\mathbb{S}_v}\int_{F_v^\times}\int_{F_v^n} f_v\left(\begin{pmatrix} I_n & \\ c_v & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_v & \\ & 1\end{pmatrix}\right)\theta_v(\eta z_v k_v\, {}^{\mathrm{t}}c_v)dc_v|z_v|_v^n d^\times z_v dk_v,$$

其中 $\mathbb{S}_v = \mathbb{S}^{n-1}$ 为 $(n-1)$-球面（若 v 为实数）；若 v 为复数，则为 $\mathbb{S}_v = \mathbb{S}^{2n-1}$，并且

$$d_v = \begin{cases} \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})^{-1} = \frac{\pi^{-n/2}\Gamma(n/2)}{2} = \frac{\Gamma_v(n)}{2}, & \text{if } v \text{ is real},\\ \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{2n-1})^{-1} = \frac{\pi^{-n}\Gamma(n)}{2} = \frac{2^n\Gamma_v(n)}{4}, & \text{if } v \text{ is complex}.\end{cases} \tag{9.9}$$

利用傅里叶反演和极坐标，可得

$$\mathcal{J}_v(y_v) = 2^{([F_v:\mathbb{R}]-1)(n-1)}\Gamma_v(n) f_v\left(\begin{pmatrix} y_v & \\ & 1\end{pmatrix}\right). \tag{9.10}$$

因此， b_1'' 等于

$$n2^{r_2(n-1)}|\mathfrak{D}_F|^{\frac{n}{2}}\log|\mathfrak{N}|\Lambda_{F,\infty}(n)\int_{G'(F_\infty)} f_v\left(\begin{pmatrix} y_v & \\ & 1\end{pmatrix}\right)\overline{\langle\pi_\infty'(y_v)W_\infty', W_\infty'\rangle}dy_v,$$

其中 $\Lambda_{F,\infty} = \prod_{v\in\Sigma_{F,\infty}}\Gamma_v$ 是与数域 F. 相联系的完备戴德金 ζ 函数的阿基米德分量

结合 $\mathcal{H}_{f_\infty}^\heartsuit(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty'})$ 的定义，我们得到

$$b_1'' = n2^{r_2(n-1)}\pi|\mathfrak{D}_F|^{\frac{n}{2}}\log|\mathfrak{N}|\Lambda_{F,\infty}(n)\mathcal{H}_{f_\infty}^\heartsuit(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty'})\overline{\langle W_\infty', W_\infty'\rangle}.$$

根据 Stade 公式（参见 [Sta01] 和 [Sta02]），

$$\langle W_\infty', W_\infty'\rangle = L_\infty(1, \pi_\infty'\times\widetilde{\pi}_\infty')/\Lambda_{F,\infty}(n).$$

另一方面，我们有 $\Lambda_{F,\infty}(\mathbf{1}) = \pi^{-r_2}$，并且

$$a_{-1}' = \operatorname*{Res}_{s=1} L(s,\pi'\times\widetilde{\pi}') = L(1,\pi',\mathrm{Ad})\cdot\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_F(s).$$

因此，(9.7) 得证。 □

9.1.3. 定理 *9.1* 及推论 *9.* *4*.

定理 *9.1* 的证明。 根据 f，结合（8.4）和（9.6），我们得到

$$J_{\mathrm{Spec}}^{\mathrm{Reg},\heartsuit}(f,\mathbf{0}) = \int_{\widehat{G(\mathbb{A}_F)}_{\mathrm{gen}}(\mathfrak{N})}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_\pi}\frac{|\beta_{\phi,\mathfrak{N}}W(I_n)\cdot\Lambda(1/2,\pi\times\pi')|^2}{\langle\phi,\phi\rangle}\cdot\mathcal{H}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty})d\mu_\pi,$$

这里我们还用到了假设 $W'(I_n) = 1$.

由命题 4.4、4.15、7.5、定理 4.14、4.16、5.6以及引理 9.5 和9.6，我们得到

$$J_{\mathrm{Geo}}^{\mathrm{Reg},\heartsuit}(f,\mathbf{0}) = c'_{F,f_\infty}\mathcal{H}_{f_\infty}^\heartsuit(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty'})\Lambda(1,\pi',\mathrm{Ad})|\mathfrak{N}|^n\log|\mathfrak{N}| + O(|\mathfrak{N}|^n)$$

其中隐含常数取决于 ϕ' 和 f_∞.

因此定理 9.1 由定理 E 和（9.4）得出。 □

推论 9.4的证明。 设 $\pi \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{N}, \omega)$。 由于 W'处处非分歧，根据[JPSS81]，存在 $\phi \in \mathfrak{B}_\pi$ 使得 $\alpha_{\phi,\mathfrak{N}} = \beta_{\phi,\mathfrak{N}} = 1.$。因此定理 9.1 给出

$$\sum_{\substack{\pi \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{N},\omega) \\ \boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty} \in \mathcal{D}}} \frac{|\Lambda(1, \pi \times \pi')|^2}{\Lambda(1, \pi, \mathrm{Ad})} \ll |\mathfrak{N}|^n \log |\mathfrak{N}|.$$

注意到 $\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty} \in \mathcal{D}$，它是紧的。根据朗兰兹参数的界（参见 [KS03]），我们有 $\Lambda_\infty(1, \pi_\infty \times \pi'_\infty) \asymp 1$ 以及 $\Lambda_\infty(1, \pi_\infty, \mathrm{Ad}) \asymp 1$，其中隐含常数取决于 $\mathcal{D}$ 和 π'_∞. 因此推论 9.4 得证。 □

9.2. **同时非消失**。 现在我们将定理E 应用于 Rankin-Selberg L-函数的同时非消失问题。

9.2.1. 局部与整体数据的选取。 设 $\mathfrak{N}'_j \subseteq \mathcal{O}_F$ 是一个整理想， $j = 1,2$。假设 $\mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2 = \mathcal{O}_F$和 $\mathfrak{N}'_1\mathfrak{N}'_2 \subsetneq \mathcal{O}_F$.。 设 $\pi'_j \in \mathcal{A}_0([G'], \omega')$，其算术导子为 $\mathfrak{N}'_j$, $j = 1, 2$。则 $\pi'_1 \not\simeq \pi'_2$. 。设 $\phi'_j \in \pi'_j$ 为新形式，并作归一化使得 $W'_{\phi'_j}(I_n) = 1$, $j = 1, 2$。

对于 $v \mid \mathfrak{N}'_2$，我们定义

$$I_v(\mathfrak{N}'_2) := \left\{ g_v = (g_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in G(\mathcal{O}_{F_v}) : \ g_{i,j} \equiv 0 \mod q_v^{e_v(\mathfrak{N}'_2)}, \ i > j \right\},$$

层级为 $e_v(\mathfrak{N}'_2)$ 的伊wahori 子群。令 $I(\mathfrak{N}'_2) = \prod_v I_v(\mathfrak{N}'_2)$。

定义 9.7。 我们称 π'_1 和 π'_2 在 处 $v \in \Sigma_F$ 相连$\pi'_{1,v} \simeq \pi'_{2,v}$.

定义 9.8。 设 $\mathfrak{N} \subset \mathcal{O}_F$ 和 $v_* \in \Sigma_F$ 是一个分裂处。设 $\varepsilon > 0$. 定义

$$\mathcal{A}_0(\mathfrak{N}; \mathfrak{N}'_1, \mathfrak{N}'_2, \sigma_{v_*}, \omega, \varepsilon) = \left\{ \pi \in \mathcal{A}_0([G], \omega)^{K^\dagger} : \ \|\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}\| \le |\mathfrak{N}|^\varepsilon, \ \pi_{v_*} \simeq \sigma_{v_*} \right\},$$

其中 $K^\dagger = K_0(\mathfrak{N}\mathfrak{N}'_1\mathfrak{p}_{v_*}^{n+2}) \cap I(\mathfrak{N}'_2)$ $\pi \in \mathcal{A}_0([G], \omega)^{K^\dagger}$ 表示 π 是右-$K^\dagger$-不变的，而 $\|\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}\|$ 是将 $\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}$ 视为 $\mathbb{C}^{n+1}$. 中一点时的欧几里得范数。然后

$$\sum_{\pi \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{N}; \mathfrak{N}'_1, \mathfrak{N}'_2, \sigma_{v_*}, \omega, \varepsilon)} \sum_{\phi \in \mathfrak{B}_\pi} 1 \ll |\mathfrak{N}|^{n + (n+1)^2 \varepsilon} |\mathfrak{N}'_1|^n |\mathfrak{N}'_2|^{\frac{n(n+1)}{2}} q_{v_*}^{n(n+2)}, \tag{9.11}$$

其中隐含常数是绝对的。

9.2.2. 主要结果的陈述。

定理 9.9. 沿用上述记号。假设 π'_1 和 π'_2 在固定的分裂处 $v_* \in \Sigma_F$ 关联，且满足 $v_* \nmid \mathfrak{N}'_1\mathfrak{N}'_2$.

(1) 存在某个 $\pi \in \mathcal{A}_0([G], \omega)^{K^\dagger}$，使得 $\pi_{v_*} \simeq \sigma_{v_*}$

$$L(1/2, \pi \times \pi'_1) L(1/2, \pi \times \pi'_2) \neq 0.$$

(2) 进一步假设 $\pi'_{1,\infty} \simeq \pi'_{2,\infty}$. 。那么，对于某个 $\pi \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{N}; \mathfrak{N}'_1, \mathfrak{N}'_2, \sigma_{v_*}, \omega, \varepsilon)$，有 $L(1/2, \pi \times \pi'_1) L(1/2, \pi \times \pi'_2) \neq 0$。

9.2.3. 测试函数的构造 f。 令 σ_{v_*} 为由 $G(F_{v_*})$ 构造的简单超尖点表示 [KL15]。令 W_{v_*} 为 σ_{v_*}. 的 Whittaker 模型中的一个新向量。定义 $f = \otimes_v f_v$ 如下：

- $v \mid \mathfrak{N}$， f_v 定义见第2.6节；
- $v = v_*$， $f_v(g) := \langle \sigma_{v_*}(g) W_{v_*}, \ W_{v_*} \rangle_{v_*}$， $g \in G(F_{v_*})$，是矩阵系数；
- $v \nmid v_* \mathfrak{N}\mathfrak{N}'_1\mathfrak{N}'_2$ 以及$v \in \Sigma_F$, fin f_v 定义见第2.6节；
- $v \mid \mathfrak{N}'_1$. 定义函数

$$\widehat{\Phi}_v((b_1, \cdots, b_n)) = \begin{cases} \overline{\omega}_{1,v}(b_n) \omega_{2,v}(b_n), & \text{if } b_1, \cdots, b_{n-1} \in \mathfrak{N}'_1 \mathcal{O}_{F_v}, \ b_n \in \mathcal{O}_{F_v}^\times, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 Φ_v 为关于加性特征 Φ_v 的傅里叶反演 ψ_v（参见 §1.5）。定义 $f_v(g_v) := \int_{Z(F_v)} \tilde{f}_v(z_v g_v)\omega_v(z_v)d^\times z_v$, $g_v \in G(F_v)$, 其中

$$\tilde{f}_v(g_v) = \frac{\mathbf{1}_{M_{n,n}(\mathcal{O}_{F_v})}(A)\Phi_v(\mathfrak{b})\mathbf{1}_{M_{1,n}(\mathcal{O}_{F_v})}(\mathfrak{c})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{F_v}}(d)\mathbf{1}_{G(\mathcal{O}_{F_v})}(g_v)}{\mathrm{Vol}(K_0'(q_v^{e_v(\mathfrak{N}_1')}))}$$

对所有 $g_v = \begin{pmatrix} A & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{c} & d \end{pmatrix} \in G(F_v)$。这里，$K_0'(q_v^{e_v(\mathfrak{N}_1')})$ 是 K_v' 的层级为 $e_v(\mathfrak{N}_1')$ 的 Hecke同余子群。

特别地，f_v 是右 $K_0(q_v)$-不变的，$v \mid \mathfrak{N}_1'$。

- $v \mid \mathfrak{N}_2'$. 定义 $f_v(g_v) := \int_{Z(\mathcal{O}_{F_v})} \tilde{f}_v(z_v g_v)\omega_v(z_v)d^\times z_v$, $g_v \in G(F_v)$, 其中

$$\tilde{f}_v(g_v) = \frac{\mathbf{1}_{K_0'(q_v^{e_v(\mathfrak{N}_2')})}(A)\Phi_v(\mathfrak{b})\mathbf{1}_{M_{1,n}(\mathcal{O}_{F_v})}(\mathfrak{c})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{F_v}}(d)\mathbf{1}_{G(\mathcal{O}_{F_v})}(g_v)}{\mathrm{Vol}(K_0'(q_v^{e_v(\mathfrak{N}_2')})}$$

对所有 $g_v = \begin{pmatrix} A & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{c} & d \end{pmatrix} \in G(F_v)$。

特别地，f_v 在右侧具有 $I_v(\mathfrak{N}_2')$-不变性，$v \mid \mathfrak{N}_2'$.

- Defi例如f_∞ follows:
  - if $\pi_{1,\infty}' \simeq \pi_{2,\infty}' = \pi_\infty'$, let $f_\infty = h_\infty * h_\infty^* * \omega_\infty$, where $h_\infty \in C_c(\overline{G}(F_\infty))$ is bi-K_∞-invariant (cf. §9.1.1) with the property that $\mathcal{H}_{f_\infty}^\heartsuit(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty'}) \neq 0$.
  - if $\pi_{1,\infty}' \not\simeq \pi_{2,\infty}'$, define $f_\infty \in C_c^\infty(F_\infty)$ by setting

$$f_\infty\left(z_\infty \begin{pmatrix} I_n & \\ c_\infty & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_\infty & u_\infty \\ & 1 \end{pmatrix}\right) = \omega_\infty^{-1}(z_\infty)h_0(y_\infty)h_1(u_\infty)h_2(\|c_\infty\|_\infty),$$

其中，$h_0 \in C_c^\infty(G'(F_\infty))$ 具有双K_∞'-不变性，且满足 $\mathcal{H}_{h_0}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_{2,\infty}'}) \neq 0$, $h_1 \in C_c^\infty(F_\infty^n)$，其傅里叶变换为 $\widehat{h}_1$ 满足 h_1 的 $\widehat{h}_1(u_\infty) = \widehat{h}_1(\|u_\infty\|_\infty \eta)$，并且

$$\widehat{h}_1(|z_\infty|_\infty \eta)\omega_{1,\infty}(z_\infty)\omega_{2,\infty}^{-1}(z_\infty) \geq 0$$

对所有 $z_\infty \in F_\infty^\times$; $h_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$满足 $h_2(0) = 1$，且 $\|\cdot\|_\infty$ 是配备 F_∞^n. 的欧几里得范数。将 f_∞ 连续延拓到 $G(F_\infty)$。

9.2.4. 定理9.9的证明。由于 $\pi_1' \not\simeq \pi_2'$，所以 $\Lambda(s, \pi_1' \times \widetilde{\pi}_2')$是整函数。根据命题3.1，函数 $J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Geo,\ Small}}(f,\mathbf{s})$是整函数。特别地，$J^{\mathrm{Reg}}{}_{\mathrm{Geo,\ Small}}(f,\mathbf{0})$定义良好。

引理 9.10。记号同上。令 $n \geq 2$. 令 f, ϕ_1' 和 ϕ_2' 按上述方式构造。则

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small}}(f, \boldsymbol{0}) \gg |\mathfrak{N}|^n,$$

其中隐含常数取决于 π_1', π_2' 和 f.

证明。根据命题3.3 可得

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small}}(f, \mathbf{0}) = \frac{|\mathfrak{D}_F|^{\frac{n}{2}}\Lambda^S(1, \pi' \times \widetilde{\pi}')}{\mathrm{Vol}(K_0(\mathfrak{N}))} \cdot \prod_{v \in S} \mathcal{I}_v(f_v, 0),$$

其中 $S = \Sigma_{F,\ \infty} \cup \{v : \ v \mid v_* \mathfrak{N}_1' \mathfrak{N}_2'\}$ 和

$$\mathcal{I}_v(f_v, 0) := \int_{N'(F_v)\backslash G'(F_v)} \int_{G'(F_v)} \int_{F_v^n} f_v\left(\begin{pmatrix} y_v & u_v \\ & 1 \end{pmatrix}\right)\theta_v(\eta x_v u_v)$$
$$W_{1,v}'(x_v)\overline{W_{2,v}'(x_v y_v)}|\det x_v|_v du_v dy_v dx_v.$$

注意到 $\mathfrak{N}_1'$ 和 $\mathfrak{N}_2'$ 互素。根据 [Kim10]（参见定理 2.1.1），我们有

$$\mathcal{I}_v(f_v, 0) = L_v(1, \pi_{1,v}' \times \widetilde{\pi}_{2,v}'), \quad v \mid \mathfrak{N}_1' \mathfrak{N}_2'.$$

对于$v \in \Sigma_{F,\infty} \cup \{v_*\}$，根据岩泽分解和基里洛夫范数（参见（9.8）），

$$\mathcal{I}_v(f_v,0)=\int_{G'(F_v)}\int_{K'_v}\int_{F_v^\times}\int_{F_v^n} f_v\left(\begin{pmatrix} y_v & u_v \\ & 1\end{pmatrix}\right)\theta_v(\eta z_v k_v u_v)du_v|z_v|_v^n d^\times z_v dk_v \\ \overline{\langle \pi'_{2,v}(y_v)W'_{2,v}, W'_{1,v}\rangle_v} dy_v,$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_v$ 是局部基里洛夫范数。由傅里叶反演和极坐标，我们得到（9.10），对于 $v=v_*$ 以及所有满足 $\pi'_{1,\infty}\simeq\pi'_{2,\infty}$ 的 $v\in\Sigma_{F,\infty}$，有

$$\mathcal{I}_v(f_v,0)=\zeta_{F_v}(1)d_v\int_{G'(F_v)} f_v\left(\begin{pmatrix} y_v & \\ & 1\end{pmatrix}\right)\overline{\langle \pi'_{2,v}(y_v)W'_{2,v}, W'_{1,v}\rangle_v}dy_v, \tag{9.12}$$

其中 d_v（例如参见（9.9））是仅依赖于 F_v 和 n. 的某个正隐含常数。记 $\pi'_{1,v_*}\simeq\pi'_{2,v_*}=\pi'_{v_*}\cdot$。注意，$\sigma_{v_*}$ 是温和的。于是 $L_{v_*}(1/2,\ \sigma_{v_*}\times\pi'_{v_*})\neq 0$。由局部兰金-塞尔伯格理论，$\mathrm{Hom}_{G'(F_{v_*})}(\sigma_{v_*}|_{G'(F_{v_*})},\pi'_{v_*})\neq 0$. 因此，

$$\mathcal{I}_v(f_v,0)=\zeta_{F_v}(1)d_v\int_{G'(F_v)}\langle\sigma_v(y_v)W_v,W_v\rangle_v\overline{\langle\pi'_v(y_v)W'_v,W'_v\rangle_v}dy_v\gg 1,$$

对于 $v=v_*$，其中隐含常数依赖于 σ_{v_*} 和 π'_{v_*}.

现在我们考虑 $\mathcal{I}_\infty(f_\infty,0):=\prod_{v\in\Sigma_{F,\infty}}\mathcal{I}_v(f_v,0)$。

- 设 $\pi'_{1,\infty}\simeq\pi'_{2,\infty}$. 由式（9.12）可得

$$\mathcal{I}_\infty(f_\infty,0)\gg\mathcal{H}^\heartsuit_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi'_\infty})\langle W'_\infty,W'_\infty\rangle_\infty\gg 1.$$

- 设 $\pi'_{1,\infty}\not\simeq\pi'_{2,\infty}$. 根据 f_∞ 的定义，

$$\mathcal{I}_\infty(f_\infty,0)=\mathcal{H}_{h_0}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi'_{2,\infty}})\int_{F_\infty^\times}\widehat{h}_1(|z_\infty|_\infty\eta)|z_\infty|_\infty^n\omega_{1,\infty}(z_\infty)\omega_{2,\infty}^{-1}(z_\infty)d^\times z_\infty\cdot\mathcal{J}_\infty,$$

其中

$$\mathcal{J}_\infty:=\int_{N'(F_\infty)\backslash\overline{G'}(F_\infty)}W'_{1,\infty}(x_\infty)\overline{W'_{2,\infty}(x_\infty)}|\det x_\infty|_\infty dx_\infty.$$

由 Stade 公式，$\mathcal{J}_\infty=\Lambda_\infty(1,\pi'_{1,\infty}\times\widetilde{\pi}'_{2,\infty})/\Lambda_\infty(n)$。通过傅里叶反演和极坐标变换，我们有

$$\mathcal{I}_\infty(f_\infty,0)\gg\mathcal{H}_{h_0}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi'_{2,\infty}})\cdot\Lambda_\infty(1,\pi'_{1,\infty}\times\widetilde{\pi}'_{2,\infty})\gg 1.$$

因此，引理 9.10 得证。 □

定理 *9.9* 的证明。 $\mathfrak{N}'_1\mathfrak{N}'_2\subsetneq\mathcal{O}_F$, 根据 f_v 在 $v\mid\mathfrak{N}'_1\mathfrak{N}'_2$，以及命题 5.3中的积分展开，我们得到

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\mathbf{s})\equiv 0$$

对于 $\mathbf{s}=(s,0)$，其中 $\mathrm{Re}(s)>1$.

此外，由于 f_{v_*} 是超尖点表示的矩阵系数，其傅里叶展开中没有常数项。根据命题 4.4 和 4.15，我们有

$$\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})=\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{s})\equiv 0$$

对于 $\mathbf{s}=(s,0)$，其中 $\mathrm{Re}(s)>0$. 在谱侧，我们有 $J^{\mathrm{Reg},\heartsuit}\mathrm{Spec}(f,0)=J_0(f,0)$，其中 $J_0(f,0)$ 是 §2.2 中由 (2.10) 定义的尖点部分。

由亚纯延拓的唯一性，我们有

$$J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Dual}}(f,\mathbf{0})=\mathcal{F}_{0,1}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{0})=\mathcal{F}_{1,0}J^{\mathrm{Big}}_{\mathrm{Geo}}(f,\mathbf{0})=0.$$

因此，定理E 和5.6 给出

$$J_0(f,\mathbf{0})=J^{\mathrm{Reg}}_{\mathrm{Geo,Small}}(f,\mathbf{0})+O(|\mathfrak{N}|).$$

由$\mathrm{K}_0(x,y)$ 的谱展开和引理9.10，我们得到

$$\sum_{\pi\in\mathcal{A}_0([G],\omega)}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_\pi}\Psi(0,\pi(f)W_\phi,W_1')\overline{\Psi(0,W_\phi,W_2')}\gg|\mathfrak{N}|^n. \tag{9.13}$$

- 设 $\pi_{1,\infty}\not\simeq\pi_{2,\infty}$。则由（9.13）以及 f 的 K-型，存在 $\pi\in\mathcal{A}_0([G],\omega)^{K^\dagger}$，使得 $\Psi(0,\pi(f)W_\phi,W_1')\Psi(0,W_\phi,W_2')\neq 0$，这意味着 $L(1/2,\pi\times\pi_1')L(1/2,\pi\times\pi_2')\neq 0$.

- 设 $\pi_{1,\infty}\simeq\pi_{2,\infty}$. 固定 $f=f_\infty\otimes f_{\mathrm{fin}}$ 如 §9.2.3 中所述。根据 K-型的 f，

$$J_0(f,\mathbf{0})=\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{A}_0([G],\omega)^{K^\dagger}\\ \pi_{v_*}\simeq\sigma_{v_*}}}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_\pi^{K^\dagger}}\Psi(0,\pi(f)W_\phi,W_1')\overline{\Psi(0,W_\phi,W_2')}\cdot\mathcal{H}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}),$$

其中 $\mathfrak{B}_\pi^{K^\dagger}$ 由 $\mathfrak{B}_\pi$ 中右-$K^\dagger$-不变的形式组成。

由于 $\Psi(s,\pi(f)W_\phi,W_1')\overline{\Psi(\overline{s},W_\phi,W_2')}$ 是整函数，因此由最大值原理和函数方程可得

$$|\Psi(0,\pi(f)W_\phi,W_1')\overline{\Psi(0,W_\phi,W_2')}|\leq|\Psi(s_0,\pi(f)W_\phi,W_1')\overline{\Psi(\overline{s_0},W_\phi,W_2')}|,$$

其中 $\mathrm{Re}(s_0)=100$. 结合 ϕ 的上确界范数（从而结合W_ϕ），我们得到 $|\Psi(0,\pi(f)W_\phi,W_1')\Psi(0,W_\phi,W_2')|$ 是

$$\ll(N_F(\mathfrak{N}\mathfrak{N}_1'\mathfrak{N}_2')q_{v_*}\|\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}\|)^{O(1)}|\Lambda_\infty(1,\pi_\infty\times\pi_\infty')|^2|W_\phi(I_{n+1})|^2|\mathcal{H}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty})|,$$

其中，$O(1)$中的隐含常数至多依赖于 n 和 F.考虑 Kuznetsov 公式

$$\sum_\pi\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_\pi}\frac{|W_\phi(I_{n+1})|^2}{\langle\phi,\phi\rangle}\cdot\mathcal{H}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty})=\int_{[N]}\int_{[N]}\mathrm{K}(u_1,u_2)\overline{\theta}(u_1)\theta(u_2)du_1du_2,$$

其中 $\pi\in\mathcal{A}_0([G],\omega)^{K^\dagger}$ 满足 $\pi_{v_*}\simeq\sigma_{v_*}$，$\mathrm{K}(\cdot,\cdot)$ 是与 f.相关联的核函数

令 $f^\dagger=\otimes_v f_v^\dagger$满足 $f_\infty^\dagger=f_\infty$，$f_v^\dagger=f_v$对所有 $v\nmid\mathfrak{N}$，以及对于$v\mid\mathfrak{N}$，$f_v^\dagger:=\|f_v\|_\infty\mathbf{1}_{G(\mathcal{O}_{F_v})}*\omega_v$.因此 支撑 $f\subset$支撑 $f^\dagger$.注意到（例如，参见[Art05]）$\mathrm{K}(\cdot,\cdot)$ 增长缓慢，即

$$\mathrm{K}(u_1,u_2)\ll\sum_{\gamma\in\overline{G}(F)}|f^\dagger(u_1^{-1}\gamma u_2)|\ll\|f\|_\infty\|u_1\|\|u_2\|,$$

其中隐含常数取决于 支撑 $f^\dagger$，而其与 $\mathfrak{N}$.根据 f_∞ 的定义（参见 §9.2.3），$0\leq\mathcal{H}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty})\ll 1$. 因此，

$$\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{A}_0([G],\omega)^{K^\dagger}\\ \pi_{v_*}\simeq\sigma_{v_*}}}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_\pi}|W_\phi(I_{n+1})|^2\cdot\mathcal{H}_{f_\infty}(\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty})\ll|\mathfrak{N}|^n,$$

其中隐含常数取决于 f_∞、$\mathfrak{N}_1'$、$\mathfrak{N}_2'$ 和 σ_{v_*}.

根据定义，我们有如下分解

$$J_0(f,\mathbf{0})=\sum_{\pi\in\mathcal{A}_0(\mathfrak{N};\mathfrak{N}_1',\mathfrak{N}_2',\sigma_{v_*},\omega,\varepsilon)}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_\pi}\Psi(0,\pi(f)W_\phi,W_1')\overline{\Psi(0,W_\phi,W_2')}+J_0^\dagger(f,\mathbf{0}),$$

其中

$$J_0^\dagger(f,\mathbf{0}):=\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{A}_0([G],\omega)^{K^\dagger}\\ \pi_{v_*}\simeq\sigma_{v_*}\\ \|\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}\|>|\mathfrak{N}|^\varepsilon}}\sum_{\phi\in\mathfrak{B}_\pi}\Psi(0,\pi(f)W_\phi,W_1')\overline{\Psi(0,W_\phi,W_2')}.$$

综合上述估计，我们得到

$$J_0^\dagger(f,\mathbf{0}) \ll |\mathfrak{N}|^n \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{A}_0([G],\omega)^{K^\dagger}\\ \pi_{v_*}\simeq\sigma_{v_*}\\ \|\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}\|>|\mathfrak{N}|^\varepsilon}} (N_F(\mathfrak{N}\mathfrak{N}_1'\mathfrak{N}_2')q_{v_*}\|\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}\|)^{O(1)}|\Lambda_\infty(1,\pi_\infty\times\pi_\infty')|^2.$$

根据斯特林公式，$|\Lambda_\infty(1,\pi_\infty\times\pi_\infty')|^2 \ll e^{-\pi\|\boldsymbol{\lambda}_{\pi_\infty}\|} < e^{-\pi|\mathfrak{N}|^\varepsilon}$. 因此$J_0^\dagger(f,0) \ll |\mathfrak{N}|^{-100}$，其中隐含常数取决于 f_∞, $\mathfrak{N}_1'$, $\mathfrak{N}_2'$和σ_{v_*}. 。因此，我们得到

$$\sum_{\pi\in\mathcal{A}_0(\mathfrak{N};\mathfrak{N}_1',\mathfrak{N}_2',\sigma_{v_*},\omega,\varepsilon)} \sum_{\phi\in\mathfrak{B}_\pi} \Psi(0,\pi(f)W_\phi,W_1')\overline{\Psi(0,W_\phi,W_2')} \gg |\mathfrak{N}|^n,$$

这意味着 $\Psi(0,\pi(f)W_\phi,W_1')\overline{\Psi(0,W_\phi,W_2')} \neq 0$，其中某个 $\phi\in\mathfrak{B}_\pi$满足 $\pi\in\mathcal{A}_0(\mathfrak{N};\mathfrak{N}_1',\mathfrak{N}_2',\sigma_{v_*},\omega,\varepsilon)$。因此 $L(1/e,\pi\times\pi_1')L(1/2,\pi\times\pi_2') \neq 0$.

因此，定理9.9 成立。 □

参考文献

[Art78] James G. Arthur. 约化群的迹公式。I. 与 G有理数域中的类相关的项。Duke Math. J., 45(4):911–952, 1978. [Art79] James Arthur. 艾森斯坦级数与迹公式。载于《自守形式、表示与L函数》（数学纯粹与应用专题研讨会论文集，俄勒冈州立大学，科瓦利斯，俄勒冈州，1977），第1部分，数学纯粹与应用专题研讨会论文集，XXXIII，第253–274页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1979.[Art80] James Arthur. 约化群的迹公式。II. 截断算子的应用。Compositio Math., 40(1):87–121, 1980. [Art05] James Arthur. 迹公式导论。载于《调和分析、迹公式与志村簇》，Clay 数学会议录第4卷，第1–263页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005.[BFK+18] Valentin Blomer、Étienne Fouvry、Emmanuel Kowalski、Philippe Michel、Djordje Milićević和Will Sawin。自守L函数族的二阶矩理论。arXiv预印本 arXiv:1804.01450, 2018.[BH08] Valentin Blomer和Gergely Harcos。扭曲L函数的混合界。J. Reine Angew. Math., 621:53–79, 2008.[Blo13] Valentin Blomer。Kuznetsov公式在GL(3)上的应用。Inventiones mathematicae, 194(3):673–729, 2013. [Bru06] Farrell Brumley。GL n上的有效重数一与Rankin-Selberg L函数的窄零点自由区域。American Journal of mathematics, 128(6):1455–1474, 2006. [Byk96] V. A. Bykovskiĭ。海克级数内积的迹公式及其应用。Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI), 226(Anal. Teor. Chisel i Teor. Funktsiĭ. 13):14–36, 235–236, 1996. [DGG12] Adrian Diaconu、Paul Garrett和Dorian Goldfeld。 L函数的矩，关于$GL_r\times GL_{r-1}$。载于《解析数论与代数数论文集》，Springer数学会议录第9卷，第197–227页。Springer，纽约，2012. [Duk95] W. Duke。高层级自守L函数的临界消失阶。Invent. Math., 119(1):165–174, 1995. [FW09] Brooke Feigon和David Whitehouse。希尔伯特模形式中心L值的平均及其在次凸性中的应用。Duke Math. J., 149(2):347–410, 2009. [GH16] Harald Grobner和Michael Harris。惠特克周期、动机周期及张量积函数的特殊值。Jussieu 数学研究所期刊，15(4):711–769, 2016. [GJ06] Roger Godement和Hervé Jacquet。单代数的ζ函数，第260卷。Springer，2006. [GJR04] David Ginzburg、Dihua Jiang和Stephen Rallis。关于Rankin-Selberg L函数中心值的非消失性。《美国数学会杂志》，17(3):679–722, 2004. [God95] Roger Godement。模函数的谱分析。载于Bourbaki 研讨会，第9卷，第278号报告，第15–40页。法国数学会，巴黎，1995.[Gol87] Dorian Goldfeld。GL(n, Z)的克洛斯特曼ζ函数。载于《国际数学家大会论文集》，第1、2卷（伯克利，加利福尼亚州，1986），第417–424页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1987.

[Guo96] Jiandong Guo。关于GL(2)自守L函数中心临界值的正性。Duke Mathematical Journal, 83(1):157–190, 1996. [IS00a] H. Iwaniec和P. Sarnak。L函数解析理论展望。特刊，第II部分，第705–741页。2000。GAFA 2000（特拉维夫，1999）。 [IS00b] Henryk Iwaniec和Peter Sarnak。自守L函数中心值的非消失性与Landau-Siegel零点。Israel J. Math., 120(part A):155–177, 2000. [IY15] Atsushi Ichino和Shunsuke Yamana。自守形式的周期。Compositio Mathematica, 151(4):665–712, 2015. [Jac86] Hervé Jacquet。关于Waldspurger的一个结果。载于《高等师范学校科学年刊》，第19卷，第185–229页，1986.[Jac09] Hervé Jacquet。阿基米德Rankin-Selberg积分。载于《自守形式与L函数 II：局部方面》，Contemp. Math.第489卷，第57–172页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009. [JL70] H. Jacquet和R. P. Langlands。GL(2)上的自守形式。《数学讲义》第114卷。Springer-Verlag，柏林-纽约，1970. [JLR99] Hervé Jacquet、Erez Lapid和Jonathan Rogawski。自守形式的周期。《美国数学会杂志》，12(1):173–240, 1999. [JN21] Subhajit Jana和Ramon Nunes。GL(n)的谱互反与中心 L值的同时非消失性。arXiv预印本 arXiv:2111.02297, 2021. [JPSS81] H. Jacquet、I. I. Piatetski-Shapiro和J. Shalika。线性群表示的导子。Math. Ann., 256(2):199–214, 1981. [JPSS83] H. Jacquet、I. I. Piatetskii-Shapiro和J. A. Shalika。Rankin-Selberg卷积。Amer. J. Math., 105(2):367–464, 1983. [JR92] Hervé Jacquet和Stephen Rallis。反对称矩阵的Kloosterman积分。Pacific J. Math., 154(2):265–283, 1992. [JS90] Hervé Jacquet和Joseph Shalika。Rankin-Selberg卷积：阿基米德理论。载于纪念II Piatetski-Shapiro六十寿辰文集，第I部分，第125–207页，1990. [Kim10] Kyung-Mi Kim。一般线性群的Rankin-Selberg卷积测试向量。博士论文，俄亥俄州立大学，2010.[KL15] Andrew Knightly和Charles Li。一般线性群GL(n)的简单超尖点表示。《台湾数学杂志》，19(4):995–1029, 2015. [KR19] Andrew Knightly和Caroline Reno。GL(2) L函数低位零点的加权分布。Canad. J. Math., 71(1):153–182, 2019. [KS03] Henry Kim和Peter Sarnak。关于拉马努金猜想与Selberg猜想的精细估计。16(1):175–181, 2003. [Lan94] Serge Lang。《代数数论》，《数学研究生教材》第110卷。Springer-Verlag，纽约，第二版，1994.[LTX+22] Yifeng Liu、Yichao Tian、Liang Xiao、Wei Zhang和Xinwen Zhu。关于Rankin-Selberg动机的Beilinson-Bloch-Kato猜想。Inventiones mathematicae, pages 1–269, 2022. [Mac79] I. G. Macdonald。《对称函数与Hall多项式》。《牛津数学专著》。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1979. [MR12] Philippe Michel和Dinakar Ramakrishnan。Gross-Zagier公式的推论：平均 L 值的稳定性、次凸性及模 p的非消失性。载于《数论、分析与几何》，第437–459页。Springer，纽约，2012.[MRY23] Philippe Michel、Dinakar Ramakrishnan和Liyang Yang。 $U(3) \times U(2)$上的贝塞尔周期非消失性、相对迹公式与次凸性。2023. [MS12] Stephen D Miller和Wilfried Schmid。尖点自守形式的快速衰减。《数学进展》，231(2):940–964, 2012. [RR05] Dinakar Ramakrishnan和Jonathan Rogawski。通过相对迹公式求模 L级数的平均值。Pure Appl. Math. Q., 1(4, 特刊：纪念Armand Borel。第3部分):701–735, 2005. [Sha10] Freydoon Shahidi。艾森斯坦级数与自守L函数，第58卷。美国数学会，2010.[ST22] Shingo Sugiyama和Masao Tsuzuki。GL(2) ×GL(3)上某些 L函数中心值的定量非消失性。Math. Z., 301(2):1447–1479, 2022. [Sta01] Eric Stade。GL($\mathbb{R}$)惠特克函数的Mellin变换。American journal of mathematics, 123(1):121–161, 2001. [Sta02] Eric Stade。GL(n) ×GL(n)上的阿基米德 L因子与广义Barnes积分。Israel J. Math., 127:201–219, 2002.[Tsu15] Masao Tsuzuki。GL(2)自守 L函数中心值的谱平均。美国数学会，2015.

[Tsu21] Masao Tsuzuki. 在 PGL_n 上具有较大层级且中心值非消失的 Hecke-Maass 尖点形式。《功能分析杂志》，281(10)：论文编号 109215，共 100 页，2021 年。[Wal85] J-L Waldspurger. 关于某些自守函数在其对称中心处的取值。《组合数学》，54(2)：173–242，1985 年。[Wal92] Nolan R. Wallach.《实约化群》第二卷，《纯粹与应用数学》第 132 卷。Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1992 年。[Yan19] Liyang Yang. 一般线性群(n)的粗 Jacquet-Zagier 迹公式及其应用。预印本，2019 年。[Yan21] Liyang Yang. 一般线性群(n)伴随 L 函数的全纯性：$n \leq 4$。《数学年刊》，381(3)：1745–1805，2021 年。[Yan23a] Liyang Yang. 相对迹公式与扭曲 L 函数的 Burgess 界。预印本，2023 年。[Yan23b] Liyang Yang. 一般线性群($n+1$) × 一般线性群(n)的朗金–塞尔伯格 L 函数的相对迹公式、次凸性与定量非消失性（秩 L）。预印本，2023 年。[Ye00] Yangbo Ye. gln 上 Kloosterman 和的 Kuznetsov 公式。《拉马努金杂志》，4(4)：385–395，2000 年。[Zha14a] Wei Zhang. 自守周期与朗金–塞尔伯格 L 函数的中心值。《美国数学会杂志》，27(2)：541–612，2014 年。[Zha14b] Wei Zhang. 傅里叶变换与酉群的全局 Gan-Gross-Prasad 猜想。《数学年刊》，180(3)：971–1049，2014 年。

Fine Hall，304 Washington Rd，普林斯顿，NJ 08544，美国电子邮箱地址：liyangy@princeton.edu