arXiv:2303.02228v2 [math.QA] 5 Sep 2024

特征 2 下受限 Jordan 平面的 Drinfeld 双

NICOLÁS ANDRUSKIEWITSCH、Dirceu Bagio、Saradia Della Flora、DAIANA FLÔRES

摘要。我们研究特征 2 下的受限 Jordan 平面，它是 Jordan 平面的一个有限维 Nichols 代数商，由 Cibils、Lauve 和 Witherspoon 提出。我们将 arXiv:2002.02514 中关于奇特征下类似对象的结果加以推广。我们证明，受限 Jordan 平面的 Drinfeld 双可纳入一个霍普夫代数正合列，其中核是一个正规局部交换 Hopf 子代数，余核是一个维数为 $\mathfrak{m}5$ 的受限李代数的受限包络代数。我们证明 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 是温和型，并显式计算其不可分解模。我们还引入了一个覆盖受限 Jordan 平面 Drinfeld 双的无限维霍普夫代数，并描述了若干量子Frobenius映射。

目录

1. 引言 1 2. 受限 Jordan 平面的 Drinfeld 双 4 3. 代数 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 的性质 8 4. 不可分解 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模 17 5. Jordan平面的一个 Drinfeld 双 23 参考文献 27

1. 引言

1.1. **块及其 Nichols 代数**。 设 $\Bbbk$ 为一个代数闭域。编织向量空间是一个二元组 $(V, \mathfrak{c})$，其中 V 是一个向量空间，而$\mathfrak{c} \in GL(V \otimes V)$（称为编织）满足编织方程

$$(\mathfrak{c} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathfrak{c})(\mathfrak{c} \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \mathfrak{c})(\mathfrak{c} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathfrak{c}).$$

编织向量空间及其 Nichols代数是霍普夫代数结构中的关键元素，参见 [1]。给定 $\epsilon \in \Bbbk^\times$ 和 $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，令 $\mathcal{V}(\epsilon, \ell)$ 为

2010数学主题分类。 16T20, 17B37。N. A. 的工作部分获得了 CONICET(PIP 11220200102916CO)、FONCyT-ANPCyT(PICT-2019-03660) 和 Secyt(UNC) 的资助。

具有基 $\{x_i : 1 \le i \le \ell\}$ 且编织 $\mathfrak{c}_\epsilon$ 由下式给出的编织向量空间

$$\mathfrak{c}_\epsilon(x_i \otimes x_j) = \begin{cases} \epsilon x_1 \otimes x_i, & j = 1, \\ (\epsilon x_j + x_{j-1}) \otimes x_i, & 2 \le j \le \ell, \end{cases} \qquad 1 \le i \le \ell. \tag{1.1}$$

编织向量空间 $\mathcal{V}(\epsilon, \ell)$ 称为块；它们的 Nichols 代数与阿贝尔群的尖点 Hopf 代数相关。

定义在特征不为2的域上的 Jordan平面是著名的二次代数

$$J = \Bbbk\langle x_1, x_2 : x_1x_2 - x_2x_1 - \frac{1}{2}x_1^2\rangle.$$

超Jordan平面由 [2], 引入，是分次代数

$$sJ = \Bbbk\langle x_1, x_2 : x_1^2, x_2x_{21} - x_{21}x_2 - x_1x_{21}\rangle,$$

其中 $x_{21} = x_2x_1 + x_1x_2$。Jordan平面和超Jordan平面都具有编织Hopf代数的结构 [16, 2]。当 $\operatorname{char}\Bbbk = 0$ 时，Nichols代数 $\mathscr{B}(\mathcal{V}(1, 2))$ 与 J 同构为编织Hopf代数，类似地，$\mathscr{B}(\mathcal{V}(-1, 2)) \simeq sJ$。这些是具有有限 Gelfand-Kirillov维数的块的仅有 Nichols 代数 [2]。

当 $\operatorname{char}\Bbbk = p > 2$ 时， [11] 中证明了

$$\mathscr{B}(\mathcal{V}(1, 2)) \simeq J/\langle x_1^p, x_2^p\rangle \qquad \text{and} \qquad \dim \mathscr{B}(\mathcal{V}(1, 2)) = p^2.$$

受此结果启发，在相同假设下， [3] 中证明了

$$\mathscr{B}(\mathcal{V}(-1, 2)) \simeq sJ/\langle x_{21}^p, x_2^{2p}\rangle \qquad \text{and} \qquad \dim \mathscr{B}(\mathcal{V}(-1, 2)) = 4p^2.$$

Nichols代数 $\mathscr{B}(\mathcal{V}(1,2))$，以及 $\mathscr{B}(\mathcal{V}(-1,2))$，分别称为受限 Jordan 平面和超 Jordan 平面。其他 Nichols代数的受限版本见于 [2] [3, 4]。

1.2. **Drinfeld 双代数与正合列**。 假设 $\operatorname{char}\Bbbk = p$ 为奇数。令 C_N 表示阶为 N 的循环群。Drinfeld双代数$D(\mathscr{B}(\mathcal{V}(1,2))\#\Bbbk C_p)$ 和 $D(\mathscr{B}(\mathcal{V}(-1, 2))\#\Bbbk C_{2p})$ 已在 [7, 8] 中得到研究。 [7] 中证明了，存在一个正规局部交换 Hopf代数 R，使其适合于一个正合列

$$\mathbf{R} \hookrightarrow D(\mathscr{B}(\mathcal{V}(1, 2))\#\Bbbk C_p) \twoheadrightarrow \mathfrak{u}(\mathfrak{sl}_2(\Bbbk));$$

其中， $\mathfrak{u}(\mathfrak{sl}_2(\Bbbk))$ 是受限包络代数。于是，简单的 $\mathfrak{u}(\mathfrak{sl}_2(\Bbbk))$-模与 $D(\mathscr{B}(\mathcal{V}(1,2))\#\Bbbk C_p)$ 的简单模之间存在双射对应。

对于受限超 Jordan 平面，存在一个 Hopf 超代数 $\mathcal{D}$，使得 $D(\mathscr{B}(\mathcal{V}(-1, 2))\#\Bbbk C_{2p}) \simeq \mathcal{D}\#\Bbbk C_2$。随后存在一个局部交换 Hopf 子代数 $\mathfrak{R}$ 以及一个 Hopf 超代数的正合列

$$\mathfrak{R} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathcal{D} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{u}(\mathfrak{osp}(1|2)).$$

见 [8]。与受限 Jordan 平面的情形一样，简单 $\mathcal{D}$-模与 $\mathfrak{u}(\mathfrak{osp}(1|2))$ 的简单模之间存在双射对应。

以下设 char $\Bbbk = 2$，于是 V := $\mathcal{V}(1, 2) = \mathcal{V}(-1, 2)$。Nichols代数 $\mathscr{B}$(V) 也已在 [11] 中计算：事实证明，$\mathscr{B}$(V) 的维数为 16，并由生成元 x_1、x_2 及以下定义关系给出

$$(1.2)\quad x_1^2 = 0, \quad x_2^4 = 0, \quad x_2^2 x_1 = x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_1, \quad x_1 x_2 x_1 x_2 = x_2 x_1 x_2 x_1.$$

因此，$\mathscr{B}$(V)——我们称之为特征 2 下的受限 Jordan 平面——与受限超 Jordan 平面比与 Jordan 平面（在奇特征下）更为接近。令 $H = \mathscr{B}(V)\#\Bbbk C_2$ 为受限 Jordan 平面的玻色化，并令 $\mathfrak{m}$为 §2.1 中描述的 5 维李代数。首先，我们推广 [7, 命题 1。9] 和 [8, 定理 4。6]。

定理 A。*Drinfeld* 双 $D(H)$ 适合置于一个阿贝尔扩张中

$$\mathbf{T} \overset{\iota}{\hookrightarrow} D(H) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{u}(\mathfrak{m}),$$

其中，$\mathbf{T}$ 是 $D(H)$ 的正规局部交换 *Hopf* 子代数。

因此，$D(H)$-模与 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模相同，而后者已为人所知 [15]：平凡模 V_0 以及一个 3 维模 V_1。更进一步，函子 $\pi^*: {}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}\mathcal{M} \to {}_{D(H)}\mathcal{M}$ 是张量函子，并且保持不可分解性。因此，我们着手研究 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$的表示论。我们证明：

定理 B. 代数 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 是温和型的。不可分解的 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模包括单模 V_0 和 V_1、它们的射影覆盖、*8* 个族的字符串模以及 *2* 个族的带模。

关于这些模的精确描述，参见定理 4.1。本文结构如下。第 2 节介绍受限包络代数的预备知识、$D(H)$的表示，并证明定理 A，见定理 2.9。第 3 节专门讨论 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$表示论的基础；我们在此证明 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$是温和型的，且其相应的基本代数是特殊双串代数。这一性质使我们能够在第 4 节计算不可分解的 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模。第 5 节讨论 $D(H)$的一个无限维类比，并推广了 [7] 和 [8]中的结果。

1.3. 记号与约定。我们用 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ 表示自然数。对于 $k < \ell \in \mathbb{N}_0$，我们令 $\mathbb{I}_{k,\ \ell} = \{n \in \mathbb{N}_0 :\ k \le n \le \ell\}$ 和$\mathbb{I}_\ell = \mathbb{I}_{1,\ \ell}$。我们固定一个 $\Bbbk$ 特征 2 的代数闭域。所有向量空间、代数和张量积都在 $\Bbbk$ 上定义。若 U 是一个向量空间且$S \subseteq U$，则 $\Bbbk S$ 表示由 S 生成的 U 的线性子空间。给定$\lambda \in \Bbbk$，我们用 $J_r(\lambda)$ 表示与 λ 相关联的大小为 r 的 Jordan 块。

令 $\Bbbk G$ 分别表示有限群 G 的群代数，以及 G 上的函数代数；因此 $(\Bbbk G)^* \simeq \Bbbk^G$。若 $S \subseteq G$，则$\langle S\rangle$表示由 S 生成的子群。

给定一个代数 A，令 ${}_A\mathcal{M}$分别表示有限维左 A-模和右 A-模的范畴。另令 irrep A分别表示 ${}_A\mathcal{M}$中简单对象和不可分解对象的同构类集合。我们通常不加区分地用 irrep A 中的一个类或 indec A 表示其某个代表元。Jacobson根

记为 Jac A，而 $V \in {}_A\mathcal{M}$ 的根记为 rad V。若$S \subseteq A$，则 $\langle S\rangle$ 表示由 S生成的双边理想。

设 L 为一个霍普夫代数，其反 antipode $\mathcal{S}$ （假定总是双射）。 L 中类群元素构成的群记作 $G(L)$。对于 g， $h \in G(L)$，(g,h)-本原元（或斜本原元）构成的线性空间为

$$\mathcal{P}_{g,h}(L) := \{x \in L : \Delta(x) = x \otimes h + g \otimes x\}.$$

与通常一样， $\mathcal{P}(L) := \mathcal{P}_{1,\ 1}(L)$。 L 上 Yetter-Drinfeld 模的范畴记作 ${}^L_L\mathcal{YD}$，例如参见 [19, §11.6]。对于未作解释的术语，我们参考 [19] 。

2. 受限 Jordan 平面的 Drinfeld 双

2.1. 受限李代数 $\mathfrak{m}$。回顾一下，受限李代数（在我们的特征为 2 的域 $\Bbbk$ 上）是一个二元组（$\mathfrak{g}$，$(\ )^{[2]}$），其中 $\mathfrak{g}$ 是李代数，且 $(\ )^{[2]} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是一个映射，称为 2-运算，满足

$$(\lambda x)^{[2]} = \lambda^2 x^{[2]}, \qquad \mathrm{ad}_{x^{[2]}} = (\mathrm{ad}_x)^2, \qquad (x+y)^{[2]} = x^{[2]} + y^{[2]} + [x,y],$$

对所有 x， $y \in \mathfrak{g}$， $\lambda \in \Bbbk$。受限包络代数 关于 $(\mathfrak{g},\ (\ )^{[2]})$ 是

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{g}) := U(\mathfrak{g})/\langle x^2 - x^{[2]} : x \in \mathfrak{g}\rangle,$$

其中 $U(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$的包络代数。霍普夫代数 $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ 是尖点且为对合的（即 $\mathcal{S}^2 = \mathrm{id}$），因此它是球面的。

给定 $\mathfrak{g}$的李子代数 $\mathfrak{e}$，包含 $\mathfrak{e}$ 的 $\mathfrak{g}$的最小受限李子代数记作 $\mathfrak{e}^{[2]}$。

设 $\mathfrak{l}$是一个李代数。$\mathfrak{l}$的一个 2-包络 是三元组 $(\mathfrak{g}, (\ )^{[2]}, \iota)$，由一个受限李代数 $(\mathfrak{g}, (\ )^{[2]})$ 和一个单射李代数映射 $\iota : \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$构成，使得 $\iota(\mathfrak{l})^{[2]} = \mathfrak{g}$。若中心 $Z(\mathfrak{g})$ 包含于 $Z(\iota(\mathfrak{l}))$，则该 2-包络是极小的。任意李代数都存在一个在李代数同构意义下唯一的极小 2-包络；见 [22, 定理 1.1.6]。

令 $\mathfrak{sl}(2) := W(1,2)'$为 4 维 Witt 李代数的导出李代数，见 [23]。记号 $\mathfrak{sl}(2)$ 取自 [13] ，该文将此李代数称为伪 $\mathfrak{sl}(2)$。于是 $\mathfrak{sl}(2)$ 有一组基 $\{a,b,c\}$，其括号为

$$[a,b] = c, \qquad [a,c] = a, \qquad [b,c] = b. \tag{2.1}$$

已知， $\mathfrak{sl}(2)$ 是维数为 3 [22] 的唯一（在同构意义下）单李代数。 $U(\mathfrak{sl}(2))$ 的中心以及 $U(\mathfrak{sl}(2))$ 的不可约表示已在 [15] 中计算。

李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 不是受限的。 $\mathfrak{sl}(2)$ 的最小 2-包络是李代数 $\mathfrak{m}$，其基为 $\{b', b, c, a, a'\}$，括号为 (2.1)，并且

$$[a', b] = a, \quad [a', b'] = c, \quad [a, b'] = b, \quad [a', a] = [a', c] = [b', b] = [b', c] = 0;$$

以及由下式给出的 2-运算 $(\ )^{[2]} :\ \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$

$$(a')^{[2]} = (b')^{[2]} = 0, \qquad c^{[2]} = c, \qquad a^{[2]} = a', \qquad b^{[2]} = b'.$$

注记 2.1。 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m}) \simeq \Bbbk\langle a,b,c\rangle/I$ 其中 I 由以下关系生成

$$ab+ba=c,\quad ac+ca=a,\quad bc+cb=b,\quad a^4=b^4=0,\quad c^2+c=0.$$

(2.2) 也就是说,

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{m}) \simeq U(\mathfrak{sl}(2))/\langle a^4, b^4, c^2+c\rangle. \tag{2.3}$$

此外，伴随表示 $\mathrm{ad}: U(\mathfrak{sl}(2)) \to \mathrm{End}\ \mathfrak{sl}(2)$ 可通过 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 分解。于是有 $\mathfrak{sl}(2) = [\mathfrak{m},\mathfrak{m}]$；事实上，受限李代数 $\mathfrak{m}$ 与 $\mathrm{Der}(\mathfrak{sl}(2))$ 同构。受限李代数 $\mathfrak{m}$ 的自同构群通过以下方式与 $SL(2,\Bbbk)$ 同构：

$$SL(2,\Bbbk) \ni g = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \zeta \end{pmatrix} \mapsto \varphi_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{m}),$$
$$\varphi_g(a) = \kappa a + \lambda b, \qquad \varphi_g(b) = \mu a + \zeta b, \qquad \varphi_g(c) = c,$$
$$\varphi_g(a') = \kappa^2 a' + \lambda^2 b' + \kappa\lambda c, \quad \varphi_g(b') = \mu^2 a' + \zeta^2 b' + \mu\zeta c.$$

为便于后续使用，我们汇总由定义关系得到的一些推论。

引理 2.2。 以下关系在 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 中成立：

$$\begin{aligned}
&ba = ab + c, && ba^2 = a^2b + a, && ba^3 = a^3b + a^2\overline{c}\\
&b^2a = ab^2 + b, && b^2a^2 = a^2b^2 + c, && b^2a^3 = a^3b^2 + a^2b + a\overline{c},\\
&b^3a = ab^3 + b^2\overline{c}, && b^3a^2 = a^2b^3 + ab^2 + bc, && b^3a^3 = a^3b^3 + a^2b^2c + abc,\\
&ca = ac + a, && ca^2 = a^2c, && ca^3 = a^3\overline{c},\\
&cb = bc + b, && cb^2 = b^2c, && cb^3 = b^3\overline{c},
\end{aligned}$$

其中 $\overline{c} = 1 + c$。 □

2.2. **受限 Jordan 平面的玻色化**。 设 $\Gamma = \langle g\rangle$ 是一个阶为 2 的循环群，记法采用乘法记号。设 $V \in {}^{\Bbbk\Gamma}_{\Bbbk\Gamma}\mathcal{YD}$ 具有基 $\{x_1, x_2\}$、作用 $\cdot$ 和余作用 δ，其定义如下

$$g\cdot x_1 = x_1, \qquad g\cdot x_2 = x_1 + x_2, \qquad \delta(x_i) = g\otimes x_i, \qquad i\in\mathbb{I}_2. \tag{2.4}$$

因此，作为编织向量空间， $V \simeq \mathcal{V}(1,2)$。如上所述， $\mathscr{B}(V)$ 由生成元 x_1、x_2 以及关系 (1.2) 给出，见 [11]。令 $x_{21} := x_1x_2 + x_2x_1 \in \mathscr{B}(V)$。则 $\mathscr{B}(V)$ 具有 PBW 基

$$\{x_1^{m_1}x_{21}^{m_2}x_2^{n} \,:\, m_i\in\mathbb{I}_{0,1},\, i\in\mathbb{I}_2,\, n\in\mathbb{I}_{0,3}\},$$

且 维数 $\mathscr{B}(V) = 2^4$。如 [7]中所述， $\mathscr{B}(V)$ 称为 受限 *Jordan* 平面。

引理 2.3。 [11, 推论 3。4] 玻色化 $H := \mathscr{B}(V)\#\Bbbk\Gamma$ 是一个维数为 2^5、由 x_1、x_2、g 生成的尖点霍普夫代数，其关系为(1.2) 以及

$$gx_1 = x_1g, \qquad gx_2 = x_2g + x_1g, \qquad g^2 = 1. \tag{2.5}$$

H 的余乘法为

$$\Delta(g) = g\otimes g, \qquad \Delta(x_i) = x_i\otimes 1 + g\otimes x_i, \quad i\in\mathbb{I}_2. \tag{2.6}$$

□

2.3. **双**。 下面我们将通过生成元和关系来介绍 Drinfeld 双 $D(H)$。为统一记号，我们回顾一下：有限维霍普夫代数 L 的 Drinfeld 双$D(L)$是余代数 $L \otimes L^{*\,\mathrm{op}}$，其乘法和反 antipode 分别由 $D(L)$ 给出

$$(h \bowtie f)(h' \bowtie f') = \langle f_{(1)}, h'_{(1)} \rangle \langle f_{(3)}, \mathcal{S}(h'_{(3)}) \rangle (hh'_{(2)} \bowtie f' f_{(2)}),$$
$$\mathcal{S}(h \bowtie f) = ((1 \bowtie \mathcal{S}^{-1}(f))(\mathcal{S}(h) \bowtie \varepsilon)),$$

其中，乘法 ff'是在 L^*中而非在 $L^{*\,\mathrm{op}}$中考虑的。在此，给定 $h \in L$ 和 $f \in L^*$，元素 $h \otimes f$ 记作 $h \bowtie f \in D(L)$，而 $\langle f, h \rangle$ 是 h中 f 的求值。

我们首先处理 $H^* \simeq \mathscr{B}(V^*)\#\Bbbk^\Gamma$。设 $w_1, w_2 \in H^*$ 定义为

$$w_1(x_1^{m_1} x_{21}^{m_2} x_2^n g^{m_3}) = \delta_{m_1,0}\delta_{m_2,0}\delta_{m_3,0}\delta_{n,1},$$
$$w_2(x_1^{m_1} x_{21}^{m_2} x_2^n g^{m_3}) = \delta_{m_1,1}\delta_{m_2,0}\delta_{m_3,0}\delta_{n,0}, \qquad m_i \in \mathbb{I}_{0,1}, \quad i \in \mathbb{I}_3, \quad n \in \mathbb{I}_{0,3}.$$

令 $\gamma \in \Bbbk^\Gamma$, $\gamma(g^m) = \delta_{m,\,1}$, $m \in \mathbb{I}_{0,\,1}$，于是 $\Bbbk^\Gamma \simeq \Bbbk[\gamma]/(\gamma^2 + \gamma)$。根据 [8,引理 2.1], $V^* \in {}^{\Bbbk^\Gamma}_{\Bbbk^\Gamma}\mathcal{YD}$ 以基 $\{w_i : \ i \in \mathbb{I}_2\}$，作用和余作用分别由下式给出

$$\gamma \cdot w_i = w_i, \quad i \in \mathbb{I}_2, \quad \delta(w_1) = 1 \otimes w_1, \quad \delta(w_2) = 1 \otimes w_2 + \gamma \otimes w_1. \tag{2.7}$$

引理 2.4。 代数 $\mathscr{B}(V^*)$ 由 w_1， w_2 生成，其关系为w_1^2， w_2^4，
$(2.8)^2 w_1 + w_1 w_2^2 + w_1 w_2 w_1$， $w_1 w_2 w_1 w_2 + w_2 w_1 w_2 w_1$.若 w_{21}：
$= w_1 w_2 + w_2 w_1 \in \mathscr{B}(V^*)$，则 $\mathscr{B}(V^*)$ 具有 *PBW* 基

$$\{w_1^{m_1} w_{21}^{m_2} w_2^n \ : \ m_i \in \mathbb{I}_{0,1},\, i \in \mathbb{I}_2,\, n \in \mathbb{I}_{0,3}\}.$$

证明。 容易看出，$(V^*, c^*) \simeq (V, c^{-1})$。因此，根据引理 1.11]， $\mathscr{B}(V^*)$ 与 $\mathscr{B}(V)$ 具有相同的关系，只是用 w_i 替代了 x_i。 □

引理 2.5。 （见 [8, 命题 2。2]）。代数 $H^* \simeq \mathscr{B}(V^*)\#\Bbbk^\Gamma$ 由 w_1, w_2, γ 生成，其关系为 (2.8) 以及

$$w_i\gamma = \gamma w_i + w_i, \quad i \in \mathbb{I}_2, \qquad\qquad \gamma^2 = \gamma. \tag{2.9}$$

H^* 的余乘法定义如下

$$w_1, \gamma \in \mathcal{P}(H^*), \qquad \Delta(w_2) = w_2 \otimes 1 + 1 \otimes w_2 + \gamma \otimes w_1. \tag{2.10}$$ □

>显然， $D(\Bbbk\Gamma)$由 g, γ 生成，其关系为

$$g^2 = 1, \qquad\qquad \gamma^2 = \gamma, \qquad\qquad \gamma g = g\gamma. \tag{2.11}$$

于是，我们可以用生成元和关系来表示 Drinfeld 双 $D(H)$。

命题 2.6。 代数 $D(H)$ 由 x_1、x_2、g、w_1、w_2、γ 生成，其关系为 （1.2）、（2.5）、（2.8）、（2.9）、（2.11）以及

$$w_1 x_1 = x_1 w_1, \qquad w_2 x_1 = x_1(w_1 + w_2) + 1 + g, \quad \gamma x_1 = x_1\gamma + x_1,$$
$$w_1 x_2 = x_2 w_1 + 1 + g, \quad w_2 x_2 = x_2(w_2 + w_1) + g\gamma, \qquad \gamma x_2 = x_2\gamma + x_2,$$
$$w_1 g = g w_1, \qquad w_2 g = g(w_1 + w_2).$$

$D(H)$ 的余乘法由 (2.6) 和 (2.10) 确定。代数$D(H)$ 的维数为 2^{10}，并且具有一个 *PBW* 基

$$\{x_1^{m_1}x_{21}^{m_2}x_2^{n_1}g^{m_3}\gamma^{m_4}w_1^{m_5}w_{21}^{m_6}w_2^{n_2} : m_i \in \mathbb{I}_{0,1},\, i \in \mathbb{I}_6,\, n_j \in \mathbb{I}_{0,3},\ j \in \mathbb{I}_2\}.$$

证明。 由 [8, 命题 2.4] 和前面的结果可得。 □

以下是关于 $D(H)$ 的一些性质。更多详情请参见 [19, 定义 12.3.4]。

命题 2.7。 霍普夫代数 $D(H)$ 是尖点的且带状的。

证明。 考虑 $D(H)$ 的以下子空间:

$$C_{\{0\}} = \Bbbk\{1, g\},\quad C_{\{1\}} = C_{\{0\}} + \Bbbk\{x_1, x_2, w_1, \gamma\},\quad C_{\{2\}} = C_{\{1\}} + \{w_2\}.$$

这是 $C = C_{\{2\}}$ 的一个余代数滤过，因此由 [19, 命题 4.1.2], C 的余根 C_0 等于 $C_{\{0\}}$。由于 C 作为代数生成 $D(H)$，由 [19, 推论 5.1.12] 可得 $D(H)_0 \subseteq C_{\{0\}}$。因此 $D(H)$ 是尖点的。根据 [19, 定理 13.2.1], $D(H)$ 是幺模的。显然， $D(H)$ 是拟三角的，且$\mathcal{S}^2(x) = gxg^{-1}$, $x \in D(H)$。由 [18, 命题 3], $D(H)$ 是带状的。□

2.4. **$D(H)$ 作为阿贝尔扩张**。回顾一下，霍普夫代数映射对 $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ 是一个短正合列，如果 ι 是单射， π 是满射，$\ker\pi = C\iota(A)^+$，且 $\iota(A) = C^{\mathrm{co}\,\pi}$（参见例如 [5]）。我们也称 C 是 A 由 B 得到的扩张。当 B 余交换且 A 交换时，该扩张称为阿贝尔。

备注2.8。若 $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C$ 是单射且忠实平坦， $\iota(A)$ 在 C 的左伴随作用下稳定， π 是满射且 $\ker\pi = C\iota(A)^+$，则序列$A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ 是正合的；见 [5, 推论 1.2.5, 1.2.14], [20]。

定理 2.9。由 x_1、 x_{21}、 w_1、 w_{21}和 g 生成的 $D(H)$ 的子代数$\mathbf{T}$ 是一个正规局部交换*Hopf*子代数，其定义关系为

$$x_1^2 = 0,\qquad x_{21}^2 = 0,\qquad w_1^2 = 0,\qquad w_{21}^2 = 0,\qquad g^2 = 1. \tag{2.12}$$

此外，维数$\mathbf{T} = 2^5$。令 $\pi\colon D(H) \to \mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 为由下式给出的代数映射

$$\pi(x_1) = \pi(w_1) = \pi(g-1) = 0,\quad \pi(x_2) = a,\quad \pi(w_2) = b,\quad \pi(\gamma) = c.$$

那么 π 是 *Hopf* 代数之间的映射，短正合列 $\mathbf{T} \overset{\iota}{\hookrightarrow} D(H) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 是正合的，且 $D(H)$是一个阿贝尔扩张。

证明。 由命题 2.6，T 是$D(H)$的一个（局部）交换霍普夫子代数，且 dimT $= 2^5$。令 $\widetilde{\mathbf{T}}$ 为由 x_1、 x_{21}、 w_1、 w_{21} 和 g 生成、满足定义关系 (2.12) 的交换 Hopf 代数；特别地，由交换性假设，关系 $x_1x_{21} = x_{21}x_1$ 和 $w_1w_{21} = w_{21}w_1$ 在 T 中成立。T 的余乘法为： $x_1 \in \mathcal{P}_{g,\,1}$(T), $w_1 \in \mathcal{P}$(T),$\Delta(x_{21}) = x_{21}\otimes 1 + 1\otimes x_{21} + x_1g\otimes x_1$, $\Delta(w_{21}) = w_{21}\otimes 1 + 1\otimes w_{21} + w_1\otimes w_1$

~和 g 是 T 的类群元。显然，存在从 T 到 T 的 Hopf 代数同构。通过直接计算，我们验证 T 是正规的。例如，我们有 $(\mathrm{ad}_r\, x_2)(g) = \mathcal{S}((x_2)^{(1)})g(x_2)_{(2)} = x_1 \in T$ 以及 $(\mathrm{ad}_r\, x_2)(x_1) = x_{21}g \in T$。此外，以下交换关系有助于证明 T是正规的： $w_2x_{21} = x_{21}w_2 + x_1(1+g)$ 和 $x_2w_{21} = w_{21}x_2$。因此，$D(H)\mathrm{T}^+$ 是 $D(H)$的一个 Hopf理想。显然， π 定义良好，保持余乘法，并诱导商$D(H)/D(H)\mathrm{T}^+$ 与 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$之间的同构。□

3. 代数 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 的性质

设 $\mathfrak{m}$ 如 §2.1 所述。这里我们证明， $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 的表示型是温和型，并且与 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 相关联的基本代数是特殊双串代数。

3.1. () 的简单 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模。设 V_0 和 V_1 分别表示平凡的一维 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模，以及带有伴随表示 ad 的三维 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模 $\mathfrak{sl}(2)$，参见注 2.1。这些模在基 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 下由 $= \{b, c, a\}$ $\mathfrak{sl}(2)$ 的 ad a =A、ad b =B、ad c = C 给出，其中

$$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathtt{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathtt{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

以下结果由 [15] 得出；为完整起见，我们给出证明。

命题 3.1。不可约表示$\mathfrak{u}(\mathfrak{m}) = \{V_0, V_1\}$。

证明。令 $V \in$ 不可约表示$\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$。由于 $b^2c = cb^2$，存在 $0 \neq v \in V$ 和β、$\xi \in \Bbbk$，使得 $b^2v = \beta v$ 和 $cv = \xi v$。由 $b^4 = 0$ 可得 $\beta = 0$。不妨设 $bv = 0$。事实上，若 $bv \neq 0$，我们将 v 替换为 bv，并将 ξ 替换为$\xi + 1$。令 $W = \Bbbk\{a^iv : i \in \mathbb{I}_{0,\ 3}\}$，这是 V的线性子空间。由于

$$ca^j = a^jc + ja^j, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad ba^2 = a^2b + a \quad \text{and } ba^3 = a^3b + a^2(c+1),$$

我们有

$$\begin{aligned} c(av) &= (\xi+1)av, & c(a^2v) &= \xi a^2v, & c(a^3v) &= (\xi+1)a^3v, \\ b(av) &= \xi v, & b(a^2v) &= av, & b(a^3v) &= (\xi+1)a^2v. \end{aligned}$$

因此， $W \neq 0$ 是 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-子模，并且 V，从而 $W = V$。我们分情况讨论。首先，若 $av \in \Bbbk\{v\}$，则 $V = \Bbbk\{v\}$ 和 $V \simeq V_0$。

若 $\{a^iv : i \in \mathbb{I}_{0,\ 1}\}$ 线性无关，且 $a^2v \in \Bbbk\{a^iv : i \in \mathbb{I}_{0,\ 1}\}$，则存在 $\lambda_i \in \Bbbk$、$i \in \mathbb{I}_2$，使得 $a^2v = \lambda_1 v + \lambda_2 av$。将 b 应用于此等式，得到 $ba^2v = \lambda_2 bav$，即 $av = \lambda_2\xi v$，矛盾。

现在假设 $\{a^iv : i \in \mathbb{I}_{0,2}\}$线性无关，且 $a^3v \in \Bbbk\{a^iv : i \in \mathbb{I}_{0,2}\}$。因此，存在 $\lambda_i \in \Bbbk$, $i \in \mathbb{I}_3$，使得 $a^3v = \lambda_1 v + \lambda_2 av + \lambda_3 a^2v$。作用于 b，得到 $(\xi+1)a^2v + \lambda_3 av + \lambda_2\xi v = 0$。于是 $\xi = 1$ 和$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 以及 $a^3v = \lambda_1 v$。应用 a，得到 $0 = a^4v = \lambda_1 av$，因此$\lambda_1 = 0$。所以 $V \simeq V_1$。

最后，假设 $\{a^iv : i \in \mathbb{I}_{0,3}\}$ 是 V 的一组基。由于 $c^2 + c = 0$，我们有 $\xi = 0$ 或 1。如果 $\xi = 1$，分别地，若 $\xi = 0$，则 $U = \Bbbk\{a^3v\}$，分别地$U = \Bbbk\{a^iv : i \in \mathbb{I}_3\}$，是 V 的一个子模，因此 $V = U$，矛盾。□

注记 3.2。由命题 3.1，或直接可得，我们推知 $V_1^* \simeq V_1$。

由定理 2.9，$\mathfrak{u}(\mathfrak{m}) \simeq D(H)/I$，其中 I 是一个幂零理想。因此，不可约表示 $D(H)$ $\simeq$ 不可约表示 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$。由命题 3.1，我们得出：

推论 3.3。不可约表示 $D(H) = \{V_0, V_1\}$，其中 V_0 是平凡的 $D(H)$-模，而 V_1 是一个三维模，其中 x_1、x_{21}、w_1 和 w_{21} 的作用为 0；g 的作用为 恒等映射；x_2、w_2、γ 的作用矩阵分别为 `A`，`B`，`C`，见 (3.1)。□

3.2. 简单 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模的扩张。我们的下一个目标是计算群 $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}(V_i, V_j)$，$i, j \in \mathbb{I}_{0,\ 1}$。由引理 2.2 可知

$$a = a^2b + ba^2, \qquad b = b^2a + ab^2. \tag{3.2}$$

因此，如果 $a^2 = 0$ 或 $b^2 = 0$ 作用于一个 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模 V上，那么 $a = b = c = 0$属于 $\operatorname{End} V$。

引理 3.4。任意二维 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模都是平凡的。因此，

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}(V_0, V_0) = 0.$$

证明。前面的备注适用，因为 a^2 在此类模上以 0 作用。□

我们将需要以下更一般的结果。

引理 3.5。设 $V \in_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})} \mathcal{M}$。则，$\rho_V(a)$ 没有大小为 2 的 *Jordan* 块。

证明。取 $\{v_i : i \in \mathbb{I}_m\}$ 为 V 的一组基，使得 $av_i = \lambda_i v_{i+1}$，其中$\lambda_i \in \mathbb{I}_{0,\ 1}$ 对于 $i < m$ 和 $av_m = 0$。那么 $bv_j = \sum_{k \in \mathbb{I}_m} \beta_{jk} v_k$，其中 $\beta_{jk} \in \Bbbk$。

取 $i \in \mathbb{I}_m$ 使得 $av_i = v_{i+1}$ 且 $av_{i+1} = 0$。由 (3.2) 可得

$$v_{i+1} = av_i = a^2bv_i = a^2 \sum_{k \in \mathbb{I}_m} \beta_{ik} v_k = \sum_{k \in \mathbb{I}_m} \beta_{ik}\lambda_k\lambda_{k+1} v_{k+2}.$$

若 $i = 1$，则 $v_2 \in \Bbbk\{v_i : i \in \mathbb{I}_{3,\ m}\}$，矛盾。若 $i > 1$，则

$$1 = \beta_{ii-1}\lambda_{i-1}\lambda_i.$$

因此 $\lambda_{i-1} \neq 0$，即 $av_{i-1} = v_i$，结论得证。□

对于任意 ϑ、λ、$\mu \in \Bbbk$、$V_{\vartheta,\ \lambda,\ \mu} \in_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})} \mathcal{M}$，记 $\mathbb{k}^4$，其作用由下式给出

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \\ \mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

引理 3.6。若 U 是 V_0 由 V_1扩张得到的扩张，则 U 同构于$V_{\vartheta,\ \lambda,\ \mu}$，其中 ϑ，λ，$\mu \in \Bbbk$。此外，

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}(V_0, V_1) = 2. \tag{3.3}$$

证明。设 $0 \to V_1 \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{\psi} V_0 \to 0$ 是 ${}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}\mathcal{M}$中的一个正合列。我们将 V_1 视为 U的子空间。回忆基 $\{v_i : i \in \mathbb{I}_3\}$ 是 V_1的基，它按（3.1）实现了 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$的作用。固定 $w_0 \in V_0 \backslash 0$。取 $v_0 \in U$ 使得 $\psi(v_0) = w_0$；则 $\{v_i : i \in \mathbb{I}_{0,\ 3}\}$ 是 U 和 $bv_0 \in V_1$的一组基。因此存在 κ、λ、$\mu \in \Bbbk$ 使得

$$bv_0 = \kappa v_1 + \lambda v_2 + \mu v_3.$$

令 m_a 表示 $a_{|U}$ 的最小多项式；则 $m_a = X^3$ 或 X^4。

情形 1。存在 $u \in U$，使得 $au = v_1$（即 $m_a = X^4$）。

令 $\vartheta \in \Bbbk^\times$ 满足 $\psi(u) = \vartheta^{-1} w_0$；设 $v_0 = \vartheta u$，使得 $\psi(v_0) = w_0$ 且 $av_0 = \vartheta v_1$。现在 $cv_0 = (ab + ba)v_0 = \kappa v_2 + \lambda v_3$；因此 $\kappa = 0$，因为

$$v_1 = \vartheta^{-1} a v_0 = \vartheta^{-1}(ac + ca)v_0 = \vartheta^{-1}\kappa v_3 + v_1.$$

情形 2。存在 $u \in U \backslash V_1$，使得 $au = 0$（即 $m_a = X^3$）。

设 $v_0 \in \Bbbk\{u\}$ 使得 $\psi(v_0) = w_0$。则 $cv_0 = \kappa v_2 + \lambda v_3$ 和$0 = av_0 = (ac + ca)v_0 = a(\kappa v_2 + \lambda v_3) = \kappa v_3$；因此 $\kappa = 0$。这里令 $\vartheta = 0$。

在这两种情形下，$U \simeq V_{\vartheta,\ \lambda,\ \mu}$ 通过将 $\{v_i : i \in \mathbb{I}_{0,\ 3}\}$ 对应到典范基。接下来，假设存在一个同构 $T : V_{\vartheta,\ \lambda,\ \mu} \to V_{\widetilde{\vartheta},\ \widetilde{\lambda},\ \widetilde{\mu}}$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_{\vartheta,\lambda,\mu} & \longrightarrow & V_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle T} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_{\widetilde{\vartheta},\widetilde{\lambda},\widetilde{\mu}} & \longrightarrow & V_0 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

则 $T(v_i) = v_i, i \in \mathbb{I}_3$，而 $T(v_0) = v_0 + \nu v_1 + \xi v_2 + \zeta v_3$。由于 T保持$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$的作用，我们得到 $\nu = \xi = 0, \vartheta = \vartheta, \lambda = \lambda + \zeta, \mu = \widetilde{\mu}$；这意味着 (3.3)。□

显然，$V_{\vartheta,\ \lambda,\ \mu}$是不可分解的，除非（$\vartheta$，$\lambda$，$\mu$）$= 0$。

设 L 为一个霍普夫代数，且 $M \in {}_L\mathcal{M}$。设 M^*、${}^*M \in {}_L\mathcal{M}$ 分别表示 M 的线性对偶，其作用分别由 $x \cdot \alpha = \alpha \circ \mathcal{S}\ (x)$ $x \cdot \alpha = \alpha \circ \mathcal{S}^{-1}\ (x)$ 给出，其中 $x \in L$、$\alpha \in \mathrm{Hom}\ (M,\ \Bbbk)$。由于反变函子 $M \mapsto M^*$ 和 $M \mapsto {}^*M$ 是正合的，我们有自然同构

$$\mathrm{Ext}^1_L(M, N) \simeq \mathrm{Ext}^1_L(N^*, M^*) \simeq \mathrm{Ext}^1_L({}^*N, {}^*M), \qquad N, M \in {}_L\mathcal{M}. \tag{3.4}$$

引理 3.7。若 U 是 V_0 被 V_1扩张，则$U \simeq V^*_{\vartheta,\ \lambda,\ \mu}$，其中某些$\vartheta$，$\lambda$，$\mu \in \Bbbk$。此外，$\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}\ (V_1,\ V_0) = 2$。□

引理 3.8。$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}\ (V_1,\ V_1) = 0$。

证明。设 $0 \to V_1 \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{\psi} V_1 \to 0$ 是 ${}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}\mathcal{M}$中的一个正合列；将$V_1$ 视为 U的子空间。回忆基 $\{v_i : i \in \mathbb{I}_3\}$ 属于 V_1，通过 (3.1) 实现了 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$的作用。选取 $v_4 \in U$ 使得 $\psi(v_4) = v_1$，并令 $v_5 = av_4$,$v_6 = av_5$。于是 $\psi(v_5) = v_2$ 且 $\psi(v_6) = v_3$。因此 $\{v_i : i \in \mathbb{I}_6\}$ 是一个基

属于 U。由于 $av_3 = 0$ 且 $a^2v_6 = a^4v_4 = 0$，因此对于某个 $\lambda \in \Bbbk$，有 $av_6 \in V_1$ 且 $av_6 = \lambda v_3$。若 $\lambda \neq 0$，则 $\Bbbk\{v_1 + \lambda^{-1}v_5, v_2 + \lambda^{-1}v_6\}$ 给出了 a作用下一个大小为 2 的 Jordan 块，这与引理 3.5 矛盾。因此 $av_6 = 0$。由于 ψ 是一个态射，存在 $\vartheta_i, \lambda_i, \mu_i \in \Bbbk$，$i \in \mathbb{I}_3$，使得

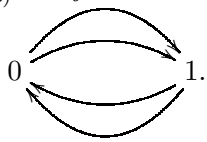
$$bv_4 = \sum_{i\in\mathbb{I}_3} \vartheta_i v_i, \qquad bv_5 = v_4 + \sum_{i\in\mathbb{I}_3} \lambda_i v_i, \qquad bv_6 = v_5 + \sum_{i\in\mathbb{I}_3} \mu_i v_i.$$

根据关系 $c = ab + ba$，我们有

$$\begin{aligned} cv_4 &= \lambda_1 v_1 + (\vartheta_1 + \lambda_2)v_2 + (\vartheta_2 + \lambda_3)v_3 + v_4, \\ cv_5 &= \mu_1 v_1 + (\lambda_1 + \mu_2)v_2 + (\mu_3 + \lambda_2)v_3, \\ cv_6 &= v_6 + \mu_1 v_2 + \mu_2 v_3. \end{aligned}$$

由 $a = ac + ca$，我们得到 $\lambda_1 = \mu_1 = 0$ 和 $\mu_3 = \vartheta_1$。此外，由于 $b = bc + cb$，可得 $\mu_2 = \lambda_2 = \vartheta_3 = 0$、$\vartheta_2 = \lambda_3$。因此，$U = V_1 \oplus Z$（其中 $Z := \Bbbk\{v_4 + \vartheta_1 v_2 + \vartheta_2 v_3, v_5 + \vartheta_1 v_3, v_6\}$）是一个 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-子模。□

$\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 的 ***Gabriel*** 箭图 是箭图 Ext $Q(\mathfrak{u}(\mathfrak{m}))$，其顶点为 $\{0, 1\}$，且从顶点 i 到顶点 j 有 $\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}(S_i, S_j)$ 个箭头，也就是说

(3.5) 

因此，Ext $Q(\mathfrak{u}(\mathfrak{m}))$ 的分离箭图是两个 B_2 型 Dynkin 图的不交并。见 [10, X.2.6]。在下一小节中，我们将证明 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 的表示型实际上是温和型。

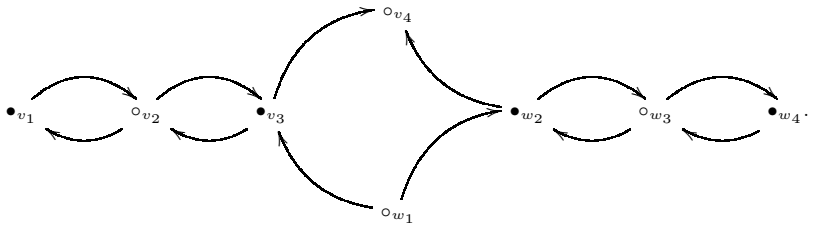
3.3. 简单模的射影覆盖。令 V_0 和 V_1 为 §3.1 中的简单 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模。分别以 $P(V_i)$ 和 $I(V_i)$ 表示 V_i、$i \in \mathbb{I}_{0,\ 1}$ 的射影覆盖和内射包。根据 [19, 推论 8.4.3],$\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 是一个 Frobenius 代数；因此它是自内射的，并且 $P(V_i) \simeq I(V_i)$，$i \in \mathbb{I}_{0,\ 1}$。为了确定 $P(V_0)$，我们定义八维 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模 M，其基为 $\{v_i, w_i : \ i \in \mathbb{I}_4\}$，作用由下式给出

$$\begin{aligned} &av_i = v_{i+1},\ i \in \mathbb{I}_3, && bv_i = 0,\ i = 1, 4, && cv_i = v_i,\ i = 1, 3, \\ &av_4 = 0, && bv_i = v_{i-1},\ i \in \mathbb{I}_{2,3}, && cv_i = 0,\ i = 2, 4, \\ &aw_i = w_{i+1},\ i \in \mathbb{I}_3, && bw_i = v_{i+2},\ i \in \mathbb{I}_2, && cw_i = 0,\ i = 1, 3, \\ &aw_4 = 0, && bw_i = w_{i-1},\ i \in \mathbb{I}_{3,4}, && cw_i = w_i,\ i = 2, 4. \end{aligned}$$

我们可以用有向图表示 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 在 M 上的作用。箭头从左向右表示 a 的作用，而箭头从右向左则表示 b 的作用。此外，$\circ_u$ 表示 $cu = 0$，而 $\bullet_u$ 表示

$cu = u$、 $u \in M$。那么，与 M 相关联的有向图为

(3.6)



显然，向量子空间 $M_0 = \Bbbk\{v_4\}$, $M_1 = \Bbbk\{v_i : i \in \mathbb{I}_4\}$和 M_2: $= M_1 \oplus \Bbbk\{w_i : i \in \mathbb{I}_{2,\ 4}\}$ 是 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 的子模。

引理 3.9。沿用上述记号。

(i) $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq M$ 是 M 的合成列，其因子为

$$M_0 \simeq V_0, \qquad M_1/M_0 \simeq V_1, \qquad M_2/M_1 \simeq V_1, \qquad M/M_2 \simeq V_0.$$

(ii) 底 $M = V_0$。特别地， M 是一个不可分解的 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$模。(iii) 根 $M = M_2$。(iv) 维数 $P(V_0) \geq$ 维数 $M = 8$。

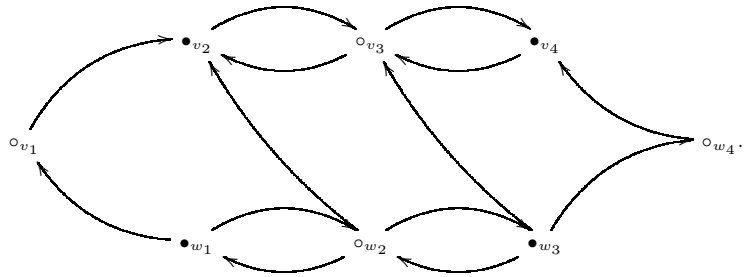
证明。(i)、(ii) 和 (iii) 可通过直接计算得到。对于 (iv)，考虑 ϑ： $V_0 \to M$，这是由 (i) 给出的嵌入，并令 ι： $V_0 \to I(V_0)$ 为典范嵌入。由于 $I(V_0)$ 是 V_0 的内射包，存在一个态射 κ： $M \to I(V_0)$，使得 $\kappa\vartheta = \iota$。令 $K = \ker\kappa$。若$K \neq 0$，则 $0 \neq \operatorname{soc} K \subseteq \operatorname{soc} M = \vartheta(V_0)$。但 $\kappa\vartheta = \iota$，因此 $K \cap \vartheta(V_0) = 0$，这与假设矛盾。因此， κ 是单射，结论得证。□

接下来，令 $N \in_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}\mathcal{M}$ 的基为 $\{v_i, w_i : i \in \mathbb{I}_4\}$，其作用定义如下

$$\begin{array}{lll}
av_i = v_{i+1},\ i \in \mathbb{I}_3, & bv_i = 0,\ i \in \mathbb{I}_2, & cv_i = 0,\ i = 1,3,\\
av_4 = 0, & bv_i = v_{i-1},\ i \in \mathbb{I}_{3,4}, & cv_i = v_i,\ i = 2,4,\\
aw_i = w_{i+1},\ i \in \mathbb{I}_3, & bw_i = v_i,\ i = 1,4, & cw_i = w_i,\ i = 1,3,\\
aw_4 = 0, & bw_i = v_i + w_{i-1},\ i \in \mathbb{I}_{2,3}, & cw_i = 0,\ i = 2,4.
\end{array}$$

如同 (3.6) 中所示，我们可以通过有向图看出 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 对模 N 的作用

(3.7)



现在，$N_0 = \Bbbk\{v_i : i \in \mathbb{I}_{2,\ 4}\}$、$N_1 = N_0 \oplus \Bbbk\{v_1\}$ 和 $N_2 = N_1 \oplus \Bbbk\{w_4\}$ 是 N 的子模。与引理 3.9 类似，我们有以下结果。

引理 3.10. 沿用上述记号。

(i) $N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N$ 是 N 的合成列，其因子为

$$N_0 \simeq V_1, \qquad N_1/N_0 \simeq V_0, \qquad N_2/N_1 \simeq V_0, \qquad N/N_2 \simeq V_1.$$

(ii) 底 $N = V_1$。特别地，N 是一个不可分解的 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模。(iii) 根 $N = N_2$。(iv) 维数 $P(V_0) \geq$ 维数 $N = 8$。

□

命题 3.11。设 V_0 和 V_1 是简单 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模。则

$$P(V_0) \simeq I(V_0) \simeq M, \qquad P(V_1) \simeq I(V_1) \simeq N.$$

证明。由于 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m}) \simeq P(V_0) \oplus P(V_1)^3$ 是 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模，我们得到

$$32 = \dim \mathfrak{u}(\mathfrak{m}) = \dim P(V_0) + 3 \dim P(V_1).$$

于是，根据引理 3.9 和引理 3.10，我们有 $\dim P(V_i) = 8$, $i \in \mathbb{I}_{0,1}$。 □

给定一个代数 A，若 $\dim A < \infty$, M 在 ${}_A\mathcal{M}$ 中是单串 的，则其具有唯一的合成列；例如，当 $\operatorname{soc} M$ 和 $M/\operatorname{soc} M$ 是简单的时，M 是单串的。现在，如果 A 中的每个不可分解射影 P 都具有单列子模 U 和 T，使得 $U + T = \operatorname{rad} P$ 且 $U \cap T$ 为 0 或简单的，则称 A 是双串 的。双串代数具有温和表示型 [12]。

引理 3.12。代数 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 是双串代数，并且具有温和表示型。

证明。根据引理 3.9 (iii)，$M_2 = \operatorname{rad} M = U + V$，其中 $U = M_1$ 和 $V = \Bbbk\{v_4, w_i : i \in \mathbb{I}_{2,\ 4}\}$。现在 $U \cap V = \Bbbk\{v_4\} \simeq V_0$，因此 U 和 V 是单串。类似地，根据引理 3.10 (iii)，$\operatorname{rad} N = N_2 = U' + V'$，其中 $U' = N_1$ 和 $V' = \Bbbk\{v_i, w_4 : i \in \mathbb{I}_{2,\ 4}\}$。现在 $U' \cap V' = \Bbbk\{v_i : i \in \mathbb{I}_{2,\ 4}\} \simeq V_1$ 和 U', V' 是单串。由于 $M \simeq P(V_0)$ 和 $N \simeq P(V_1)$ 分别是 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模中在同构意义下唯一的不可分解射影模，$\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 是双串。□

3.4. 相应的有界箭图。 我们汇总有限维代数 A 的表示论的一些事实。令 $\{e_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ 为 A 的一组完备本原正交幂等元。考虑 $\mathbb{I}_n$ 上由 $i \sim j \iff Ae_i \simeq Ae_j$ 给出的等价关系，并从 $\sim$ 中选取一组代表元 $\mathbb{J}$。基本代数 $A^{\mathfrak{b}}$ （对应于前述选择）为

$$A^{\mathfrak{b}} := e_A A e_A, \qquad \text{where} \qquad e_A := \sum_{j \in \mathbb{J}} e_j.$$

本原正交幂等元或代表元的不同选择会产生不同但同构的基本代数，参见 [9, I.6.5]。

引理 3.13。 $\Bbbk$-线性函子

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ind}^l_{e_A} : {}_{A^{\mathfrak{b}}}\mathcal{M} \to {}_A\mathcal{M}, \qquad \mathrm{Ind}^l_{e_A}(N) := Ae_A \otimes_{A^{\mathfrak{b}}} N, \\ &\mathrm{Res}^l_{e_A} : {}_A\mathcal{M} \to {}_{A^{\mathfrak{b}}}\mathcal{M}, \qquad \mathrm{Res}^l_{e_A}(M) := e_A M, \end{aligned} \tag{3.8}$$

彼此构成范畴等价，且互为准逆。因此，${}_A\mathcal{M}$ 与 ${}_{A^{\mathfrak{b}}}\mathcal{M}$中的简单对象以及不可分解对象的同构类集合之间存在双射。

证明。 在 [9, I.6.10] 中已证明这些函子

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ind}^r_{e_A} : \mathcal{M}_{A^{\mathfrak{b}}} \to \mathcal{M}_A, \qquad \mathrm{Ind}^r_{e_A}(N) := N \otimes_{A^{\mathfrak{b}}} e_A A, \\ &\mathrm{Res}^r_{e_A} : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_{A^{\mathfrak{b}}}, \qquad \mathrm{Res}^r_{e_A}(M) := M e_A, \end{aligned}$$

确定一个范畴等价。运用相同的论证，我们可以得到左侧版本，结论随之成立。□

回忆一下，有界箭图是一个有序对 (Q, I)，其中 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ 是一个箭图，而 I 是路径代数 $\Bbbk Q$ 中的一个容许理想；这里，容许是指存在 $m \geq 2$ 使得 $R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$，其中 R_Q^m 是由长度为 m 的路径生成的 $\Bbbk Q$ 的双边理想。相应的有界箭图代数是 $\Bbbk Q/I$，它是基本代数 [9, II.2.10]。令 $\mathsf{rep}(Q, I)$ 表示由 I 约束的 Q 的有限维（右）表示范畴，如 [9, III.1.4] 所述。由 [9, III.1.6], 可知，存在范畴等价 $\mathsf{rep}(Q, I) \to \mathcal{M}_{\Bbbk Q/I}$。

给定有限维基本代数 B，取一组完备的原始正交幂等元 $\{e_i : i \in \mathbb{I}_n\}$。于是，有界箭图 Q_B的顶点集为 $\mathbb{I}_n$，从 i 到 j 的箭头由 $e_i \left(\mathrm{Jac}\ B/\mathrm{Jac}^2 B\right) e_j$的一组基来标记；根据 [10, III.1.14]，该箭图同构于 B的 Gabriel 箭图，但稍后我们需要前一种表示。现在，B同构于有界箭图代数 $\Bbbk Q_B/I$，其中 I 是一个适当的容许理想；见 [9, II.3.7]。

定义 3.14。 [21] 设 (Q, I) 是一个有界箭图。代数 $A = \Bbbk Q/I$称为特殊双串 代数，条件是对任意顶点 $i \in Q_0$

$$|\{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) = i\}| \leq 2, \qquad |\{\alpha \in Q_1 : t(\alpha) = i\}| \leq 2;$$

此外，给定 $\alpha,\beta,\gamma\in Q_1,\ \alpha\neq\beta$，还要求

$$\text{if } s(\alpha)=s(\beta)=t(\gamma),\ \text{then } \gamma\alpha\in I \text{ or } \gamma\beta\in I,$$
$$\text{if } t(\alpha)=t(\beta)=s(\gamma),\ \text{then } \alpha\gamma\in I \text{ or } \beta\gamma\in I.$$

这类代数最初在 [21], 中被称为特殊代数，文中证明了它们是双串代数。“特殊双串”这一名称已见于 [17]。

3.5. 代数 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$ 是特殊双串代数。 由于反 antipode，$\mathfrak{u}(\mathfrak{m})\simeq\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathrm{opp}}$，因此存在范畴等价 ${}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}\mathcal{M}\simeq\mathcal{M}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}$。然而，我们不会使用反 antipode；相反，我们将在本小节中计算一个基本代数 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$、与 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$ 相关联的有界箭图(Q,I)，以及一个代数同构 $\psi:\ \mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}\to\big(\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}\big)^{\mathrm{opp}}$。我们还将证明 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$ 是特殊双串代数；这将使我们能够在第 4 节计算不可分解的$\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$。

我们首先计算 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$中的本原幂等元 e_0 和 e_1，它们生成分别同构于射影覆盖 $P(V_0)$和 $P(V_1)$的子模。

引理 3.15。 元素 $e_0=(1+ab+a^2b^2)(1+c)$ 和 $e_1=(1+a^2b^2)c$是 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 中的幂等元，并满足 $P(V_0)\simeq\mathfrak{u}(\mathfrak{m})e_0$、$P(V_1)\simeq\mathfrak{u}(\mathfrak{m})e_1$。

证明。 由引理 2.2，我们推知 e_0 和 e_1 是幂等元，并满足 y

$$ab^3e_0=b^2e_0,\qquad a^2b^3e_0=be_0,\qquad a^3b^3e_0=(ab+c)e_0,$$
$$ba^3e_0=a^2e_0,\qquad b^2a^3e_0=ae_0,\qquad b^3a^3e_0=(ab+c)e_0.$$

于是，根据赋值 $v_1\mapsto b^3e_0$ 和 $w_1\mapsto e_0$，$P(V_0)\simeq\mathfrak{u}(\mathfrak{m})e_0$。此外，

$$ba^3e_1=a^3be_1,\qquad b^2a^3e_1=a^2be_1,\qquad b^3a^3e_1=abe_1,$$
$$ba^2e_1=bae_1+ba^2be_1,\qquad bae_1=be_1+babe_1.$$

于是，根据赋值 $v_1\mapsto be_1$ 和 $w_1\mapsto e_1$，$P(V_1)\simeq\mathfrak{u}(\mathfrak{m})e_1$。 □

令 $e=e_0+e_1$。由引理 2.2 可知，以下关系在 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 中成立：

$$\begin{array}{lll}
e_0a=ae_1+ac, & e_0a^2=a^2e_0+a^2(1+c), & e_0a^3=a^3e_1,\\
e_1a=ae_0, & e_1a^2=a^2e_1+a^2c, & e_1a^3=a^3e_0+a^3(1+c),\\
e_0b=be_1, & e_0b^2=b^2e_0+b^2(1+c), & e_0b^3=b^3c,\\
e_1b=be_0+b(1+c), & e_1b^2=b^2c, & e_1b^3=b^3e_0,\\
ea=ae+ac, & ea^2=a^2e+a^2, & ea^3=a^3e+a^3(1+c),\\
eb=be+b(1+c), & eb^2=b^2e+b^2, & eb^3=b^3e+b^3c,\\
 & ec=ce=e_1. &
\end{array}$$

现在，令

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}=e\mathfrak{u}(\mathfrak{m})e.$$

由前面的关系可知，基本代数 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$ 有一组基

$$\{e_0,e_1,ae_0,a^3e_1,b^3e_0,be_1,a^3b^3e_0,abe_1\}. \tag{3.9}$$

简单的（左） $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$-模为 $eV_0 = V_0$ 和 $eV_1 = \Bbbk\{v_1\}$，参见第 3.1 小节。由此我们注意到， $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$ 的 Jacobson根为

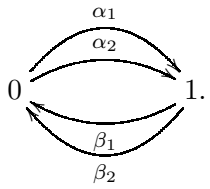
$$\operatorname{Jac}\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}} = \langle ae_0, a^3e_1, b^3e_0, be_1, a^3b^3e_0, abe_1\rangle.$$

因此， $\operatorname{Jac}^2\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}} = \langle a^3b^3e_0, abe_1\rangle$ 和

$$\begin{aligned} &e_i\left(\operatorname{Jac}\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}/\operatorname{Jac}^2\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}\right)e_i = 0, && i \in \mathbb{I}_{0,1},\\ &e_0\left(\operatorname{Jac}\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}/\operatorname{Jac}^2\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}\right)e_1 = \Bbbk\{a^3e_1, be_1\},\\ &e_1\left(\operatorname{Jac}\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}/\operatorname{Jac}^2\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}\right)e_0 = \Bbbk\{ae_0, b^3e_0\}. \end{aligned}$$

因此， $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$的普通箭图记为 $Q := Q_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}}$，其为

(3.10)



如前所述，这与 Gabriel 箭图 (3.5) 一致，见 [10, III.1.14]。

定理3.16。 (i) 设 Q 为箭图 (3.10)。则， $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}} \simeq \Bbbk Q/I$，其中

$$I = \langle \alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1\rangle \tag{3.11}$$

是由以下方式定义的代数满同态 $\varphi : \Bbbk Q \to \mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$ 的核

$$\varphi(\alpha_1) = a^3e_1, \quad \varphi(\alpha_2) = be_1, \quad \varphi(\beta_1) = ae_0, \quad \varphi(\beta_2) = b^3e_0, \tag{3.12}$$

以及 $\varphi(\varepsilon_i) = e_i$。这里， ε_i 是与 $i \in \mathbb{I}_{0,1}$ 相关联的长度为0 的平凡路径。

(ii) 代数 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$ 是特殊双串。

证明。 仿照 [9, II.3.7]，中的证明，我们看到 (3.12) 确定了一个满射代数映射 φ： $\Bbbk Q \to \mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$。为了证明 φ 是单射，记 $\overline{u} := u + I \in \Bbbk Q/I$。注意到 $\{\overline{e}_0, \overline{e}_1, \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \overline{\alpha_1\beta_2}, \overline{\beta_1\alpha_2}\}$是 $\Bbbk Q/I$ 的一组基，因此 $\dim\left(\Bbbk Q/I\right) = 8$。由于 $I \subset \ker\varphi$ 且 $\dim\left(\Bbbk Q/\ker\varphi\right) = \dim\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}} = 8$，可知 $I = \ker\varphi$。这就证明了 (i)，而 (ii) 则由定义 3.14 立即得出。□

最后，设 $\psi : \mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}} \to \mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$ 为

$$\begin{aligned} &\psi(e_0) = e_0, && \psi(e_1) = e_1, && \psi(abe_1) = abe_1, && \psi(a^3b^3e_0) = a^3b^3e_0,\\ &\psi(ae_0) = a^3e_1, && \psi(a^3e_1) = ae_0, && \psi(b^3e_0) = be_1, && \psi(be_1) = b^3e_0. \end{aligned}$$

直接验证可知，这是一个代数反同构。

4. 不可分解 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模

4.1. 分类。 设 (Q, I) 是一个有界箭图，且 $A := \Bbbk Q/I$ 是特殊双串。 $\mathcal{M}_A$ 中的不可分解对象已在 [24, 命题 2.3] 中确定；我们沿用 [17, §1] 中的方法。具体而言，$\operatorname{indec} A$ 由简单对象、射影-单射不可分解对象、字符串（见第 4.2 小节）或带模（见第 4.3 小节）构成。本节的主要结果如下：

定理 4.1. 集合 不可分解$\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 由以下对象构成：

(i) 单模 V_i 及其射影覆盖 $P(V_i)$, $i \in \mathbb{I}_{0,\ 1}$,

(ii) 字符串模

$$\mathtt{U}_{i,r}, \qquad i \in \mathbb{I}_4,\ r \geq 1; \qquad \mathtt{V}_{j,t}, \qquad \mathtt{W}_{j,t}, \qquad j \in \mathbb{I}_2,\ t \geq 0. \tag{4.1}$$

其作用由 (4.5) 和表 *1* 描述；

(iii) 带模 $\mathtt{A}_{\lambda,n}$, $\mathtt{B}_{\lambda,n}$, $n \geq 1$, $\lambda \in \Bbbk^{\times}$，其作用由$(4.7)$ 和表 *2* 描述。

为证明该定理，我们将函子 F 作用于 $\mathsf{rep}(Q, I)$ 中的不可分解对象，其中 $\mathsf{F} : \mathsf{rep}(Q, I) \to {}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}\mathcal{M}$ 由以下范畴等价的复合给出

$$\mathrm{rep}(Q,I) \xrightarrow[\mathsf{F}_1]{\sim} \mathcal{M}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\flat}} \xrightarrow[\mathsf{F}_2]{\sim} {}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\flat}}\mathcal{M} \xrightarrow[\mathsf{F}_3]{\sim} {}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}\mathcal{M}, \qquad \mathsf{F} = \mathsf{F}_3\mathsf{F}_2\mathsf{F}_1 \tag{4.2}$$

其中 F_1 由 [9, III.1.6] 和定理3.16给出；F_2 由上文定义的反同构 ψ 诱导；而 $\mathsf{F}_3 = \mathsf{Ind}_{e_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}}^{l}$ 则由 (3.8) 给出。

在小节 4.2 中，我们计算范畴 ${}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\flat}}\mathcal{M}$中的弦模，并应用 (3.8) 中的函子 $\mathsf{Ind}_{e_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}}^{l}$ 来描述 ${}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}\mathcal{M}$ 中相应的不可分解对象。在小节 4.3 中，我们对带模进行同样的处理。

注记 4.2. 设 F 是由（4.2）给出的函子。那么

$$\mathsf{F}(S(i)) = V_i, \quad \mathsf{F}(P(i)) = P(V_i), \quad i \in \mathbb{I}_{0,1},$$

其中， $S(i)$ 和 $P(i)$ 分别是 $\mathsf{rep}(Q, I)$ 中指标为 i 的简单对象和不可分解投射对象。证明是显然的。

4.2. 弦模。 为方便不熟悉有限维代数表示的读者，我们简要介绍弦模的计算。先介绍一些术语。设 (Q, I) 是一个有界箭图。

- 一个零路径 是 Q 中属于 I 的一条路径 p。
- (Q, I) 的零关系 是一个零路径，且其所有真子路径都不是零路径。

∘ (Q, I) 的二项关系 是一对非零路径（p, q），它们具有相同的起点 i 和相同的终点 j，并且满足 $\lambda p + \mu q \in I$，其中$\lambda, \mu \in \Bbbk^\times$（在标量倍数意义下唯一）。那么，$p, q$是二项关系（$p, q$）的极大子路径，而 i 和 j 则分别是它们的起点和终点。

∘ 给定 $\alpha \in Q_1$，我们用 $\alpha^{-1}: t(\alpha) \to s(\alpha)$ 表示 α 的形式逆；这将扩展到 Q 中的路径。

∘ 长度为 $r > 0$ 的游走 是一个序列 $u = c_1 \dots c_r$，其中 c_i 是一条箭头或一条箭头的逆，并且 $s(c_{i+1}) = t(c_i)$，对所有 $i \in \mathbb{I}_{r-1}$ 均成立。顶点 i 的平凡游走是平凡路径 ε_i。游走 u 称为约化的，如果u是平凡的，或者 $u = c_1 \dots c_r$ 且 $c_{i+1} \neq c_i^{-1}$，对所有 $i \in \mathbb{I}_{r-1}$ 均成立。

∘ 设 $u = c_1 \dots c_r$ 是 Q 中一条非平凡约化游走。若存在 $i \leq j \in \mathbb{I}_r$ 使得 $p = c_i \dots c_j$ 或 $p^{-1} = c_i \dots c_j$，则 Q 的一条非平凡路径p 包含 于 u 中。

∘ 若字符串是约化游走 $u = c_1 \dots c_r$，且 Q 中包含的每条路径 u既非零关系，也非二项关系的极大子路径。

例4.3。 设(Q, I)由(3.10)和(3.11)给出。约化游走$\alpha_1\beta_2\alpha_1\alpha_2^{-1}$不是$(Q, I)$中的字符串，因为 $\alpha_1\beta_2$ 是二项关系$(\alpha_1\beta_2, \alpha_2\beta_1)$的极大子路径。但 $\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_1$ 是(Q, I)中的字符串。

定义4.4。 [24, §2] 设 u 是有界箭图(Q, I)中的一个字符串。字符串模 $M(u) = (M_k, \varphi\gamma)_{k \in Q_0,\ \gamma \in Q_1} \in \mathsf{rep}(Q, I)$ 按以下步骤定义：

◇ 如果 u 是顶点 i处的平凡路径，那么 $M(u)$ 就是 i处的简单模。

◇ 否则 $u = c_1 \dots c_r$，若 $r \geq 1$，且 c_i或 c_i^{-1}是一条箭头。对于每个$i \in \mathbb{I}_{r+1}$，我们考虑一个一维向量空间 $U_i := \Bbbk u_i$。对于 $i \in \mathbb{I}_r$，$U_{c_i}: U_i \to U_{i+1}$ 表示如下映射：当 c_i 是一条箭头时，将 u_i 映射到 u_{i+1}；而$U_{c_i}: U_{i+1} \to U_i$ 表示如下映射：当 c_i^{-1}是一条箭头时，将 u_{i+1} 映射到 u_i。

◇ 现在，对于 $k \in Q_0$，M_k 是所有满足 $s(c_i) = k$ 或$i = r + 1$（若 $t(c_r) = k$）的 U_i's 的直和；这里空直和为 0。

◇ 对于出现在 u中的 $\gamma \in Q_1$，$\varphi\gamma$ 是满足 $c_i = \gamma$或 $c_i^{-1} = \gamma$时的映射 U_{c_i} 的直和；否则为 $\varphi_\gamma = 0$。
如 [17] 中所解释的，这确实是有界箭图上的一个模。

在本小节余下部分，(Q, I) 表示由 (3.10) 和 (3.11) 给出的有界箭图。为了确定它的所有字符串，我们考虑以下词：

$$s_1 = \alpha_1\alpha_2^{-1}, \qquad s_2 = \alpha_1^{-1}\alpha_2, \qquad s_3 = \beta_1\beta_2^{-1} \qquad \text{and} \qquad s_4 = \beta_1^{-1}\beta_2$$

在词汇表 $\{\alpha_i, \alpha_i^{-1}, \beta_i, \beta_i^{-1}$ 中：$i \in \mathbb{I}_2\}$。

引理 4.5. Q, I) 中的字符串是平凡路径 ε_0, ε_1，以及以下族

$$
\begin{aligned}
&u_i(r) = s_i^r, && i \in \mathbb{I}_4,\ r \geq 1;\\
&v_1(t) = s_1^t\alpha_1, \quad v_2(t) = \alpha_2 s_2^t, && t \geq 0;\\
&w_1(t) = s_3^t\beta_1, \quad w_2(t) = \beta_2 s_4^t, && t \geq 0;
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

以及逆向族

$$
\begin{aligned}
&s_1^{-r} = \alpha_2 s_2^{r-1}\alpha_1^{-1}, && s_2^{-r} = \alpha_2^{-1}s_1^{r-1}\alpha_1,\\
&s_3^{-r} = \beta_2 s_4^{r-1}\beta_1^{-1}, && s_4^{-r} = \beta_2^{-1}s_3^{r-1}\beta_1, \quad r \geq 1;\\
&(s_1^t\alpha_1)^{-1} = s_2^t\alpha_1^{-1}, && (\alpha_2 s_2^t)^{-1} = \alpha_2^{-1}s_1^t,\\
&(s_3^t\beta_1)^{-1} = s_4^t\beta_1^{-1}, && (\beta_2 s_4^t)^{-1} = \beta_2^{-1}s_3^t, \qquad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

证明。显然。 □

注记 4.6。给定如（4.3）中的字符串 u，其逆向 u^{-1} 也是一个字符串，并且$M(u) \simeq M(u^{-1})$。因此，我们不需要考虑（4.4）中的字符串。

定理 *4.1* 的证明 (ii)。我们将（4.2）给出的函子 F 应用于字符串模 $M(u)$，其中 u 如（4.3）所示。下面我们描述这些模

$$
\begin{aligned}
&\mathtt{U}_{i,r} \coloneqq \mathtt{F}(M(u_i(r))), && i \in \mathbb{I}_4,\ r \geq 1;\\
&\mathtt{V}_{j,t} \coloneqq \mathtt{F}(M(v_j(t))),\\
&\mathtt{W}_{j,t} \coloneqq \mathtt{F}(M(w_j(t))), && j \in \mathbb{I}_2,\ t \geq 0.
\end{aligned}
$$

作为示例，我们明确计算 $\mathtt{U}_{1,r}$；其余情况类似。

箭图表示 $M(u_1(r)) = (M_k, \varphi_\gamma)_{k\in\mathbb{I}_{0,1},\gamma\in Q_1}$ 由下式给出

$$
\begin{aligned}
&M_0 = \Bbbk\{m_{2\ell+1} : \ell \in \mathbb{I}_{0,r}\}, && M_1 = \Bbbk\{m_{2\ell} : \ell \in \mathbb{I}_r\}\\
&\varphi_{\varepsilon_0} = \mathrm{id}_{M_0}, \quad \varphi_{\varepsilon_1} = \mathrm{id}_{M_1}, && \varphi_{\beta_j} = 0, \quad j \in \mathbb{I}_2,
\end{aligned}
$$

$$
\varphi_{\alpha_1}(m_{2\ell+1}) = \begin{cases} m_{2\ell+2}, & \ell \in \mathbb{I}_{0,r-1},\\ 0, & \ell = r, \end{cases} \qquad \varphi_{\alpha_2}(m_{2\ell+1}) = \begin{cases} 0, & \ell = 0,\\ m_{2\ell-1}, & \ell \in \mathbb{I}_r. \end{cases}
$$

因此，$\mathrm{F}_1(M(u_1(r))) = M_0 \oplus M_1 \in \mathcal{M}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^\flat}$ 的作用为

$$
m_\ell \cdot \varepsilon_0 = \begin{cases} m_\ell, & \ell = 2k+1, k \in \mathbb{I}_{0,r},\\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases} \qquad m_\ell \cdot \alpha_1 = \begin{cases} m_{\ell+1}, & \ell = 2k+1, k \in \mathbb{I}_{0,r-1},\\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases}
$$

$$
m_\ell \cdot \varepsilon_1 = \begin{cases} m_\ell, & \ell = 2k, k \in \mathbb{I}_r,\\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases} \qquad m_\ell \cdot \alpha_2 = \begin{cases} m_{\ell-1}, & \ell = 2k+1, k \in \mathbb{I}_r\\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

箭头 β_j, $j \in \mathbb{I}_2$ 在 $\mathrm{F}_1(M(u_1(r)))$ 上作用平凡。根据 F_2, 的定义，我们得到 $\mathrm{F}_2\mathrm{F}_1($ $M(u_1(r))) = M_0 \oplus M_1$ 是一个左 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^\flat$-模，其作用为

$$
e_0 \cdot m_\ell = \begin{cases} m_\ell, & \ell = 2k+1, k \in \mathbb{I}_{0,r}\\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad ae_0 \cdot m_\ell = \begin{cases} m_{\ell+1}, & \ell = 2k+1, k \in \mathbb{I}_{0,r-1}\\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

$$e_1 \cdot m_\ell = \begin{cases} m_\ell, \ \ell = 2k, k \in \mathbb{I}_r \\ 0, \quad \text{otherwise} \end{cases} \qquad b^3 e_0 \cdot m_\ell = \begin{cases} m_{\ell-1}, \ \ell = 2k+1, k \in \mathbb{I}_r \\ 0, \qquad \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\mathfrak{u}(\mathfrak{m})^{\mathfrak{b}}$ 的基 (3.9) 中其他元素的作用均平凡。

最后，我们应用函子 $\mathrm{Ind}_{e_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}}^{l}$ ，并看到 $\mathtt{U}_{1,r} \in {}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}\mathcal{M}$ 有一组基 $z_1 = e_0 \otimes m_1, z_2 = e_1 \otimes m_2, \dots, z_{4r+1} = e_0 \otimes m_{2r+1}$。$\mathtt{U}_{1,r}$ 上的作用由 (4.5) 和表 1 描述。其他弦模 $\mathtt{U}_{i,r}$、$\mathtt{V}_{j,s}$、$\mathtt{W}_{j,s}$ 的计算类似。在所有情况下，都存在一组基 $\{z_i\}_{i \in \mathbb{I}_d}$ ，其中d是模的维数，且作用由下式给出

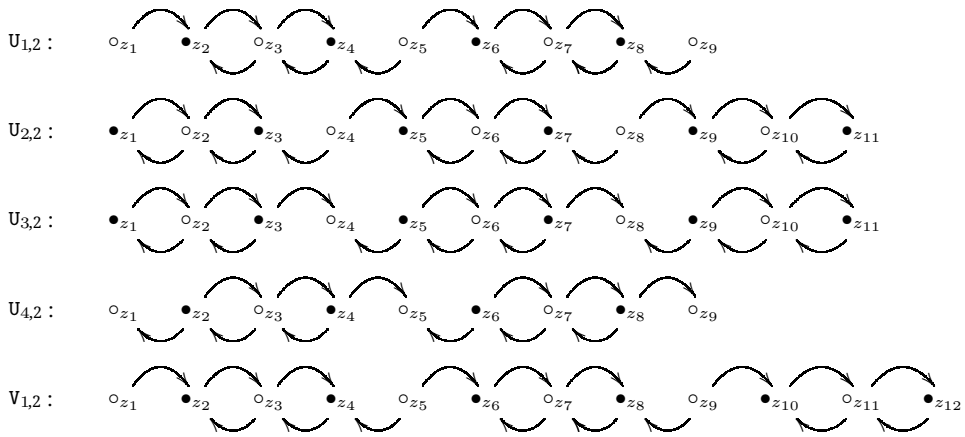
$$a \cdot z_i = \boldsymbol{\kappa}_i z_{i+1}, \qquad b \cdot z_i = \boldsymbol{\mu}_i z_{i-1}, \qquad c \cdot z_i = \boldsymbol{\nu}_i z_i. \tag{4.5}$$

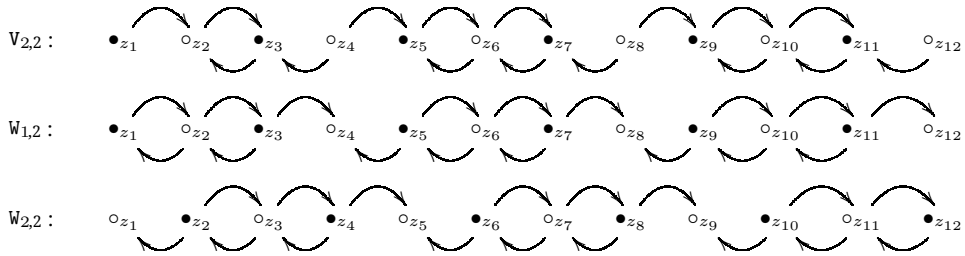
这里， $\boldsymbol{\kappa}_i$ 和 $\boldsymbol{\mu}_i$ 取值为 0 或 1；我们在表 1 中列出了取值为 0 的 i。该表还记录了 $\boldsymbol{\nu}_i$ 的值（同样为 0 或 1）。

表 1. 字符串模：(4.5) 中的系数

族	dim	$\boldsymbol{\kappa}_i$	$\boldsymbol{\mu}_i$	$\boldsymbol{\nu}_i$
$\mathtt{U}_{1,r}$	$4r+1$	$i \equiv 0(4)$ 或 $i = 4r+1$	$i \equiv 2(4)$ 或 $i = 1$	$i+1$
$\mathtt{U}_{2,r}$	$4r+3$	$i \equiv 3(4)$	$i \equiv 1(4)$	i
$\mathtt{U}_{3,r}$	$4r+3$	$i \equiv 0(4)$ 或 $i = 4r+3$	$i \equiv 0(4)$ 或 $i = 1$	i
$\mathtt{U}_{4,r}$	$4r+1$	$i \equiv 1(4)$	$i \equiv 1(4)$	$i+1$
$\mathtt{V}_{1,t}$	$4(t+1)$	$i \equiv 0(4)$	$i \equiv 2(4)$ 或 $i = 1$	$i+1$
$\mathtt{V}_{2,t}$	$4(t+1)$	$i \equiv 3(4)$ 或 $i = 4(t+1)$	$i \equiv 1(4)$	i
$\mathtt{W}_{1,t}$	$4(t+1)$	$i \equiv 0(4)$ 或 $i = 4(t+1)$	$i \equiv 0(4)$ 或 $i = 1$	i
$\mathtt{W}_{2,t}$	$4(t+1)$	$i \equiv 1(4)$ 或 $i = 4(t+1)$	$i \equiv 1(4)$ 或 $i = 1$	$i+1$

我们通过一个有向图来说明上述关于 $r = t = 2$ 的字符串模：图中上方从左向右的箭头表示 a 的作用，下方从右向左的箭头表示 b 的作用，如式 (3.6) 所示。此外， $\circ_{z_i}$ 表示 $\boldsymbol{\nu}_i = 0$ ，而 $\bullet_{z_i}$ 表示 $\boldsymbol{\nu}_i = 1$。





4.3. 带模。 这里需要再引入一些术语。设 (Q, I) 是一个有界箭图。

◦ 若 $s(c_1) = s(u) = t(u) = t(c_r)$ 且 $c_r \neq c_1^{-1}$，则 $u = c_1 \dots c_r$ 的一个非平凡约化游走称为 Q 的一个约化圈。另一个约化圈 u_1 与 u 等价，当且仅当 u_1 或 u_1^{-1} 具有 $c_i \dots c_r c_1 \dots c_{i-1}$ 的形式，其中 $i \in \mathbb{I}_{2,r}$。

◦ Q 的非平凡约化圈称为带，如果它的每个幂都是一个字符串，并且它不是长度更短的字符串的幂。

定义 4.7. [24, §2] 设 $u = c_1 \dots c_r$ 是一个带，且 $\phi\colon V \to V$ 是有限维向量空间 V 上的一个不可分解自同构。带模 $N = N(u, \phi) = (N_k, \varphi_\gamma)_{k \in Q_0,\ \gamma \in Q_1} \in \mathsf{rep}(Q, I)$ 定义如下:

◇ 对每个 $i \in \mathbb{I}_r$，取 $V_i = V$。

◇ 设 $i \in \mathbb{I}_{r-1}$。若 c_i 是一个箭头，则 $f_{c_i}\colon V_i \to V_{i+1}$ 是恒等映射；否则 $f_{c_i}\colon V_{i+1} \to V_i$ 也为恒等映射。

◇ 对于 $i = r$，若 c_r 是一个箭头，则有 $f_{c_r} = \phi : V_r \to V_1$；若 c_r 是箭头的逆，则有 $f_{c_r} = \phi^{-1} : V_1 \to V_r$。

◇ 对于每个 $k \in Q_0$，若 k 出现在 u中，则 N_k 是满足 $s(c_i) = k$ 的空间V_i 的直和；否则为 $N_k = 0$。

◇ 对于 Q 的每条箭头 γ，如果 γ 出现在 u 中，那么 φ_γ 是满足 $c_i = \gamma$ 或 $c_i^{-1} = \gamma$ 的映射 f_{c_i} 的直和，否则为 $\varphi_\gamma = 0$。

注意，如果 u 和 u_1 等价，那么在 $\mathsf{rep}(Q, I)$ 中，$N = N(u, \phi)$ 与 $N = N(u_1, \phi)$ 同构。

现在假设 (Q, I) 是由 (3.10) 和 (3.11) 给出的有界箭图。那么 (Q, I) 的非等价带为:

$$u = \alpha_1 \alpha_2^{-1}, \qquad v = \beta_1 \beta_2^{-1}. \tag{4.6}$$

定理 *4.1* 的证明 (iii)。 设 $n \geq 1$，令 V 为一个 n 维向量空间，并令 $\phi : V \to V$ 为一个不可分解自同构。则 ϕ 在 V 的某个基 B 下由 Jordan 块 $J_n(\lambda)$ 表示，其中 $\lambda \in \Bbbk^\times$ 固定。取带有基 $\{\mathtt{m}^j : j \in \mathbb{I}_n\}$ 和 $\{\mathtt{m}^{n+j} : j \in \mathbb{I}_n\}$ 的向量空间 N_0 和 N_1。则带模 $N(u, \lambda, n) := N(u, \phi) = (N_k, \varphi_\gamma)_{k \in Q_0,\ \gamma \in Q_1} \in \mathsf{rep}(Q, I)$ 定义为:

$$\varphi_{\alpha_1}(\mathtt{m}_j) = \mathtt{m}_{n+j},\ j \in \mathbb{I}_n, \qquad \varphi_{\alpha_2}(\mathtt{m}_j) = \begin{cases} \lambda \mathtt{m}_{n+j}, & j = 1, \\ \lambda \mathtt{m}_{n+j} + \mathtt{m}_{n+j-1}, & j \in \mathbb{I}_{2,n}, \end{cases}$$

以及 $\varphi_{\beta_i}=0$、 $i\in\mathbb{I}_2$。类似地， $N(v,\lambda,n):=N(v,\phi)=(N_k,\varphi_\gamma)$ 定义为：

$$\varphi_{\beta_1}(\mathtt{m}_{n+j})=\mathtt{m}_j,\quad j\in\mathbb{I}_n,\qquad \varphi_{\alpha_i}=0,\quad i\in\mathbb{I}_2;\qquad \varphi_{\beta_2}(\mathtt{m}_{n+j})=\begin{cases}\lambda\mathtt{m}_j, & j=1,\\ \lambda\mathtt{m}_j+\mathtt{m}_{j-1}, & j\in\mathbb{I}_{2,n}.\end{cases}$$

令 $\mathtt{A}_{\lambda,n}:=\mathtt{F}(N(u,\lambda,n))$ 和 $\mathtt{B}_{\lambda,n}:=\mathtt{F}(N(v,\lambda,n))$，其中 $n\geq 1$ 且 $\lambda\in\Bbbk^\times$。于是 $\dim \mathtt{A}_{\lambda,n}=\dim \mathtt{B}_{\lambda,n}=4n$，并按照上述方法推理可知，$\mathtt{A}_{\lambda,n}$ 和 $\mathtt{B}_{\lambda,n}$ 存在基，二者均记为 $\{z_i : i\in\mathbb{I}_{1,4n}\}$，其中 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 的作用为

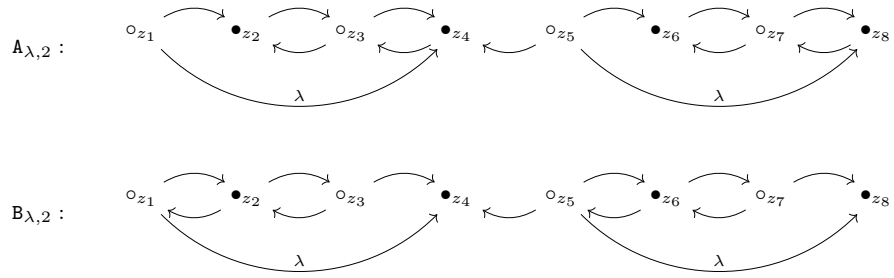
$$a\cdot z_i=\boldsymbol{\kappa}_i z_{i+1},\qquad b\cdot z_i=\boldsymbol{\mu}_i z_{i-1}+\boldsymbol{\xi}_i\lambda z_{i+3},\qquad c\cdot z_i=\boldsymbol{\nu}_i z_i. \tag{4.7}$$

这里 $\boldsymbol{\kappa}_i$、 $\boldsymbol{\mu}_i$ 和 $\boldsymbol{\xi}_i$ 取值为 0 或 1；我们在表 2 中列出取值为 0 的 i。该表还记录了 $\boldsymbol{\nu}_i$ 的取值（同样为 0 或 1）。

表 2. 带模：式 (4.7) 中的系数

族	$\boldsymbol{\kappa}_i$	$\boldsymbol{\mu}_i$	$\boldsymbol{\xi}_i$	$\boldsymbol{\nu}_i$
$\mathtt{A}_{\lambda,n}$	$i\equiv 0(4)$	$i\equiv 2(4)$ 或 $i=1$	$i\equiv 0,2,3(4)$	$i+1$
$\mathtt{B}_{\lambda,n}$	$i\equiv 0(4)$	$i\equiv 0(4)$ 或 $i=1$	$i\equiv 0,2,3(4)$	i

我们通过一个有向图来说明上述带模（对于 $n=2$）：其中，上方从左向右的箭头表示 a的作用，而下方的箭头表示 b的作用，如（3.6）所示。这里有 $bz_1=\lambda z_4$ 和 $bz_5=z_4+\lambda z_8$；因此，我们从左向右为图表下方的箭头标注了标签。



注 4.8：如果 H 是一个霍普夫代数，且 $V\in{}_H\mathcal{M}$ 是不可分解的，那么 V^* 也是不可分解的。回顾一下， H 在 V^* 上的作用由 $(h\cdot\varphi)(v)=\varphi(\mathcal{S}(h)\cdot v)$ 给出，其中 $\mathcal{S}$ 是 H、 $h\in H$、 $\varphi\in V^*$ 和 $v\in V$ 的对映射。通过直接计算，我们得到字符串和带模在 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 上的对偶为

$$\mathtt{U}^*_{1,r}\simeq\mathtt{U}_{4,r},\quad \mathtt{U}^*_{2,r}\simeq\mathtt{U}_{3,r},\quad \mathtt{V}^*_{1,t}\simeq\mathtt{W}_{1,t},\quad \mathtt{V}^*_{2,t}\simeq\mathtt{W}_{2,t},\quad \mathtt{A}^*_{\lambda,n}\simeq\mathtt{B}_{\lambda,n}. \tag{4.8}$$

事实上，考虑 $\mathtt{U}^*_{1,\ r}$ 的对偶基 $\{z_1^*,\dots,z_{4r+1}^*\}$。容易看出

$$a\cdot z_i^*=\begin{cases}0, & i=4j+1,\ j\in\mathbb{I}_{0,r},\\ z_{i-1}^*, & \text{otherwise},\end{cases}\qquad b\cdot z_i^*=\begin{cases}0, & i=4j+1,\ j\in\mathbb{I}_{0,r},\\ z_{i+1}^*, & \text{otherwise},\end{cases}$$

并且当 i为偶数时 $c\cdot z_i^*=z_i^*$，当 i为奇数时 $c\cdot z_i^*=0$。因此，重新排列

对偶基的形式 $\{z_{4r+1}^*, \dots, z_1^*\}$，我们得到 $\mathrm{U}_{1,\ r}^* \simeq \mathrm{U}_{4,\ r}$。类似地，我们证明了 (4.8) 中的其他同构。

注 4.9. 若 $\theta \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{m}) \simeq \mathrm{Aut}^{\mathrm{Hopf}}(\mathfrak{u}(\mathfrak{m}))$ 且 $V \in {}_{\mathfrak{u}(\mathfrak{m})}\mathcal{M}$，则 $V^\theta := V$ 在新的作用 $u \star v = \theta(u) \cdot v$ 下，其中 $\cdot$ 是旧作用，$u \in \mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ 且 $z \in V$，是一个 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$-模。因此，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{m})$ 作用于 $\mathrm{indec}\,\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$。作为例子，令 $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{m})$ 为切瓦莱对合，其定义为 $\theta(a) = b, \theta(b) = a$ 以及 $\theta(c) = c$。那么经过适当的基变换，$\mathrm{A}_{\lambda,2}^{\theta} \simeq \mathrm{A}_{1/\lambda,2}$。

5. Jordan平面的 Drinfeld 双

本节定义一个无限维霍普夫代数 D，使得 $D \twoheadrightarrow D(H)$，并描述霍普夫代数的交换图（5.14）。这里的内容与奇特征下 Jordan平面和超 Jordan平面的情况类似，分别见 [7, §2] 和 [8, §4]。

5.1. 霍普夫代数 D。 我们先定义两个霍普夫代数 H 和 K，使得 $H \twoheadrightarrow H$ 和 $K \twoheadrightarrow K := H^{*\,\mathrm{op}}$。于是，对如 [14]中所述的某个合适的 2-余循环 σ，有 $D := H \bowtie_\sigma K$。令 $\Gamma = \langle \mathrm{g} \rangle \simeq \mathbb{Z}$。由与 (2.4) 中相同的公式，向量空间 $V \simeq \mathcal{V}$(1, 2) 成为 $\Bbbk\Gamma$上的 Yetter-Drinfeld 模。我们考虑如下编织Hopf代数及其玻色化：

$$\widetilde{\mathscr{B}} = T(V)/\langle x_1^2,\ x_2^2x_1 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_1 \rangle \in {}^{\Bbbk\widetilde{\Gamma}}_{\Bbbk\widetilde{\Gamma}}\mathcal{YD}, \qquad \widetilde{H} = \widetilde{\mathscr{B}}\#\Bbbk\widetilde{\Gamma}.$$

令 $x_{21} := x_2x_1 + x_1x_2 \in \mathscr{B}$。注意，$\mathscr{B}/\langle x_2^4 \rangle \simeq \mathscr{B}(V)$。

引理5.1。代数 $\widetilde{H}$ 由 x_1、x_2、$\mathbf{g}^{\pm}$ 生成，其关系为

$$\begin{aligned} &x_1^2 = 0, \qquad x_2^2x_1 = x_1x_2^2 + x_1x_2x_1, \\ &\mathbf{g}x_1 = x_1\mathbf{g}, \quad \mathbf{g}x_2 = x_2\mathbf{g} + x_1\mathbf{g}, \qquad \mathbf{g}^{\pm}\mathbf{g}^{\mp} = 1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

H 的余乘法与(2.6)中所述相同。以下是 H的一个 *PBW* 基：

$$B = \{x_1^l x_{21}^{m_1} x_2^{m_2} \mathbf{g}^n \ :\ l \in \mathbb{I}_{0,1},\ m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

证明。 显然，B 是 H的 PBW 基。令 A 为由关系式 (5.1) 给出的代数。利用这些关系式在 H中成立这一事实，可得一个霍普夫代数满同态 $A \twoheadrightarrow H$。由于 A 由 B线性生成，且其在该态射下的像线性无关，结论得证。□

引理 5.2。以下关系在 H 中成立，其中 $m,\ n \in \mathbb{N}_0$：

$$(x_1 + x_2)^{2n} = x_2^{2n} + nx_{21}x_2^{2n-2}, \tag{5.2}$$

$$(x_1 + x_2)^{2n+1} = x_2^{2n+1} + x_1x_2^{2n} + nx_{21}x_2^{2n-1}, \tag{5.3}$$

$$x_{21}x_1 = x_1x_{21}, \qquad x_2^m x_{21}^{2n+1} = x_{21}^{2n+1}(x_1 + x_2)^m, \tag{5.4}$$

$$x_2^{2n}x_1 = x_1x_2^{2n} + nx_1x_{21}x_2^{2n-2}, \qquad x_2^m x_{21}^{2n} = x_{21}^{2n}x_2^m, \tag{5.5}$$

$$x_2^{2n+1}x_1 = x_1x_2^{2n+1} + nx_{21}\big(x_2^{2n} + x_1x_2^{2n-1} + x_{21}x_2^{2n-2}\big) + (n+1)x_{21}^{2n}, \tag{5.6}$$

$\mathbf{g}x_1 = x_1\mathbf{g}$, (5.7)

$$\mathbf{g}x_{21} = x_{21}\mathbf{g},$$

$$\mathbf{g}^{2m+1}x_2^n = (x_1 + x_2)^n\mathbf{g}^{2m+1}, \qquad \mathbf{g}^{2m}x_2^n = x_2^n\mathbf{g}^{2m}. \tag{5.8}$$

证明。 对 m、 n作归纳法。 □

令 $\Bbbk[\zeta]$ 为多项式代数，它是一个霍普夫代数，其中 ζ 为本原元。注意到我们有一个霍普夫代数满同态 $\Bbbk[\zeta] \twoheadrightarrow \Bbbk^\Gamma$，其中$\Gamma = \langle g\rangle$ 和 $g^2 = 1$。由(2.7)，由 w_1、 w_2 生成的向量空间 W 是 $\Bbbk[\zeta]$上的一个Yetter-Drinfeld 模。因此我们考虑

$$\widetilde{\mathfrak{B}} = T(W)/(w_1^2, w_2^2w_1 + w_1w_2^2 + w_1w_2w_1) \in {}^{\Bbbk[\zeta]}_{\Bbbk[\zeta]}\mathcal{YD}, \quad \widetilde{K} = (\widetilde{\mathfrak{B}}\#\Bbbk[\zeta])^{\mathrm{op}}.$$

引理5.3。 代数 K 由生成元 w_1， w_2， ζ 以及关- 系给出

$$\begin{aligned} &w_1^2 = 0, && w_2^2w_1 = w_1w_2^2 + w_1w_2w_1, \\ &w_1\zeta = (1+\zeta)w_1, && w_2\zeta = (1+\zeta)w_2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

K 的余乘法如(2.10)所给出。集合

$$\{\zeta^{m_1}w_1^lw_{21}^{m_2}w_2^{m_3} : l \in \mathbb{I}_{0,1},\, m_i \in \mathbb{N}_0,\, i \in \mathbb{I}_3\}$$

是 K的 *PBW* 基。

证明。 这与引理5.1类似。 □

代数 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathscr{B}$ 同构。因此，关系式(5.4)、(5.5)、(5.6)在 $\mathfrak{B}$ 中成立，其中 w_i 以 x_i、 $i \in \mathbb{I}_2$和 $w_{21} := w_2w_1 + w_1w_2$ 代替 x_{21}。然而， $\mathfrak{B}$和 $\mathscr{B}$ 作为余代数并不同构。

引理5.4。 对所有 $n \in \mathbb{N}_0$， $i \in \mathbb{I}_2$，以下关系在 K中成立：

$$w_i\zeta^n = (1+\zeta)^nw_i, \qquad w_{21}\zeta = \zeta w_{21}, \tag{5.10}$$

$$w_2^{2n}\zeta = \zeta w_2^{2n}, \qquad w_2^{2n+1}\zeta = (1+\zeta)w_2^{2n+1}. \tag{5.11}$$

证明。 由关于 n的归纳法可得。 □

为了定义 D，我们需要一个如[14]，所述的 H 与 K 之间的斜配对 τ，也就是说，一个满足以下条件的线性映射 τ： $H \otimes K \to \Bbbk$

$$\begin{aligned} &\tau(h\widetilde{h} \otimes k) = \tau(h \otimes k_{(1)})\tau(\widetilde{h} \otimes k_{(2)}), \quad \tau(1 \otimes k) = \varepsilon(k), \\ &\tau(h \otimes \widetilde{k}k) = \tau(h_{(1)} \otimes k)\tau(h_{(2)} \otimes \widetilde{k}), \quad \tau(h \otimes 1) = \varepsilon(h), \end{aligned} \tag{5.12}$$

对所有 $h, h \in H$, $k, k \in K$ 均成立。于是 τ 卷积可逆，其逆为$\tau^{-1}(h, k) = \tau(\mathcal{S}(h)\ k)$， $h \in \widetilde{H}$, $k \in \widetilde{K}$。因此，斜配对 τ 等价于一个从 H^{cop} 到 K的 Sweedler 对偶 K° 的霍普夫代数映射 ϕ。

引理 5.5. 存在唯一的斜配对 τ： $H \otimes K \to \Bbbk$，使得

$$\tau(x_1 \otimes w_i) = \delta_{i,2}, \quad \tau(x_2 \otimes w_i) = \delta_{i,1}, \quad \tau(\mathbf{g}^{\pm} \otimes w_i) = 0,\ i \in \mathbb{I}_2,$$
$$\tau(x_i \otimes \zeta) = 0, \qquad \tau(x_2 \otimes \zeta) = 0, \qquad \tau(\mathbf{g}^{\pm} \otimes \zeta) = 1. \qquad \square$$

令 $D = A_\sigma = H \bowtie_\sigma K$ 为由 σ 扭曲的霍普夫代数 $A = H \otimes K$，其中与 τ 相关联的 $\sigma\colon A \otimes A \to \Bbbk$ 定义如下：

$$\sigma(a \otimes b, c \otimes d) = \varepsilon(a)\varepsilon(d)\tau(c \otimes b), \qquad a, b, c, d \in A.$$

D 中的乘法定义如下：

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = a\tau(c_{(1)}, b_{(1)})c_{(2)} \otimes b_{(2)}\tau^{-1}(c_{(3)}, b_{(3)})d.$$

下一个结果的证明与 [7, 命题 2.3]类似。

命题 5.6. (i) 代数 D 由生成元 $x_1, x_2, \mathbf{g}^{\pm}, w_1, w_2, \zeta$ 及关系(5.1)、(5.9)和

$$\begin{aligned}
&w_1x_1 = x_1w_1, && w_1x_2 = x_2w_1 + 1 + \mathbf{g}, && w_1\mathbf{g} = \mathbf{g}w_1,\\
&w_2x_1 = x_1w + 1 + \mathbf{g}, && w_2x_2 = x_2w + \mathbf{g}\zeta, && w_2\mathbf{g} = \mathbf{g}w,\\
&\zeta x_i = x_i\zeta + x_i, && i \in I_2, && \zeta\mathbf{g} = \mathbf{g}\zeta,
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{h} = 1 + \mathbf{g}$，$w = w_1 + w_2$。余乘法由(2.6)和(2.10)给出。

(ii) 以下族是 D 的 *PBW* 基：

$$\{x_1^{l_1}x_{21}^{m_1}x_2^{m_2}\mathbf{g}^n\zeta^{m_3}w_1^{l_2}w_{21}^{m_4}w_2^{m_5}\colon l_i \in \mathbb{I}_{0,\,1},\ \ i \in \mathbb{I}_2,\ \ m_j \in \mathbb{N}_0,\ \ j \in \mathbb{I}_5,\ \ n \in \mathbb{Z}\}. \tag{5.13}$$

(iii) 存在一个霍普夫代数满同态 $D \twoheadrightarrow D(H)$。

(iv) $\mathcal{S}^4 = \mathrm{id}$，其中 $\mathcal{S}$ 是……的对映射 $\widetilde{D}$。因此，$\mathcal{S}$ 是双射。□

引理 5.7。关系 (5.2)、. . .、(5.8)、(5.10)、(5.11)，以及

$$\zeta x_{21} = x_{21}\zeta, \quad w_1x_{21} = x_{21}w_1, \quad w_{21}x_1 = x_1w_{21}, \quad w_{21}\text{克} = \text{克}w_{21},$$

在 D 中成立。此外，取 $\mathbf{h} = 1 + \mathbf{g}$ 和 $w = w_1 + w_2$，则对于所有 $m, n \in \mathbb{N}_0$，以下交换关系在 D 中成立：

$$\zeta^n x_1 = x_1\xi^n, \qquad \zeta^m x_2^n = x_2^n \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \xi^j,$$

$$w_1x_2^{2n} = x_2^{2n}w_1 + nx_1x_2^{2n-2}\mathbf{g} \quad w_1x_2^{2n+1} = x_2^{2n+1}w_1 + x_2^{2n}\mathbf{h} + nx_1x_2^{2n-1}\mathbf{g}, w_{21}x_2^{2n} = x_2^{2n}w_{21} + nx_2^{2n-2}(x_1\mathbf{g}w_1 + \mathbf{h}^2), w_{21}x_2^{2n+1} = x_2^{2n+1}w_{21} + x_2^{2n}\mathbf{h}w_1 + n(x_2^{2n-1}\mathbf{h}^2 + x_1(x_2^{2n-1}\mathbf{g}w_1 + x_2^{2n-2}\mathbf{g}\mathbf{h})), w_{21}^{2n}x_2 = x_2w_{21}^{2n},$$

$$w_{21}^{2n+1}x_2 = x_2w_{21}^{2n+1} + \mathbf{h}w_1w_{21}^{2n}w_2^{2n}x_1 = x_1w^{2n} + nw_1w_2^{2n-2},$$

$$w_2^{2n+1}x_1 = x_1w^{2n+1} + (n + \mathbf{h})w^{2n} + nww_2^{2n-1}, w_2x_{21}^{2m} = x_{21}^{2m}w_2,$$

$$w_2x_{21}^{2m+1} = x_{21}^{2m+1}w_2 + x_{21}^{2m}\mathbf{h}x_1, w_2^{2n}x_{21} = x_{21}w_2^{2n} + n(x_1w_1 + \mathbf{h}^2)w_2^{2n-2}, w_2^{2n+1}x_{21} = x_{21}w_2^{2n+1} + x_1\mathbf{h}w_2^{2n} + n(x_1(w_1w_2 + w_{21}) + \mathbf{h}w_1 + \mathbf{h}^2w_2)w_2^{2n-1}, w_2x_2^{2n} = x_2^{2n}w_2 + n(x_2^{2n-1} + x_2^{2n-2}x_1\mathbf{g}\xi),$$

$$w_2x_2^{2n+1} = x_2^{2n+1}w + x_2^{2m}\mathbf{g}\zeta + n(x_2^{2m} + x_1x_2^{2m-1}\mathbf{g}\zeta), w_2^{2n}x_2 = x_2w_2^{2n} + n(x_2w_{21} + \mathbf{g}w)w_2^{2n-2},$$

$$w_2^{2n+1}x_2 = x_2w_2^{2n+1} + (x_2w_1 + \mathbf{g}\zeta)w_2^{2n} + n(\mathbf{g}\xi w_{21}w_2^{2n-2} + x_2w_{21}w_2^{2n-1} + \mathbf{g}w_2^{2n}),$$
$$w_2^m\mathbf{g}^{2n} = \mathbf{g}^{2n}w_2^m, \qquad w_2^m\mathbf{g}^{2n+1} = \mathbf{g}^{2n+1}w^m.$$

证明。 由命题 5.6 以及对 m, n 的归纳法可得。 □

5.2. D **作为扩张**。 考虑代数群

$$\mathbf{B} := ((\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a) \rtimes \mathbf{G}_m) \times \mathbf{H}_3,$$

其中 $(\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a) \rtimes \mathbf{G}_m$ 是一个半直积，其作用是 $\mathbf{G}_m$ 作用于 $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$，由 $\lambda \cdot (t_1, t_2) = (\lambda^2 t_1, \lambda^2 t_2)$，$\lambda \in \Bbbk^\times, t_1, t_2 \in \Bbbk$ 给出，而 $\mathbf{H}_3$ 是对角线上全为 1 的上三角矩阵所构成的海森堡群。

命题 5.8。 设 N 是由 x_2^4, x_{21}^2, $\mathbf{g}^2$, w_2^4, w_{21}^2 和 $\zeta^{(2)} = \zeta^2 + \zeta$ 生成的 $\widetilde{D}$ 的子代数。那么

(i) N 是 D 的正规交换 *Hopf* 子代数。(ii) D 是一个有限生成的自由 N 模。(iii) $N \overset{\iota}{\hookrightarrow} \widetilde{D} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} D(H)$ 是 *Hopf* 代数的短正合列。(iv) 作为代数，$N \simeq \Bbbk[T^{\pm}] \otimes \Bbbk[X_1, \cdots, X_5]$。(v) 作为 *Hopf* 代数，$N \simeq \mathcal{O}(\mathbf{B})$。

证明。 利用命题 2.6 和 5.6、引理 5.7，并按照 [7, 命题 2.6]，的证明中相同的步骤，我们得到所需结果。□

5.3. **另一个扩张**。 设 $\pi : D \to U(\mathfrak{sl}(2))$ 是由下式给出的霍普夫代数映射

$$\pi(x_1) = 0, \quad \pi(x_2) = a, \quad \pi(\mathbf{g}) = 1, \quad \pi(w_1) = 0, \quad \pi(w_2) = b, \quad \pi(\zeta) = c.$$

考虑由 x_1、x_{21}、$\mathbf{g}$ w_1 和 w_{21} 生成的 D 的子代数 C。根据引理 5.7，C 是 D 的正规霍普夫子代数。

为了陈述下一个命题，我们需要引入一些额外的记号。设 $\mathfrak{G}$ 为群概形，其函数代数是交换 Hopf 代数 $\mathcal{O}(\mathfrak{G}) := \Bbbk[X_1, X_2, T^{\pm}] \otimes \Lambda(Y_1, Y_2)$，其余乘法为

$$\Delta(X_1) = X_1 \otimes 1 + T^2 \otimes X_1 + Y_1T \otimes Y_1, \quad \Delta(Y_1) = Y_1 \otimes 1 + T \otimes Y_1,$$
$$\Delta(X_2) = X_2 \otimes 1 + 1 \otimes X_2 + Y_2 \otimes Y_2, \quad \Delta(Y_2) = Y_2 \otimes 1 + 1 \otimes Y_2,$$
$$\Delta(T) = T \otimes T.$$

命题 5.9。 (i) 存在一个 *Hopf* 代数同构 $C \simeq \mathcal{O}(\mathfrak{G})$。(ii) *Hopf* 代数映射序列 $\mathcal{O}(\mathfrak{G}) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \widetilde{D} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} U(\mathfrak{sl}(2))$ 是正合的。

证明。 与 [7, 命题 2.7]的证明类似。 □

5.4. **一个交换方形**。设 $\mathbf{G} := (\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a) \rtimes \mathbf{G}_m$ 为半直积，其作用由 $\mathbf{G}_m$ 在 $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$ 上的作用给出，即 $\lambda \cdot (t_1, t_2) = (\lambda^2 t_1, t_2), \lambda \in \Bbbk^\times, t_1, t_2 \in \Bbbk$。则 $\mathcal{O}(\mathbf{G})$ 同构于 $A := \Bbbk[X_1, X_2, T^{\pm}]$，其中 $T \in G(A)$, $X_1 \in \mathcal{P}_{1,\ T^2}(A)$，$X_2 \in \mathcal{P}(A)$。

以下结论显然成立。

命题 5.10. 存在一个 *Hopf* 代数的短正合列

$$\mathcal{O}(\mathbf{G}) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathcal{O}(\mathfrak{G}) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathbf{T}$$

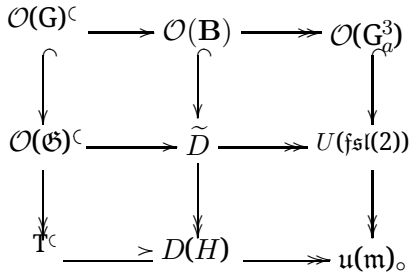
其中 *Hopf* 映射 ι 和 π 由下式给出

$$\iota(X_1) = X_1^2, \quad \iota(X_2) = X_2^2, \quad \iota(T) = T^2,$$

$$\pi(X_1) = x_{21}, \quad \pi(X_2) = w_{21}, \quad \pi(T) = g, \qquad \pi(Y_1) = x_1, \quad \pi(Y_2) = w_1. \quad \square$$

我们可以用下面的图表概括前几节所研究的 Hopf 代数之间的关系：

(5.14)



命题 5.11. (5.14)中的所有行和列都是正合列。

证明。 中间一行由命题 5.9 可知是正合列，而底下一行由定理 2.9 可知是正合列。此外，中间列和左列分别由命题 5.8 和命题 5.10 可知是正合列。仿照 [7, 命题 2.8], 中的论证，我们可以验证其余序列也都是正合列。□

致谢。 我们感谢 A. Premet 就代数 $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$提出的宝贵建议。我们还感谢 E. R. Alvares 对基本代数表示论的指导，以及 M. Guerreiro 和 A. Grishkov 通过电子邮件进行的有益交流。

参考文献

[1] N. Andruskiewitsch. *Nichols* 代数导论. 载于《数学与物理中的量子化、几何与非交换结构》。A. Cardona 等编，第 135–195 页，Springer-Nature（2017）。[2] N. Andruskiewitsch、I. Angiono 和 I. Heckenberger。阿贝尔群上有限 *GK* 维 *Nichols* 代数。《美国数学会回忆录》**271**，第 1329 号（2021）。[3] N. Andruskiewitsch、I. Angiono 和 I. Heckenberger。正特征下有限维尖点霍普夫代数的例子。载于《表示论、数学物理与可积系统：献给 *Nicolai Reshetikhin*》，A. Alexeev、等编。《数学进展》**340** （2021）。[4] N. Andruskiewitsch、D. Bagio、S. Della Flora 和 D. Flores。特征 *2* 下有限维尖点霍普夫代数的例子。格拉斯哥数学杂志**64**，65–78（2022）。[5] N. Andruskiewitsch 和 J. Devoto。*Hopf* 代数的扩张。《代数与分析》**7** （1），22-61（1995）；圣彼得堡数学杂志**7** （1），17-52（1995）。

[6] N. Andruskiewitsch、I. Heckenberger 和 H-J. Schneider。半单 Yetter-Drinfeld模的 Nichols 代数。《美国数学杂志》132（6），1493-1547（2010）。[7] N. Andruskiewitsch 和 H. Peña Pollastri。奇特征下的受限 Jordan 平面。《代数及其应用杂志》20（1），2140012（2021）。[8] N. Andruskiewitsch 和 H. Peña Pollastri。（受限）超Jordan平面的双。《纽约数学杂志》28，1596-1622（2022）。[9] I. Assem、D. Simson、A. Skowroński。《结合代数表示论基础》。伦敦数学会研究生教材65，剑桥大学出版社（2006）。[10] M. Auslander、I. Reiten 和 S. Smalø。《Artin代数表示论》。剑桥高等数学研究丛书36，剑桥大学出版社（1995）。[11] C. Cibils、A. Lauve 和 S. Witherspoon。正特征下的Hopf箭图与 Nichols 代数。《美国数学会会刊》137（12），4029-4041（2009）。[12] W. Crawley-Boevey。双串代数的温和性。《数学文献》65，399-407（1995）。[13] D. Cushing、G. W. Stagg、D. I. Stewart。利用 Prolog 搜索新的单李代数。arXiv:2207.01094。[14] Y. Doi 和 M. Takeuchi。二余循环引起的乘法变形：量子版本。《代数通讯》22（14），5715-5732（1994）。[15] A. Kh. Dolotkazin。特征 p $=2$ 的三维单李代数的不可约表示。《数学札记》24，588-590（1979）。[16] D. I. Gurevich，Yang-Baxter方程与形式李理论的推广。《苏联科学院通报》288，第4期，797–801（1986）。[17] F. Huard 和 S. Liu。《倾斜特殊双串代数》。《代数杂志》217，679-700（1999）。[18] L.H. Kauffman 和 D. E. Radford。有限维 Drinfeld 双成为带状代数的充要条件。《代数杂志》153，98-114（1993）。[19] D. E. Radford。《霍普夫代数》。结与万物丛书49。新泽西州哈肯萨克：世界科学出版社。xxii，559页（2012）。[20] H.-J. Schneider。关于量子群正合列的若干评注。《代数通讯》21（9），3337-3358（1993）。[21] A. Skowronski 和 J. Waschbüsch。表示有限双串代数。《纯粹与应用数学杂志》345，172–181（1983）。[22] H. Strade。正特征域上的单李代数。德格鲁伊特出版社数学博览丛书38（2004）。[23] H. Strade。小维李代数。《李代数、顶点算子代数及其应用》，《当代数学》442，233-265（2007）。[24] B. Wald 和 J. Waschbüsch。温和双串代数。《代数杂志》95，480-500（1985）。N. A.：科尔多瓦国立大学FaMAF，CIEM（CONICET），Medina Allende s/n，Ciudad Universitaria，5000 科尔多瓦，阿根廷。电子邮箱：nicolas.andruskiewitsch@unc.edu.ar D.B.：数学系，圣卡塔琳娜联邦大学，88040-900，弗洛里亚诺波利斯，SC，巴西。电子邮箱：d.bagio@ufsc.br S. D. F.、D. F.：数学系，圣玛丽亚联邦大学，97105-900，圣玛丽亚，RS，巴西。电子邮箱：saradia.flora@ufsm.br，flores@ufsm.br