arXiv:2303.02240v1 [math.CO] 3 Mar 2023

分拆函数族的统一处理

莉达·艾哈迈迪 里卡多·戈梅斯 阿伊扎·马克 丹尼尔·沃德

摘要

我们提出了一个统一框架，用于描述两类与整数分拆相关的一般函数族的组合结构，并研究其系数的类似渐近增长。特别是，我们解决了若干猜想，并验证了在线整数数列百科全书上发布的若干论断。我们通过系统地应用梅林变换、留数分析和鞍点法进行渐近分析。这些广义分拆函数族的组合描述涉及杨表的着色，以及它们的"因数图"；图中由若干颜色集合标记，其大小由因数函数控制。

关键词： 分拆函数，因数函数，梅林变换，鞍点法*MSC2010*： 05A15, 05A16,

1 引言

给定一个由非负整数构成的三元组（i,j,k），其中 $i+j+k\geq 1$，我们考虑生成函数

$$P(z)=P^{\langle i,j,k\rangle}(z)=\prod(1-z^{n_1\cdots n_i d_1\cdots d_j e_1\cdots e_k})^{-n_1\cdots n_i/d_1\cdots d_j} \tag{1}$$

and

$$Q(z)=Q^{\langle i,j,k\rangle}(z)=\prod(1+z^{n_1\cdots n_i d_1\cdots d_j e_1\cdots e_k})^{n_1\cdots n_i/d_1\cdots d_j} \tag{2}$$

其中，$(i+j+k)$ 重乘积遍历所有正整数 n、 d 和 e。 n 表示指数中以分子形式出现的指标； d 表示指数中以分母形式出现的指标； e 是额外指标。我们称由三元组（ i,j,k ）表示的任何此类无穷乘积为可容许的。

1.1 整数分拆，以及具有不同加数的整数分拆

三元组 (i,j,k) =(0,0,1) 给出了这一系列生成函数中最广为人知的一个特例：

$$P(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^k}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n z^n \tag{3}$$

and

$$Q(z)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^k)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n z^n. \tag{4}$$

在这种情况下，生成函数 $P(z)$ 对整数分拆这一组合类 $\mathcal{P}$ 进行计数，即 P_n 是 n的分拆数。同样，生成函数 $Q(z)$ 对具有不同加数的整数分拆这一组合类 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ 进行计数，或者等价地说， Q_n 是 n 的互异加数分拆数。

作为无标号结构，方程（3）和（4）中的乘积公式可以通过将 $\mathcal{P}$ 视为正整数的多重集、将 $\mathcal{Q}$ 视为正整数的幂集来获得组合学上的解释。换言之，这些类别可以由以下著名的组合规范定义

$$\mathcal{P} \triangleq \mathrm{MSET}\big(\mathrm{SEQ}_{\geq 1}(\mathcal{Z})\big) \tag{5}$$

and

$$\mathcal{Q} \triangleq \mathrm{PSET}\big(\mathrm{SEQ}_{\geq 1}(\mathcal{Z})\big), \tag{6}$$

其中 $\mathcal{Z}$ 表示原子类。在此语境下， $P(z)$ 和 $Q(z)$ 分别可称为多重集分拆函数和幂集 分拆函数。（参见 [17]，其中介绍了解析组合学的广泛背景。）对分拆函数的研究可追溯至欧拉 [15]的工作。所谓“分拆问题”，就是求出诸如 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 这类函数的系数的渐近增长。事实上，函数 $P(z)$ 的系数来自我们如今所称的数列 $a(n) = 1$的欧拉变换，其一般定义如下

$$\prod_{n\geq 1} \frac{1}{(1-z^n)^{a(n)}}. \tag{7}$$

哈代和拉马努金广为人知的经典研究被认为是对分拆问题最早的主要贡献（参见 [21, 22]）。特别地，对于三元组（$i,\ j,\ k$）$=(0,\ 0,\ 1)$，他们证明了

$$P_n \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4\sqrt{3}\,n} \qquad \text{and} \qquad Q_n \sim \frac{e^{\pi\sqrt{n/3}}}{4\cdot 3^{1/4}\,n^{3/4}}. \tag{8}$$

他们所采用的主要方法如今称为“圆法”，它基于利用柯西积分公式表示幂级数的系数。我们的目标之一是解决更一般的、由方程 (1) 和 (2) 给出的形式所定义的分拆函数类别的分拆问题（一阶渐近）。

1.2 统一框架

其他作者此前也研究过若干其他特例。我们致力于建立一个框架，以系统地分类这些组合类及其对应的生成函数。表1列出了在线整数数列百科全书（OEIS）中的一些条目 [36] ，它们对应于某些三元组 $(i,\ j,\ k)$。我们将看到，一般而言，我们现在研究的是我们所称的序列 $a(n)$ 的“循环”欧拉变换，现将其定义为函数的系数序列

$$\prod_{n\geq 1} \exp\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{n\ell}}{n\ell}\right)^{a(n)}. \tag{9}$$

在我们于 OEIS 中发现的案例中，有些包含渐近分析，有些给出了组合描述，但我们力求系统地处理所有此类情况。若干

$(i,\ j,\ k)$	$\log([z^n]P(z))\ \sim$	$\log([z^n]Q(z))\ \sim$
(1, 0,0)	见于 OEISA000219	见于 OEISA026007
(2, 0, 0)	见 OEISA280540	OEIS 中的猜想 A280541
(3, 0, 0)	OEIS 中的猜想 A318413	OEIS 中的猜想 A318414
(1, 0,1)	收录于 OEISA061256	收录于 OEISA192065
(1, 0, 2)	未收录于 OEIS A174467	×
(0, 0, 1)	收录于 OEISA000041	收录于 OEISA000009
(0, 0, 2)	收录于 OEISA006171	在 OEIS 中提出猜想 A107742
(0, 0, 3)	未收录于 OEIS A174465	未收录于 OEIS A280473
(0, 0, 4)	未收录于 OEIS A280487	未收录于 OEIS A280486
(0, 1, 1)	见于 OEISA305127	见于 OEISA318769
(0, 1,0)	*incorrect in OEIS* A028342	在 OEIS 中提出猜想 A168243
(0, 2,0)	OEIS 中未收录 A318695	OEIS 中未收录 A318696
(0, 3, 0)	OEIS 中未收录 A318966	OEIS 中未收录 A318967

表1：25 个序列及其对应的 OEIS 条目列表，这些条目对应于方程 (1) 和 (2) 中的生成函数。这些条目分为三组：$(i \geq 1,\ j,\ k)$、$(0,\ j,\ k \geq 1)$ 和 $(0,\ j \geq 1,\ 0)$。$\log([z^n]P(z))$ 或 $\log([z^n]Q(z))$ 的渐近增长情况为：(a) OEIS 中给出；(b) OEIS 中有猜想，但该猜想不正确；(c) OEIS 中仅将其作为猜想提出；或 (d) OEIS 中未给出。

$(i,\ j,\ k)$	$[z^n]P(z)\ \sim$	$[z^n]Q(z)\ \sim$
(1, 0, 0)	见于 OEISA000219	见于 OEISA026007
(1, 0, 1)	见 OEISA061256	见 OEISA192065
(0, 0, 1)	见 OEISA000041	见 OEISA000009
(0, 1, 0)	OEIS 中未收录 A028342	OEIS 中未收录 A168243
(0, 2, 0)	×	OEIS 中未收录 A318696

表 2：推论 4.10 中各情形的系数渐近行为在 OEIS 中的收录情况。

关于生成函数系数渐近增长的论断仅作为猜想提出，并未给出证明，这些论断均出自 V. Kot˘e˘sovec。我们的目标是为带标号类的组合规范提供更一般的处理方式和统一框架，并对这类组合对象的数量进行系统的渐近分析。

1.3 关于 Kot˘e˘sovec 的猜想

我们能够解决 Kot˘e˘sovec 关于这些组合类及其生成函数的所有猜想。我们很高兴地发现，他的所有猜想均成立，只有一个例外：对于可容许三元组 $(i,\ j,\ k)$ = (0，1，0)，Kot˘e˘sovec 关于系数对数渐近增长的猜想并不正确。我们为他的所有猜想提供了证明。对于关于 (0，1，0) 的错误猜想，我们首先解释可能造成混淆的原因（很可能是数值误差），并为这种情况给出修正后的渐近分析。

由于这个错误的猜想促使我们研究这一类组合对象、生成函数及其渐近分析，我们先从 Kot˘e˘sovec 关于情形 (0，1，0) 的一个略有错误的猜想说起：

猜想 1.1 (Kotˇeˇsovec，2018年9月，参见A028342（OEIS）。设

$$P(z) \triangleq \prod_{d=1}^{\infty}(1-z^d)^{-1/d} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n}{n!}z^n. \tag{10}$$

$P(z)$ 的系数具有如下渐近增长率

$$\log\frac{p_n}{n!} \sim \frac{\log 2}{2}\log^2 n. \tag{11}$$

为了说明正确的渐近行为以及错误渐近分析可能的来源，我们需要用到一些众所周知的常数。对于每个 $n \geq 0$，令 γ_n 表示第 n 个斯蒂尔切斯数。特别地，令 $\gamma \triangleq \gamma_0$ 为欧拉-马歇罗尼常数。此外，令 W(z) 表示朗伯 W 函数。定理 1.2 是对猜想 1.1 的修正版，也是一个典型范例，展示了通过我们的分析可以推导出的渐近结果的形式。

定理 1.2 (组合描述与渐近行为（针对 (0,1,0)，参见 A028342）。 设$P(z)$ 和 $\{p_n\}_{n\geq 0}$ 如方程 (10)所示给定。

- (Combinatorial description) 数列 $\{p_n\}_{n\geq 0}$ 按因子数枚举有色排列这一类别，即将排列分解为循环乘积后，每个循环都带有一个标签，该标签是其对应长度的因数（见 *§3.3.1*）。

- (Asymptotic behavior) 此外，令 $c \triangleq \pi^2/12 - \gamma^2/2 - 2\gamma_1$ 和 $w_n \triangleq \mathrm{W}(e^{\gamma}n)$。那么（见定理*5.1*）

$$\frac{p_n}{n!} \sim \frac{(w_n/n)^{1-\gamma}}{\sqrt{2\pi\log(w_n/n)}}\exp\left(c + w_n + \frac{\log^2(w_n/n)}{2}\right). \tag{12}$$

特别地，

$$\log\frac{p_n}{n!} \sim \frac{\log^2 n}{2}. \tag{13}$$

下面讨论一个可能的解释：为什么 Kotˇeˇsovec 会在公式（11）中提出他的猜想，而该猜想与公式（13）给出的真实渐近行为相差一个 log 2 因子。首先，考察图 1，其中展示了以下三种对数 log($p_n/n!$) 的不同估计值：

（a）Kotˇeˇsovec 在公式（11）中的猜想；（b）公式（12）中非常精确的估计值的对数；以及（c）公式（13）中精确但收敛速度慢得多的估计值。

在该图示中，中间的项目（b）表明公式（12）给出了非常精确的估计值。此外，乍一看，左侧的项目（a）表明公式（11）给出的估计值在直觉上与 Kotˇeˇsovec 的猜想 1.1 相容，而右侧的项目（c）则表明公式（13）中的估计值收敛缓慢（但也许令人惊讶的是，它最终会收敛到 1）。

从计算角度来看，获取 P（z）的系数的精确数值，对于阶数大于 10^3的指标而言非常困难。事实上，A028342中的条目 [36]有一张表（据称由 Kotˇeˇsovec 编制），其中仅列出了 a_n的前 455 个值。基于这些原因，Kotˇeˇsovec

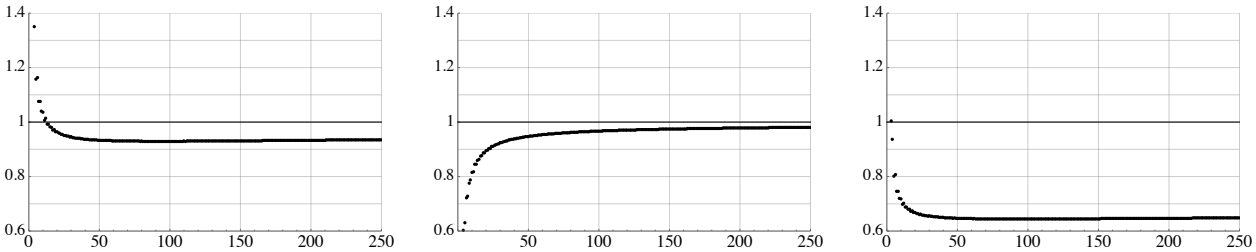

图 1：$\log p_n/n!$ 的三种不同估计值，分别为：(a) Kotˇeˇsovec 在公式（11）中的猜想；(b) 公式（12）中非常精确的估计值的对数；(c) 公式（13）中精确（但收敛速度慢得多）的估计值。

很可能只是根据相对较少的项数得出了他的渐近估计。他也很可能并不知道公式（12）给出的精确估计。

我们利用这样一个事实：对于非常大的 n，可以得到 w_n 的数值。容易看出，公式（12）的对数渐近等价于 $w_n^2/2$，后者又渐近等价于 $(\log^2 n)/2$；然而，这种渐近收敛极其缓慢。在表3中，我们展示了指标为 $n \le 10^3$ 时 $w_n^2/\log^2 n$ 的取值，并强调在这个范围内，它们主要呈现递减趋势，因此人们很容易对其渐近增长产生误判。

n	2	3	4	6	8	10	20	50	10^2	10^3
$w_n^2/\log^2 n$	2.7032	1.5433	1.2260	0.9957	0.9027	0.8522	0.7605	0.7100	0.6944	0.6899

表3：$w_n^2/\log^2 n$ 在某些 $n \le 10^3$下的取值列表。

如果将此表中的最后一个数除以 log 2，则得到 $\frac{w_{1000}^2}{(\log 2)\log^2 1000} = 0.9954$，Kotˇeˇsovec 可能因此根据数值证据，在公式（11）的猜想中错误地加入了 log 2。[1] 然而，在表4中，我们可以查看 $w_n^2/\log^2 n$在更大的指标 $n \ge 10^4$下的相同取值。这使我们能够看到缓慢的渐近收敛，从而证明定理 1.2 中的两个估计值都是准确的。结合我们的证明（见定理5.1），我们确认了定理 1.2 的数值估计。

n	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{10^2}	10^{10^3}	10^{10^4}	10^{10^5}
$w_n^2/\log^2 n$	0.7063	0.7437	0.7745	0.7987	0.8666	0.9295	0.9583	0.9937	0.9991	0.9998

表4：$w_n^2/\log^2 n$ 在某些 $n \ge 10^4$下的取值列表。

本文其余部分安排如下。第2节简要介绍分拆函数研究的背景。第3节将由指数生成函数 (1) 和 (2) 枚举的组合结构描述为带标号类。第4节讨论这些生成函数的渐近分析：首先，我们计算梅林变换，这些变换可以在 (i, j, k) 各类族中以系统化的方式推导出来。相比之下，留数分析需要针对每个三元参数分别定制，不过也可以归纳出一些普遍规律。最终的渐近增长通过鞍点法得到。借助这一方法，我们可以

[1]他在 arXiv 上发表的论文中所做的数学分析，例如 [29], , 启发了同事们为他的估计值寻找理论依据；例如参见 [20]。

解决表1中标记为 (b) 或 (c) 的 6 个数列的渐近增长猜想。此外，我们还发现了 OEIS 中表1标记为 (d) 的 9 个数列的渐近增长，并给出了证明。

2 背景

2.1 分拆问题

自哈代和拉马努金的研究以来，分拆函数的研究持续而深入地发展，相关文献浩如烟海、种类繁多。标准的综合参考书是安德鲁斯于 1984 年出版的著作 [1] 及其中所列的参考文献。这一领域仍在不断发展，我们只能简要列举一些较新的相关研究；它们与我们的研究背景在某种程度上有所关联，例如 [25, 2, 8, 10, 3, 9, 24], 从更偏概率论的角度开展的研究，包括 [11, 19, 6, 13, 26], 与元胞自动机的联系，可见于[23], ；其他采用 q-级数的类似框架，见 [8], ，等等。推广的方式有好几种，文献中也将若干类函数称为“加权分拆”。例如，一种做法是将一列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ “权重”作为系数，即构造如下形式的乘积

$$P(z)=\prod_{n\geq 1}\frac{1}{1-b_nz^n}\qquad\text{and}\qquad Q(z)=\prod_{n\geq 1}(1+b_nz^n) \tag{14}$$

（例如参见 [39, 10, 9, 35, 12, 27, 28]）。另一类可通过将一个数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ 作为“权重”放在指数的位置而得到，即形如以下形式的乘积

$$P(z)=\prod_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1-z^n}\right)^{a_n}\qquad\text{and}\qquad Q(z)=\prod_{n\geq 1}(1+z^n)^{a_n} \tag{15}$$

（例如参见 [38, 40, 7, 32, 41, 19, 31, 20, 33]）。第三类可由前两类结合而成，即形如以下形式的乘积

$$P(z)=\prod_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1-b_nz^n}\right)^{a_n}\qquad\text{and}\qquad Q(z)=\prod_{n\geq 1}(1+b_nz^n)^{a_n}, \tag{16}$$

等等。在本文中，当 $j=0$ （见定理 3.3）以及三元组为 $(i,j,k)=(0,1,0)$ 时（见定理 3.1），会出现第二类乘积；因此，在这些情形下，指数是某些权重序列。已有若干研究在一些一般性假设下，解决了权重序列作为指数的一族分拆问题（至少给出了首阶渐近增长，而且大多实际上关注的是 $\mathcal{P}$ 形式，而非 $\mathcal{Q}$ 形式）。或许关于权重序列作为指数，最著名的结果是 Meinardus 于 1954 年提出的迈纳杜斯定理 [32] ，该定理也在 [1, 第6章第 88] 页的定理6.2 中作了深入阐述。甚至在 Meinardus 之前，也有其他研究，例如 Brigham [7] 于 1950 年开展的工作，将加权分拆视为许多类型分拆问题的一般框架。例如，他提到 Wright [38, 40] 于 1931 年和 1934 年发表的著名研究，将其作为特例。迈纳杜斯定理已得到推广，例如 [18], ；另见 [31], 。有关这一领域的更多研究，参见 [4, 41, 42]。然而，这些结果极为宽泛，导致许多情形不满足迈纳杜斯定理及其推广结果等著名定理的假设；据我们所知，关于若干分拆问题的一些未决猜想仍未解决，例如 OEIS [36]中的 A028342 和 A318413。举例来说，对于前者，也就是三元组为 $(i,j,k)=(0,1,0)$ 的情形，

迈纳杜斯定理在此不适用，是因为 $\zeta(s+1)$ 的一个极点位于 0。对于后者，或者更一般地说，当三元组为 $(i,\ 0,\ k)$ 时，则有必要分析狄利克雷级数 $\sum_{n\geq 1} \psi(n)\ n^s$，其中 $\psi(n)$ 定义于定理 3.1。Meinardus 式的论证是为整数划分的情形设计的，也就是说，三元组为 $(i,\ j,\ k) = (0,\ 0,\ 1)$ 时（关于这种情形，另见 [1, 第 6] 章）。

此外，在A168243、A107742、A280541、A318414中还发现了若干其他属于方程 (1) 和 (2) 范围内的未解猜想，我们将给出它们的证明。根据定理 3.1，我们在此讨论的“加权划分函数”的一般形式为

$$\prod_{n\geq 1} \exp\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{1-z^n}\right)^{a_n} \tag{17}$$

（得出方程 (3) 和 (4) 的数列 (a_n) 为 $a_n = n$）。因此，我们的目标之一是提供一个来源，解决所有这些情形中有关分拆问题的猜想，并验证所有论断。

2.2 因数函数

回顾一下，众所周知的因数和是对每个 $n \geq 1$ 定义的因数函数，其定义为

$$\sigma_x(n) := \sum_{d|n} d^x. \tag{18}$$

例如，$\sigma_0(n)$ 是 n 的因子数，而 $\sigma(n) := \sigma_1(n)$ 是西格马函数，即 n的正因数之和。此外，对每个 $k \geq 1$，k- 重因子数是由下式定义的因数函数

$$\tau_k(n) := \sum_{d_1\cdots d_k=n} 1. \tag{19}$$

特别地，$\tau_1(n) = 1$ 和 $\tau(n) := \tau_2(n) = \sigma_0(n)$（我们令 $\tau_0(n) := 1$）。注意到

$$\tau_{k+1}(n) := \sum_{d|n} \tau_k(n/d). \tag{20}$$

因子函数在解析数论中具有核心地位，尤其是因为以下著名恒等式：

$$\zeta(s)^k = \sum_{n\geq 1} \frac{\tau_k(n)}{n^s}, \tag{21}$$

即，$\zeta(s)^k$ 是 $\big(\tau_k(n)\big)_{n\geq 1}$的狄利克雷级数。近期进展见 [34, 14, 5, 30]。

3 组合规范

本节将介绍一般的组合规范，它们可以得到方程 (1) 和 (2) 中给出的指数生成函数。我们将重点讨论组合类 $\mathcal{P}$，并在本节末讨论相应的类别 $\mathcal{Q}$。当 $j = 0$（即没有分母时），我们可以得到两种不同的组合规范，它们生成相同的指数生成

函数，因此得到两种同构的带标签组合类。我们将介绍若干具体示例。我们将关注如何用一个可数的不同颜色集合为多个对象着色，如图2所示。不过，首先让我们以一种在全文中都适用的方式，描述一些基本类别。



图2：由 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ 标记的一列可数种不同颜色 .

3.1 排列、整数分拆、杨表与因数图

所有排列构成的组合类 $\mathcal{S}$ 可以表示为带标签循环的集合，即

$$\mathcal{S}(\mathcal{Z}) = \textsc{Set}\big(\textsc{Cyc}(\mathcal{Z})\big), \tag{22}$$

这可转化为指数生成函数

$$\exp\left(\log \frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z}.$$

例如，一个如下的排列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \\ 5 & 10 & 19 & 18 & 27 & 8 & 12 & 32 & 15 & 16 & 9 & 31 & 34 & 11 & 29 & 13 & 17 & 22 & 30 & 2 & 14 & 23 & 4 & 26 & 28 & 33 & 1 & 24 & 6 & 21 & 7 & 3 & 25 & 20 \end{pmatrix} \tag{23}$$

可分解为 由其分解为循环乘积而得到的一组循环，即 ，

$$(1\,5\,27)(2\,10\,16\,13\,34\,20)(3\,19\,30\,21\,14\,11\,9\,15\,29\,6\,8\,32)(4\,18\,22\,23)(7\,12\,31)(17)(24\,26\,33\,25\,28). \tag{24}$$

一般来说，我们将循环写成以“首元素”开头的形式，并且总能按照循环的长度，以及在长度相同的循环中按照首元素，以唯一的方式将循环乘积单调地“重新排列”。例如，

$$(3\,19\,30\,21\,1\;\;4\,11\,9\,15\,29\,6\,8\,32)(2\,10\,16\,13\,34\,20)(24\,26\,33\,25\,28)(4\,18\,22\,23)(1\,5\,27)(7\,12\,31)(17). \tag{25}$$

每个置换都对应一个与其大小相同的整数分拆，也就是其循环的长度。例如，对于上面的置换，我们有分拆 $34 = 12 + 6 + 5 + 4 + 3 + 3 + 1$。通常用杨图表示整数分拆，也就是将连续的方框排列成单调的水平块，各块的长度对应于分拆中的各个项。上面的例子见图3中的 (a) 项（请注意，为便于参考，对应的分拆写在杨图左侧）。大小为 n 的杨图上的杨氏表，是对杨图方框的一种良标记，标记所用的集合为 $\{1, \ldots, n\}$（因此，所有n 符号都必须恰好使用一次）。例如，图3中的 (b) 是式 (25) 所给分拆的唯一表示（如前所述）。事实上，每个杨氏表都对应一个置换，其循环分解由带标记的行构成。因此，对杨图采用不同的标记方式，可能得到对应于同一置换的杨氏表。例如，图3中的 (b) 和 (c) 仅在于某些行经过了循环移位，也就是说，该置换在循环移位 α 的作用下保持不变，即$\alpha(a_1, \ldots, a_n) = (a_2, \ldots a_n, a_1)$，对每个 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$ 都成立。若一个杨氏表类满足

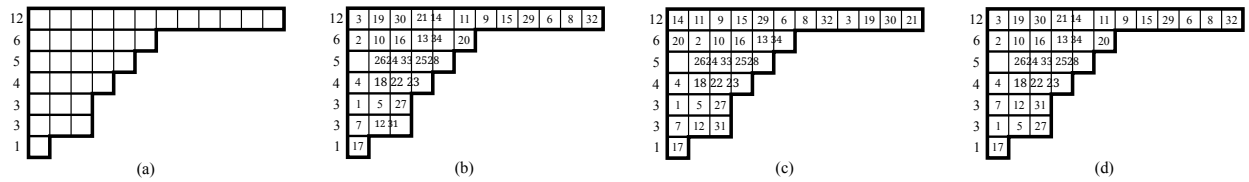

图3：杨表：（a）一个杨图。（b）一个杨氏表。（c）通过循环移动若干行，由（b）得到的一个杨氏表。（d）通过交换大小相同的行，由（b）得到的一个杨氏表。

其元素被视为由 α-轨道定义的等价关系所确定的等价类，则称之为模对称类。同样，图3中的 (b) 和 (d) 仅相差一个对两个长度为三的行进行置换；这是使两个不同杨氏表导出同一置换的另一种典型情况。因此，还存在一个作用 σ ，对每个 $n \geq 1$ ，它都通过置换 n-块的方式作用于其集合上，而原置换在该 σ-作用下也保持不变。若一个杨氏表类中的元素被视为由 σ-作用所诱导的轨道等价关系确定的等价类，则称该类为对称类。因此，例如，所有置换的类 $\mathcal{S}$ 由模对称且对称的杨氏表类表示。

与杨图相关联的因数图同样是由方框块组成的排列，这些方框块按行排列在杨图旁边，使得杨图中长度为 n 的块对应于因数图中长度为 τ（n）的块（它类似于杨图在因数函数 τ（n）下的“像”，因此，通常因数图中的排列并非单调）。见图4。

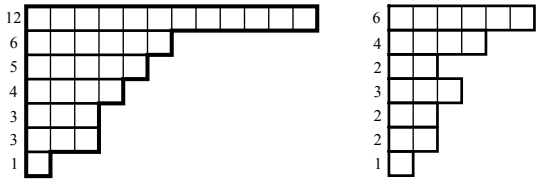

图4：杨图及其因数图。

今后，正整数 n 的因数将记作 $1 = p_1 < \ldots < p_{\tau(n)} = n$。注 26。 注意，对于因数图第 l列中的任意方框，若它属于大小为 n的块，则 τ（p_l） $= l$。

3.2 $\mathcal{P}$的一般组合规范

现在让我们正式给出两个主要的全局组合规范。

定理 3.1。Fo　　对于每个可容许三元组(i, j, k)，对每个正整数 n 定义算术　　c

函数

$$\chi(n) := \begin{cases} n^2 \cdot \tau_i(n) & \text{for } (i \geq 1, 0, 0) \\ n \sum\limits_{\ell=1}^{\tau(n)} p_\ell \cdot \tau_i(p_\ell) \cdot \tau_k(n/p_\ell) & \text{for } (i \geq 1, 0, k \geq 1) \\ \sum\limits_{\ell=1}^{\tau(n)} p_\ell^2 \cdot \tau_i(p_\ell) \cdot \tau_j(n/p_\ell) & \text{for } (i \geq 1, j \geq 1, 0) \\ \sum\limits_{\ell=1}^{\tau(n)} \sum\limits_{m=1}^{\tau(n/p_\ell)} p_\ell^2 q_m \cdot \tau_i(p_\ell) \cdot \tau_k(q_m) \cdot \tau_j\big(n/(p_\ell q_m)\big) & \text{for } (i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1) \\ n \cdot \tau_k(n) & \text{for } (0, 0, k \geq 1) \\ \sum\limits_{\ell=1}^{\tau(n)} p_\ell \cdot \tau_k(p_\ell) \cdot \tau_j(n/p_\ell) & \text{for } (0, j \geq 1, k \geq 1) \\ \tau_j(n) & \text{for } (0, j \geq 1, 0) \end{cases} \tag{27}$$

其中，对于 $m = 1$， $\tau(n/p_\ell)$ 是 n/p_ℓ 的因数。因此， $P(z)$ 是 $\chi(n)$ 的循环欧拉变换，即

$$P(z) = \prod_{n \geq 1} \exp\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{n\ell}}{n\ell} \right)^{\chi(n)} . \tag{28}$$

证明。有

$$\begin{aligned} P(z) &= \prod \left(\frac{1}{1 - z^{n_1 \cdots n_i d_1 \cdots d_j e_1 \cdots e_k}} \right)^{n_1 \cdots n_i / d_1 \cdots d_j} && (29) \\ &= \prod \exp\left(\log\left(\left(\frac{1}{1 - z^{n_1 \cdots n_i d_1 \cdots d_j e_1 \cdots e_k}} \right)^{n_1 \cdots n_i / d_1 \cdots d_j} \right) \right) && (30) \\ &= \prod \exp\left(\frac{1}{d_1 \cdots d_j} \log\left(\frac{1}{1 - z^{n_1 \cdots n_i d_1 \cdots d_j e_1 \cdots e_k}} \right) \right)^{n_1 \cdots n_i} && (31) \\ &= \prod \exp\left(\frac{1}{d_1 \cdots d_j} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{n_1 \cdots n_i d_1 \cdots d_j e_1 \cdots e_k \ell}}{\ell} \right)^{n_1 \cdots n_i} && (32) \\ &= \prod \exp\left(n_1 \cdots n_i e_1 \cdots e_k \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{n_1 \cdots n_i d_1 \cdots d_j e_1 \cdots e_k \ell}}{n_1 \cdots n_i d_1 \cdots d_j e_1 \cdots e_k \ell} \right)^{n_1 \cdots n_i} && (33) \\ &= \prod \exp\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{n_1 \cdots n_i d_1 \cdots d_j e_1 \cdots e_k \ell}}{n_1 \cdots n_i d_1 \cdots d_j e_1 \cdots e_k \ell} \right)^{(n_1 \cdots n_i)^2 \cdot e_1 \cdots e_k} && (34) \end{aligned}$$

因此结论成立。 □

推论 3.2. 方程 (1) 中的指数生成函数来自该规范

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}) = \prod_{n=1}^{\infty} \textsc{Seq}_{\chi(n)} \left(\textsc{Set} \left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \textsc{Cyc}_{n\ell}(\mathcal{Z}) \right) \right) . \tag{35}$$

只有在 $j>0$时，我们才不得不考虑循环。因此， $j=0$ 这种情形值得单独关注。事实上，我们将在接下来的结果中看到，在这种情形下， $\mathcal{P}$ 有一种规范，可将其转化为符合迈纳杜斯定理所给形式的 $P(z)$ 表示（因此，只要满足该定理的所有假设，就可以应用它）；该结果及随后两个结果的证明现在都显而易见。

定理 3.3。 对每个正整数 n，令

$$\psi(n) := \begin{cases} n\cdot\tau_i(n) & \text{for } (i\geq 1,0,0) \\ \tau_k(n) & \text{for } (0,0,k\geq 1) \\ \sum\limits_{\ell=1}^{\tau(n)} p_\ell\cdot\tau_i(p_\ell)\cdot\tau_k(n/p_\ell) & \text{for } (i\geq 1,0,k\geq 1). \end{cases} \tag{36}$$

如果 $j=0$，那么 $P(z)$ 是 $\psi(n)$ 的欧拉变换，即

$$P(z)=\prod\left(\frac{1}{1-z^{n_1\cdots n_i e_1\cdots e_k}}\right)^{n_1\cdots n_i} = \prod_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1-z^n}\right)^{\psi(n)}. \tag{37}$$

推论 3.4。 方程 (2) 中的指数生成函数来自如下规格

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z})=\prod_{n=1}^{\infty}\textsc{Seq}_{\psi(n)}\big(\textsc{Seq}(\mathcal{Z}^n)\big). \tag{38}$$

命题 3.5。 给定一个可容许三元组 $(i,0,k)$，由方程(35)和 (38)定义的组合类是同构的。

3.3 示例

现在，让我们来看几个示例，以便更好地理解由方程（35）和（38）定义的标记结构。我们先从迫使出现指数情境的情形开始，即当 $j\geq 1$ 时。实际上，凭借定理 3.1，只需分析前几个情形，便足以理解方程（35）所描述的整个类别。

3.3.1 按因数个数着色的排列：(0,1,0)

考虑情形 (i,j,k) =(0,1,0)。这是定理 1.2 的情形。在此情形下，方程（35）中的条件变为

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z})=\prod_{n=1}^{\infty}\textsc{Set}\Big(\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\textsc{Cyc}_{n\ell}(\mathcal{Z})\Big) \tag{39}$$

（与（22）比较）。它表示置换的类别，但现在每个循环都带有一个标签，该标签是该循环长度的因数。例如，

$$\overbrace{(3\ 19\ 30\ 21\ 14\ 11\ 9\ 15\ 29\ 6\ 8\ 32)}^{3|12}\overbrace{(2\ 10\ 16\ 13\ 34\ 20)}^{2|6}\overbrace{(24\ 26\ 33\ 25\ 28)}^{1|5}\overbrace{(4\ 18\ 22\ 23)}^{4|4}\overbrace{(1\ 5\ 27)}^{3|3}\overbrace{(7\ 12\ 31)}^{1|3}\overbrace{(17)}^{1|1}。 \tag{40}$$

任何为每个循环长度展示一个示例因数的标签集合都适用。例如，另一个大小为 34 的元素是

$$\overbrace{(3\ 19\ 30\ 21\ 14\ 11\ 9\ 15\ 29\ 6\ 8\ 32)}^{12|12}\ \overbrace{(2\ 10\ 16\ 13\ 34\ 20)}^{3|6}\ \overbrace{(24\ 26\ 33\ 25\ 28)}^{5|5}\ \overbrace{(4\ 18\ 22\ 23)}^{2|4}\ \overbrace{(1\ 5\ 27)}^{1|3}\ \overbrace{(7\ 12\ 31)}^{1|3}\ \overbrace{(17)}^{1|1} \tag{41}$$

我们强调，循环长度为 l 的循环上方，形如 $p|l$ 的任何标签都是有效的。换言之， $\mathcal{P}$ 中的一个元素完全由该置换中循环的结构，以及为每个循环长度选择一个因数（实际上，任意因数 p）所决定。选择因数等价于用 $\tau(n)$ 种颜色为相应杨图中长度为 n 的每一行着色，例如见图 5。因此，在这种情况下，该结构是带因数函数的带色排列数类别 $\tau(n)$，也就是按因子数着色的排列。其首批元素见图 6。

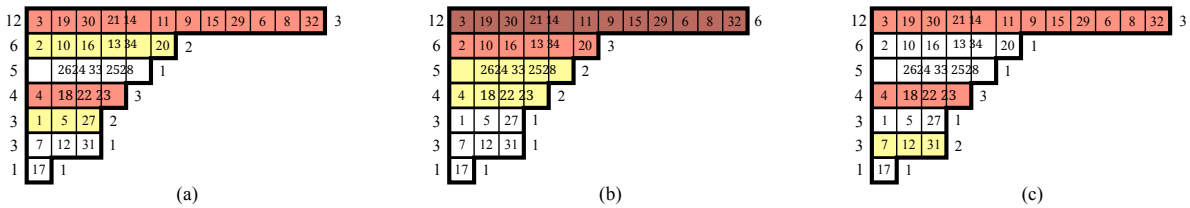

图 5：按因子数着色的排列（每行右侧的编号对应颜色编号）。(a) 根据方程（40）着色 (b) 根据方程（41）着色。(c) 另一种合法着色。

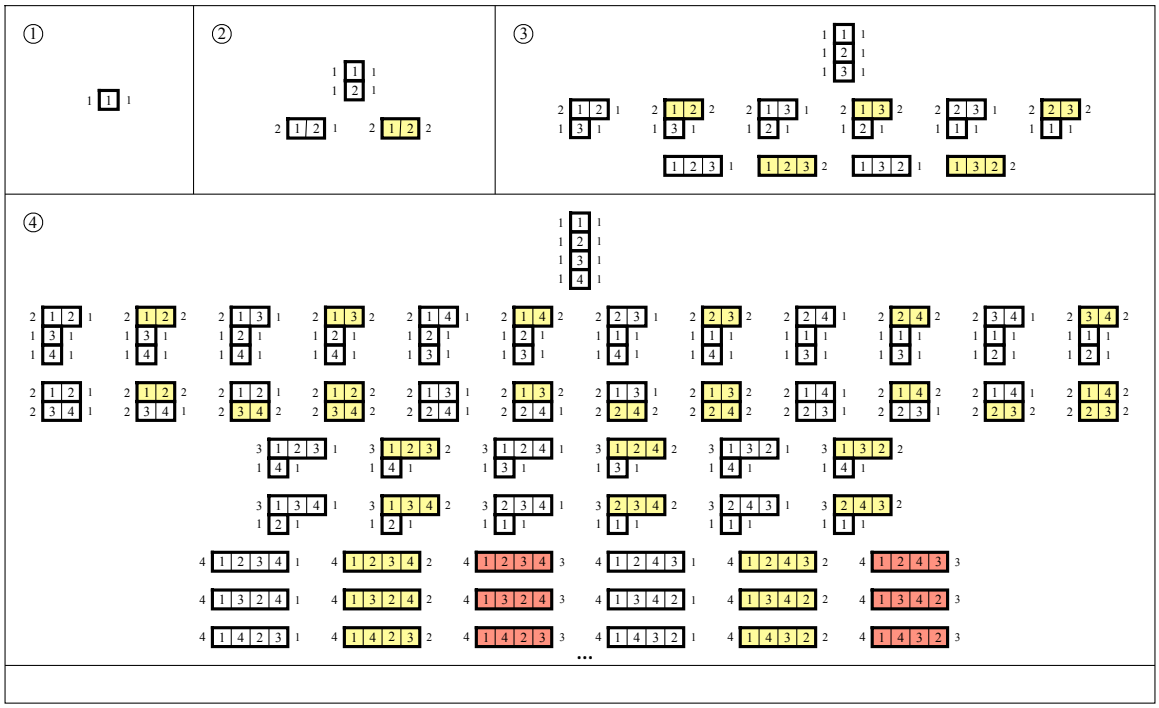

图 6：按因子数着色的排列中的前几个元素。

3.3.2 按因子数着色的排列，及因子图的有根着色（按因子数）：$(0,\ 2,\ 0)$

考虑情形（$i,\ j,\ k$）$=(0,\ 2,\ 0)$。在这种情形下，我们得到如下说明：

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}) = \prod_{n=1}^{\infty} \textsc{Seq}_{\tau(n)} \left(\textsc{Set} \left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \textsc{Cyc}_{n\ell}(\mathcal{Z}) \right) \right). \tag{42}$$

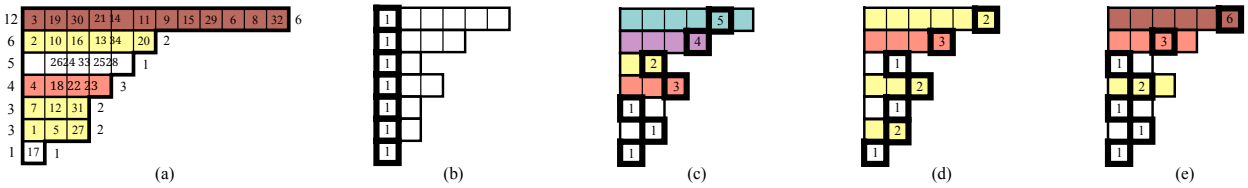

图 7：一个按因子数着色的置换，以及其因数图的四种按因子数着色的实例。(a) 杨图中的一个着色分拆。(b)、(c)、(d) 与 (a) 中杨图对应的因数图的三种不同有根着色。

请记住第 3.3.1 节中的情形 (0,1,0)：我们再次得到按因子数着色的排列，不过现在杨图中的每个块还带有一个额外的标签。具体来说，对于长度为 n 的每个块，若将 n 的因数列为 $1 = p_1 < \ldots < p_{\tau(n)} = n$，再选取一个因数 p_l，则标签是从一个大小为 $\tau(p_l) = l$ 的颜色集合中选出的颜色（见注 26）；这可以表示为按大小着色的有根因数图。因此在这种情形下，如果某个块的第 l 个方格是根，那么颜色集合的大小就是 l。例如，图 7 展示了一个带色排列，以及其因数图的四种按因子数着色的有根着色。如果所有块都选第一个方格作为根，那么就只有一种着色，即单色着色，这正是该图中项目 (b) 所示的情形。项目 (c)、(d) 和 (e) 展示了该因数图的其他可能有根着色。

3.3.3 按因子数着色的排列，以因数函数 $\chi(n)$ 对因数图进行有根着色：$(i,\ j,\ k)$

结合前两个例子，我们现在可以理解方程（35）中的一般情形，因为它与方程（42）中的规定仅有一处不同：序列算子中使用的是因数函数 $\chi(n)$，而非因数函数 $\tau(n)$。因此，其结构本质上相同，也就是说，该类别仍由按因子数着色的排列构成，区别在于，现在因数图的有根着色由因数函数 $\chi(n)$ 决定。具体而言，若将因数图中与杨图里的一个 n-块相对应的块中的第 l 个方格选作根，并将 n 的因数写作 $1 = p_1 < \ldots < p_{\tau(n)} = n$，则该因数图块所用的颜色集合大小为 $\chi(p_l)$。请注意，在一般情形下，如果因数图第 l 列中的两个不同方格分别被选作各自对应块的根，那么这些块所用的颜色集合的基数可能不同。

现在来分析方程（38）中给出的定义。

3.3.4 按大小对杨表进行有序着色：$(1,\ 0,\ 0)$

现在考虑三元组（$i,\ j,\ k$）$=$(1，0，0)。在此情况下，$P(z)$ 已知是平面分拆的普通生成函数，该函数由 Wright 研究（见 [38]）。在带标号全集中，该类别由平面分拆的良好着色构成，并且在组合意义上同构于由方程（35）和方程（38）中给出的定义所产生的（同构）类别。后者变为

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}) = \prod_{n=1}^{\infty} \textsc{Seq}_n\left(\textsc{Seq}(\mathcal{Z}^n)\right) \tag{43}$$

并将其转化为

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-z^n)^n}. \tag{44}$$

在这种情况下，带标号类 $\mathcal{P}$（如等式 (43) 所述）由按大小着色的杨表组成，也就是说，大小为 n 的块使用 n 种不同的颜色着色。示例见图8。请注意，这与第 3.3.1 节中按因子数着色的排列不同：这里杨表按大小着色，且它们既非模对称，也非对称。此外，在这种情况下我们还有 $\chi(n) = n^2\tau_1(n) = n^2$，因此，根据命题 3.5，按大小着色的杨表类与按因子数着色的排列类（其因数图按大小的平方进行有根着色）同构。

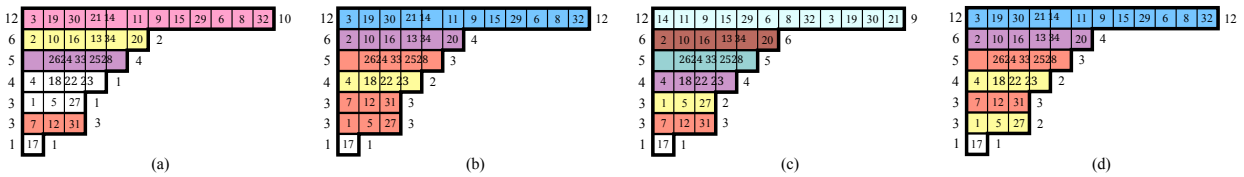

图8：按大小着色的杨氏表。长度为 n 的每一行都用一个含有 n 种颜色的颜色集着色。(a) 按大小函数着色的杨氏表。(b) 另一个着色杨氏表；它与 (a) 的区别不仅在于着色，还在于长度为三的行的标签经过了置换，即杨表不对称。(c) 另一个着色杨氏表；它与 (a) 的区别不仅在于着色，还有一行经过了循环移位，即杨表不具模对称性。(d) 对另一个杨氏表的另一种着色。

3.3.5 按因数函数着色的杨表 $\psi(n)$：$(i,0,k)$

方程（38）中对三元组 $(i,0,k)$ 一般情形的定义，与前一个例子不同之处在于，现在由 $\psi(n)$ 取代了大小函数 n。换句话说，我们再次得到与第3.3.4节类似的着色杨表，唯一的区别是，现在用于给 n-块集合着色的颜色集大小为因数函数 $\psi(n)$（事实上，当 $i=1$ 和 $k=0$ 时，$\psi(n)=n$，即 $\psi(n)$ 是大小）。再次提醒，这个类别与按因子数着色的排列这一类别同构，其对象是由因数函数 $\chi(n)$ 给出的因数图的有根着色。

3.4 类别 $\mathcal{Q}$

根据方程（35）和（38）给出的 $\mathcal{P}$ 的两种全局组合视角，我们可以对相应的带标记和双变量的类别 $\mathcal{Q}$ 作一般性描述

（指数）生成函数如下。首先考虑方程（35）的加权版本，即以下规范

$$\widehat{\mathcal{P}}(\mathcal{Z},\mathcal{V})=\prod_{n=1}^{\infty}\textsc{Seq}_{\chi(n)}\left(\textsc{Set}\left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\mathcal{V}^{\ell+1}\textsc{Cyc}_{n\ell}(\mathcal{Z})\right)\right). \tag{45}$$

因此，相应的双变量（指数）生成函数 $P(z,v)$ 为

$$\widehat{P}(z,v)=\prod_{n=1}^{\infty}\exp\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}v^{\ell+1}\frac{z^{n\ell}}{n\ell}\right)^{\chi(n)}. \tag{46}$$

在 $v=1$ 的情况下，我们已经看到（在方程 (28) 中） $P(z,1)=P(z)$。现在令权重$v=-1$，并逆向遵循定理 3.1 的证明，可得

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(z,-1)&=\prod_{n=1}^{\infty}\exp\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell+1}\frac{z^{n\ell}}{n\ell}\right)^{\chi(n)} &(47)\\
&=\prod\exp\left(-\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-z^{n_1\cdots n_i d_1\cdots d_j e_1\cdots e_k})^{\ell}}{n_1\cdots n_i d_1\cdots d_j e_1\cdots e_k\ell}\right)^{(n_1\cdots n_i)^2\cdot e_1\cdots e_k} &(48)\\
&=\prod\exp\left(-\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-z^{n_1\cdots n_i d_1\cdots d_j e_1\cdots e_k})^{\ell}}{\ell}\right)^{n_1\cdots n_i/d_1\cdots d_j} &(49)\\
&=\prod\exp\left(-\log\frac{1}{1+z^{n_1\cdots n_i d_1\cdots d_j e_1\cdots e_k}}\right)^{n_1\cdots n_i/d_1\cdots d_j} &(50)\\
&=Q(z)。 &(51)
\end{aligned}$$

更一般地，然而，如果我们固定权重 v 的值，则得到

$$P_n^{(v)}=[z^n]\widehat{P}(z,v)=[z^n]\prod_{n=1}^{\infty}\exp\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}v^{\ell+1}\frac{z^{n\ell}}{n\ell}\right)^{\chi(n)}=[z^n]\prod_{\delta=1}^{\infty}\exp\left(\sum_{\substack{\ell\geq 1\\ \text{with }\delta\mid\ell}}v^{\frac{\ell}{\delta}+1}\frac{z^{\ell}}{\ell}\right)^{\chi(\delta)}. \tag{52}$$

如上所示，系数 $Q_n=[z^n]Q(z)$ 可以表示为 $P(z)$ 中各系数的加权项之和（权重为、 $+1$ 和 -1）。由于 $v=1$ 得到 $P(z,1)=P(z)$，而 $v=-1$ 得到 $P(z,-1)=Q(z)$，因此，探索其他形式为 $\widehat{P}(z,v)$ 的指数型生成函数（其中 $v=e^{i\theta}$ 为单位圆上的其他单位根）将会很有趣。我们将这些探索留作开放问题。

4 渐近分析

渐近分析以与 [17] 类似的方式进行。我们从代换$z\triangleq e^{-t}$开始。令 $L_P(t)=\log\left(P(e^{-t})\right)$ 以及 $L_Q(t)=\log\left(Q(e^{-t})\right)$。此外，令 $L(t)$ 表示 $L_P(t)$ 或$L_Q(t)$。

4.1 梅林变换

关于梅林变换的一般性参考资料，请参见 [37,第 9]章。

命题 4.1 (关于 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 的梅林变换)。 令 $L_P^*(s) := \mathcal{M}[L_P(t);\, s]$ 以及 $L_Q^*(s) := \mathcal{M}[L_Q(t);\, s]$ 分别为 $L_P(t)$ 和 $L_Q(t)$ 的梅林变换。这些梅林变换具有简洁的形式

$$L_P^*(s) = \zeta(s-1)^i \zeta(s+1)^{j+1} \zeta(s)^k \Gamma(s) \tag{53}$$

and

$$L_Q^*(s) = (1-2^{-s})\zeta(s-1)^i \zeta(s+1)^{j+1} \zeta(s)^k \Gamma(s). \tag{54}$$

证明。 根据 L_P 和 P 的定义，我们有 $L_P(t) = \log\left(P(e^{-t})\right) = \log \prod (1 - e^{-tn_1\cdots n_i d_1 \cdots d_j e_1 \cdots e_k})^{-n_1\cdots n_i / d_1 \cdots d_j}$。乘积的对数等于对数之和，因此可得 $L_P(t) = \sum \frac{n_1\cdots n_i}{d_1\cdots d_j} \log(1/(1 - e^{-tn_1\cdots n_i \underline{d_1\cdots d_j} e_1\cdots e_k}))$。然后，我们可以将对数展开为级数，并交换求和顺序，从而得到 $L_P(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum \frac{n_1\cdots n_i}{d_1\cdots d_j} e^{-tn_1\cdots n_i d_1\cdots d_j e_1\cdots e_k j}$。根据梅林变换的线性性，有 $L_P^*(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum \frac{n_1\cdots n_i}{d_1\cdots d_j} \mathcal{M}\left[e^{-tn_1\cdots n_i d_1\cdots d_j e_1\cdots e_k j};\ s\right]$。利用梅林变换的缩放性质 [37, 方程（9.5）],，我们有 $\mathcal{M}\left[e^{-tn_1\cdots n_i d_1\cdots d_j e_1\cdots e_k j};\ s\right] = (n_1\cdots n_i d_1 \cdots d_j e_1 \cdots e_k j)^{-s} \mathcal{M}\left[e^{-t};\ s\right]$。众所周知，$\mathcal{M}\left[e^{-t};\ s\right] = \Gamma(s)$。因此可得 $L_P^*(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum \frac{n_1\cdots n_i}{d_1\cdots d_j} \cdot (n_1\cdots n_i d_1 \cdots d_j e_1 \cdots e_k j)^{-s} \Gamma(s)$，将其化简为

$$L_P^*(s) = \zeta(s-1)^i \zeta(s+1)^{j+1} \zeta(s)^k \Gamma(s).$$

对 $L_Q(t)$ 的分析类似。我们有 $L_Q(t) = \log \prod (1 + e^{-tn_1\cdots n_i d_1\cdots d_j e_1\cdots e_k})^{n_1\cdots n_i / d_1\cdots d_j}$。然后像之前一样展开，得到 $L_Q(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1}_j \sum \frac{n_1\cdots n_i}{d_1\cdots d_j} e^{-tn_1\cdots n_i d_1\cdots d_j e_1\cdots e_k j}$。再次利用线性性质和缩放性质，可得 $L_Q^*(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1}_j \sum \frac{n_1\cdots n_i}{d_1\cdots d_j} \cdot (n_1\cdots n_i d_1 \cdots d_j e_1 \cdots e_k j)^{-s} \Gamma(s)$，化简后得到 $L_Q^*(s) = \eta(s+1)\zeta(s-1)^i \zeta(s+1)^j \zeta(s)^k \Gamma(s)$，其中 $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}_{n^s}$ 是狄利克雷 eta 函数。为子与关于 $L_P^*(s)$ 的方程保持对称，我们将其变换为：

$$L_Q^*(s) = (1-2^{-s})\zeta(s-1)^i \zeta(s+1)^{j+1} \zeta(s)^k \Gamma(s).$$

□

今后，令 $L^*(s)$ 表示 $L_P^*(s)$ 或 $L_Q^*(s)$。

4.2 奇点分析

我们对奇点分析作几点观察。

命题 4.2。 以下结论成立：

1. 如果 $i \geq 1$，那么 $L^*(s)$ 在 $s = 2$ 处有一个由 $\zeta(s-1)^i$ 产生的奇点。它是一个 $i \geq 1$ 阶极点，因为方程 *(53)* 和 *(54)* 中其余各项在 $s = 2$ 处均非零。*2.* 如果 $k \geq 1$，那么 $L^*(s)$ 在 $s = 1$ 处有一个由 $\zeta(s)^k$ 产生的奇点。它是一个 $k \geq 1$ 阶极点，因为方程 *(53)* 和 *(54)* 中其余各项在 $s = 1$ 处均非零。*3.* $L_P^*(s)$ 和 $L_Q^*(s)$ 在 $s = 0$ 处都有一个由 $\zeta(s+1)^{j+1}\Gamma(s)$ 产生的奇点。$L_P^*(s)$ 在 $s = 0$ 处的奇点是一个 $j+2 \geq 2$ 阶极点，因为 *(53)* 中其余各项在 $s = 0$ 处均非零。相反，由于 $1 - 2^{-s}$ 在 $s = 0$ 处有一个单零点，因此 $L_Q^*(s)$ 在 $s = 0$ 处的奇点是一个 $j+1 \geq 1$ 阶极点，因为 *(54)* 中其余各项在 $s = 0$ 处均非零。*4.* 如果 $i = 0$，那么 $L^*(s)$ 在 $s = -1$ 处有一个由 $\Gamma(s)$ 产生的奇点。它是一个单极点，因为 *(53)* 和 *(54)* 中其余各项在 $s = -1$ 处均非零。另一方面，如果 $i \geq 1$，那么 $\Gamma(s)$ 在 $s = -1$ 处产生的单极点会被 $\zeta(s-1)^i$ 中的 $i \geq 1$ 阶零点抵消。

5. 如果 $k=0$，那么 $L^*(s)$ 对每个 $n\geq 1$ 都在 $s=-2n$ 处有一个由 $\Gamma(s)$ 产生的奇点。它是一个单极点，因为 (53) 和 (54) 中其余各项在 $s=-2n$ 处均非零。另一方面，如果 $k\geq 1$，那么 $s=-2n$ 处的奇点会被 $\zeta(s)^k$ 中的 $k\geq 1$ 阶零点抵消。

6. 对于每个 $n\geq 1$，由 $\Gamma(s)$ 产生的 $s=-(2n+1)$ 处的单极点，被 $\zeta(s+1)^{j+1}$ 中阶数为 $j+1\geq 1$ 的零点抵消。

4.3 留数分析

命题 4.3。对于所有 $i\geq 1$、$j\geq 0$ 和 $k\geq 0$，存在一个可计算多项式 $a(t)=a_0+\ldots+a_{i-1}t^{i-1}$，使得

$$\operatorname{Res}\big(L^*(s)t^{-s}\big)_{s=2}=\frac{a(\log t)}{t^2}.$$

分别对于 $L_P^*(s)$ 和 $L_Q^*(s)$，a_{i-1} 的值为

$$\frac{(-1)^{i-1}\zeta(3)^{j+1}\pi^{2k}}{6^k(i-1)!}\qquad and\qquad \frac{(3)(-1)^{i-1}\zeta(3)^{j+1}\pi^{2k}}{(4)(6^k)(i-1)!}. \tag{55}$$

在下面的讨论中，我们会经常使用 a_{i-1}，因此定义 $A:=a_{i-1}$（这样，对 i、j 和 k 的取值的依赖关系就是隐含的；我们也将其与 P 或 Q 的关系视为隐含的）。

证明。首先注意到，$\operatorname{Res}\big(\zeta(s+1)^it^{-s}\big)_{s=0}$ 是 $\log t$ 的一个多项式，其阶数为 $i-1$，首项系数为 $\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}$。因此我们有

$$\operatorname{Res}\big(\zeta(s+1)^it^{-s}\big)_{s=0}=\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}(\log t)^{i-1}+o((\log t)^{i-1}).$$

在 $s=0$ 处，我们注意到 $\zeta(s+3)^{j+1}$、$\zeta(s+2)^k$ 和 $\Gamma(s+2)$ 都是光滑的，并且 $\zeta(2)=\pi^2/6$ 和 $\Gamma(2)=1$。因此

$$\operatorname{Res}\big(\zeta(s+1)^i\zeta(s+3)^{j+1}\zeta(s+2)^k\Gamma(s+2)t^{-s}\big)_{s=0}=\frac{(-1)^{i-1}\zeta(3)^{j+1}\pi^{2k}}{6^k(i-1)!}(\log t)^{i-1}+o((\log t)^{i-1}).$$

将 s 平移 2 后，左端变为 $\text{留数}\big(\zeta(s-1)^i\zeta(s+1)^{j+1}\zeta(s)^k\Gamma(s)t^{-(s-2)}\big)_{s=2}=t^2\text{留数}\big(L_P^*(s)t^{-s}\big)_{s=2}$，因此得到

$$\operatorname{Res}\big(L_P^*(s)t^{-s}\big)_{s=2}=\frac{1}{t^2}\left(\frac{(-1)^{i-1}\zeta(3)^{j+1}\pi^{2k}}{6^k(i-1)!}(\log t)^{i-1}+o((\log t)^{i-1})\right).$$

在 $s=2$ 处，我们还注意到 $1-2^{-s}=3/4$，因此得到

$$\operatorname{Res}\big(L_Q^*(s)t^{-s}\big)_{s=2}=\frac{1}{t^2}\left(\frac{(3)(-1)^{i-1}\zeta(3)^{j+1}\pi^{2k}}{(4)(6^k)(i-1)!}(\log t)^{i-1}+o((\log t)^{i-1})\right).$$

□

命题 4.4。对于所有 $i\geq 0$ 和 $j\geq 0$ 以及 $k\geq 1$，存在一个可计算多项式 $b(t)=b_0+\ldots+b_{k-1}t^{k-1}$，使得

$$\operatorname{Res}\big(L^*(s)t^{-s}\big)_{s=1}=\frac{b(\log t)}{t}.$$

分别对于 $L_P^*(s)$ 和 $L_Q^*(s)$，b_{k-1} 的值为

$$\frac{(-1)^{i+k-1}\pi^{2(j+1)}}{6^{j+1}2^i(k-1)!}\qquad and\qquad \frac{(-1)^{i+k-1}\pi^{2(j+1)}}{6^{j+1}2^{i+1}(k-1)!}. \tag{56}$$

我们定义 $B := b_{k-1}$ （对 i, j, k 以及 P 或 Q 的依赖关系是隐含的）。

证明。 运用与前一个命题完全相同的观察，我们首先注意到 $\mathrm{Res}\big(\zeta(s+1)^k t^{-s}\big)_{s=0}$ 是关于 $\log t$ 的 $k-1$ 次多项式，其首项系数为 $(-1)^{k-1}\,(k-1)!$。因此我们有

$$\mathrm{Res}\big(\zeta(s+1)^k t^{-s}\big)_{s=0} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}(\log t)^{k-1} + o((\log t)^{k-1}).$$

在 $s=0$ 处，我们注意到 $\zeta(s)^i$、$\zeta(s+2)^{j+1}$ 和 $\Gamma(s+1)$ 都是光滑的，并且 $\zeta(0) = -1/2$、$\zeta(2) = \pi^2/6$ 以及 $\Gamma(1) = 1$。由此可得

$$\mathrm{Res}\big(\zeta(s)^i\zeta(s+2)^{j+1}\zeta(s+1)^k\Gamma(s+1)t^{-s}\big)_{s=0} = \frac{(-1)^{i+k-1}\pi^{2(j+1)}}{6^{j+1}2^i(k-1)!}(\log t)^{k-1} + o((\log t)^{k-1}).$$

将 s 平移 1 后，左端变为 $\mathrm{Res}\big(\zeta(s-1)^i\zeta(s+1)^{j+1}\zeta(s)^k\Gamma(s)t^{-(s-1)}\big)_{s=1} = t\mathrm{Res}\big(L_P^*(s)t^{-s}\big)_{s=1}$，因此我们得到

$$\mathrm{Res}\big(L_P^*(s)t^{-s}\big)_{s=1} = \frac{1}{t}\left(\frac{(-1)^{i+k-1}\pi^{2(j+1)}}{6^{j+1}2^i(k-1)!}(\log t)^{k-1} + o((\log t)^{k-1})\right).$$

在 $s=1$，我们还注意到 $1-2^{-s} = 1/2$，因此得到

$$\mathrm{Res}\big(L_Q^*(s)t^{-s}\big)_{s=1} = \frac{1}{t}\left(\frac{(-1)^{i+k-1}\pi^{2(j+1)}}{6^{j+1}2^{i+1}(k-1)!}(\log t)^{k-1} + o((\log t)^{k-1})\right).$$

□

命题4.5. 对于所有非负的 i、j、k，存在一个可计算多项式 $c(t) = c_0 + \ldots + c_{j+1}t^{j+1}$，使得

$$\mathrm{Res}\big(L_P^*(s)t^{-s}\big)_{s=0} = c(\log t)$$

并且c_{j+1} 的值为

$$\frac{(-1)^{i+j+k+1}}{2^k(j+1)!\,12^i}. \tag{57}$$

我们定义 $C := c_{j+1}$ （对 i, j, k 以及对 P 的依赖是隐含的）。

证明。 我们首先注意到，$\mathrm{Res}\big(\zeta(s+1)^{j+1}\Gamma(s)t^{-s}\big)_{s=0}$ 是关于$\log t$ 的一个多项式，其次数为 $j+1$，首项系数为$(-1)^{j+1}\,\underline{(j+1)!}$。因此我们有

$$\mathrm{Res}\big(\zeta(s+1)^{j+1}\Gamma(s)t^{-s}\big)_{s=0} = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!}(\log t)^{j+1} + o((\log t)^j).$$

在 $s=0$，我们注意到 $\zeta(s-1)^i$ 和 $\zeta(s)^k$都是光滑的，并且还注意到 $\zeta(-1) = -1/12$ 和$\zeta(0) = -1/2$。由此可得

$$\mathrm{Res}\big(L_P^*(s)t^{-s}\big)_{s=0} = \mathrm{Res}\big(\zeta(s-1)^i\zeta(s+1)^{j+1}\zeta(s)^k\Gamma(s)t^{-s}\big)_{s=0} = \frac{(-1)^{i+j+k+1}}{2^k(j+1)!\,12^i}(\log t)^{j+1} + o((\log t)^j).$$

□

我们定义 $D := d_j$ （对 i、j、k 以及 Q 的依赖关系是隐含的）。

命题 4.6。 对于所有非负的 i、 j、 k，存在一个可计算多项式 $d(t) = d_0 + \ldots + d_j t^j$，使得

$$\operatorname{Res}\big(L_Q^*(s)t^{-s}\big)_{s=0} = d(\log t)$$

且 d_j 的值为

$$\ln(2)\frac{(-1)^{i+j+k}}{2^k j!\, 12^i}. \tag{58}$$

证明。 我们首先注意到，留数$\big((1-2^{-s})\zeta(s+1)^{j+1}\Gamma(s)t^{-s}\big)_{s=0}$是关于 $\log t$ 的一个次数为 j的多项式，其首项系数为 $\ln(2)^{\binom{-1}{j}}$ ！ 。因此我们有

$$\operatorname{Res}\big((1-2^{-s})\zeta(s+1)^{j+1}\Gamma(s)t^{-s}\big)_{s=0} = \ln(2)\frac{(-1)^j}{j!}(\log t)^j + o((\log t)^{j-1}).$$

在 $s = 0$处，我们注意到 $\zeta(s-1)^i$ 和 $\zeta(s)^k$都是光滑的，并且 $\zeta(-1) = -1/12$ 以及$\zeta(0) = -1/2$。由此可得

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\big(L_Q^*(s)t^{-s}\big)_{s=0} &= \operatorname{Res}\big((1-2^{-s})\zeta(s-1)^i\zeta(s+1)^{j+1}\zeta(s)^k\Gamma(s)t^{-s}\big)_{s=0}\\ &= \ln(2)\frac{(-1)^{i+j+k}}{2^k j!\, 12^i}(\log t)^j + o((\log t)^{j-1}).\end{aligned}$$

□

命题 4.7。 固定一个可容许三元组 (i, j, k)。则以下结论成立：

- 若 $i = 0$，则 留数$\big(L^*(s)t^{-s}\big)_{s=-1}$ 是 t 中的一个线性单项式（具体取决于我们分析的是 $\mathcal{P}$ 还是 $\mathcal{Q}$）。
- 设 $n \geq 1$。若 $k = 0$，则 留数$\big(L^*(s)t^{-s}\big)_{s=-2n}$ 是 t 中的一个 $2n$ 次单项式（具体取决于我们分析的是 $\mathcal{P}$ 还是 $\mathcal{Q}$）。

必要时，我们会在多项式 $a(t)$ 和 $b(t)$ 中添加下标，以指明所考虑的类别，即写作 $a_P(z)$、$a_Q(z)$、 $b_P(z)$ 和 $b_Q(z)$。只有在四 种例外情形下，我们才能求出 $P(z)$ 系数的渐近增长，也就是可容许三元组为 (1，0，0)、(0，1，0)、(0，0，1) 和 (1，0，1) 时。同样，只有在五 种例外情形下，我们才能求出 $Q(z)$ 系数的渐近增长，即可容许三元组为前述四种之一，此外还包括 (0，2，0) 时。对于所有这些情形，我们都需要相应多项式的全部系数。表 5 和表 6 列出了所有这些情形下命题 4.3、4.4、4.5 和 4.6 中的多项式。

$(i,\ j,\ k)$	$a(z)$	$b(z)$	$c(z)$
(1,0,0)	$\zeta(3)$		$\zeta'(-1) + \frac{1}{12}z$
(1, 0, 1)	$\frac{\pi^2\zeta(3)}{6}$	$-\frac{\pi^2}{12}$	$-\frac{\zeta'(-1)}{2} + \frac{\log(2\pi)}{24} - \frac{1}{24}z$
(0, 0, 1)		$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\log(2\pi)-}{2} + \frac{1}{2}z$
(0, 1, 0)			$\frac{\pi^2}{12} - \frac{\gamma^2}{2} - 2\gamma_1 - \gamma z + \frac{1}{2}z^2$

表 5：与类别 $\mathcal{P}$ 的首批可容许三元组相关的命题4.3、4.4和4.5中的多项式。

$(i,\ j,\ k)$	$a(z)$	$b(z)$	$d(z)$
$(1,0,0)$	$\frac{3\zeta(3)}{4}$		$-\frac{\log 2}{12}$
$(1,0,1)$	$\frac{\pi^2\zeta(3)}{8}$	$-\frac{\pi^2}{24}$	$\frac{\log 2}{24}$
$(0,\ 0,\ 1)$		$\frac{\pi^2}{12}$	$-\frac{\log(2)}{2}$
$(0,1,0)$			$\gamma\log 2-\frac{\log^2 2}{2}-(\log 2)z$
$(0,\ 2,\ 0)$			$\frac{\gamma^2\log 2}{2}+\frac{\pi^2\log 2}{12}-\gamma\log^2 2+\frac{\log^3 2}{6}-3\gamma_1$ 对数 $2+\left(\frac{\log^2 2}{2}-2\gamma\right.$ 对数 $\left.2\right)z+\frac{\log 2}{2}z^2$

表6：与类别 $\mathcal{Q}$ 的首批可容许三元组相关的命题 4.3、4.4 和 4.6 中的多项式。

命题4.8。令 $g(z)$ 等于 $c(z)$ 或 $d(z)$，这取决于我们分别分析$\mathcal{P}$ 还是 $\mathcal{Q}$；另外，令 $h(z)$ 为由 $s=-1$处和 $s=-2n$ 处的留数之和构成的级数，其中 $n\geq 1$（注意，若 $i>0$ 且 $k>0$，则 $h(z)=0$，见命题*4.2*中的第*4*和第*5*条）。因此$t\to 0$ 有如下结论：

- 若 $i\geq 1$，则 $L(t)\sim {}^{a}\!/_{t^2}+{}^{b)\,(\log t)}\!/_{t}+g(\log t)+h(t)$。
- 若 $i=0$ 且 $k\geq 1$，则 $L(t)\sim {}^{b}\!/_{t}(\log t)+g(\log t)+h(t)$。
- 若 $i=k=0$，则 $L(t)\sim g(\log t)+h(t)$。

此后，我们将按照以下三类可容许三元组系统地展开分析：$(i\geq 1,j,k)$、$(0,j,k\geq 1)$ 和 $(0,j\geq 10)$。

4.4 鞍点方程

令 $F(z)$ 表示 $P(z)$ 或 $Q(z)$。现在利用 $t=-\log z$as $z\to 1$，得到

$$F(z)\sim\exp\left(\frac{a\big(\log(-\log z)\big)}{(-\log z)^2}+\frac{b\big(\log(-\log z)\big)}{-\log z}+g\big(\log(-\log z)\big)+h(-\log z)\right). \tag{59}$$

令 $f(z):=\log F(z)-n\log(z)$。鞍点位于半径“r”处，其中 $rf'(z)=r^{F'}{}_{(r)F(r)}=n$。我们有以下给出一般形式的初等结果：

命题 4.9。

$$z\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{1}{\log^3(1/z)}\cdot\big(2a\big(\log\log(1/z)\big)-a'\big(\log\log(1/z)\big)\big) \tag{60}$$

$$+\frac{1}{\log^2(1/z)}\cdot\big(b\big(\log\log(1/z)\big)-b'\big(\log\log(1/z)\big)\big) \tag{61}$$

$$-\frac{1}{\log(1/z)}\cdot g'\big(\log\log(1/z)\big) \tag{62}$$

$$-h'\big(\log(1/z)\big). \tag{63}$$

一般而言，为了确定 $F(z)$ 系数的渐近增长，必须考虑编号为 (60)–(62) 的所有项。我们可以忽略

$h(z)$ 的贡献。因此，正如我们之前提到的，只有在极少数情况下，我们才能显式求解鞍点方程

$$r\frac{F'(r)}{F(r)} = n \tag{64}$$

因此，只有在这些情况下，才能得到 $F(z)$ 的系数渐近增长的显式表达式。下面精确说明我们能够解决的情形：

推论 4.10。 我们有如下结论：

- 如果可容许三元组为 $(1,0,0)$、$(1,0,1)$、$(0,0,1)$ 或 $(0,1,0)$，那么 $r\frac{P'(r)}{P(r)} = n$ 会成为关于 $-$ 对数 r 的次数至多为 *3* 的多项式，因此可以求解。
- 如果可容许三元组为 $(1,0,0)$、$(1,0,1)$、$(0,0,1)$、$(0,1,0)$ 或 $(0,2,0)$，那么 $r\frac{Q'(r)}{Q(r)} = n$ 会成为关于 $-$ 对数 r 的次数至多为 *3* 的多项式，因此可以求解。

证明。 这一切都可由命题 4.3、4.4、4.5、4.6 和 4.7 推出。 □

然而，正如我们将看到的，对于每个可容许三元组，都可以得到系数的对数 的渐近增长。下一节将介绍案例研究，其中我们求解鞍点方程，并推导出推论 4.10 中所有情形下系数的渐近增长。随后在第 §6 节，我们将给出一般结果，以求得每个可容许三元组的系数对数的渐近增长。

5 案例研究：一阶渐近近似。

本节将推导推论 4.10 中所有尚未得知情形下系数的渐近增长（表 2 展示了 OEIS 中这些估计值的当前状态）。首先回顾如下内容：

注65。 $x = be^{cx}$ 的解为 $x = -\frac{1}{c}\mathrm{W}(-bc)$，这也是 $\log x = \log b + cx$ 的解。

定理5.1。 若可容许三元组为$(0,1,0)$，则

$$[z^n]P(z) \sim \frac{e^{\pi^2/12-\gamma^2/2-2\gamma_1+\gamma}\exp\left(\log^2(\mathrm{W}(e^\gamma n)/n)/2\right)}{\sqrt{2\pi}\left(\log(e^\gamma n)/n\right)^\gamma\sqrt{\log\left(\log(e^\gamma n)/n\right)}} \tag{66}$$

证明。 由表 5 得到 $c(z) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\gamma^2}{2} = 2\gamma_1 = \gamma z + \frac{1}{2}z^2$。于是鞍点方程变为 $-\log(\log(1/z))/\log(1/z) + \gamma/\log(1/z) = n$，这等价于 $\log u = \log e^\gamma - nu$ with $u = \log(1/z)$。因此，根据注 65，我们得到鞍点 $r = \exp(-\mathrm{W}(e^\gamma n)/n)$，由此得到

$$\frac{1}{2\pi}e^{\log P(r) - n\log r} \sim \frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{\log^2(\mathrm{W}(e^\gamma n)/n)}{2}\right)(\mathrm{W}(e^\gamma n)/n)^{-\gamma}e^{\pi^2/12-\gamma^2/2-2\gamma_1}\exp\left(\mathrm{W}(e^\gamma n)\right) \tag{67}$$

and

$$\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(\frac{f''(r)}{2!}(re^{i\theta}-r)^2 + \dots\right)d\theta \sim \frac{\mathrm{W}(e^\gamma n)}{n}\sqrt{\frac{2\pi}{\log\left(\mathrm{W}(e^\gamma n)/n\right)}}. \tag{68}$$

结合上述最后两个估计值，由于 $\mathrm{W}(x) = \log x - \log\log x + o(x)$，经过化简后即可得到所需结果。 □

定理5.2。 如果可容许三元组为$(0,1,0)$，那么

$$[z^n]Q(z) \sim \frac{2^{\gamma-(\log 2)/2+1/2}}{\sqrt{\pi}(\log 2)^{\log 2-1/2}} \cdot n^{\log 2-1}. \tag{69}$$

证明。 在这种情况下，由表6可得 $d(z) = \gamma \log 2 - \log_2^2 2 = (\log 2)z$。于是，鞍点方程 $(\log 2)/\log(1/z) = n$ 给出渐近鞍点 $r = \exp(-(\log 2)/n)$，由此可得

$$\frac{1}{2\pi} e^{\log Q(r) - n \log r} \sim \frac{e^{\gamma \log 2 - \frac{\log^2 2}{2}}}{2\pi (\log 2)^{\log 2}} \cdot n^{\log 2} \cdot 2 \tag{70}$$

and

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{f''(r)}{2!}(re^{i\theta} - r)^2 + \dots \right) d\theta \sim \frac{\sqrt{2\pi \log 2}}{n} \tag{71}$$

结合 上述最后两个估计值并加以化简，即可得到所需结果。 □

定理5.3。 如果可容许三元组为 $(0,2,0)$，那么

$$[z^n]Q(z) \sim \frac{e^{d_0 + d_1 \log \theta(n) + d_2 \log^2 \theta(n) - d_1}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{d_2 \log\left(\frac{2d_2}{n} \log\left(\frac{ne^{-d_1/(2d_2)}}{2d_2}\right)\right)}} \left(\frac{2d_2}{n} \log\left(\frac{ne^{-d_1/(2d_2)}}{2d_2}\right)\right)^{1-2d_2} \tag{72}$$

其中 $\theta(n) = \frac{2d_2}{n} W\left(\frac{ne^{-d_1/(2d_2)}}{2d_2}\right)$。

证明。 严格来说，这个定理与定理5.1相同，因此我们来对其进行隐式推导。鞍点方程 $-2d_2 \log \log(1/z)/\log(1/z) - d_1/\log(1/z) = n$ 等价于 $\log u = -\frac{d_1}{2d_2} - \frac{n}{2d_2} u$，其中 $u = \log(1/z)$，因此得到渐近鞍点 $r = \exp\left(-\frac{2d_2}{n} W\left(e^{-d_1/(2d_2)} \cdot \frac{n}{2d_2}\right)\right)$；令 $s = -\log r$，便可得到 —— ——

$$\frac{1}{2\pi} e^{\log Q(r) - n \log r} \sim \frac{e^{d_0 + d_1 \log \theta(n) + d_2 \log^2 \theta(n)}}{2\pi} \cdot e^{n\theta(n)} \tag{73}$$

and

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{f''(r)}{2!}(re^{i\theta} - r)^2 + \dots \right) d\theta \sim \sqrt{\frac{\pi}{d_2 \log \theta(n)}} \cdot \theta(n) \tag{74}$$

结合上面的最后两个估计值并化简，即可得到所需结果。 □

6 对数增长的一阶渐近近似。

尽管上述鞍点方程只有在少数情况下才能显式求解，但要确定系数对数的渐近增长，以下较慢的渐近鞍点就足够了。（同样，我们用记号 $F(z)$ 表示 $P(z)$ 或 $Q(z)$。）

命题 6.1。 鞍点方程 $rf'(r) = r\,F'(r)/F(r) - n = 0$ 沿正实轴给出以下弱 渐近鞍点 $r = \exp(-\exp(\alpha(n)))$:

$$\alpha(n) = \begin{cases} -\log\left(\frac{n}{2A}\right)^{1/3} & \text{if } i = 1 \\ -\frac{i-1}{3}\,\mathrm{W}\left(-\frac{3}{i-1}\left(\frac{n}{2A}\right)^{1/(i-1)}\right) & \text{if } i > 1 \\ -\log\left(\frac{n}{B}\right)^{1/2} & \text{if } i = 0 \text{ and } k = 1 \\ -\frac{k-1}{2}\,\mathrm{W}\left(-\frac{2}{k-1}\left(\frac{n}{B}\right)^{1/(k-1)}\right) & \text{if } i = 0 \text{ and } k > 1 \\ -j\ \mathrm{W}\left(-\frac{1}{j}\left(\frac{n}{-(j+1)C}\right)^{1/j}\right) & \text{if } i = 0 \text{ and } k = 0 \text{ and } j \geq 1 \text{ and } F(z) = P(z) \\ \log(-D/n) & \text{if } i = 0 \text{ and } k = 0 \text{ and } j = 1 \text{ and } F(z) = Q(z) \\ -(j-1)\,\mathrm{W}\left(-\frac{1}{j-1}\left(\frac{n}{-jD}\right)^{1/(j-1)}\right) & \text{if } i = 0 \text{ and } k = 0 \text{ and } j > 1 \text{ and } F(z) = Q(z) \end{cases} \tag{75}$$

证明。若 $i \geq 1$，则在 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 两种情形下，鞍点位置相同 s.

$$P(z) \sim \exp\left(\frac{A\log^{i-1}(-\log z)}{(-\log z)^2}\big(1 + o(1)\big)\right). \tag{76}$$

鞍点位于半径“r”处，其中 $r\,P'(z)/P(z) = n$，因此利用 (76) 中的近似可得

$$\frac{P'(z)}{P(z)} \sim \frac{1}{z}\left(\frac{2A\log^{i-1}(-\log z)}{(-\log z)^3} - \frac{(i-1)A\log^{i-2}(-\log z)}{(-\log z)^3}\right). \tag{77}$$

若 $i = 1$，这可简化为 $2A/(-\log r)^3 = n$，因此鞍点位置 r 为:

$$r = \exp\left(-\left(\frac{2A}{n}\right)^{1/3}\right). \tag{78}$$

若 $i > 1$，由于我们只需要 (77) 的一阶解，因此要求解

$$\frac{2A\log^{i-1}(-\log r)}{(-\log r)^3} = n. \tag{79}$$

对 $1/(i-1)$ 两边取幂，得到

$$(2A)^{1/(i-1)}\log(-\log r) = n^{1/(i-1)}(-\log r)^{3/(i-1)}. \tag{80}$$

取对数并解出 $\log\log(-\log r)$，得到:

$$\log\log(-\log r) = \log\left(\frac{n}{2A}\right)^{1/(i-1)} + \frac{3}{i-1}\log(-\log r). \tag{81}$$

我们知道，$\log x = \log b + cx$ 的解为 $x = -(1/c)\,\mathrm{W}(-bc)$。利用 $x = \log(-\log r)$ 以及 $b = \left(\frac{n}{2A}\right)^{1/(i-1)}$ 和 $c = 3/(i-1)$，可得

$$\log(-\log r) = -\frac{i-1}{3}\,\mathrm{W}\left(-\frac{3}{i-1}\left(\frac{n}{2A}\right)^{1/(i-1)}\right). \tag{82}$$

由此立即可得

$$r = \exp\left(-\exp\left(-\frac{i-1}{3}\,\mathrm{W}\left(-\frac{3}{i-1}\left(\frac{n}{2A}\right)^{1/(i-1)}\right)\right)\right). \tag{83}$$

如果 $i=0$ 和 $k\geq 1$，那么在 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 两种情况下，鞍点位置相同。

$$P(z)\sim \exp\left(\frac{B\log^{k-1}(-\log z)}{-\log z}\big(1+o(1)\big)\right). \tag{84}$$

鞍点位于 半径“r”处，且有 $r^{P'(z)\ P(z)}=n$，因此使用（84）中的近似可得

$$\frac{P'(z)}{P(z)}\sim\frac{1}{z}\left(\frac{B\log^{k-1}(-\log z)}{(-\log z)^2}-\frac{(k-1)B\log^{k-2}(-\log z)}{(-\log z)^2}\right). \tag{85}$$

若 $k=1$，则可简化为 $B/$（–对数 r）$^2=n$，因此鞍点 r 的位置为：

$$r=\exp\left(-\left(\frac{B}{n}\right)^{1/2}\right). \tag{86}$$

若 $k>1$，因为我们只需要（85）的一阶解，所以希望求解 e

$$\frac{B\log^{k-1}(-\log r)}{(-\log r)^2}=n. \tag{87}$$

两边同时取 $1/(k-1)$ 的幂，得到

$$(B)^{1/(k-1)}\log(-\log r)=n^{1/(k-1)}(-\log r)^{2/(k-1)}. \tag{88}$$

取对数并求解 log log(–对数 r)，得到：

$$\log\log(-\log r)=\log\left(\frac{n}{B}\right)^{1/(k-1)}+\frac{2}{k-1}\log(-\log r). \tag{89}$$

我们知道，log x =log $b+cx$ 的解为 $x=$ –(1/c) W(–bc)。利用 x =log(–log r) 和 $b=\left(\frac{n}{B}\right)^{1/(k-1)}$ 以及 $c=2/(k-1)$，可得

$$\log(-\log r)=-\left(\frac{k-1}{2}\right)\mathrm{W}\left(-\frac{2}{k-1}\left(\frac{n}{B}\right)^{1/(k-1)}\right). \tag{90}$$

由此立即可得

$$r=\exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{k-1}{2}\right)\mathrm{W}\left(-\frac{2}{k-1}\left(\frac{n}{B}\right)^{1/(k-1)}\right)\right)\right). \tag{91}$$

如果 $i=0$、$j\geq 1$ 和 $k=0$，则

$$P(z)\sim\exp\left(C\log^{j+1}(-\log z)\big(1+o(1)\big)\right), \tag{92}$$

$$Q(z)\sim\exp\left(D\log^{j}(-\log z)\big(1+o(1)\big)\right). \tag{93}$$

鞍点为 lo 位于半径“r”处，且 $r^{P'(z)\,P(z)}=n$，因此使用（92）中的近似可得

$$\frac{P'(z)}{P(z)}\sim\frac{1}{z}\left(-\frac{(j+1)C\log^{j}(-\log z)}{-\log z}\right), \tag{94}$$

$$\frac{Q'(z)}{Q(z)}\sim\frac{1}{z}\left(-\frac{jD\log^{j-1}(-\log z)}{-\log z}\right). \tag{95}$$

在 $j=1$ 的情形下，分析 $Q(z)$ 的鞍点时，我们只需考虑 $\frac{Q'(z)}{Q(z)} \sim \frac{1}{z}\, D_{\log} z$，因此鞍点的位置 r 满足 $D_{\log} r = n$，从而得到 $r = \exp(D/n)$。

如果 $j \geq 1$（或者在 Q 情形下，如果 $j > 1$），由于我们只需要 (94) 和 (95) 的一阶解，因此要解

$$\frac{-(j+1)C\log^j(-\log r)}{-\log r} = n \qquad \text{and} \qquad \frac{-jD\log^{j-1}(-\log r)}{-\log r} = n. \tag{96}$$

对两边分别取 $1/j$ 或 $1/(j-1)$ 次幂，得到

$$(-(j+1)C)^{1/j}\log(-\log r) = n^{1/j}(-\log r)^{1/j}$$

and

$$(-jD)^{1/(j-1)}\log(-\log r) = n^{1/(j-1)}(-\log r)^{1/(j-1)}.$$

取对数并求解 $\log\log(-\log r)$，得到：

$$\log\log(-\log r) = \log\left(\frac{n}{-(j+1)C}\right)^{1/j} + \frac{1}{j}\log(-\log r)$$

and

$$\log\log(-\log r) = \log\left(\frac{n}{-jD}\right)^{1/(j-1)} + \frac{1}{j-1}\log(-\log r).$$

我们知道，$\log x = \log b + cx$ 的解为 $x = -(1/c)\,\mathrm{W}(-bc)$。分别使用 $x = \log(-\log r)$ 和 $b = \left(\frac{n}{-(j+1)C}\right)^{1/j}$，以及分别使用 $b = \left(\frac{n}{-jD}\right)^{1/(j-1)}$ 和 $c = 1/j$ 或 $c = 1/(j-1)$，可得鞍点 r 的位置分别满足：

$$\log(-\log r) = -j\ \mathrm{W}\left(-\frac{1}{j}\left(\frac{n}{-(j+1)C}\right)^{1/j}\right). \tag{97}$$

and

$$\log(-\log r) = -(j-1)\ \mathrm{W}\left(-\frac{1}{j-1}\left(\frac{n}{-jD}\right)^{1/(j-1)}\right). \tag{98}$$

由此立即可得

$$r = \exp\left(-\exp\left(-j\ \mathrm{W}\left(-\frac{1}{j}\left(\frac{n}{-(j+1)C}\right)^{1/j}\right)\right)\right) \tag{99}$$

and

$$r = \exp\left(-\exp\left(-(j-1)\ \mathrm{W}\left(-\frac{1}{j-1}\left(\frac{n}{-jD}\right)^{1/(j-1)}\right)\right)\right) \tag{100}$$

□

6.1 中心近似

我们使用 $f(\quad z) = \log\ F(z)\ - n \log\ z,$ 正如方程（59）下方紧接着的解释所述。我们有 $\quad$ e

$$[z^n]F(z) \sim \frac{1}{2\pi} F(r) r^{-n} \int_{-\pi}^{\pi}_{-\infty}{}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2} f''(r)(re^{i\theta} - r)^2\right) d\theta \tag{101}$$

$$\sim \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{a\big(\alpha(n)\big)}{\exp(2\alpha(n))} + \frac{b\big(\alpha(n)\big)}{\exp(\alpha(n))} + g\big(\alpha(n)\big) + h\big(\exp(\alpha(n))\big)\right) e^{n\exp(\alpha(n))} \sqrt{\frac{-2\pi}{f''(r) r^2}} \tag{102}$$

由命题 6.1 可得

$$n\exp(\alpha(n)) \sim \begin{cases} (2A)^{1/3} n^{2/3} & \text{if } i = 1 \\ n\exp\big(-\frac{i-1}{3}\,\mathrm{W}\big(-\frac{3}{i-1}\big(\frac{n}{2A}\big)^{1/(i-1)}\big)\big) & \text{if } i > 1 \\ (Bn)^{1/2} & \text{if } i = 0,\ k = 1 \\ n\exp\big(-\frac{k-1}{2}\,\mathrm{W}\big(-\frac{2}{k-1}\big(\frac{n}{B}\big)^{1/(k-1)}\big)\big) & \text{if } i = 0,\ k > 1 \\ n\exp\big(-j\ \mathrm{W}\big(-\frac{1}{j}\big(\frac{n}{-(j+1)C}\big)^{1/j}\big)\big) & \text{if } i = 0,\ k = 0,\ j \geq 1,\ F(z) = P(z) \\ -D & \text{if } i = 0,\ k = 0,\ j = 1,\ F(z) = Q(z) \\ n\exp\big(-(j-1)\,\mathrm{W}\big(-\frac{1}{j-1}\big(\frac{n}{-jD}\big)^{1/(j-1)}\big)\big) & \text{if } i = 0,\ k = 0,\ j > 1,\ F(z) = Q(z) \end{cases} \tag{103}$$

由命题 6.1 还可得

$$\log\left(\sqrt{\frac{1}{r^2}}\right) = -\log(r) = \exp(\alpha(n))$$

so

$$\log\left(\sqrt{\frac{1}{r^2}}\right) \sim \begin{cases} (2A)^{1/3} n^{-1/3} & \text{if } i = 1 \\ \exp\big(-\frac{i-1}{3}\,\mathrm{W}\big(-\frac{3}{i-1}\big(\frac{n}{2A}\big)^{1/(i-1)}\big)\big) & \text{if } i > 1 \\ B^{1/2} n^{-1/2} & \text{if } i = 0,\ k = 1 \\ \exp\big(-\frac{k-1}{2}\,\mathrm{W}\big(-\frac{2}{k-1}\big(\frac{n}{B}\big)^{1/(k-1)}\big)\big) & \text{if } i = 0,\ k > 1 \\ \exp\big(-j\ \mathrm{W}\big(-\frac{1}{j}\big(\frac{n}{-(j+1)C}\big)^{1/j}\big)\big) & \text{if } i = 0,\ k = 0,\ j \geq 1,\ F(z) = P(z) \\ -D/n & \text{if } i = 0,\ k = 0,\ j = 1,\ F(z) = Q(z) \\ \exp\big(-(j-1)\,\mathrm{W}\big(-\frac{1}{j-1}\big(\frac{n}{-jD}\big)^{1/(j-1)}\big)\big) & \text{if } i = 0,\ k = 0,\ j > 1,\ F(z) = Q(z) \end{cases} \tag{104}$$

我们还利用命题 6.1 来计算

$$\frac{a\big(\alpha(n)\big)}{\exp(2\alpha(n))} \sim \begin{cases} (\frac{1}{2})(2A)^{1/3}n^{2/3} & \text{if } i=1 \\ A\big(-\frac{i-1}{3}\,\mathrm{W}\big(-\frac{3}{i-1}\big(\frac{n}{2A}\big)^{1/(i-1)}\big)\big)^{i-1}\exp\big(2\big(\frac{i-1}{3}\big)\,\mathrm{W}\big(-\frac{3}{i-1}\big(\frac{n}{2A}\big)^{1/(i-1)}\big)\big) & \text{if } i>1 \end{cases} \tag{105}$$

$$\frac{b\big(\alpha(n)\big)}{\exp(\alpha(n))} \sim \begin{cases} (Bn)^{1/2} & \text{if } i=0,\ k=1 \\ B\big(-\frac{k-1}{2}\,\mathrm{W}\big(-\frac{2}{k-1}\big(\frac{n}{B}\big)^{1/(k-1)}\big)\big)^{k-1}\exp\big(\frac{k-1}{2}\,\mathrm{W}\big(-\frac{2}{k-1}\big(\frac{n}{B}\big)^{1/(k-1)}\big)\big) & \text{if } i=0,\ k>1 \end{cases} \tag{106}$$

$$g\big(\alpha(n)\big) \sim \begin{cases} C\big(-j\ \mathrm{W}\big(-\frac{1}{j}\big(\frac{n}{-(j+1)C}\big)^{1/j}\big)\big)^{j+1} & \text{if } i=0,k=0,j\geq 1,\ F(z)=P(z) \\ D\log(-D/n) & \text{if } i=0,k=0,j=1,\ F(z)=P(z) \\ D\big(-(j-1)\,\mathrm{W}\big(-\frac{1}{j-1}\big(\frac{n}{-jD}\big)^{1/(j-1)}\big)\big)^{j} & \text{if } i=0,k=0,j>1,\ F(z)=P(z) \end{cases} \tag{107}$$

最后，我们使用 $f(z) = \log\big(F(z)\big) - n\log(z)$ 计算 f''。

命题 6.2. 由(59)，对于 $i>1$，我们有 $f''(r) = 6A\alpha(n)^{i-1}e^{-4\alpha(n)} + \Theta(\alpha(n)^{i-2}e^{-4\alpha(n)})$；或者在 $i=1$ 的情况下，我们有相同的一阶近似，但误差项略有不同，即 $f''(r) = 6Ae^{-4\alpha(n)} + \Theta(e^{-3\alpha(n)})$。

对于 $i=0$ 和 $k>1$，我们有 $f''(r) = -2B\alpha(n)^{k-1}e^{-3\alpha(n)} + \Theta(\alpha(n)^{k-2}e^{-3\alpha(n)})$；或者，类似地，在 $k=1$ 情况下，我们有 $f''(r) = -2Be^{-3\alpha(n)} + \Theta(e^{-2\alpha(n)})$。

对于 $i=0$和 $k=0$以及 $j\geq 1$，在 $P(z)$的情况下，我们有 $f''(r) = -(j+1)C\alpha(n)^j e^{-2\alpha(n)} + \Theta(\alpha(n)^{j-1}e^{-2\alpha(n)})$。

对于 $i=0$ 和 $k=0$ 以及 $j>1$，在 $Q(z)$ 的情况下，我们有 $f''(r) = -jD\alpha(n)^{j-1}e^{-2\alpha(n)} + \Theta(\alpha(n)^{j-2}e^{-2\alpha(n)})$；或者，非常类似地，在 $j=1$ 的情况下，我们有 $f''(r) = -D\,e^{-2\alpha(n)} + \Theta(e^{-\alpha(n)})$。

由此可得

$$\log\Big(\sqrt{\frac{1}{f''(r)}}\Big) \sim \begin{cases} 2\alpha(n) & \text{if } i\geq 1 \\ \frac{3}{2}\alpha(n) & \text{if } i=0,\ k\geq 1 \\ \alpha(n) & \text{if } i=0,\ k=0,\ j\geq 1,\ F(z)=P(z) \\ \alpha(n) & \text{if } i=0,\ k=0,\ j\geq 1,\ F(z)=Q(z) \end{cases} \tag{108}$$

定理 6.3。令 $F(z)$ 表示 $P(z)$ 或 $Q(z)$。我们有

$$\log[z^n]F(z) \sim \begin{cases} (3/2)(-3)^{-(i-1)/3}(2A)^{1/3}(\ln n)^{(i-1)/3}n^{2/3} & \textit{if } i\geq 1 \\ (2)(-2)^{-(k-1)/2}B^{1/2}(\ln n)^{(k-1)/2}n^{1/2} & \textit{if } i=0,\ k\geq 1 \\ (-1)^{j+1}(C)(\ln n)^{j+1} & \textit{if } i=0,\ k=0,\ j\geq 1,\ F(z)=P(z) \\ (-1)^{j}(D)(\ln n)^{j} & \textit{if } i=0,\ k=0,\ j\geq 1,\ F(z)=Q(z) \end{cases} \tag{109}$$

其中，按照 (55) 中的定义，有

$$A = \begin{cases} \frac{(-1)^{i-1}\zeta(3)^{j+1}\pi^{2k}}{6^k(i-1)!} & \textit{in the } F(z)=P(z) \textit{ case} \\ \frac{(3)(-1)^{i-1}\zeta(3)^{j+1}\pi^{2k}}{(4)(6^k)(i-1)!} & \textit{in the } F(z)=Q(z) \textit{ case} \end{cases} \tag{110}$$

并且，按照 (56) 中的定义，有

$$B = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+k-1}\pi^{2(j+1)}}{6^{j+1}2^{i}(k-1)!} & in\ the\ F(z) = P(z)\ case \\ \frac{(-1)^{i+k-1}\pi^{2(j+1)}}{6^{j+1}2^{i+1}(k-1)!} & in\ the\ F(z) = Q(z)\ case \end{cases} \tag{111}$$

最后，分别根据(57) 和(58) ，我们得到

$$C = \frac{(-1)^{i+j+k+1}}{2^k(j+1)!\,12^i} \quad in\ the\ F(z) = P(z)\ case,\ and\ D = \ln(2)\frac{(-1)^{i+j+k}}{2^k j!\,12^i} \quad in\ the\ F(z) = Q(z)\ case \tag{112}$$

证明。我们采用方程（102）中的框架。汇总（103）和（105）中的贡献，并注意到（104）和（108）对系数对数的一阶渐近没有贡献，将这些贡献合并并代入（102），取对数后，我们得到以下一阶近似：

$$\log[z^n]F(z) \sim \begin{cases} (\frac{3}{2})(2A)^{1/3}n^{2/3} & \text{if } i = 1 \\ n\exp\big(-\frac{i-1}{3}\,\mathrm{W}\big(-\frac{3}{i-1}\big(\frac{n}{2A}\big)^{1/(i-1)}\big)\big) & \\ \quad + A\big(-\frac{i-1}{3}\,\mathrm{W}\big(-\frac{3}{i-1}\big(\frac{n}{2A}\big)^{1/(i-1)}\big)\big)^{i-1} & \\ \quad\quad \times \exp\big(2\big(\frac{i-1}{3}\big)\,\mathrm{W}\big(-\frac{3}{i-1}\big(\frac{n}{2A}\big)^{1/(i-1)}\big)\big) & \text{if } i > 1 \\ 2(Bn)^{1/2} & \text{if } i = 0,\ k = 1 \\ n\exp\big(-\frac{k-1}{2}\,\mathrm{W}\big(-\frac{2}{k-1}\big(\frac{n}{B}\big)^{1/(k-1)}\big)\big) & \\ \quad + B\big(-\frac{k-1}{2}\,\mathrm{W}\big(-\frac{2}{k-1}\big(\frac{n}{B}\big)^{1/(k-1)}\big)\big)^{k-1} & \\ \quad\quad \times \exp\big(\frac{k-1}{2}\,\mathrm{W}\big(-\frac{2}{k-1}\big(\frac{n}{B}\big)^{1/(k-1)}\big)\big) & \text{if } i = 0,\ k > 1 \\ n\exp\big(-j\ \mathrm{W}\big(-\frac{1}{j}\big(\frac{n}{-(j+1)C}\big)^{1/j}\big)\big) & \\ \quad + C\big(-j\ \mathrm{W}\big(-\frac{1}{j}\big(\frac{n}{-(j+1)C}\big)^{1/j}\big)\big)^{j+1} & \text{if } i = 0,\ k = 0,\ j \geq 1,\ F(z) = P(z) \\ -D + D\log(-D/n) & \text{if } i = 0,\ k = 0,\ j = 1,\ F(z) = Q(z) \\ n\exp\big(-(j-1)\,\mathrm{W}\big(-\frac{1}{j-1}\big(\frac{n}{-jD}\big)^{1/(j-1)}\big)\big) & \\ \quad + D\big(-(j-1)\,\mathrm{W}\big(-\frac{1}{j-1}\big(\frac{n}{-jD}\big)^{1/(j-1)}\big)\big)^{j} & \text{if } i = 0,\ k = 0,\ j > 1,\ F(z) = Q(z) \end{cases} \tag{113}$$

现在我们用 W(z) = ln(z) − ln ln(z) + o(1) 来简化所有结果。 $i > 1$ 的情形简化为 (3/2)(−3)$^{-(i-1)/3}$(2A)$^{1/3}$(ln n)$^{(i-1)/3}n^{2/3}$，这与情形 $i = 1$ 一致。 $i = 0, k > 1$ 的情形简化为 (2)(−2)$^{-(k-1)/2}B^{1/2}$(ln n) $^{(k-1)/2}n^{1/2}$，这与情形 $i = 0, k = 1$ 一致。 $i = 0, k = 0, j \geq 1$的情形中， $F(z) = P(z)$，简化为 (−1)$^{j+1}$(j + 1)(C)(ln n)^j +(−1)$^{j+1}$(C)(ln n)$^{j+1}$，继而简化为 (−1)$^{j+1}$(C)(ln n)$^{j+1}$。 $i = 0, k = 0, j > 1$ 的情形中， $F(z) = Q(z)$，简化为 (−1)^j(j)(D)(ln n)$^{j-1}$ + (−1)^j(D)(ln n)^j，进一步简化为 (−1)^j(D)(l n n)^j，这与情形 $i = 0, k = 0, j = 1$ 一致，其中 $F(z) = Q(z)$。由这些简化结果可得定理 6.3。

□

致谢

R. G´omez 获 DGAPA-PAPIIT IN107718 和 IN110221 项目资助。

M.D. Ward 的研究得到美国国家科学基金会（NSF）资助项目 0939370、1246818、2005632、2123321、2118329 和 2235473，食品与农业研究基金会（FFAR）资助项目 534662，以及美国国家食品与农业研究所（NIFA）资助项目

2019-67032-29077、2020-70003-32299、2021-38420-34943 和 2022-67021-37022，精算师协会资助项目 19111857，以及康明斯公司、byGro Master、莉莉基金会和桑迪亚国家实验室的支持。

参考文献

[1] 安德鲁斯，G. E.《分拆理论》。剑桥大学出版社（1984）。[2] 安德鲁斯，G. E. 分拆 n 中最小部件的数量。《J. reine angew. Math.》624（2008）133–142。[3] 安德鲁斯，G. E.、Chan，S. 和 Kim，B. 秩与曲柄的奇数阶矩。《J. of Comb. Theory (A)》120（2013），77–91。[4] Bell，J. P. 和 Burris，S. N. 分拆恒等式 II：Bateman 和 Erd¨ős 的结果。《数论杂志》117（2006）160–190。[5] Blomer，V. 高阶除数问题。《Math. Z.》（2018）290：937–952。[6] Bodini，O.、Fusy，´E. 和 Pivoteau，C. 平面分拆的随机抽样。《Combinatorics, Probability and Computing》（2019）19，201–226。[7] 布里格姆，N. A. 分拆函数的一般渐近公式。《Proc. Amer. Math. Soc.》1（1950）182–191。[8] Bringmann，K. 和 Mahlburg，K. Hardy-Ramanujan 圆法的扩展及其在无短序列分拆中的应用。《Amer. J. Math.》133（2011），1151–1178。[9] Bringmann，K. 和 Mahlburg，K. 堆叠与单峰序列的渐近公式。《J. Combin. Theory Ser. A》126（2014）194–215。[10] Bringmann，K. 和 Mahlburg，K. 正曲柄矩和秩矩的渐近不等式。《Trans. Amer. Math. Soc.》366（2014）第2期，1073–1094。[11] Canfield，R.、Corteel，S. 和 Hitczenko，P. 具有非负 r阶差分的随机分拆。《应用数学进展》27（2001）298–317。[12] Chern，S. 无限奇偶交替分拆。《Questiones Mathematicae》2019，42(10)：1345–1352。[13] de Salvo，S. 和 Pak，I. 通过双射研究极限形状。《Combinatorics, Probability and Computing》（2019）28，187–240。[14] Drappeau，S. 和 Topacogullari，B. 组合恒等式与积性函数的 Titchmarsh 除数问题。《Algebra Number Theory》13（2019）第10期，2383–2425。[15] 欧拉，L.《无穷分析导论》。Marcum-Michaelem Bousquet，洛桑1 （1748）253–275。译者：J. D. Blanton，J. D.《无穷分析导论》，第1册，施普林格（1988）。[16] Flajolet，P. 伯努利和的奇点分析与渐近分析。《Theoretical Computer Science》215（1999）371–381。

[17] Flajolet，P. 和 Sedgewick，R.《解析组合学》。剑桥大学出版社（2009）。[18] Granovsky，B. L.、Stark，D. 和 Erlihson，M. 加权分拆的迈纳杜斯定理：推广及概率证明。《应用数学进展》41（2008）307–328。[19] Goh，W. M. Y. 和 Hitczenko，P. 具有受限部件大小的随机分拆。《随机结构与算法》（2007）440–462。[20] Han，G. N. 和 Xiong，H. 关于渐近公式的若干有用定理及其在斜平面分拆和柱面分拆中的应用。《应用数学进展》96（2018）18–38。[21] 哈代，G. H. 和拉马努金，S. 各类整数分布的渐近公式。《Proc. London Math. Soc.》**16**（1917）第2辑，112–132。[22] 哈代，G. H. 和拉马努金，S. 组合分析中的渐近公式。《Proc. London Math. Soc.》**17**（1918）第2辑，75–115。[23] Holroyd，A. E.、Liggett，T. M. 和 Romik，D. 积分、分拆与元胞自动机。《Trans. Amer. Math. Soc.》356（2003）第8期，3349–3368。s[24] Jo，S. 和 Kim，B. 关于涉及部分 theta 函数的某些 1-级数的渐近公式。《Proc. Amer. Math. Soc.》第143卷第8期（2015）3253–3263。[25] Kane，D. M. 分拆函数渐近性质的初等推导。《Ramanujan J.》11（2006）49–66。[26] Kane，D. M. 和 Rhoades，R. C. Andrews 猜想的证明：关于无短序列分拆。《Forum of Mathematics, Sigma》（2019），第7卷，e17，35页。[27] Kim，B.、Kim，E. 和 Lovejoy，J. 分拆中的奇偶偏差。《European Journal of Combinatorics》89（2020）103159。[28] Kim，B.、Kim，E. 和 Lovejoy，J. 关于与拉马努金遗失的笔记本中的某些 q-级数相关的加权过分拆。《Int. J. Number Theory》17（2021）第3期，603–619。[29] Kotˇeˇsovec，V. 一种基于生成函数卷积求 q-级数渐近性质的方法。arXiv:1509.08708[30] Lester，S. 关于短区间内因数函数之和的方差。《Proc. Amer. Math. Soc.》144（2016）第12期，5015–5027。[31] Madritsch，M. 和 Wagner，S. 整数分拆的中心极限定理。《Monatsh Math.》（2010）161：85–114。[32] Meinardus，G. 关于分拆的渐近论述。¨uber Partitionen。《Math. Z.》59（1954）388–398。[33] Mutafchiev，L. 平面分拆统计量期望的渐近分析。《Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.》（2018）88：255–272。[34] Nguyen，D. T. 算术级数中的广义约数函数：I。《数论杂志》227（2021）30–93。[35] Rolen，L. 关于分拆的 t-核塔与 t-缺陷。《Ann. Comb.》21（2017）119–130。[36] Sloane。《在线整数数列百科全书》。

[37] Szpankowski, W.《序列上算法的平均情形分析》。Wiley-Interscience 离散数学与优化丛书（2001）。[38] Wright, E. M.《渐近分拆公式》。I. 平面分拆。《牛津大学数学季刊》（第2辑）（1931），2，177–189。[39] Wright, E. M.《渐近分拆公式》。II. 加权分拆。《伦敦数学学会会刊》（第2辑）36（1934），117–141。[40] Wright, E. M.《渐近分拆公式》。III. 分拆成 k 次幂。《数学学报》63（1934），第1期，143–191。[41] Yang, Y.《素数分拆》。《美国数学学会汇刊》352（2000）第6期，2581–2600。[42] Yang, Y.《分拆函数的反问题》。《加拿大数学杂志》第**53** 卷（第4期），2001年，第866–896页。