双环面坐标中的内外调和函数

Brandon Alexander *、*Howard S. Cohl* †和 *Hans Volkmer* §

* 马里兰大学数学系，大学公园市，*MD 20742*，美国电子邮件： *bralex1@umd.edu*

† 美国国家标准与技术研究院应用与计算数学部，盖瑟斯堡，*MD 20899-8910*，美国电子邮件：*howard.cohl@nist.gov* 网址： http://www.nist.gov/itl/math/msg/howard-s-cohl.cfm§ 威斯康星大学密尔沃基分校数学科学系，密尔沃基，*WI 53201-0413*，美国电子邮件：*volkmer@uwm.edu*最终版本收稿于 ?? 2022年；在线发表于 ????doi:10.3842/JOURNAL.2023.***

arXiv:2303.02235v1 [math.CA] 3 Mar 2023

摘要。 三维欧几里得空间中的拉普拉斯方程在双环面坐标中可进行 R分离，从而得到以 Lam´e-Wangerin 函数表示的调和函数，称为内外双环面调和函数。本文推导了拉普拉斯方程基本解以内部和外部双环面调和函数乘积表示的展开式。在极限情形下，该展开式可化为双球坐标和长旋转椭球坐标中的已知展开式。

关键词： 拉普拉斯方程；基本解；可分离曲线坐标系；双环面坐标；Lam´e-Wangerin 函数。

*2020*年数学主题分类： 35A08; 35J05; 33C05; 33C10; 33C15; 33C20; 33C45;33C47; 33C55;33C75

1 引言

拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 在三维欧几里得空间的各种坐标系中均可分离，其中包括双环面坐标系。最重要的任务之一，是求出两点间距离倒数的展开式，将其表示为一系列调和函数；这些调和函数是对 $\Delta u = 0$ 在给定坐标系中应用变量分离法所得。若干坐标系中已有此类展开式，但并非所有坐标系都已知。我们在此前的两篇论文 [1], [3], 中首次给出了扁环坐标下的距离倒数展开式。本文将推导以双环面坐标中分离出的调和函数表示的距离倒数展开式。

双环面坐标最初由 Wangerin [14]引入。在 Miller [9, 第 211] 页以及 Moon and Spencer [10, 第 124] 页中也可以找到相关内容（这些不同形式的双环面坐标之间的联系在附录中说明）。这些参考文献给出了在双环面坐标中对 $\Delta u = 0$ 应用变量分离法后得到的常微分方程。然而，其中缺少内外调和函数的公式，以及距离倒数按这些调和函数展开的相应展开式。本文旨在补充这些缺失的结果。

在第 2节中，我们按照 Miller 给出的形式定义双环面坐标，并对拉普拉斯方程进行变量分离。Miller 所用的双环面坐标形式有一个优点：其中两个分离常微分方程

呈现为 Lam´é 方程的标准形式。若采用 Wangerin 或 Moon and Spencer 给出的坐标形式，则情况并非如此。在第 3 节中，我们回顾在内外双环面调和函数的定义中出现的 Lam´é-Wangerin 函数。Lam´é-Wangerin 函数是 Lam´é 微分方程的特解，在两个相邻正则奇点处呈衰减行为。此外，我们还给出了 Lam´é-Wangerin 函数的一个估计，该估计用于证明各种级数展开的收敛性。在第 4 节中，我们引入内外双环面调和函数，并确立其主要性质。在第 5 节中，我们证明若干涉及内外双环面调和函数的结果。这些结果包括狄利克雷问题的解，以及用内部调和函数表示外部调和函数的积分表示。最后，作为本文的主要结果，我们给出两点间距离倒数关于内外双环面调和函数的级数展开。由此还可推得 Lam´é-Wangerin 函数的加法定理和积分关系。在第 6节中，我们引入第二类内外双环面调和函数。与扁环坐标中的相应结果不同，这些第二类内外双环面调和函数可通过开尔文变换化为第一类函数。在最后两节7和8中，我们说明双环面坐标的极限情形包括双球坐标和长旋转椭球坐标。我们将双环面坐标中距离倒数的展开式与已知的双球坐标和长旋转椭球坐标展开式联系起来。

2 双环面坐标

Miller [9, 第 211 页，（6.28）] 引入了双环面坐标 α，β，ϕ 在 $\mathbb{R}^3$ 通过

$$x = R\cos\phi, \quad y = R\sin\phi, \quad z = ikR\,\mathrm{sn}(\alpha,k)\,\mathrm{sn}(\beta,k), \tag{2.1}$$

其中

$$\frac{1}{R} = \frac{i}{k'}\left(\mathrm{dn}(\alpha,k)\,\mathrm{dn}(\beta,k) - k\,\mathrm{cn}(\alpha,k)\,\mathrm{cn}(\beta,k)\right).$$

注意，我们修正了 R 定义中的一个笔误。这些坐标取决于给定的模数 $k \in (0,1)$，并涉及雅可比椭圆函数 cn，sn，dn [5, 第 22] 章。我们还使用互补模数 $k' = \sqrt{1-k^2}$ 以及第一类完全椭圆积分 $K = K(k)$ 和 $K' = K'(k) = K(k')$。复坐标 α 和 β 在以下线段中变化：$\alpha \in (iK', 2K + iK')$、$\beta \in (2K - iK', 2K + iK')$ 和 $\phi \in (-\pi, \pi]$。

双环面坐标也可视为（R，z）平面中的一个坐标系，其中$R = (x^2+y^2)^{1/2}$ 表示点（x，y，z）到 $\mathbb{R}^3$ 中 z轴的距离。然后，通过添加绕 z轴的旋转角 ϕ，即可得到三维双环面坐标。

我们更倾向于使用实数形式的双环面坐标。令 $\alpha = s + K + iK'$, $\beta = 2K + it$，其中$s \in (-K, K)$, $t \in (-K', K')$，可得

$$R = \frac{\mathrm{cn}(s,k)\,\mathrm{cn}(t,k')}{1 - \mathrm{sn}(s,k)\,\mathrm{dn}(t,k')}, \tag{2.2}$$

$$z = \frac{\mathrm{dn}(s,k)\,\mathrm{sn}(t,k')}{1 - \mathrm{sn}(s,k)\,\mathrm{dn}(t,k')}. \tag{2.3}$$

在推导（2.2）、（2.3）时，用到了雅可比椭圆函数的标准恒等式，参见 [5,§22.4, §22.6]。

映射 $(s, t) \in (-K, K) \times (-K', K') \mapsto (R, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ 是双射，且为（实）解析映射，其逆映射也解析。我们省略这些结论的证明。它们与扁环坐标 [2] 中相应结论的证明类似。事实上，平面双环面坐标与

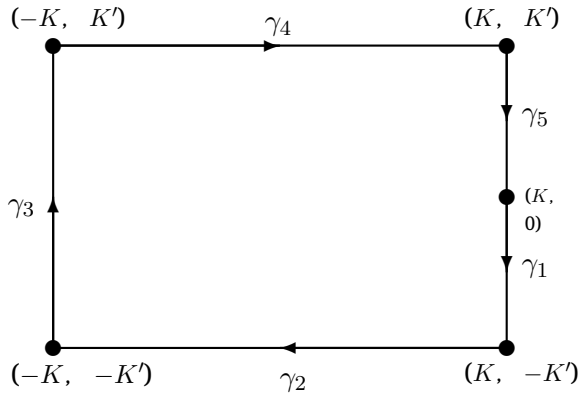

图1. 坐标 $s,\ t$构成的矩形 $[-K,K]\times[-K',K']$。

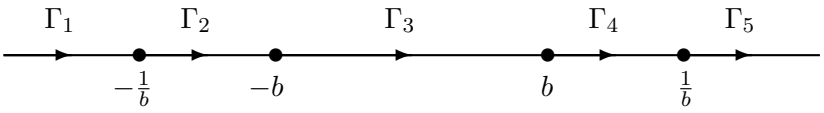

图2. z轴上的双环面坐标。

平面扁环坐标密切相关，具体如下。令 $s=\sigma-K$,$\sigma\in(0,\ 2K)$ 和 $t=K'-\tau$, $\tau\in(0,\ K')$，可得

$$z=T^{-1},\quad R=(x^2+y^2)^{1/2}=-\frac{ik}{T}\,\mathrm{sn}(\sigma,k)\,\mathrm{sn}(i\tau,k),$$

其中

$$T=\frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}(\sigma,k)\,\mathrm{dn}(i\tau,k)+\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}(\sigma,k)\,\mathrm{cn}(i\tau,k).$$

因此，σ，τ正是 [2, §2.2] 中讨论的平面扁环坐标，R，z只是互换了。因此，可以说平面扁环坐标和平面双环面坐标（在第一象限内）相同，但它们的三维版本因绕不同的坐标轴旋转而变得不同。

我们将平面双环面坐标扩展到 z轴，方法如下。注意，(2.2)、(2.3)右端的分母在矩形 $(s,t)\in[-K,K]\times[-K',K']$上为正，但点 $s=K,t=0$除外。因此，R,z是该矩形上除去点 $(K,0)$ 后的连续函数。矩形边界上的点映射到 $R=0$。如图1所示，沿顺时针方向绕该矩形边界一周时，z 横穿 z轴，从 $-\infty$ 到 $+\infty$。如图2所示，对于每个 $j=1$，2、3、4、5，线段 γ_j 映射到Γ_j，记作

$$b=\frac{1-k}{k'}=\frac{k'}{1+k}\in(0,1). \tag{2.4}$$

对于 $s_0\in(-K,\ K)$ 和 $t_0\in(-K',\ K')$，我们引入多项式

$$P_1(x,y,z)=\mathrm{sn}^2(t_0,k')(R^2+z^2+1)^2-k^2\,\mathrm{sd}(t_0,k')^2(R^2+z^2-1)^2-4z^2, \tag{2.5}$$

$$P_2(x,y,z)=\mathrm{sn}^2(s_0,k)(R^2+z^2+1)^2-(R^2+z^2-1)^2-4k'^2\,\mathrm{sd}^2(s_0,k)z^2, \tag{2.6}$$

其中我们对 Jacobi椭圆函数使用 Glaisher记号 [5, (22.2.10)]。如果 s, t 是 (x, y, z) 的双环面坐标，那么

$$R^2 + z^2 + 1 = \frac{2}{1 - \operatorname{sn}(s,k)\operatorname{dn}(t,k')}, \quad R^2 + z^2 - 1 = \frac{2\operatorname{sn}(s,k)\operatorname{dn}(t,k')}{1 - \operatorname{sn}(s,k)\operatorname{dn}(t,k')}, \tag{2.7}$$

因此计算得出

$$P_1(x,y,z) = \frac{4(\operatorname{sn}^2(t_0,k') - \operatorname{sn}^2(t,k'))(\operatorname{dn}^2(t_0,k') - k^2\operatorname{sn}^2(s,k))}{\operatorname{dn}^2(t_0,k')(1 - \operatorname{sn}(s,k)\operatorname{dn}(t,k'))^2}, \tag{2.8}$$

$$P_2(x,y,z) = \frac{4(\operatorname{sn}^2(s_0,k) - \operatorname{sn}^2(s,k))(\operatorname{dn}^2(t,k') - k^2\operatorname{sn}^2(s_0,k))}{\operatorname{dn}^2(s_0,k)(1 - \operatorname{sn}(s,k)\operatorname{dn}(t,k'))^2}. \tag{2.9}$$

因此，$P_1(x, y, z) = 0$ 当且仅当 $t = t_0$ 或 $t = -t_0$，并且 $P_2(x, y, z) = 0$ 当且仅当 $s = s_0$ 或 $s = -s_0$。

图 3 展示了平面双环面坐标的坐标线。坐标线 $s = s_0$ 和 $t = t_0$ 分别以蓝色和红色显示。坐标线 $t = 0$ 是正R轴，而坐标线 $s = 0$ 是单位圆的一半。映射 $(s,t) \to (s,-t)$ 对应于 $(R,z) \to (R,-z)$，而 $(s,t) \to (-s,t)$ 对应于 $(R,z) \to (R^2+z^2)^{-1}(R,z)$，即关于单位圆的反演。矩形 $(s,t) \in (0,K) \times (0,K')$ 对应于区域$\{(R,z)\colon\ R,z > 0, R^2 + z^2 > 1\}$。图 3 还显示了位于 z轴上的四个点 $(0,\pm b)$、$(0,\pm b^{-1})$。

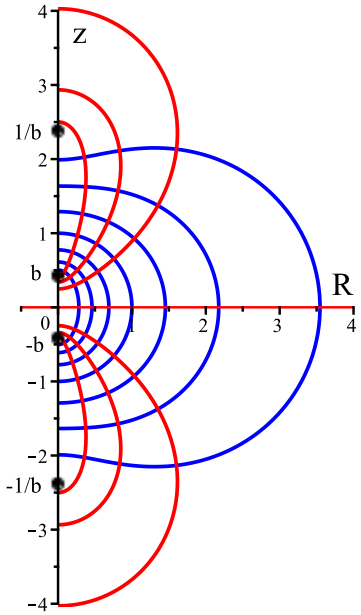

图 3. 双环面坐标的坐标线 $s = \pm\frac{3}{5}K$, $\pm\frac{2}{5}K$, $\pm\frac{1}{5}K$, 0（蓝色）和 $t = \pm\frac{4}{5}K', -\pm\frac{3}{5}K', \frac{2}{5}K', 0$（红色），其中 $k = 0.7$。

拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 具有 $\mathcal{R}$分离变量解

$$u(x,y,z) = R^{-1/2}u_1(\alpha)u_2(\beta)\mathrm{e}^{im\phi}, \quad R = (x^2+y^2)^{1/2},$$

其中 u_1 和 u_2 满足常微分方程

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2} + \left(\lambda - (m^2 - \tfrac{1}{4})k^2\,\mathrm{sn}^2(\zeta,k)\right) w = 0. \tag{2.10}$$

这一点在 [9, 第 211 页，式 (6.28)]中有陈述，并将在下文的定理2.1中得到验证。拉梅´方程为

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2} + (\lambda - \nu(\nu+1)k^2\,\mathrm{sn}^2(\zeta,k))w = 0. \tag{2.11}$$

所以，式 (2.10) 是拉梅´方程，其中 $\nu = |m| - \frac{1}{2}$。

若记 $v_1(s) = u_1(s + K + iK')$ 和 $v_2(t) = u_2(2K + it)$，则得到微分方程

$$\frac{d^2v_1}{ds^2} + (\lambda - (m^2 - \tfrac{1}{4})\,\mathrm{dc}^2(s,k))v_1 = 0, \tag{2.12}$$

$$\frac{d^2v_2}{dt^2} - (\lambda + (m^2 - \tfrac{1}{4})k^2\,\mathrm{sc}^2(t,k'))v_2 = 0. \tag{2.13}$$

利用 $\mathrm{dc}^2(s,\ k) = 1+k'^2\,\mathrm{sc}^2(s,\ k)$，可知方程 (2.12) 与 (2.13) 相同，只需将 k 替换为 k'，并将 λ 替换为 $\nu(\nu+1) - \lambda$。我们将结果归纳为以下定理。

定理 2.1。若 $m \in \mathbb{Z}$，$\lambda \in \mathbb{R}$，v_1 满足 (2.12) 在 $(-K,\ K)$ 上，且 v_2 满足 (2.13) 在 $(-K',\ K')$上，则

$$u(x,y,z) = R^{-1/2}v_1(s)v_2(t)\mathrm{e}^{im\phi} \tag{2.14}$$

是 $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z):\ z \in \mathbb{R}\}$中的调和函数。

Proo。双环面坐标的度量系数由 $h_\phi = R$ 给出，并且

$$h_s = h_t = R\,(\mathrm{dc}^2(s,k) + k^2\,\mathrm{sc}^2(t,k'))^{1/2}. \tag{2.15}$$

在柱坐标 R,z,ϕ中，拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 具有如下形式 m

$$\frac{\partial^2 v}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + R^{-2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{4}v\right) = 0,$$

其中 $u = R^{-1/2}v$。利用 $h_s = h_t$，该方程可变换为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + R^{-2}h_s^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{4}v\right) = 0.$$

现在很容易验证，$v_1(s)v_2(t)\mathrm{e}^{im\phi}$ 满足该方程。 ■

3 Lam´e-Wangerin 函数

我们回顾 Lam´e-Wangerin 特征值问题。Lam´e 方程 (2.11) 在 $\zeta = iK'$和 $\zeta = 2K+iK'$处有正则奇点，且两处的指数分别为 $-\nu$和 $\nu+1$。该特征值问题要求求出方程 (2.11)（其中 $\nu \geq -\frac{1}{2}$）在 线段 $\zeta \in (iK', 2K + iK')$ 上的解，这些解在两个端点 iK'和 $2K+iK'$处都属于指数 $\nu+1$。在 [6, §15.6] 中，该特征值问题的特征函数记为 $F_\nu^n(\zeta,k^2)$。另外，在 [3] 中我们使用记号$W_\nu^n(s,k) = F_\nu^n(s + K + iK', k^2)$。

我们列出 Lam´e-Wangerin 函数 $W_\nu^n(s,\ k)$，$\nu \geq -\frac{1}{2}$，$n \in \mathbb{N}_0$。详见 [13] 以了解更多详情。

(a) 函数 $W_\nu^n(s,k)$ 在区间 $s \in (-K,K)$ 上是实值的，并且在此开区间内恰有 n 个零点。此外，当 $s \to \pm K$ 时，$W_\nu^n(s,k) \to 0$。
(b) 当 $s < K$ 接近 K 时，我们有如下展开式

$$W_\nu^n(s,k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell (K-s)^{\nu+1+2\ell}, \tag{3.1}$$

其中 c_ℓ 和 $c_0 \neq 0$ 为实系数。
(c) 函数 $W_\nu^n(s,k)$ 为偶/奇函数，具有 n:

$$W_\nu^n(-s,k) = (-1)^n W_\nu^n(s,k). \tag{3.2}$$

(d) 对每个固定的 $\nu \geq -\frac{1}{2}$和 $k \in (0,1)$，函数序列 $\{W_\nu^n(s,k)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 构成希尔伯特空间 $L^2(-K,K)$ 的正交归一基。
(e) 函数 $W(s) = W_\nu^n(s)$ 满足微分方程

$$\frac{d^2W}{ds^2} + \left(\Lambda_\nu^n(k) - \nu(\nu+1)\,\mathrm{dc}^2(s,k)\right) W = 0, \tag{3.3}$$

其中 $\Lambda_\nu^n(k)$ 表示一个特征值。这些特征值的一些性质见 [3, §2]。(f) 函数 $W_\nu^n(s)$ 可解析延拓为条带 $|\Im s| < 2K'$ 内的解析函数，其中已去除支割线 $(-\infty,\ -K]$ 和 $[K,+\infty)$。

需要指出的是，Lam´e-Wangerin 函数W_ν^n以及特征值 Λ_ν^n 都没有显式公式。不过，已有高效的数值计算方法。

在应用于双环面坐标时，我们使用 Lam´e-Wangerin 函数 $W_\nu^n(s,\ k)$，不仅用于 $s \in (-K,\ K)$，也用于实部为 $-K$ 或 K 的复数 s。这与将 Lam´e-Wangerin 函数应用于扁环坐标 [3]时有一个重要区别。在后一种情况下，$W_\nu^n(s,\ k)$ 用于纯虚数 s。以下两个引理陈述了带有复自变量的 Lam´e-Wangerin 函数的一个性质，后续分析将用到这一性质。

引理 3.1。设 $\nu \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in (0,\ 1)$。*(i)*
$W_\nu^n(K+ir,k) \neq 0$ 对所有 $r \in (0,\ 2K')$成立。
(ii) 若 $0 < r_1 < r_2 < 2K'$，则

$$0 < \frac{W_\nu^n(K+ir_1,k)}{W_\nu^n(K+ir_2,k)} \leq 2\mathrm{e}^{-\omega(n+\nu+1)(r_2-r_1)}, \quad \textit{where } \omega := \frac{\pi}{2K}.$$

证明。函数 $W_\nu^n(K+ir,\ k)$，$r \in (,\ 2K')$ 通常不是实值的。然而，由 (3.1) 可知，我们可以写成 $W_\nu^n(K+ir,\ k) = Cw(r)$，其中取适当的复常数 C 使得 w 为实值，且其展开式为

$$w(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} d_\ell r^{\nu+1+2\ell} \quad \text{with } d_\ell \in \mathbb{R},\ d_0 = 1, \tag{3.4}$$

当 $r > 0$较小时。我们将在证明中用 $W_\nu^n(K+ir,\ k)$ 替换 $w(r)$。现在由 (3.3) 得到

$$w'' = q(r)w, \quad q(r) = \Lambda_\nu^n(k) + \nu(\nu+1)\,\mathrm{cs}^2(r,k'). \tag{3.5}$$

利用 $\nu \geq 0$ 和 [3, 引理 2。3], 我们得到

$$q(r) \geq \Lambda_\nu^n(k) \geq \gamma^2, \quad \gamma := \omega(n+\nu+1) > 0.$$

由 (3.4) 可知，当 $r>0$ 足够小时，$w(r)>0$ 和 $w'(r)>0$，因此 (3.5) 和 $q(r)>0$ 推出$w(r)>0$ 和 $w'(r)>0$ 对所有 $r\in(0,2K')$ 都成立。现在 $u=w'/w$ 满足 Riccati方程$u'+u^2=q(r)$，因此通过与方程 $v'+v^2=\gamma^2$ 比较，

$$u(r)\geq\gamma\tanh(\gamma(r-r_1))\quad\text{for } r\geq r_1.$$

从 $r=r_1$ 到 $r=r_2$ 积分，得到

$$\ln\frac{w(r_2)}{w(r_1)}\geq\ln\cosh(\gamma(r_2-r_1))\geq\ln\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma(r_2-r_1)}\right),$$

如所需。 ■

引理 3.1 的证明对于负的 ν 不成立。在使用双环面坐标时，我们只使用 ν 具有$\nu=m-\frac{1}{2}$ 且 $m\in\mathbb{N}_0$的形式，因此只需在以下引理中讨论$\nu=-\frac{1}{2}$ 的情形。

引理 3.2. 设 $k\in(0,1)$。
(i) 对每个 $n\in\mathbb{N}_0$, $r\in(0,2K')$，$W^n_{-1/2}(K+ir,k)\neq0$。*(ii)* 设 $0<r_1<r_2<2K'$。则存在正常数 N，使得

$$0<\frac{W^n_{-1/2}(K+ir_1,k)}{W^n_{-1/2}(K+ir_2,k)}\leq2\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega(n+\frac{1}{2})(r_2-r_1)}\quad\textit{for } n\geq N.$$

证明。 与引理 3.1 的证明中一样，我们用函数 $W^n_{-1/2}(K+ir,k)$ 替换为函数 $w_n(r)$，该函数满足微分方程 (3.5)，其中 $\nu=-\frac{1}{2}$，并且具有展开式 (3.4)，其中 $\nu=-\frac{1}{2}$。简记 $\lambda_n=\Lambda^n_{-1/2}(k)$。

(i) 令 $w_n(r)=\mathrm{sn}^{1/2}(r,k')u_n(r)$，$r\in(0,2K')$。于是方程 (3.5) 化为

$$u_n''+\mathrm{ds}(r,k')\,\mathrm{cn}(r,k')u_n'-p(r)u_n=0,\tag{3.6}$$

其中

$$p(r)=\lambda_n-\tfrac{3}{4}k'^2\,\mathrm{sn}^2(r,k')+\tfrac{1}{4}k'^2+\tfrac{1}{2}.$$

根据 [3, 引理 2.3]，$\lambda_n\geq\frac{1}{2}\omega^2-\frac{1}{4}$。由于 $\omega^2>k'>k'^2$，因此得到

$$p(r)\geq\tfrac{1}{2}k'^2-\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{4}k'^2+\tfrac{1}{4}k'^2+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4}>0\quad\text{for } r\in(0,2K').$$

现在，由 (3.6) 可得，当 r 接近 0 时，$u_n(r)=1+cr^2+\ldots$，且 $c=\frac{1}{16}(2+4\lambda_n+k'^2)>0$，因此 $u_n(r)>0$，$u_n'(r)>0$ 对于较小的正 r 成立。由于 $p(r)>0$，方程 (3.6) 表明，对于所有 $r\in(0,2K')$，$u_n(r)>0$，$u_n'(r)>0$。因此，对于 $r\in(0,2K')$，$w_n(r)>0$；对于 $r\in(0,K')$，$w_n'(r)>0$。注意，我们无法证明对于所有 $r\in(0,2K')$，$w_n'(r)>0$，因为当 $r\to2K'$ 时，$w_n(r)\to0$（(3.5) 的正则奇点 $r=2K'$ 有两个负指数 $-\frac{1}{2}$、$-\frac{1}{2}$）。这就证明了 (i)。

（ii）我们使用方程（3.5）。令 N 足够大，使得 $\lambda_n>1$ 对于 $n\geq N$。对于 $n\geq N$，我们考虑区间

$$I_n:=\left[\lambda_n^{-1/2}K',2K'-\lambda_n^{-1/2}K'\right].$$

由于 $\mathrm{sn}(r,k')$ 是 $r\in[0,2K']$的凹函数，因此对于 $r\in[0,K']$，$\mathrm{sn}(r,k')\geq\frac{r}{K'}$。因此，

$$q(r)\geq\lambda_n+\tfrac{1}{4}-\frac{K'^2}{4r^2}\quad\text{for } r\in(0,K'].$$

这意味着

$$q(r) \geq \tfrac{3}{4}\lambda_n + \tfrac{1}{4} > 0 \quad \text{for } r \in I_n. \tag{3.7}$$

在 (i) 中我们证明了 w_n 和 w_n' 在区间 $(0, K']$上为正，因此 (3.5) 和 (3.7) 表明 w_n和 w_n' 在 $(0, K')$ 上为正 $\cup I_n$。现在取 N足够大，使得 $r_1, r_2 \in I_n$对于 $n \geq N$成立。按照引理3.2的证明方法，由 (3.5) 和 (3.7) 可得

$$0 < \frac{w_n(r_1)}{w_n(r_2)} \leq 2\exp\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_n + \tfrac{1}{4})^{1/2}(r_2 - r_1)\right).$$

这与 [3,引理 2.3]一起给出了所需的估计。 ■

4 第一类调和函数

坐标曲面 $t = 0$ 是平面 $z = 0$。如果 $t_0 \in (0, K')$，则闭坐标曲面 $t = t_0$是环面曲面 $P_1(x, y, z) = 0$中由 (2.5) 定义的 P_1位于半空间 $z > 0$内的部分。同样，如果 $t_0 \in (-K', 0)$，则坐标曲面 $t = t_0$ 由曲面 $P_1(x, y, z) = 0$中位于半空间 $z < 0$内的部分给出。这些曲面在图 4 中以红色显示。

令 $t_0 \in (0, K')$。则，位于曲面 $t = t_0$ 内部的有界区域 D_1 由双环面坐标中的$t \in (t_0, K']$) 给出，并且由

$$D_1 = \{(x, y, z) : P_1(x, y, z) < 0, z > 0\}$$

笛卡尔坐标中的.....给出。其边界是坐标曲面 $t = t_0$。

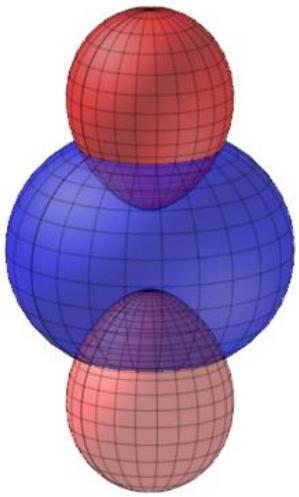

图 4。 C坐标曲面 $s = 0.2K$ （蓝色）和 $t = \pm 0.5K'$ （红色），系统（2.1）中的 $k = 0$ .5.

现在引入分离形式的调和函数 $u(x, y, z)$，其形式为（2.14），并且在所有 D_1 的并集上都是调和函数，其中 $t_0 \in (0, K')$。特别是，这些函数在正 z轴上必须是调和函数。对于 $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$，我们将内部第一类双环面调和函数定义如下：

$$\mathrm{G}_{m,n}(x, y, z) = R^{-1/2} W^n_{|m|-\frac{1}{2}}(s, k) W^n_{|m|-\frac{1}{2}}(it - K - iK', k) \mathrm{e}^{im\phi}. \tag{4.1}$$

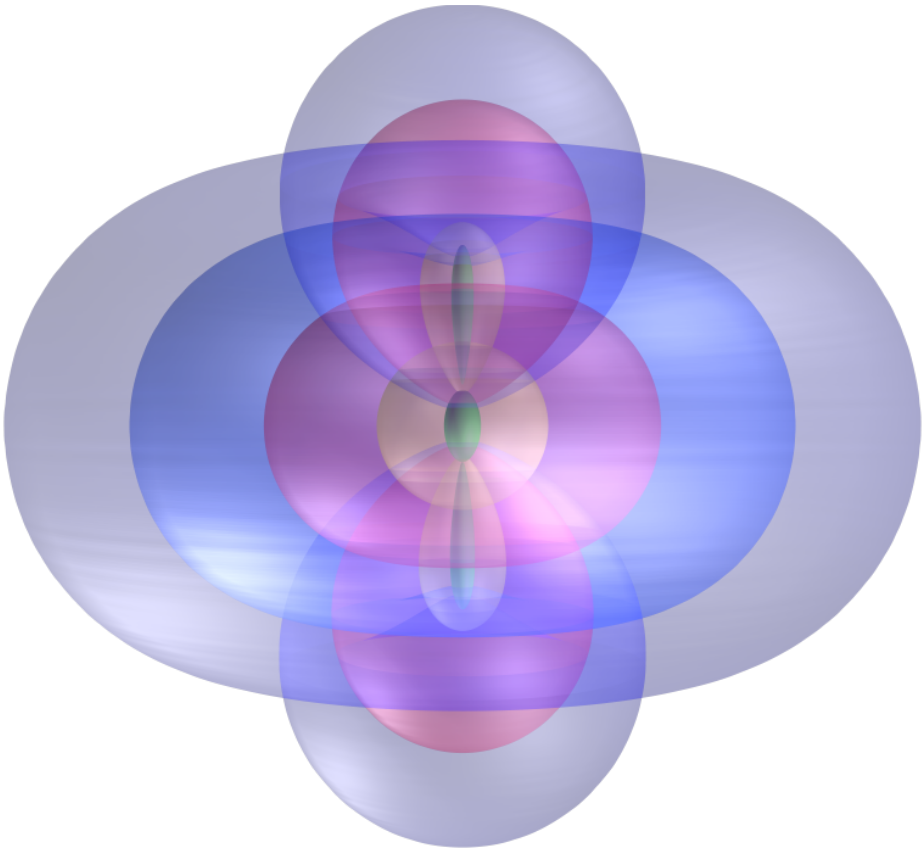

图5. 对于 $k = 0.7$，此图展示了 $t \in \{\pm 0.29K', \pm 0.38K', \pm 0.70K', \pm 0.90K'\}$ 的旋转不变双双环面（分别为绿色、黄色、红色、蓝色），以及 $s \in \{-0.6K, 0, 0.48K, 0.66K, 0.74K\}$ 的正交双凹盘双环面的三维可视化（分别为绿色、黄色、红色、蓝色和深蓝色）。请注意，位于 $s = 0$的双凹盘（呈黄色）对应于单位球面。

定理 4.1。 内部双环面调和函数 $G_{m,n}(x, y, z)$ 在整个 $\mathbb{R}^3$ 上均为调和函数，但线段 $\{(0, 0, z)$ 除外：$-b^{-1} \le z \le -b\}$，其中 b 由 (2.4)给出。

证明。利用 (3.3)，我们看到 $v_1(s) = W_{|m|-\frac{1}{2}}(s, k)$、$v_2(t) = W^n_{|m|-\frac{1}{2}}(it - K - iK', k)$ 满足 (2.12)、(2.13)，且两个方程中的 $\lambda = \Lambda^n_{|m|-\frac{1}{2}}(k)$ 均相同。由定理 2.1 可知，$G_{m,n}(x, y, z)$ 在除去 z 轴的整个 $\mathbb{R}^3$ 上都是调和函数。利用 (2.2)、(3.1) 和 (3.2)，我们看到函数

$$(s, t) \mapsto R^{-1/2} W^n_{|m|-\frac{1}{2}}(s, k) W^n_{|m|-\frac{1}{2}}(it - K - iK', k)$$

在矩形 $(s, t) \in (-K, K) \times (-K', K')$ 的边界上，除闭线段 γ_2 （见图1）和点 $(K, 0)$ 外的每一点处，都是局部有界的。由于映射 $(R, z) \mapsto (s, t)$ 连续，我们得到，$G_{m,n}(x, y, z)$ 在 z 轴上除闭线段 Γ_2 （见图2）外的每一点处都是局部有界的。注意，我们不能断言 $G_{m,n}(x, y, z)$ 在闭线段Γ_2 上的点处局部有界，因为函数 W^n_ν是方程 (3.3) 的解，在正则奇点 $-K$ 和 K 处属于指数 $\nu + 1$，但在 $K - 2iK'$ 处则未必属于该指数（事实上，它不可能在此处属于指数 $\nu + 1$）。$G_{m,n}$ 在 z 轴上一点处的局部有界性意味着，根据下面的引理，函数 $G_{m,n}$ 可以延拓为该点邻域内的调和函数。证明至此。 ■

引理 4.2. 考虑球

$$B_r = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < r^2\},$$

以及一个有界连续函数

$$u : B_r^* := \overline{B}_r \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$$

使得 u 在 $B_r \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ 上是调和函数：$z \in \mathbb{R}$。于是 u 可调和延拓至 B_r。

证明。利用泊松积分 [8, p. 241]，我们求解区域 B_r 上边界值为 u 的狄利克雷问题。得到解 U，它在 B_r 上是调和函数，在 $B_r \setminus \{$ 上连续，并且在 $\partial B_r \setminus \{$ 上与 u 一致：$(0, 0, r), (0, 0, -r)\}$ [8, 第 243 页，备注]。定义函数 v 如下：

$$v(x, y, z) = -\ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}.$$

Th该函数在 $\mathbb{R}^3$ 去掉 z 轴后是调和函数。令 $\epsilon > 0$。考虑函数 n

$$w = \epsilon v - (u - U).$$

于是 $w \geq 0$ 在 $\partial B_r \setminus \{$ 上成立：$(0, 0, r), (0, 0, -r)\}$。存在常数 M，使得 $|u| \leq M$ 在 B_r^* 上成立。于是 $|U| \leq M$ 在 B_r^* 上也成立，因此 $|u - U| \leq 2M$ 在 B_r^* 上成立。选取足够小的 $\delta > 0$，使得当 $x^2 + y^2 \leq \delta^2$ 时，$\epsilon v \geq 2M$。于是 $w \geq 0$ 在集合 A 的边界上成立：$= B_r \setminus \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \delta^2\}$。根据调和函数的最大值原理，$w \geq 0$ 在 A 上成立。我们可以让 $\delta > 0$ 任意小，因此 $w \geq 0$ 在 B_r^* 上成立。由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，得到 $U - u \geq 0$ 在 B_r^* 上成立。类似地，得到 $U - u \leq 0$ 在 B_r^* 上成立。因此，$u = U$ 在 B_r^* 上成立，所以 U 是 u 所需的延拓。■

Let

$$\sigma(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}\|^{-2}\mathbf{r}$$

表示在 $\mathbb{R}^3$ 中关于单位球面的反演。于是，调和函数 $u(\mathbf{r})$ 所对应的开尔文变换为

$$\hat{u}(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}\|^{-1} u(\sigma(\mathbf{r})) \tag{4.2}$$

且该函数也是调和函数。关于单位球面的反演在 $s \mapsto -s$ 双环面坐标中表示为。由（3.2）和

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1 + \operatorname{sn}(s, k) \operatorname{dn}(t, k')}{1 - \operatorname{sn}(s, k) \operatorname{dn}(t, k')}$$

可知，$\mathrm{G}_{m,\,n}$ 的开尔文变换（4.2）满足

$$\widehat{\mathrm{G}}_{m,n}(\mathbf{r}) = (-1)^n \, \mathrm{G}_{m,n}(\mathbf{r}).$$

对于 $m \in \mathbb{Z}$、$n \in \mathbb{N}_0$，我们将第一类外部双环面调和函数定义为

$$\mathrm{H}_{m,n}(x, y, z) = R^{-1/2} W^n_{|m|-\frac{1}{2}}(s, k) W^n_{|m|-\frac{1}{2}}(-it - K - iK', k) \mathrm{e}^{im\phi}. \tag{4.3}$$

$\mathrm{H}_{m,\,n}$ 的定义与 $\mathrm{G}_{m,\,n}$ 相同，只是我们将 t 替换为 $-t$。因此，

$$\mathrm{H}_{m,n}(x, y, z) = \mathrm{G}_{m,n}(x, y, -z). \tag{4.4}$$

根据定理 4.1，$\mathrm{H}(x,\ y,\ z)$ 在整个 $\mathbb{R}^3$ 上都是调和函数，但线段 $\{(0,\ 0,\ z)$ 除外。注意，“内部”和“外部”这两个概念指的是曲面 $t = t_0$，其上有 $t_0 \in (0,\ K')$。

5 第一类双环面调和函数的应用

我们求区域 D_1 上的狄利克雷问题，该区域由 $t \in (t_0,\ K']$ 给出，其中 $t_0 \in (0,\ K')$。如果调和函数 u 定义在 D_1 中，并且在弱意义下于 ∂D_1 上取得边界值 f，那么 $R^{1/2}\,u$（用双环面坐标 $s,\ t,\ \phi$ 表示）在 $t_1 \in (t_0,\ K')$ 处的取值收敛到 $R^{1/2}f$，在希尔伯特空间

$$H_1 = L^2((-K,K)\times(-\pi,\pi))$$

如 $t_1 \to t_0$。如 [2, § 5.2], 可以证明，狄利克雷问题的解是唯一的。

定理 5.1. 设 f 是定义在区域 D_1 的边界 ∂D_1 上的函数，该区域由$t \in (t_0, K']$ 给出，其中 $t_0 \in (0, K')$。假设 f用双环面坐标表示为

$$f(\mathbf{r}) = R^{-1/2}g(s,\phi),\quad s\in(-K,K),\quad \phi\in(-\pi,\pi],$$

使得 $g \in H_1$。对于所有的 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $n \in \mathbb{N}_0$，定义

$$\begin{aligned} c_{m,n} &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-im\phi}\int_{-K}^{K} g(s,\phi)W^n_{|m|-\frac12}(s,k)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2\pi W^n_{|m|-\frac12}(it_0-K-iK',k)}\int_{\partial D_1}\frac{1}{h_s(\mathbf{r})}f(\mathbf{r})\,\mathrm{G}_{-m,n}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}S(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

其中 h_s 由 (2.15)给出。则函数

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n=0}^{\infty} d_{m,n}G_{m,n}(\mathbf{r}),\quad d_{m,n} := c_{m,n}\{W^n_{|m|-\frac12}(it_0-K-iK',k)\}^{-1}, \tag{5.1}$$

在 D_1 中为调和函数，且它以弱意义在 ∂D_1 上取得边界值 f。式(5.1) 中的无穷级数在 D_1的紧子集上一致收敛且绝对收敛。

证明。 由于 $\mathrm{d}S(\mathbf{r}) = Rh_s(\mathbf{r})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\phi$，关于 $c_{m,n}$的两个公式一致。函数系$W^n_{|m|-\frac12}(s,k)\mathrm{e}^{im\phi}$，$m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}_0$在希尔伯特空间 H_1中正交且完备，因此我们得到相应的傅里叶展开

$$g(s,\phi)\sim\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n=0} c_{m,n}W^n_{|m|-\frac12}(s,\phi)\mathrm{e}^{-im\phi}.$$

特别地，数列 $\{c_{m,n}\}$ 有界：$|c_{m,n}| \le C_1$。我们使用魏尔斯特拉斯 M判别法，证明级数（5.1）在紧集 $t \ge t_1 > t_0$上一致收敛。根据调和函数的最大值原理，只需找到界 $M_{m,n}$，使得$|d_{m,n}G_{m,n}(\mathbf{r})| \le M_{m,n}$ 对 $t = t_1$ 和 $\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{N}_0} M_{m,n} < \infty$成立。利用（2.2），我们求得对于 $s\in(-K,K)$ 和 $t = t_1$,

$$\frac{1}{R} = \frac{1-\mathrm{sn}(s,k)\,\mathrm{dn}(t_1,k')}{\mathrm{cn}(s,k)\,\mathrm{cn}(t_1,k')} \le \frac{2}{\mathrm{cn}(s,k)\,\mathrm{cn}(t_1,k')} \le \frac{2}{k'}\,\mathrm{dc}(s,k)\,\mathrm{nc}(t_1,k').$$

利用 [3, 引理 2.4、2.5] 以及引理3.1、3.2，我们估计

$$\left|\frac{W^n_{|m|-\frac12}(it_1-K-iK',k)}{W^n_{|m|-\frac12}(it_0-K-iK',k)}R^{-1/2}W^n_{|m|-\frac12}(s,k)\mathrm{e}^{im\phi}\right| \le C_2p^{|m|+n}(1+|m|+n),$$

其中常数 C_2和 $p\in(0,\ 1)$与 m、n、s、ϕ无关。因此，我们可以取$M_{m,\ n} = C_1C_2p^{|m|+n}(1+|m|+n)$，收敛性证明即告完成。因此，由 $u(\mathbf{r})$ 定义的函数 (5.1) 是 D_1上的调和函数。我们用与证明 u 定理 5. f 时相同的方法，证明 ∂D_1在 [2,上的边界值以弱意义成立。3]。 ■

定义朗斯基行列式 $w_{m,\ n}$ 为

$$w_{m,n} := U(t)V'(t) - U'(t)V(t), \tag{5.2}$$

其中 $U(t) := W^n_{|m|-\frac{1}{2}}(it - K - iK',\ k)$, $V(t) := U(-t)$. 外部调和函数可以用内部调和函数表示为积分形式。

定理 5.2. 设 $t_0 \in (0, K')$、 $m \in \mathbb{Z}$、 $n \in \mathbb{N}_0$，且令 $\mathbf{r}^*$ 为 D_1 外部的一点，其中 $\overline{D}_1$ 是由 $t \in (t_0, K']$ 给出的区域。则

$$\mathrm{H}_{m,n}(\mathbf{r}^*) = \frac{w_{m,n}}{4\pi\{W^n_{|m|-\frac{1}{2}}(it_0 - K - iK', k)\}^2} \int_{\partial D_1} \frac{\mathrm{G}_{m,n}(\mathbf{r})}{h_s(\mathbf{r})\|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*\|} \mathrm{d}S(\mathbf{r}). \tag{5.3}$$

我们略去此定理的证明；该证明与 [2, 定理 5.5] 的证明非常相似。由 (5.3) 可得 $w_{m,\ n} \neq 0$。

结合定理 5.1 和 5.2，我们得到两点之间距离倒数在内部和外部双环面调和函数中的展开式。

定理 5.3。 设$\mathbf{r}$、$\mathbf{r}^* \in \mathbb{R}^3$ 分别具有双环面坐标(s, t, ϕ) 和(s^*, t^*, ϕ^*)。若 $-K' < t^* < t < K'$ 则

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*\|} = 2 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w_{m,n}} \mathrm{G}_{m,n}(\mathbf{r})\, \mathrm{H}_{-m,n}(\mathbf{r}^*). \tag{5.4}$$

证明。 若 $t > 0$ 我们选择 $t_0 \in (0, K')$，使得 $t^* < t_0 < t$，并考虑 D_1 曲面 $t = t_0$的内部区域 $f(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{r}^*\|^{-1}$ 在一个包含其闭包的开集上是调和函数 D_1 (因为$\mathbf{r}^*$ 位于D_1的闭包之外)。利用定理 5.2计算傅里叶系数，可得（5.4）。

若 $t \leq 0$，则将 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}^*$ 分别关于平面 $z = 0$进行反射。于是 t、t^* 分别替换为 $-t$、$-t^*$。现在，我们将证明第一部分的结果应用于反射后的点（顺序颠倒），再次得到（5.3），注意到（4.4）。 ■

作为推论，我们得到 Lam´e-Wangerin 函数的以下加法公式。

定理 5.4。设 $m \in \mathbb{N}_0$， s， $s^* \in (-K,\ K)$， $-K' < t^* < t < K'$。则

$$\begin{aligned} Q_{m-\frac{1}{2}}(\chi) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w_{m,n}} & W^n_{m-\frac{1}{2}}(s, k) W^n_{m-\frac{1}{2}}(it - K - iK', k) \\ & \times W^n_{m-\frac{1}{2}}(s^*, k) W^n_{m-\frac{1}{2}}(-it^* - K - iK', k), \end{aligned} \tag{5.5}$$

其中 $\chi : ((-K,\ K) \times (-K',\ K'))^2 \times (0,\ 1) \to (1,\ \infty)$ 由下式给出

$$\begin{aligned} \chi(s, t, s^*, t^*, k) = {} & \mathrm{nc}(s, k)\, \mathrm{nc}(t, k')\, \mathrm{nc}(s^*, k)\, \mathrm{nc}(t^*, k') \\ & - \mathrm{dc}(s, k)\, \mathrm{sc}(t, k')\, \mathrm{dc}(s^*, k)\, \mathrm{sc}(t^*, k') - \mathrm{sc}(s, k)\, \mathrm{dc}(t, k')\, \mathrm{sc}(s^*, k)\, \mathrm{dc}(t^*, k'), \end{aligned} \tag{5.6}$$

且$w_{m,\ n}$ 是朗斯基行列式 (5.2)。

证明。将（5.4）与方位角傅里叶展开 [4,, 即可得出此结论。 (15)]

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*\|} = \frac{1}{\pi\sqrt{RR^*}} \sum_{m=0}^{\infty} Q_{m-\frac{1}{2}}(\chi) \mathrm{e}^{im(\phi - \phi^*)},$$

其中

$$\chi = \frac{R^2 + R^{*2} + (z - z^*)^2}{2RR^*},$$

其中 R, R^*, z, z^* 分别用双环面坐标 s, t 和 s^*, t^* 表示。恒等式（5.6）可通过直接计算验证。■

定理5.4 导出了 Lam´e-Wangerin 函数的一个积分关系。

定理 5.5. 设 m, $n \in \mathbb{N}_0$, $s^* \in (-K, K)$, $-K' < t^* < t < K'$。则

$$w_{m,n} \int_{-K}^{K} Q_{m-\frac{1}{2}}(\chi) W^n_{m-\frac{1}{2}}(s,k)\,\mathrm{d}s$$
$$= 2\pi W^n_{m-\frac{1}{2}}(it - K - iK', k) W^n_{m-\frac{1}{2}}(s^*, k) W^n_{m-\frac{1}{2}}(-it^* - K - iK', k).$$

采用 [12], 中使用的方法，可以证明定理 5.5 在将$m - \frac{1}{2}$ 全部替换为 ν后仍然成立。详情请参阅 -[3] 。

6 第二类调和函数

对于 $s_0 \in (-K, K)$，坐标曲面 $s = s_0$ 是一个闭曲面。图 4 中以蓝色显示了该曲面的一个实例。若 $s_0 = 0$，该曲面就是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$。若$s_0 \in (-K, 0)$，曲面 $s = s_0$是环面曲面 $P_2(x, y, z) = 0$中由 (2.6) 定义的P_2且位于单位球 $B = \{(x, y, z)$ 内的部分: $x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$。若 $s_0 \in (0, K)^-$，曲面 $s = s_0$是曲面 $P_2(x, y, z) = 0$中位于 B外部的部分。曲面 $s = s_0$ 在双环面坐标中围成由 $s \in [-K, s_0)$ 给出的有界区域 D_2 。

坐标曲面 $s = s_0$ 和 $t = t_0$ 通过以中心为 (0，0，1)、半径为 $\sqrt{2}$ 的球面上的反演 M 相互连接。该反演表示为

$$M(x, y, z) = (x^2 + y^2 + (z - 1)^2)^{-1}(2x, 2y, x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

如果 (x, y, z) 的双环面坐标为 (s, t, ϕ)，则 (2.7) 给出

$$M(x, y, z) = (u \cos\phi, u \sin\phi, v),$$

其中

$$u = \frac{\mathrm{cn}(s,k)\,\mathrm{cn}(t,k')}{1 - \mathrm{dn}(s,k)\,\mathrm{sn}(t,k')}, \quad v = \frac{\mathrm{sn}(s,k)\,\mathrm{dn}(t,k')}{1 - \mathrm{dn}(s,k)\,\mathrm{sn}(t,k')}.$$

因此，点 $M(x, y, z)$ 的双环面坐标为 t, s, ϕ（交换 s, t），其中双环面坐标是相对于互补模数 k' 取得的。这意味着，坐标曲面 $s = s_0$ （相对于 k）被映射到坐标曲面 $t = s_0$ （相对于 k'）。如果 $t_0 \in$ （0, K'），则 M 将相对于 k 由 $t > t_0$ 给出的域 D_1 映射到相对于 k'由 $s > t_0$ 给出的域 D_2 的外部。

由于这些坐标曲面之间存在联系，关于适用于域 D_2 的第二类双环面调和函数的结果将与第一类双环面调和函数的结果非常相似。因此，我们将简要讨论第二类双环面调和函数。

我们要寻找调和函数 $u(x, y, z)$，其具有 $\mathcal{R}$-分离形式（2.14），并且在所有满足 D_2 且 $s_0 \in (-K, K)$ 的区域之并集内为调和函数。这要求 u 在区间 $\{(0, 0, z)$ 上为调和函数：在 $-b^{-1} < z < b^{-1}\}$ 轴上。对于 z，若 $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$，我们将第二类内部双环面调和函数定义为

$$\mathrm{G}_{m,n}(x, y, z) = R^{-1/2} W^n_{|m|-\frac{1}{2}}(-is - K' - iK, k') W^n_{|m|-\frac{1}{2}}(t, k') \mathrm{e}^{im\phi}.$$

定理 6.1。 内部调和函数 $\mathrm{G}_{m,\ n}(x, y, z)$ 在整个 $\mathbb{R}^3$ 上都是调和函数，但集合 $\{(0,\ 0,\ z)$: $|z| \geq b^{-1}\}$除外。

For $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$，我们将第二类外双环面调和函数定义为

$$\mathrm{H}_{m,n}(x, y, z) = R^{-1/2} W^{n}_{|m|-\frac{1}{2}}(is - K' - iK), k') W^{n}_{|m|-\frac{1}{2}}(t, k') \mathrm{e}^{im\phi}.$$

那么，$\mathrm{H}_{m,n}$ 是 $\mathrm{G}_{m,n}$ 关于单位球面的开尔文变换:

$$\mathrm{H}_{m,n}(x, y, z) = \widehat{\mathrm{G}}_{m,n}(x, y, z).$$

函数 $\mathrm{H}_{m,n}(x, y, z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上是调和函数，但线段 $\{(0, 0, z)$ 除外: $|z| \leq b\}$。

按照第 5 节中的论证，我们证明两个点的距离倒数在第二类双环面调和函数中的展开式。或者，利用反演 M，也可以直接由定理5.3推得该结果。

定理 6.2。 设 $\mathbf{r}$、$\mathbf{r}^* \in \mathbb{R}^3$ 的双环面坐标分别为 (s, t, ϕ) 和 (s^*, t^*, ϕ^*)。若 $-K < s < s^* < K$，则

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*\|} = 2 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w_{m,n}} \mathrm{G}_{m,n}(\mathbf{r})\, \mathrm{H}_{-m,n}(\mathbf{r}^*), \tag{6.1}$$

其中 $w_{m,\ n} = U(s)V'(s) - U'(s)V(s)$ 是函数 $U(s) = W^{n}_{|m|-\frac{1}{2}}(is - K' - iK, k')$ 和 $V(s) = U(-s)$的朗斯基行列式。

如第 5 节所述，定理 6.2 给出了 Lam´e-Wangerin 函数的一个加法定理和积分关系。我们略去这些结果，因为通过交换 $k \leftrightarrow k'$，$K \leftrightarrow K'$ 和 $s \leftrightarrow t$，即可由定理 5.4和 5.5 得到这些结果。

7 双环面坐标的双球面极限，$k \to 0$

本节将说明，当 $k \to 0$ 时，双环面坐标趋近于双球坐标，而我们对两点之间距离倒数的展开式（5.4）逐项趋近于相应的已知双球坐标展开式。

双球坐标 θ，t，ϕ [10, 第 110] 页给出为

$$x = \frac{\sin\theta\cos\phi}{\cosh t - \cos\theta}, \quad y = \frac{\sin\theta\sin\phi}{\cosh t - \cos\theta}, \quad z = \frac{\sinh t}{\cosh t - \cos\theta},$$

其中 $t \in \mathbb{R}$、$\theta \in (0,\ \pi)$，$\phi \in (-\pi,\ \pi]$。根据 [11, (10.3.74)]，我们得到展开式

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*\|} = (\cosh t - \cos\theta)^{1/2} (\cosh t^* - \cos\theta^*)^{1/2}$$
$$\times \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\ell+\frac{1}{2})(t-t^*)} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \mathsf{P}^m_\ell(\cos\theta) \mathsf{P}^m_\ell(\cos\theta^*) \mathrm{e}^{im(\phi-\phi^*)},$$

其中 P^m_ℓ表示第一类Ferrers函数，$(\theta,\ t,\ \phi)$、$(\theta^*,\ t^*,\ \phi^*)$分别是 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}^*$ 的双球坐标，并假设 $t^* < t$。

若周期为 2π 的实值函数 $f(\phi)$ 展开为复傅里叶级数 $f(\phi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \mathrm{e}^{im\phi}$，则必有 $c_{-m} = c_m$。在本例中，系数 c_m 为实数，因此有 $c_{-m} = c_m$。所以，我们可以用等价形式写出 $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*\|^{-1}$ 的展开式

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*\|} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{im(\phi-\phi^*)} \sum_{n=0}^{\infty} B_{m,n}(\theta, \theta^*, t, t^*),$$

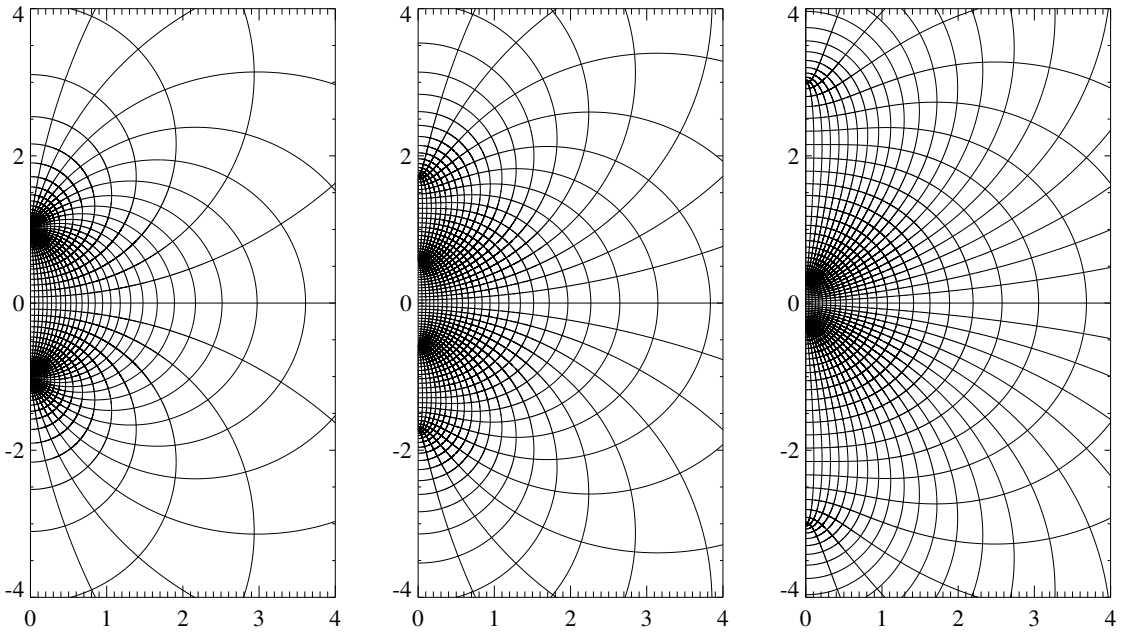

图6。 在双环面坐标中，图中绘出了 $s\in(-K,K)$和 $t\in(-K',K')$取不同常数值时的坐标线，从左至右分别以 $k=\frac{1}{10},1\,2,4\,5$为等间距。横轴表示径向坐标$R=(x^2+y^2)^{1/2}$，纵轴表示 z轴。可以看出，当 k 趋近于零时，双环面坐标系趋近于双球坐标。同样，当k 趋近于1时，双环面坐标系趋近于球坐标。

其中 $B_{-m,n}=B_{m,n}$，且对于 $m,n\in\mathbb{N}_0$,

$$B_{m,n}=(\cosh t-\cos\theta)^{1/2}(\cosh t^*-\cos\theta^*)^{1/2}\\ \times\mathrm{e}^{-(m+n+\frac{1}{2})(t-t^*)}\frac{n!}{(2m+n)!}\mathsf{P}^m_{m+n}(\cos\theta)\mathsf{P}^m_{m+n}(\cos\theta^*).$$

令 $k\to 0$ 代入 (2.2)、(2.3，并观察 [5, 表 22.5.3、22.5。4],

$$\mathrm{sn}(s,k)\to\sin s,\quad \mathrm{cn}(s,k)\to\cos s,\quad \mathrm{dn}(s,k)\to 1,$$

$$\mathrm{sn}(t,k')\to\tanh t,\quad \mathrm{cn}(t,k')\to\operatorname{sech}t,\quad \mathrm{dn}(t,k')\to\operatorname{sech}t,$$

可知，双环面坐标在 $s=\frac{\pi}{2}-\theta$时趋近于双球坐标。将展开式 (5.4) 写成如下形式

$$\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}^*\|}=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{im(\phi-\phi^*)}\sum_{n=0}^{\infty}A_{m,n}(s,s^*,t,t^*,k),$$

其中 $A_{-m,n}=A_{m,n}$，且当 $m,n\in\mathbb{N}_0$ 时,

$$A_{m,n}=\frac{2}{w^n_m}(RR^*)^{-1/2}W^n_{m-\frac{1}{2}}(s,k)W^n_{m-\frac{1}{2}}(s^*,k)\\ \times W^n_{m-\frac{1}{2}}(it-K-iK',k)W^n_{m-\frac{1}{2}}(-it^*-K-iK',k).$$

以下定理陈述了本节的主要结果。

定理 7.1。 设 $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $s, s^* \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $t, t^* \in \mathbb{R}$。那么

$$A_{m,n}(s, s^*, t, t^*, k) \to B_{m,n}(\tfrac{1}{2}\pi - s, \tfrac{1}{2}\pi - s^*, t, t^*) \quad as\ k \to 0.$$

证明。 只需考虑 $m \geq 0$。本证明中的所有极限均取为 $k \to 0$。首先注意到

$$R^{-1/2} R^{*-1/2} \to \left(\frac{\cos s}{\cosh t - \sin s}\right)^{-1/2} \left(\frac{\cos s^*}{\cosh t^* - \sin s^*}\right)^{-1/2}. \tag{7.1}$$

利用 [3, 推论 4。4],我们有

$$W^n_{m-\frac{1}{2}}(s,k) W^n_{m-\frac{1}{2}}(s^*,k) \to (m+n+\tfrac{1}{2}) \frac{n!}{(2m+n)!} (\cos s)^{1/2} \mathsf{P}^n_{m+n}(\sin s) (\cos s^*)^{1/2} \mathsf{P}^m_{m+n}(\sin s^*). \tag{7.2}$$

由 [3, 定理 4.7], 我们有

$$\frac{W^n_{m-\frac{1}{2}}(i(\sigma - K'), k)}{W^n_{m-\frac{1}{2}}(-iK', k)} \to \mathrm{e}^{-(m+n+\frac{1}{2})\sigma}$$

对于 $\sigma \in \mathbb{C}$，在局部一致成立。实际上，当时假设 $|\Im\sigma| < \frac{1}{2}\pi$，但证明表明这一限制是多余的。令 $\sigma = t + iK$，并注意到 $K\,(k) \to \frac{1}{2}\pi$，可得

$$\frac{2}{w^m_n} W^n_{m-\frac{1}{2}}(it - K - iK', k) W^n_{m-\frac{1}{2}}(-it^* - K - iK', k) \to \frac{\mathrm{e}^{-(m+n+\frac{1}{2})(t+i\frac{1}{2}\pi)} \mathrm{e}^{(m+n+\frac{1}{2})(t^*+i\frac{1}{2}\pi)}}{m+n+\frac{1}{2}}. \tag{7.3}$$

展开（7.1）、（7.2）、（7.3）并稍作化简后，得到所需结论。 ■

8 双环面坐标的长旋转椭球极限，$k \to 1$

若令 $k \to 1$ 在（2.2）、（2.3）中，我们发现双环面坐标趋近于球坐标。然而，通过改变取极限的过程，我们证明当 $k \to 1$ 时，双环面坐标也可以趋近于长旋转椭球坐标。

长旋转椭球坐标 [10,p. 28]定义为

$$x = \sinh\sigma \sin\theta \cos\phi, \quad y = \sinh\sigma \sin\theta \sin\phi, \quad z = \cosh\sigma \cos\theta,$$

其中 $\sigma \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$, $\phi \in (-\pi, \pi]$。根据 [7, §245]，我们有展开式

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*\|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sum_{m=-\ell}^{\ell} (-1)^m \left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2 \times \mathsf{P}^m_\ell(\cos\theta) \mathsf{P}^m_\ell(\cos\theta^*) P^m_\ell(\cosh\sigma) Q^m_\ell(\cosh\sigma^*) \mathrm{e}^{im(\phi-\phi^*)},$$

其中 P_ℓ^m表示第一类Ferrers函数， P_ℓ^m、 Q_ℓ^m分别为第一类和第二类缔合勒让德函数，$(\sigma,\ \theta,\ \phi)$、$(\sigma^*,\ \theta^*,\ \phi^*)$分别是 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}^*$ 的长旋转椭球坐标，并假设 $\sigma<\sigma^*$。我们可以将展开式写成等价形式

$$\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}^*\|}=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{im(\phi-\phi^*)}\sum_{n=0}^{\infty}B_{m,n}(\sigma,\sigma^*,\theta,\theta^*),$$

其中 $B_{-m,\ n}=B_{m,\ n}$，且当 $m,\ n\in\mathbb{N}_0$ 时，

$$B_{m,n}=(-1)^m(2m+2n+1)\left[\frac{n!}{(2m+n)!}\right]^2 \times\mathsf{P}_{m+n}^m(\cos\theta)\mathsf{P}_{m+n}^m(\cos\theta^*)P_{m+n}^m(\cosh\sigma)Q_{m+n}^m(\cosh\sigma^*).$$

我们通过设定 $\sigma=s+K$, $X=\frac{2}{k'}x$, $Y=\frac{2}{k'}y$, $Z=\frac{2}{k'}z$ 来修改双环面坐标。点 $(x,\ y,\ z)$ 和 $(X,\ Y,\ Z)$ 的双环面坐标 $(\sigma,\ t,\ \phi)$ 相同。若令 $k\to1$，则得到

$$\lim_{k\to1}X=\sinh\sigma\cos t\cos\phi,\ \lim_{k\to1}Y=\sinh\sigma\cos t\sin\phi,\ \lim_{k\to1}Z=\cosh\sigma\sin t,$$

因此，当 $\theta=\frac{1}{2}\pi-t$ 时，我们趋近于长旋转椭球坐标。

我们将展开式（6.1）写成如下形式

$$\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}^*\|}=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{im(\phi-\phi^*)}\sum_{n=0}^{\infty}A_{m,n}(\sigma,\sigma^*,t,t^*,k),\tag{8.1}$$

其中 $A_{-m,\ n}=A_{m,\ n}$，且当 $m,\ n\in\mathbb{N}_0$ 时，

$$A_{m,n}=(X^2+Y^2)^{-1/4}(X^{*2}+Y^{*2})^{-1/4} \times\frac{2}{w_m^n}W_{m-\frac{1}{2}}^n(t,k')W_{m-\frac{1}{2}}^n(t^*,k')W_{m-\frac{1}{2}}^n(K'-i\sigma,k')W_{m-\frac{1}{2}}^n(K'-i(2K-\sigma^*)),k').$$

在（8.1）中，我们取 $\mathbf{r}=(X,Y,Z),\mathbf{r}^*=(X^*,Y^*,Z^*)$.

引理 8.1. 设 $\sigma_0>0$、 $\nu\geq-\frac{1}{2}$、$n\in\mathbb{N}_0$。则有

$$\frac{W_\nu^n(K'-i(2K-\sigma),k')}{W_\nu^n(K'-i(2K-\sigma_0),k')}\to\frac{(\sinh\sigma)^{1/2}Q_{n+\nu+\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}}(\cosh\sigma)}{(\sinh\sigma_0)^{1/2}Q_{n+\nu+\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}}(\cosh\sigma_0)}$$

当 $\Re\sigma>0$ 时， $k\to1$ 在局部一致收敛。

证明。 函数 $w(\sigma)=W_\nu^n(K'-i(2K-\sigma)\ k'),\ \ 0<\sigma<2K$，满足微分方程

$$w''+\left(\nu(\nu+1)-\Lambda_\nu^n(k')-\nu(\nu+1)\frac{1}{\mathrm{sn}^2(\sigma,k)}\right)w=0.\tag{8.2}$$

根据 [3, 引理 2。3]， $\Lambda_\nu^k(k')\to(n+\nu+1)^2$ 当 $k\to1$时。微分方程 (8.2) 曾出现在 [2, 定理 7。2] 的证明中，其中用 k' 代替了 k。序列 $\Lambda_\nu^n(k')$ 被另一个收敛到 n^2的序列所取代。现在，我们可以沿用 [2, 定理 7。2] 的证明来完成这个引理的证明。 ■

本节的主要结果如下。

定理 8.2. 设 $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$, σ, $\sigma^* \in (0, \infty)$, t, $t^* \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, 并设 $\theta = \frac{1}{2}\pi - t$, $\theta^* = \frac{1}{2}\pi - t^*$。则

$$A_{m,n}(\sigma, \sigma^*, t, t^*, k) \to B_{m,n}(\sigma, \sigma^*, \theta, \theta^*) \quad as\ k \to 1.$$

证明。 只需考虑 $m \geq 0$。本证明中的所有极限均取为 $k \to 1$。首先注意到

$$(X^2 + Y^2)^{-1/4}(X^{*2} + Y^{*2})^{-1/4} \to (\sinh\sigma \sin\theta)^{-1/2}(\sinh\sigma^* \sin\theta^*)^{-1/2}. \tag{8.3}$$

利用 [3, 推论 4.4],可得

$$2W^n_{m-\frac{1}{2}}(t, k')W^n_{m-\frac{1}{2}}(t^*, k') \to (2m + 2n + 1)\frac{n!}{(2m+n)!}(\sin\theta)^{1/2}\mathsf{P}^n_{m+n}(\cos\theta)(\sin\theta^*)^{1/2}\mathsf{P}^m_{m+n}(\cos\theta^*). \tag{8.4}$$

定义两个函数

$$f(u, k) := W^n_{m-\frac{1}{2}}(u, k'),$$

$$g(u^*, k) := W^n_{m-\frac{1}{2}}(K' - i(2K - u^*), k').$$

这些函数在 u, $u^* \in (0, 2K)$ 上定义良好。然后考虑表达式

$$h(u, u^*, k) = \frac{f(u, k)g(u^*, k)}{[g, f]}, \tag{8.5}$$

其中 $w^n_m = [g, f]$ 表示 $g(\cdot, k)$ 和 $f(\cdot, k)$ 的朗斯基行列式。我们注意到，当用实常数或复常数乘以 f 和／或 g 时，式 (8.5) 保持不变。因此，利用 [3,推论 44] 和引理8.1 可得

$$h(\sigma, \sigma^*, k) \to \frac{F(\sigma)G(\sigma^*)}{[G, F]},$$

其中

$$F(\sigma) = (\sinh\sigma)^{1/2}P^m_{m+n}(\cosh\sigma), \quad G(\sigma^*) = (\sinh\sigma^*)^{1/2}Q^m_{m+n}(\cosh\sigma^*).$$

已知的朗斯基行列式 [5,(14.2.10)]

$$[P^\mu_\nu(x), Q^\mu_\nu(x)] = \mathrm{e}^{i\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)}\frac{1}{1 - x^2},$$

意味着

$$[G, F] = (-1)^m\frac{(2m + n)!}{n!}.$$

因此我们已经证明

$$\frac{1}{w^n_m}W^n_{m-\frac{1}{2}}(K' - i\sigma, k')W^n_{m-\frac{1}{2}}(K' - i(2K - \sigma^*), k') \to (-1)^m\frac{n!}{(2m+n)!}(\sinh\sigma)^{1/2}P^n_{m+n}(\cosh\sigma)(\sinh\sigma^*)^{1/2}Q^n_{m+n}(\cosh\sigma^*). \tag{8.6}$$

展开（8.3）、（8.4）和（8.6），并稍作化简后，即得到所需的结论。■

A Moon 和 Spencer 的双环面坐标

Moon and Spencer [10, 第 124] 定义双环面坐标 μ, ν, ϕ 如下:

$$x = \frac{a}{\Lambda}\,\mathrm{cn}(\mu,\kappa)\,\mathrm{dn}(\mu,\kappa)\,\mathrm{sn}(\nu,\kappa')\,\mathrm{cn}(\nu,\kappa')\cos\phi,$$

$$y = \frac{a}{\Lambda}\,\mathrm{cn}(\mu,\kappa)\,\mathrm{dn}(\mu,\kappa)\,\mathrm{sn}(\nu,\kappa')\,\mathrm{cn}(\nu,\kappa')\sin\phi,$$

$$z = \frac{a}{\Lambda}\,\mathrm{sn}(\mu,\kappa)\,\mathrm{dn}(\nu,\kappa'),$$

其中

$$\Lambda = 1 - \mathrm{dn}^2(\mu,\kappa)\,\mathrm{sn}^2(\nu,\kappa'),$$

a 是一个正常数, 且 $\kappa \in (0,1)$, $\kappa' = (1-\kappa^2)^{1/2}$。令 $R = (x^2+y^2)^{1/2}$, 并利用雅可比函数 sn 的加法定理 [5, (22.8.1)], , 可以将这些坐标写成复数形式

$$z + iR = a\,\mathrm{sn}(\mu + i\nu, \kappa). \tag{A.1}$$

函数 $v = \mathrm{sn}(u,\kappa)$ 将矩形映射

$$-K(\kappa) < \Re u < K(\kappa), \quad 0 < \Im u < K'(\kappa),$$

共形映射到半平面 $\Im v > 0$。因此, 我们选择

$$-K(\kappa) < \mu < K(\kappa), \quad 0 < \nu < K'(\kappa). \tag{A.2}$$

Wangerin [14] 通过设定 $z + iR = af(\mu + i\nu)$ (其中 $f =$ 为 cn、 $f =$ 为 sn、 $f =$ 为 dn), 在 (R, z) 平面上引入了坐标 $\mu\nu$。实际上, 他只考虑 $f =$ cn 和 $f =$ dn, 因为由 sn 和 dn 生成的坐标本质上相同。这可由下述恒等式得出:

$$\kappa\,\mathrm{sn}(u,\kappa) = \mathrm{dn}(K'(\kappa) + iK(\kappa) - iu, \kappa').$$

本文采用的双环面坐标 $s \in (-K, K)$、 $t \in (-K', K')$ 定义如下(2.3)。它们可写成复数 (2.2), 形式:

$$z + iR = i(\mathrm{sc}(s - it, k) + \mathrm{nc}(s - it, k)). \tag{A.3}$$

μ、 ν 与 s、 t 之间的关系由以下定理给出。

定理 A.1. 取 $a = \kappa^{1/2}$ 和 $\kappa = \frac{1-k}{1+k}$。点 (R, z) 的坐标 μ、 ν 和 s、 t (其中 $R > 0$) 满足以下关系:

$$t = (1+\kappa)\mu, \quad s + K(k) = (1+\kappa)\nu.$$

证明。 模数 κ 是 k' 的降阶兰登变换, 因此 [5, (19.8.12)] 给出

$$K'(k) = (1+\kappa)K(\kappa), \quad 2K(k) = (1+\kappa)K'(\kappa).$$

由此可知 $\tilde{s} := (1+\kappa)\nu - K(k)$、 $\tilde{t} := (1+\kappa)\mu$ 满足 $-K(k) < \tilde{s} < K(k)$、 $-K'(k) < \tilde{t} < K'(k)$。因此, 利用 (A.1)、(A.3) 并令 $u = (1+\kappa)(\mu + i\nu)$, 该定理可由下列恒等式推出

$$\kappa^{1/2}\,\mathrm{sn}\left(\frac{u}{1+\kappa}, \kappa\right) = i\left(\mathrm{nc}(iu + K(k), k) - \mathrm{sc}(iu + K(k), k)\right). \tag{A.4}$$

为证明 (A.4), 注意到

$$i(\mathrm{nc}(iu + K(k), k) - \mathrm{sc}(iu + K(k), k))$$

$$= \frac{i}{k'}\left(\mathrm{cs}(iu, k) - \mathrm{ds}(iu, k)\right) = \frac{1}{k'}\left(\mathrm{ns}(u, k') - \mathrm{ds}(u, k')\right).$$

现在, (A.4) 由 [5, (22.7.2)、(22.7.4)] 即可推出。 ■

参考文献

[1] L. Bi、H. S. Cohl 和 H. Volkmer。《平环旋轮线坐标中拉普拉斯方程基本解的展开》。对称性、可积性与几何：方法与应用（SIGMA），18：论文 041，共 31 页，2022年。[2] L. Bi、H. S. Cohl 和 H. Volkmer。《平环旋轮线坐标中拉普拉斯方程基本解的展开》。即将发表于：对称性、可积性与几何：方法与应用（SIGMA），2022年。[3] L. Bi、H. S. Cohl 和 H. Volkmer。《扁环坐标中拉普拉斯方程基本解的花生形调和展开》。Analysis Mathematica，48，2022年。[4] H. S. Cohl 和 J. E. Tohline。《用于求解位势问题的紧凑柱坐标格林函数展开》。《天体物理学杂志》，527：86–101，1999年。[5] NIST数学函数数字图书馆。https://dlmf.nist.gov/，2022年12月15日发布的 1.1.8 版。F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。[6] A. Erd´elyi、W. Magnus、F. Oberhettinger 和 F. G. Tricomi。《高等超越函数》。第 III 卷。Robert E. Krieger Publishing Co. Inc.，佛罗里达州墨尔本，1981年。[7] E. W. Hobson。《球谐函数与椭球谐函数理论》。Chelsea Publishing Company，纽约，1955年。[8] O. D. Kellogg。《位势理论基础》。1929年初版重印本。数学科学基础丛书，第 31 卷。Springer-Verlag，柏林，1967年。[9] W. Miller, Jr.《对称性与变量分离法》。Addison-Wesley Publishing Co.，雷丁，马萨诸塞州—伦敦—阿姆斯特丹，1977年。附有 Richard Askey 撰写的前言，数学及其应用百科全书，第 4 卷。[10] P. Moon 和 D. E. Spencer。《场论手册：包括坐标系、微分方程及其解》。Springer-Verlag，柏林，1961年。[11] P. M. Morse 和 H. Feshbach。《理论物理方法》。共 2 卷。McGraw-Hill Book Co., Inc.，纽约，1953年。[12] H. Volkmer。《利用基本解表示 Lam´e 函数乘积的积分表示》。《SIAM数学分析杂志》，15(3)：559–569，1984年。[13] H. Volkmer。《Lam´e 微分方程的特征值问题》。对称性、可积性与几何：方法与应用（SIGMA），14：131，共 21 页，2018年。[14]A. Wangerin。《将某些旋转体的位势方程化为常¨微分方程》。莱比锡 Jabl. 协会竞赛论文，Hirzel，1875年。