arXiv:2303.02249v1 [math.DS] 3 Mar 2023

高维连分数的偶然分解

ANTON LUKYANENKO 和 JOSEPH VANDEHEY

摘要。我们证明了一系列动力学结果，包括对一族连分数系统中变换的精确性和不变测度的分段解析性；该系统涵盖实数、复数、四元数、八元数以及 $\mathbb{R}^3$ 上的具体示例。我们的方法拓展了 Nakada 和 Hensley 的工作，尤其弥补了 Hensley 对 Hurwitz复连分数分析中的一些空缺。我们进一步为连分数算法引入一种新的“偶然性”条件，该条件控制连分数映射迭代下基本域边界的长期行为，并且在合理条件下等价于有限范围性质。我们还表明，有限值域条件极其微妙：用非二次无理数对偶然系统进行扰动后，所得系统不再具有偶然性；实验性证据表明，即使是某些有理扰动，也可能导致偶然性失效。

1. 引言

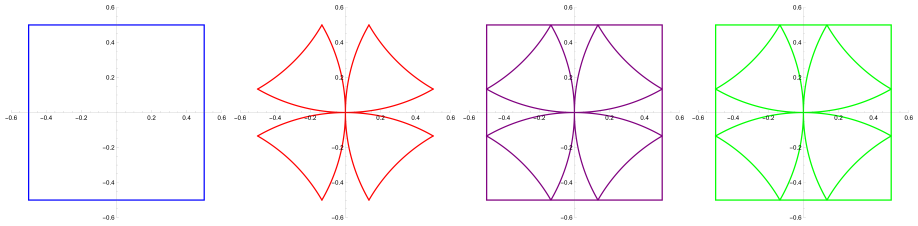
无理实数的正规连分数（CF）展开 $x_0 \in [0,1)$，

$$x_0 = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}, \quad a_i \in \mathbb{N},$$

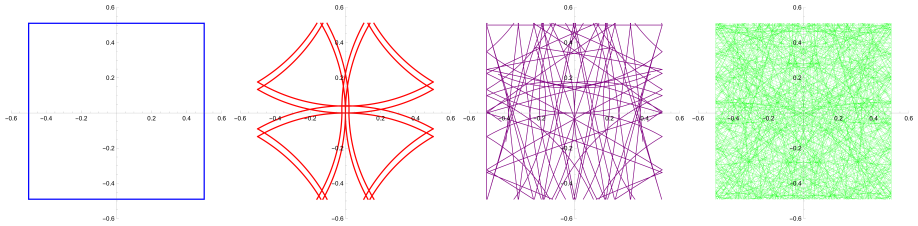
表示为由整数 a对应的一系列交替反演 $\iota(x) = 1/x$ 和平移 $x \mapsto a+x$。CF 映射 $T\colon [0,1) \to [0,1)$ 定义为 $Tx = 1/x - \lfloor 1/x \rfloor$，其作用相当于对数字序列进行向前平移。映射 T通常称为高斯映射，具有许多重要的动力学性质。特别地，T 是精确的[1]（因而是遍历的），并满足 Kuzmin 型定理：非奇异概率分布以指数速率收敛到密度$\frac{1}{\log 2}\frac{1}{1+x}$的不变测度。有关更一般的信息，请参见 [8, 10, 12, 15]。

本文对多种岩泽连分数 [20] in$\mathbb{R}^d$ 进行了统一分析，其中包括某些复数、四元数和八元数连分数，以及一些更为特殊的系统，例如数字取自 $\mathbb{Z}^3$、并具有反演 $\iota(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2+y^2+z^2}$ 的三维连分数。特别地，我们的主定理 1.4 推出：

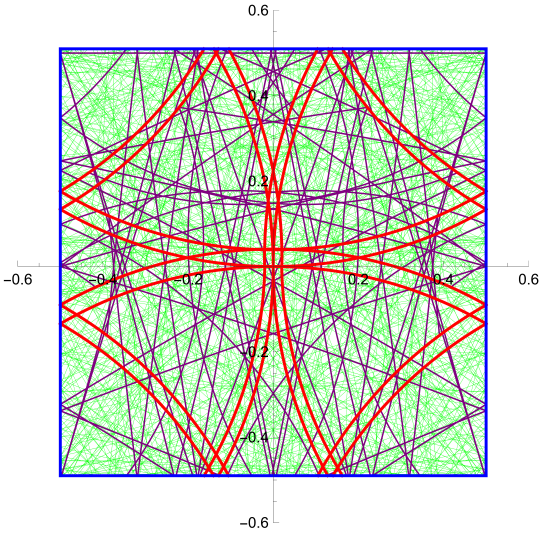
2020 数学主题分类。 11K50, 37A44, (11R52)。关键词和短语。 连分数、不变测度、复连分数、四元数、八元数、岩泽连分数。[1]除非另有说明，所有动力学陈述均相对于勒贝格测度而言。



(a) Hurwitz 复连分数，其中 $K = [-0.5, 0.5) \times [-0.5, 0.5)$。



(b) 一种受扰动的 Hurwitz 连分数，其中 $K = [-0.5, 0.5) \times [-0.49, 0.51)$。



(c) 受扰动的 Hurwitz 连分数的合成图像。

图 1. 与 $\mathbb{Z}[i]$ 和$\iota(z) = 1/z$ 相关联的 Hurwitz 连分数具有偶然分解。序列 (a) 从左到右展示了 $T^i \partial K$，其中 $i = 0$，……，3。即使对算法进行细微扰动，例如将 K 上移 $0.01\mathbb{i}$，似乎也会破坏这种分解（b、c）。

定理 1.1. 与四元数中的 *Hurwitz* 整数相关联的连分数系统（见 *§1.2* 中的例 7）是精确的，具有连分数混合性，满足 *Kuzmin* 型定理，并且存在唯一一个与勒贝格测度等价的不变测度，其密度有界且分段解析，仅含有限个部分。

我们的主要工具是对柱集的分析；在全柱条件下（正规连分数满足该条件），通常会采用这种分析，如 [2] 或有限范围

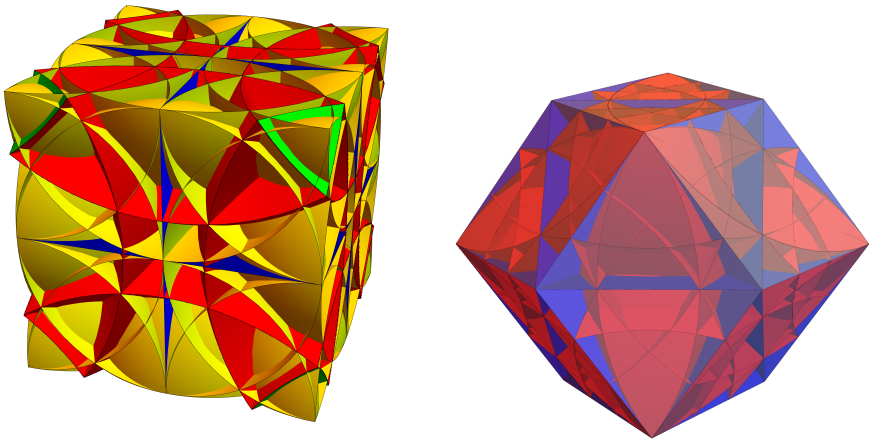
条件（最近整数连分数和 A. Hurwitz 复连分数满足该条件），如[12, 23]所述。若 T 是集合 K上的连分数映射，则（秩为 n的）柱集 $C_{a_1a_2\ldots a_n} \subset K$是 K中所有展开以数字 a_1、a_2、……、a_n开头的数所组成的集合。如果 $T^nC_{a_1\ldots a_n} = K$，则称柱集为满的；而有限范围条件则假定 $T^nC_{a_1\ldots a_n}$ 可能取值的情形只有有限种。

我们将把有限范围条件重新表述为一个等价的条件（在我们的设定下，见引理 3.6），并将其称为偶然性。具体而言，如果岩泽连分数系统在映射 T 作用下，基本域 K 的边界的像 $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^k\partial K$ 经过有限次迭代后趋于稳定，即对某个 n 有 $E = \bigcup_{k=0}^{n} T^k\partial K$，并且 $K \setminus E$具有有限个连通分支（从而给出K的偶然分解），那么我们称该岩泽连分数系统是偶然的。在一维情形中，偶然性条件归结为 [16]的有限性条件。

图 1a 展示了 $\mathbb{R}^2$ 中正方晶格的偶然性（对应于 A. Hurwitz 复连分数），其中 $K \setminus E$ 有 12 个连通分支；因此，任何形如 $T^nC_{a_1\ldots a_n}$ 的集合，除去 E 中的一个零测集外，都是其中若干连通分支的并。图 2 展示了 $\mathbb{R}^3$ 中立方晶格以及 $\mathbb{R}^3$ 中菱形十二面体晶格的偶然性。第 1.2 节讨论了符合定理 1.4 假设（包括偶然性假设）的其他例子。

利用偶然性，我们可以证明有限值域性质是不稳定的条件。对于 α-连分数（即空间 $\mathbb{R}$ 、数字为 $\mathbb{Z}$、基本域为 $K = (-\alpha,\ 1-\alpha]$，例如带有反演 $-1/x$ 的情形，见引理 3.7）而言，偶然性意味着边界点 α 和 $1-\alpha$ 在 α-连分数映射 T 下具有有限轨道。由此可知，α 是某个二次方程的根（有理或无理）。在高维中，将 α-连分数嵌入为一个子系统，可得到一些否定性结果。尤其是，上述实数 α-连分数是经有理扰动的 A. Hurwitz 连分数的一个子系统，位于虚轴上（其空间为 $\mathbb{R}^2$、数字为 $\mathbb{Z}^2$、基本域为 $(-.5,\ .5] \times (-\alpha,\ 1-\alpha]$，以及 $\iota(x,\ y) = (x,\ -y)/(x^2+y^2)$）。当 α 不是二次无理数时，很容易得出结论（推论 3.9）：所得系统并不具有偶然性。然而，即便 α 是二次无理数，在高维中若无进一步假设，也不能据此推出偶然性；实验性证据（图 1b）表明，即使是有理扰动，偶然性也可能不成立。同样，在海森堡群这一非欧几里得情形中，找到具有偶然性的系统，或证明这类系统不存在，仍是一个悬而未决的问题。

我们将结合两种方法证明定理 1.4，这两种方法都依赖于对柱集以及逆分支 T_a^{-1} of T 的雅可比行列式 ω_a 的理解。第一种方法依赖于 Nakada [23], Nakada、Natsui [25], 和 Schweiger [31], 的黑箱定理，而这些定理最终依赖于对柱集相互作用的直接测度论分析。这为我们提供了精确性、CF-混合、Kuzmin 型定理，以及分段$Lipschitz$ 不变测度。为了得到不变测度的分段解析性，我们转而采用 Hensley [12], 的论证，该论证基于 Bandtlow–Jenkinson [2], 的工作，而其最终依赖于紧正算子理论 [18]。这里的关键思想是，在一个受限的巴拿赫函数空间上证明转移算子的紧致性；该空间中的函数以适当的意义延拓为复化



(a) 立方体。 (b) 菱形十二面体。

图 2。立方体和菱形十二面体的偶然分解。1至5型曲面依次为：省略（因为它们是立体的壁面）、蓝色、红色、绿色和黄色。

偶然分解中各个部分的邻域上的全纯映射。这种紧致性最终源于这样一个事实： T 是一致扩张映射。

1.1. 一般假设与结果。 我们的一般假设如下，并采用岩泽连分数 [20], 的框架。对于环境空间 X，我们将取 $\mathbb{R}^d$，其中 $d \geq 1$；这包括将复数$\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{R}^2$、将四元数 $\mathbb{H}$ 视为 $\mathbb{R}^4$，以及将八元数 $\mathbb{O}$ 视为 $\mathbb{R}^8$ 的情形。对于反演 ι，我们将使用满足以下条件的函数 $\iota\colon X \setminus \{0\} \to X \setminus \{0\}$

$$|\iota x| = \frac{1}{|x|} \qquad d(\iota x, \iota y) = \frac{d(x,y)}{|x||y|}, \tag{1.1}$$

其中 $|\cdot|$ 是通常的欧几里得范数，而 $d(\cdot,\cdot)$ 是通常的欧几里得距离。此类反演包括各除代数中的映射 $z \mapsto 1/z$，以及 $\mathbb{R}^d$ 中任意 d对应的映射 $x \mapsto x/|x|^2$。反演恰好是具有形式 $\iota(x) = \mathcal{O}(x)/|x|^2$ 的映射，其中某个映射 $\mathcal{O}$ 是正交映射（见 [20]中的引理 2.14）。为方便记号，我们假设本文中使用的所有反演的阶均为2，但这并非结果成立的必要条件。对于格 $\mathcal{Z}$，我们取 X 中任意具有紧商空间的离散加法子群。最后，对于连分数区域 K，我们取狄利克雷区域

$$K = \{x \in X \ : \ d(x,0) \leq d(x,z) \text{ for all } z \in \mathcal{Z}\}$$

我们的格 $\mathcal{Z}$，以及某种边界选择，使得对于任意 $x \in X$，都存在唯一的 $\mathcal{Z}$ 中的元素，记作 $[x]$，满足 $x - [x] \in K$。在下文的所有结果中，我们将上述内容称为本文的一般假设。

注 1.2. 更广泛地说，岩泽连分数框架使我们能够考虑非欧几里得空间 X、格 $\mathcal{Z} \subset \mathrm{Isom}(X)$，以及任意一个基本域

$\mathcal{Z}$。不过，我们不会采用这种完全一般的设定，因为在非欧几里得情形中尚未发现有限程系统。

由数据 $(X,\ \iota,\ \mathcal{Z},\ K)$，我们可以生成连分数映射 $T\colon\ K \to K$通过

$$Tx = \begin{cases} \iota x - [\iota x], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

我们可以通过 $a_i = a_i(x) = [\iota T^{i-1}x]$ provided$T^{i-1}x \neq 0$生成 x 的连分数位。在非常一般的条件下（例如下文列出的范数欧几里得假设），这些数

$$\iota(a_1 + \iota(a_2 + \iota(a_3 + \ldots \iota(a_n)\ldots)))$$

将收敛到 x （见 [20]）。 $a \in \mathcal{Z}$ 的柱集 C_a 由 $C_a = K \cap \iota(K + a)$ 给出。如果令 $T_a(x) = \iota(x) - a$ 表示将 T限制到 C_a上的单射限制，那么我们可以定义 $C_{a_1a_2\ldots a_n}$ 为

$$C_{a_1a_2\ldots a_n} = T_{a_1}^{-1}T_{a_2}^{-1}\ldots T_{a_n}^{-1}K.$$

注意， $C_{a_1a_2\ldots a_n} = \emptyset$ 是可能的。

在本文中，我们将关注满足以下性质的格 $\mathcal{Z}$：

定义 1.3. 我们称格 $\mathcal{Z}$ 为：

- 整，若 $z \cdot z \in \mathbb{Z}$ 对所有 $z \in \mathcal{Z}$均成立。在本文中，计算任何点积时，我们始终将 $\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{R}^2$，将 $\mathbb{H}$ 视为 $\mathbb{R}^4$，并将 $\mathbb{O}$ 视为 $\mathbb{R}^8$。
- 由单位生成，若每个 $z \in \mathcal{Z}$ 都能写成范数为 1 的格点（格的单位元）之和。
- 关于 良好可逆，若对所有非零 $z \in \mathcal{Z}$， $|z|^2\iota(z) \in \mathcal{Z}$，等价地， $\mathcal{O}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$。
- 范数欧几里得 （且 K 是 真的），若 $\mathrm{rad}(K) < 1$，其中 $\mathrm{rad}(K) = \sup\{|x| : x \in K\}$。
- 3-远，若对于任意范数为 $\sqrt{3}$的 $z \in \mathcal{Z}$，$\bar{}$都有 $d(z, K) \geq 1$，其中$d(z, K) := \inf_{x\in K} d(z, x)$。
- 7-远 如果对于任意范数为 $\sqrt{7}$ 的 $z \in \mathcal{Z}$，$\bar{}$我们有 $d(z/2,\ K) \geq 1/2$

对于反演 $\iota(x) = x/|x|^2$，任意格 $\mathcal{Z}$ 都是良好可逆的，因此这一条件并不苛刻。3-远离性和 7-远性这两个条件是本文新提出的，它们源自对柱集以及 ∂K 在 T 作用下的像的分析。

我们的主要结果如下。

定理 1.4。设 X 是 $\mathbb{R}^d$、 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{H}$ 或 $\mathbb{O}$，其格 $\mathcal{Z}$ 是整的、由单位生成的、范数欧几里得的，并且相对于反演 ι 良好可逆，且满足 3-远或 7-远。设 K 是 $\mathcal{Z}$ 的狄利克雷区域。那么：

(1) 由 $(X, \mathcal{Z}, \iota, K)$ 给出的岩泽连分数具有有限值域性质；也就是说，存在有限个集合 U_1, $\ldots, U_J \subset K$，使得任意非空柱集 $C_{a_1a_2\ldots a_n}$ 都满足 $T^nC_{a_1a_2\ldots a_n} = U_j$ (模 0)，其中某个 $1 \leq j \leq J$，

(2) 连分数映射 T 是一个精确端同态，并且相对于一个 T-不变测度 μ 具有连分数混合性质，该测度等价于勒贝格测度 λ；*(3)* 密度 $d\mu/d\lambda$ 在由集合 U_1, . . ., U_J 生成的划分的各部分上是分段解析的；*(4)* T 满足 *Kuzmin* 型定理（见(2.2)）。

该定理的大部分内容将直接由四个黑箱定理——定理 2.1–2.4——推出。要应用这些定理，必须满足八个条件，这些条件将在引理 4.1、4.3、4.5、4.8、4.11、4.10、4.13 和 4.4 中予以处理。不变测度的分段解析性需要单独论证，相关论证见定理 5.1。

1.2. **例子**。 定理 1.4 涵盖了若干经典情形以及若干新的情形。特别地，以下所有情形都满足该定理的条件（(9) 除外；(9) 需要采用第 4.4 节中给出的稍微更为谨慎的论证）：

(1) 格 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{R}$上，其中 $\iota(x) = 1/x$ 或 $\iota(x) = -1/x$。这两个系统都称为最近整数连分数 [29]；带有反演 $x \mapsto |1/x|$ 的 CF 也属于此类，但我们的结果不涵盖该情形。(2) 格 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[\mathbb{i}]$ 在 $\mathbb{C}$上。与 $\iota(z) = 1/z$一起，这生成了 A. Hurwitz 连分数 [14]。

对于下文中的所有除代数，我们将继续使用映射 $\iota(z) = 1/z$；也可能采用其他选择，例如 $\iota(z) = 1/z$ 或 $\iota(z) = -1/\bar{z}$。对于这些在 $\mathbb{R}$上的空间，我们也将使用通常的基，即对于 $\mathbb{C}$使用 $\{1,\mathbb{i}\}$，对于 $\mathbb{H}$使用 $\{1,\mathbb{i},\ \mathbb{j},\ \mathbb{k}\}$，以及对于 $\mathbb{O}$使用 $\{1, e_1, \ldots, e_7\}$，其中 $\mathbb{i}^2 = \mathbb{j}^2 = \mathbb{k}^2 = e_1^2 = \ldots = e_7^2 = -1$。有关四元数和八元数的更多信息，请参见 [6]。

（3） $\mathbb{C}$上的格 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{3}\mathbb{i}}{2}]$。尽管相关的连分数算法尚未被命名，但它也出现在 Hurwitz 的工作中[14]。（4）格 $\mathcal{Z} = \mathcal{H}$，即 $\mathbb{H}$上的 Hurwitz 整数 [22], ，其中

$$\mathcal{H} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\mathbb{i} \oplus \mathbb{Z}\mathbb{j} \oplus \mathbb{Z}\frac{1 + \mathbb{i} + \mathbb{j} + \mathbb{k}}{2}$$

(5) 格

$$\mathcal{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\mathbb{i} \oplus \mathbb{Z}\frac{1 + \sqrt{3}\mathbb{j}}{2} \oplus \mathbb{Z}\frac{\mathbb{i} + \sqrt{3}\mathbb{k}}{2},$$

高斯整数，位于 $\mathbb{H}$ （参见 [34]）。

(6) 格

$$\mathcal{Z} = \mathcal{C} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3 \\ \oplus \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}e_1h \oplus \mathbb{Z}e_2h \oplus \mathbb{Z}e_3h,$$

满足 $h = (e_1 + e_2 + e_3 - e_4)/2$，位于 $\mathbb{O}$。《整数》 $\mathcal{C}$ 称为凯莱整数，我们给出 Rehm [27]所提供的生成元。

接下来的三个例子中，我们将采用一种略显特殊的设定 $\mathbb{R}^3$（参见岩泽连分数 [20]），其中反演定义为 $\iota(x,\ y,\ z) =$

$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x,\ y,\ z)$。它的变体，例如 $\iota(x,\ y,\ z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(-x,\ y,\ z)$，也可能符合我们的条件。有关这些格的更多信息，请参见 [7] 。

（7）格

$$\mathcal{Z}=\mathbb{Z}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\oplus\mathbb{Z}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\oplus\mathbb{Z}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

在 $\mathbb{R}^3$上。该格的狄利克雷区域构成菱形十二面体蜂窝，见图 2。

（8）格

$$\mathcal{Z}=\mathbb{Z}\,(1,0,0)\oplus\mathbb{Z}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\oplus\mathbb{Z}\,(0,0,1)$$

在 $\mathbb{R}^3$ 上。该格的狄利克雷区域构成六角棱柱蜂窝。

（9）格 $\mathbb{Z}^3$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上。该格的狄利克雷区域构成常见的立方蜂窝。

不难验证，上述所有格都是整的且由单位生成（大多数情况下，生成元都有明确给出）。我们将在引理 2.5 中证明所有这些格都是范数欧几里得的，并在命题 2.6 中证明格 (1)–(8) 是 3-远的。格 $\mathbb{Z}^3$ on $\mathbb{R}^3$ 不是 3-远的，因为 $(1/2,\ 1/2,\ 1/2)$ 属于 K ，而 (1，1，1) 是范数为 $\sqrt{3}$ 的格点，但它是 7- 远的（见第 4.4 节）。

我们简要说明为何有些格未列在上文中。在 $\mathbb{C}$，我们本可以考虑以下格：

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}\mathbb{i}],\quad \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{7}\mathbb{i}}{2}\right],\quad \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{11}\mathbb{i}}{2}\right],\ \text{or}\ \mathbb{Z}[\sqrt{3}\mathbb{i}].$$

前三个是范数欧几里得的，但第四个不是；然而，这些格都不是由单位生成的。在 $\mathbb{H}$，我们注意到 Hurwitz 整数和高斯整数是 [4] 中三个可能的范数欧几里得序中的两个。第三个范数欧几里得序是

$$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\frac{2+\sqrt{2}\mathbb{i}-\sqrt{10}\mathbb{k}}{4}\oplus\mathbb{Z}\frac{2+3\sqrt{2}\mathbb{i}+\sqrt{10}\mathbb{k}}{4}\oplus\mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{2}\mathbb{i}+\sqrt{5}\mathbb{j}}{2},$$

见 [11]。然而，这个格同样不是由单位生成的：只需计算所有范数为 1 的点，就会发现它们的 $\mathbb{j}$ 分量全为零。

在 $\mathbb{R}^3$ 中，该格

$$\mathbb{Z}(1,0,0)\oplus\mathbb{Z}(0,1,0)\oplus\mathbb{Z}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

其狄利克雷区域为截角八面体，并非由单位生成。

尽管如此，我们尚未排除存在其他符合我们条件的格的可能性。

1.3. **开放问题**。 本文将研究范围限定在空间 $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$，因为在这些空间中，经过 $\mathcal{Z}$ 平移和 ι 反演，球面和超平面仍映射为球面和超平面。然而，在其他岩泽反演空间中，这些变换可能会使这些形状发生扭曲，因此我们证明中采用的方法可能不适用。目前尚不清楚海森堡群上是否存在某个格（见 [19]），使得与之相关的连分数算法具有有限值域性质。

尽管范欧几里得四元数格已经得到了充分研究，但关于八元数格的研究似乎寥寥无几。可能还存在其他符合本文框架的八元数连分数算法。

通常还会采用另外两种方法来证明正规连分数的遍历性，而将其推广到我们的情形仍是一个开放问题。T 的自然扩张（用于 [17]）具有已知的不变测度，但在高维情形下，它现在具有一个复杂的分形定义域 [9, 13], ，因而难以将结果推广到 T。另一种通过双曲几何以及模流形上的测地编码进行论证的方法更接近成功，但受到隐藏对称性的阻碍（即，模群 $\langle \mathcal{Z}, \iota \rangle$ 中 ∞ 的稳定子可能大于起始数字群 $\mathcal{Z}$）。这种现象甚至也出现在 A. Hurwitz 连分数中。对于这些系统的折叠变体，遍历性可以推出；而对于中心对称系统（例如所考虑的系统），则可得到遍历分支的有限个 [20]。

1.4. **论文结构与记号**。 在第 2.1 节中，我们将介绍黑箱定理。在第 2.2 节中，我们将证明我们的格（格 (9) 除外）满足应用定理 1.4 所需的其余条件。在第 3 节中，我们证明在广泛条件下，有限范围与偶然性等价，并据此说明若干扰动例子并非偶然的。在第 4 节中，我们将通过证明定理 1.4 的条件足以推出各个黑箱定理的条件，从而证明定理 1.4 的大部分内容。在定理 4.4 中，我们将回到格 (9) 的情形，并证明在较弱的条件下，它仍满足定理 1.4 的结论。最后，在第 5 节中，我们证明定理 1.4 的最后一部分，即不变测度的分段解析性。

本文中我们将频繁使用渐近记号。我们用 $f(x) = O(g(x))$ 表示存在某个 $C > 0$，使得对于所有相关的 x，都有 $|f(x)| \leq C|g(x)|$。如果 $f(x) = O(g(x))$ 和 $g(x) = O(f(x))$ 同时成立，我们也写作 $f(x) \asymp g(x)$。在更一般的语境中，我们将 $O(g(x))$ 理解为指函数集合 $f(x)$，其中 $f(x) = O(g(x))$；所有等号均按从左至右的顺序，根据具体情况理解为 $\in$ 或 $\subset$。因此，$\sin x = x + O(x^3)$ 表示 $\sin x$ 属于函数集合 $x + O(x^3)$（当 x 较小时）；而 $(1 + O(x))^{-1} = 1 + O(x)$ 表示属于 $(1 + O(x))^{-1}$ 的所有函数也属于 $1 + O(x)$（当 x 较小时）。

1.5. **致谢**。 我们感谢 Martha Hart 对本文提出的意见。

2. 预备事实

我们首先回顾第 2.1 节中关于纤维系统的黑箱定理，并在第 2.2 节中将我们的例子与主定理 1.4 联系起来。

2.1. 黑箱定理。 我们现在采用第 1 节所述的连分数记号，将关于纤维系统的一般定理应用于我们的情形。

设 $T_{a_1a_2\dots a_n} = T_{a_n}T_{a_{n-1}}\dots T_{a_2}T_{a_1}$ 是 T^n 在柱集 $C_{a_1\dots a_n}$ 上的限制，并设 $\omega(a_1, \dots, a_n)$ 是 $T^{-1}_{a_1a_2\dots a_n}$ 的雅可比导数，定义为

$$\omega(a_1, \dots, a_n)(x) = |\det DT^{-1}_{a_1a_2\dots a_n}x|,$$

满足对任意博雷尔集 $E \subset K$,

$$\int_E \omega(a_1, \dots, a_n)\, d\lambda = \int_{T^{-n}E\cap C_{a_1a_2\dots a_n}} d\lambda.$$

为便于阅读，我们常用 s 表示字符串 $a_1a_2\dots a_n$，并将 T_s 写作 $T_{a_1\dots a_n}$，将 ω_s 写作 $\omega(a_1, \dots, a_n)$。

我们将使用以下条件:

(A) 对每个数字 a，当 C_a 非空时， $T_a : C_a \to K$ 是一个一一对应的连续映射，具有连续的一阶偏导数，且 $\det DT_a \neq 0$。(B) 满足有限值域性质。也就是说，存在有限个正测度子集 U_1， U_2，……， U_J，它们属于 K，使得对于每个非空的C_s，都有 $T^{|s|}C_s = U_j$，其中某个 j成立。此等式允许在零测集上不成立。我们将由 U_j生成的 K 的划分记为 $\mathcal{F}$，并将 $\mathcal{F}$ 中的元素称为胞腔。

(C) 满足 R´enyi 条件：存在一个一致常数 $L > 1$，使得对于所有字符串 s，如果对某个 j有 $T^{|s|}C_s = U_j$，那么

$$\sup_{x\in U_j} \omega_s(x) \le L \inf_{x\in U_j} \omega_s(x). \tag{2.1}$$

(D) 随着数字位数增加，柱集的直径一致地趋于 0。也就是说，令

$$\sigma(m) := \sup_{|s|=m} \operatorname{diam} C_s,$$

我们有 $\lim_{m\to\infty} \sigma(m) = 0$。

(E) 每个 U_j 都包含一个完整圆柱。

(F) 存在一个常数 $R_1 > 0$，使得对于每个满足$n = |s|$ 的有限数字序列 s 以及所有 x, $y \in C_s$，我们有

$$|\omega_s(T^n x) - \omega_s(T^n y)| \le R_1\lambda(C_s)d\left(T^n x, T^n y\right).$$

(G) 存在一个常数 $R_2 > 0$，使得对于每个满足 $n = |s|$ 的 s 以及所有$x, y \in C_s$，我们有

$$d(x, y) \le R_2 d(T^n x, T^n y).$$

(H) 设 $\mathcal{L}_m = \{s : |s| = m$ 且 C_s 不包含在胞腔 $F \in \mathcal{F}\}$ 中，并且$\gamma(m) = \sum_{s\in\mathcal{L}_m} \lambda(C_s)$。我们有 $\lim_{m\to\infty} \gamma(m) = 0$。

由此，我们得到以下结论。

定理 2.1 (定理 2 和 3，见 [23])。 在条件 *(A)–(E)* 下，存在唯一的概率测度 μ ，定义在 K 上，且该测度是 T-不变的，并与勒贝格测度等价。此外， $\mu(A) \asymp \lambda(A)$。 T 相对于 μ也是精确端同态，因此 T 是全阶混合且遍历的。

请注意，上述定理在 [23] 中采用了不同版本的条件 (E)，但如 [31] 所示，我们的版本已足够。

定理 2.2 ([25] 中的定理 2)。 在条件 *(A)–(H)* 下，映射 T 是连分数混合的。也就是说，定义

$$\psi(m) = \sup \frac{|\mu(C_s \cap T^{-|s|-m}E) - \mu(C_s)\mu(E)|}{\mu(C_s)\mu(E)}, \quad m \in \mathbb{N},$$

其中， μ 是定理 *2.1* 中的不变测度，上确界取遍 K 中所有正测度柱集 C_s 和博雷尔集 E 。那么 $\sup_{m\geq 1} \psi(m) < \infty$ ，且 $\lim_{m\to\infty} \psi(m) = 0$。

定理 2.3 ([31] 中的定理 1)。 在条件 *(A)–(H)* 下，存在不变密度 $d\mu/d\lambda$ 的一个版本h ，它在任意胞腔 $F \in \mathcal{F}$ 上都是利普希茨连续的。

就本文而言，定理 5.1 取代了前述结果，但为求完整起见，我们仍在此列出。

定理 2.4 （ [31]中的定理 2）。令 $A\colon\ L^1(\lambda) \to L^1(\lambda)$ 为由下式给出的转移算子

$$\int_{T^{-1}E} f \, d\lambda = \int_E (Af) \, d\lambda$$

对于 $f \in L^1(\lambda)$ 。令 $\mathcal{L}$ 为函数类 $f\colon\ (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ ，其函数值与 0 及 ∞ 均保持正距离，并且在 $\mathcal{F}$的每个胞腔 F 上都是利普希茨连续的。在条件 *(A)–(H)* 下，存在一个常数 α ，使得 $0 < \alpha < 1$ ，从而对于任意 $f \in \mathcal{L}$，有

$$A^n f = \left(\int_K f \, d\lambda \right) h + O\left(\alpha^{\sqrt{n}} + \sigma(\sqrt{n}) + \gamma(\sqrt{n}) \right), \tag{2.2}$$

其中， h 如前一个定理中所述， σ 来自条件 *(D)*，而 γ 来自条件 *(H)*。

关于这类黑箱定理与纤维系统之间关系的更完整历史，也请参见 [3, 28, 30, 33, 35]。

2.2. **关于我们的示例格的事实**。

引理 2.5。 格 *(1)–(9)* 是范数欧几里得的。

我们将通过求出 K 的极值点，证明这些格是范数欧几里得的。这等价于求出该格的深洞，不过我们在证明中不会用到这一点。

证明。 其中有几个是众所周知的，或是几何中如此简单的应用，因此我们不再给出详细证明。具体来说，对于格 (1)，$\mathrm{rad}(\underline{K}) = 1/2$。对于格 (2)，$\mathrm{rad}(K) = 1/\sqrt{2}$，因为 K 这里有一个以原点为中心、

内切半径为 $1/2$ 的正方形。对于格 (3)，$\mathsf{rad}(K) = 1/\sqrt{3}$，因为 K 这里有一个以原点为中心、内切半径为 $1/2$ 的六边形。对于格 (4)，$\mathsf{rad}(K) = 1/\sqrt{2}$，这在 [22] 的定理 3.4.3 中得到了证明。对于格 (6)，$\mathsf{rad}(K) = 1/\sqrt{2}$，这在 [27] 的定理 2.2 中得到了证明。对于格 (9)，$\mathsf{rad}(K) = \sqrt{3}/2$，这是因为立方体的一个角位于 $(1/2,\ 1/2,\ 1/2)$。

对于格 (5)，回顾一下，此时我们的格为

$$\mathcal{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\mathbb{i} \oplus \mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{3}\mathbb{j}}{2} \oplus \mathbb{Z}\frac{\mathbb{i}+\sqrt{3}\mathbb{k}}{2}.$$

如果我们只关注实维数和 $\mathbb{j}$ 维数，那么该格就是简单的 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{3}\mathbb{j}}{2}]$，它在 $(3+\sqrt{3}\mathbb{j})/6$ 处有一个极值点，因为这正是标准六角格。同样地，在 $\mathbb{i}$ 维数和 $\mathbb{k}$ 维数上，该格就是简单的 $\mathbb{i}\left(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{3}\mathbb{j}}{2}]\right)$，并且在 $(3\mathbb{i}+\sqrt{3}\mathbb{k})/6$ 处有一个极值点。这两个子格彼此垂直，因此 K 的一个极值点位于

$$\frac{3+3\mathbb{i}+\sqrt{3}\mathbb{j}+\sqrt{3}\mathbb{k}}{6},$$

其范数为 $\sqrt{2/3}$。

格 (7) 给出为

$$\mathcal{Z} = \mathbb{Z}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) \oplus \mathbb{Z}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) \oplus \mathbb{Z}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

对于该格，狄利克雷区域全部都是菱形十二面体，见图 2。菱形十二面体可以通过以下方式由两个相等的立方体构造而成：取一个立方体，将其切割成 6 个四棱锥，使其底面位于立方体的各个面上，顶点位于立方体的中心；然后将这些棱锥的底面分别连接到第二个立方体的各个面上（见 [7, pg. 26]）。菱形十二面体的角点将是第二个立方体的 8 个角点以及这些棱锥的 6 个顶点。在我们的情况下，我们可以快速计算出，这些角点将位于 $(\pm 1/2\sqrt{2}, \pm 1/2\sqrt{2}, 0)$ 及其所有排列，以及 $(\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0)$ 及其所有排列。后者即为极值点。因此，该 K 的半径为 $1/\sqrt{2}$。

考虑格 (8)。在这种情况下，K 是一个六角棱柱。容易验证，在前两个坐标中，$(1/2,\ \sqrt{3}/6)$ 是一个极值点，因为这里的格就是六角格；而在第三个坐标中，$1/2$ 是一个极值点，因为这里的格就是 $\mathbb{Z}$。由于这两个子格彼此垂直，K 的一个极值点就是 $(1/2,\ \sqrt{3}/6,\ 1/2)$，其范数为 $\sqrt{21}/6 \approx 0.76$。□

命题 2.6。 *格 (1)–(8) 都是 3-远的。*

证明。 回想一下，如果对于任意范数为 $\sqrt{3}$ 的 $z \in \mathcal{Z}$，都有 $d(z,\ K) \geq 1$，则称整格是 3-远。当覆盖半径 $\mathsf{rad}(K) < \sqrt{3}-1$ 时，这一条件显然成立。我们注意到以下数值。

$$\sqrt{3} - 1 = 0.73205\ldots$$
$$1/\sqrt{3} = 0.57735\ldots$$
$$1/\sqrt{2} = 0.70711\ldots$$

如引理 2.5 的证明中所述，对于格 (1)，$\mathrm{rad}(K)$ 为 $1/2$；对于格 (3)，为 $1/\sqrt{3}$；对于格 (2)、(4)、(6) 和 (7)，为 $1/\sqrt{2}$。因此，这些格都是 3-远的。

考虑格（5）。这里，$\mathrm{rad}(K) = \sqrt{2/3} \approx 0.8\overline{16}$，因此前面的论证不适用。所以我们将检查所有范数为 $\sqrt{3}$ 的点，并证明它们与 K 的距离至少为 1。范数为 $\sqrt{3}$ 的点共有 12 个，这可以通过计算机计算验证。这些点对应于

$$\frac{3+\sqrt{3}\mathbb{j}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathbb{j}}{2}\right)^n \qquad \frac{\mathbb{i}(3+\sqrt{3}\mathbb{j})}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathbb{j}}{2}\right)^n$$

对于 $n = 0$、1、2、3、4、5。我们将证明点 $(3+\sqrt{3}\mathbb{j})/2$ 与 K 的距离大于 1，因为其他情形都非常相似。注意，由于 1 属于我们的格，K 必须完全包含在半空间 $x \cdot 1 \le 1/2$ 中。点 $(3+\sqrt{3}\mathbb{j})/2$ 到该半空间的距离已经是 1，因此显然，该点到 K 的距离至少为 1。

最后，格 (8) 的覆盖半径仍然过大，因为 $\mathrm{rad}(K) = \sqrt{21}/6 \approx 0.76$。这里，我们可以将此格与 $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{3}\mathbb{i}}{2}] \oplus \mathbb{Z}$ 对应起来，而范数为 $\sqrt{3}$ 的点恰好是

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}\mathbb{i}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathbb{i}}{2}\right)^n, 0\right)$$

对于 $n = 0$，1，2，3，4，5。由于所有情况都类似，我们考虑 $n = 0$ 的情形。因为所有范数为 $\sqrt{3}$ 的点的最后一个坐标都为 0，且 K 是一个棱柱，所以我们只需处理前两个坐标。然而，这就归结为格 (3) 的情形，而该格已被证明是 3-远的。□

3. 有限范围与偶然性

在 $\mathbb{R}^d$ 上固定一个岩泽连分数。

现在我们证明，若 K 由有限个超平面和/或球面界定，则有限范围条件与偶然性条件等价（引理 3.6），并利用这一观察研究 α-连分数中的有限值域条件。

回忆一下，对于空字符串 $\wedge$，我们有 $C_\wedge = K$；对于数字序列 s 和数字 a，我们有 $C_{as} = T_a^{-1}C_s \cap K$。令 $E_0 = \partial K$、$E_{i+1} = E_i \cup TE_i$ 和 $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$。我们继续在欧几里得空间中工作（稍微更一般的引理 3.1 和 3.2 除外），并采用约定 $T(0) = 0$ 和 $\iota(0) = 0$，尽管在某些情况下，认为 $\iota(0) = \infty$ 会更方便。

我们首先证明柱集的边界包含于 E，反过来，E 中的每个点都位于某个柱集的边界上——而且可以定量地说明这一点。

引理 3.1。考虑任意一种岩泽连分数算法、s 一个数字序列，以及 C_s 与之对应的柱集。那么 $\partial T^{|s|}C_s \subset E_{|s|} \subset E$。

证明。如果 s 为空字符串，那么 $T^0C_s = K$，因此 $\partial T^0 C_s = E_0$。

对于数字 a，考虑 TC_a。根据柱集的定义，$C_a = \iota(K+a) \cap K$。由于 a 是 C_a 中所有点的第一个数字，因此我们有 $TC_a = \iota C_a - a = K \cap (\iota K - a)$。我们

接着计算

$$\partial TC_a \subset \partial K \cup (\partial(\iota K - a) \cap K) \subset \partial K \cup \left(\bigcup_{a_1 \in \mathcal{Z}} \partial(\iota K - a_1) \cap K \right)$$
$$= \partial K \cup \left(\bigcup_{a_1 \in \mathcal{Z}} (\iota \partial K - a_1) \cap K \right) \subset \partial K \cup T\partial K = E_1.$$

一般而言，假设对于固定长度为 k 的所有 s，都有 $\partial T^{|s|} C_s \subset E_{|s|}$。我们将证明，对于长度为 $k+1$ 的所有 s，这同样成立。设 s 是长度为 k 的字符串，a 是一个数字。根据定义，C_{sa} 由 $x \in C_s$ 中满足 $T^k x \in C_a$ 的所有点组成，即 $T^k C_{sa} = C_a \cap T^k C_s$。然而，正如我们在上一段中所述

$$\begin{aligned} T^{k+1} C_{sa} &= K \cap (\iota K - a) \cap (\iota(T^k C_s) - a) \\ \partial T^{k+1} C_{sa} &\subset \partial K \cup (\partial(\iota K - a) \cap K) \cup \big(\partial(\iota(T^k C_s) - a) \cap K\big) \\ &\subset E_1 \cup \big(\partial(\iota(T^k C_s) - a) \cap K\big) \subset E_1 \cup \big((\iota\partial(T^k C_s) - a) \cap K\big) \\ &\subset E_1 \cup \big((\iota E_{|s|} - a) \cap K\big) \subset E_1 \cup T E_{|s|} \subset E_{|s|+1}. \end{aligned}$$

归纳证明至此完成。 □

引理 3.2。 *E 中的每个点都属于某个 s 对应的 $T^{|s|} C_s$：如果 $x \in \partial K = E_0$，那么 s 是空数字串；如果 $x \in E_n \setminus E_{n-1}$，则可以选取 s，使得$n = |s|$。*

证明。 $x \in \partial K$ 这一情形显然成立，因此假设 $x \in E_n \setminus E_{n-1}$，并取满足 $T^n y = x$ 的 $y \in \partial K$。如果对于任意 $0 \le i \le n-1$ 都有 $T^i y = 0$，那么我们也会有 $x = 0$，这与 $x \in E_n \setminus E_{n-1}$ 矛盾。因此，存在一个数字串 $s = a_1 a_2 \dots a_n$，使得对于所有满足 $1 \le i < n$ 的 i，都有 $T_{a_i} \dots T_{a_2} T_{a_1} y \in K$。注意，事实上，对于 $i < n$，有 $T_{a_i} \dots T_{a_2} T_{a_1} y \in K^\circ$：否则，我们会有 $z = T_{a_i} \dots T_{a_2} T_{a_1} y \in \partial K$ 和 $T^{n-i} z = x$，因此 $x \in E_{n-i} \subset E_{n-1}$。我们断言 $y \in \partial C_s$。如果有 $y \in K$，那么我们就有$y \in C_s$；此外，由于 $y \in \partial K$，还有 $y \notin C_s^\circ$。如果 $y \notin K$，令 $B'_\epsilon = B(y, \epsilon) \cap K$，其中 ϵ 取为一个待定的小值。我们断言，当 ϵ 充分小时，有 $B'_\epsilon \subset C_s$。事实上，如果 $\iota B'_\epsilon - a_1 \subset K$，则 $B'_\epsilon \subset C_{a_1}$。由于 $\iota y - a_1 \in K^\circ$，当 ϵ 充分小时，可推出 $\iota B'_\epsilon - a_1 \subset K^\circ$。同样，必要时减小 ϵ，以适应 s 中剩余的数字，我们便可得到充分小的 ϵ，使得$B'_\epsilon \subset C_s$，如所求。我们还可以在需要时减小 ϵ，以避免对于$1 \le i \le n-1$出现 $0 \in T^i B'_\epsilon$。由此可得 $y \in \partial C_s$。接下来注意到，$y \in \partial C_s$ 蕴含 $T^n y = x \in \partial T^n C_s$，因为对于 y 和 C_s，都有 $T^n = T_{a_n} \dots T_{a_2} T_{a_1}$；它在 y 的某个邻域上是同胚，因此保持边界不变。□

接下来，我们将注意力限制在由超平面和球面（HAS）[2]构造的对象上。为了证明由有限多个 HAS 围成的区域满足的两个条件等价，我们定义一类集合，它既包含这类边界，又在有限并、平移以及（避开原点时的）反演下封闭。

[2]虽然人们通常会将这两种对象都统称为“球面”，但我们将把“球面”一词专门用于度量球面。

定义 3.3。 A有限球面复形（*FSC*）是通过以下构造得到的集合。设 $A_1, \dots, A_n$ 是有限个余维 1 的 HAS，$A = \bigcup_i A_i \setminus \bigcup_{i \neq j} A_i \cap A_j$ 是它们去掉两两交集后的并集，$\mathcal{B}$ 是 A 的各连通分支的闭包所组成的集合。令 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$，并取 $B = \cup \mathcal{B}'$。则称 B 为一个 FSC。

例 3.4. 单位正方形的边界是一个 FSC，所有正在考虑的狄利克雷区域也都是如此。FSC 在不将其点映射到 ∞ 的共形映射下也保持封闭，并且对并集封闭。特别地，我们将证明图 1a 和图 2 中的集合都是 FSC。

有限球面复形具有以下关键性质：

引理 3.5. 设 A_1、……、A_n 是一组 *HAS*。那么，可以由 A_1、……、A_n 构造出有限多个 *FSC*，且任意此类 *FSC* 的补集都只有有限多个连通分支。

证明。 在 $\mathbb{R}^d$ 的一点紧化中（并在每个 A_i 是超平面时将其紧化），取 $U = A_1 \cup \dots \cup A_n$ 中任意一点 x，利用一个莫比乌斯变换将其映至无穷远处。于是，任何经过 x 的 HAS 都是超平面，并且我们得到 $x = \infty$ 的一个邻域，它与 U^c 相交所得的集合有有限多个连通分支。现在，由于 U 的紧致性，我们得到 U 的有限多个邻域，每个邻域与 U^c 相交所得的集合都只有有限多个连通分支，且这些邻域的并覆盖 U。这些邻域共同构成 U 的一个邻域 U'，它与 U^c 相交所得的集合有有限多个连通分支。由于 U^c 中的任意一点都能与 U' 中的某个点相连，因此我们得出 U^c 有有限多个连通分支。

给定一个由 $A_1, \dots, A_n$ 构造的有限球面复形，该有限球面复形的补集将包含 U 的补集作为稠密子集，因此将只有有限多个连通分支。这就给出了该引理的第二个结论。

现在，有限球面复形的构件集合 $\mathcal{B}$ 由 $U \setminus \bigcup_{i \neq j} A_i \cap A_j$ 的连通分支的闭包组成。等价地，我们可以将注意力限制在每个 A_k 上（现在将其视为 $\mathbb{R}^{d-1}$ 或 $\mathbb{S}^{d-1}$），并考察 $A_k \setminus \bigcup_{i \neq k} A_i$ 的连通分支，同时注意到每个 $A_k \cap A_i$ 要么是球面、平面、点，要么是空集。于是，第一段中的论证表明每个 $A_k \setminus \bigcup_{i \neq k} A_i$ 都有有限多个连通分支，因此 $\mathcal{B}$ 是有限的，从而得出该引理的第一个结论。□

引理 3.6。 考虑一种岩泽连分数算法，其基本域 K由有限多个 *HAS* 界定。那么，有限值域条件等价于偶然性。此外，若其中任一条件成立，则 E 是一个有限球面复形。

引理 *3.6* 的证明。首先假设偶然性成立。那么，对于任意柱集C_s，由引理 3.1 可得 $\partial T^{|s|} C_s \subset E$。于是， $K \setminus E$不含 $T^{|s|}C_s$的边界点，因此 $T^{|s|}C_s$的内部是$K \setminus E$中的一个相对开闭集，由 $K \setminus E$的若干连通分支组成。根据引理 3.5， $K \setminus E$ 有有限多个连通分支，因此 $T^{|s|}C_s$ 只有有限种可能，边界上的零测集除外。由此，有限值域条件成立。 E 是一个有限球面复形，这一点显然，因为∂K 是一个有限球面复形，且 E的构造也保证了这一点。

反过来，令 $F = \bigcup_s \partial T^{|s|} C_s$，其中 s 遍历所有数字序列，并假设有限值域性质成立[3]：只有有限多个数字序列对定义 F的并集有贡献，且其长度均不超过某个 N。结合引理 3.1 和 3.2，可得 $F = E_N$。由此可知 E 趋于稳定，因为对于任意$n \geq N$，都有 $E_n = E_N$。因此也可得 E 是一个有限球面复形，因为 F 是柱边界的并集，而柱边界均为有限球面复形，有限多个有限球面复形的并集也是有限球面复形。随后由引理 3.5 可知，$K \setminus F$ 有有限多个连通分支，从而完成偶然性的证明。□

我们得出结论：只有当 α 为有理数或二次无理数时，才会出现有限范围的 α-连分数。

引理 3.7。 设 $\alpha \in (0,\ 1)$。考虑由数据 $(\mathbb{R}$、$\mathbb{Z}$、$(-\alpha$、$1-\alpha])$ 定义的 α-连分数，其反演为 $|1/x|$ （*Nakada* α-连分数 [24]）、 $1/x$ （*Tanaka-Ito* α-连分数 [32]）或$-1/x$ （参见 [16, 20]）。如果该系统具有有限值域性质，那么 α 就是 $\mathbb{Z}$上的一次或二次多项式的根。

注 3.8。 人们也预期逆命题成立。对于 Nakada 的 α-连分数，这可由测地编码 [1]得到。

证明。 根据引理 3.6（尽管 Nakada 的 α-连分数不是岩泽连分数，该引理同样适用），有限值域条件意味着点 $-\alpha$ 和$1-\alpha$ 在连分数映射 T下都具有有限轨道。因此，这些轨道最终周期，并且轨道尾部要么到达 0，要么由PSL（2、$\mathbb{Z}$）中的某个元素固定。正如正规连分数的经典情形一样，这意味着 $-\alpha$和$1-\alpha$ 都是二次方程的根（如果轨道到达 0，则可能退化）。

□

考察子系统，我们得到以下高维推论（为简单起见，我们陈述 A.Hurwitz 连分数的情形）：

推论 3.9。 考虑带有数据 $(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}^2, (-0.5, .5]\times(-\alpha, 1-\alpha], \iota(x,y) = (x,-y)/(x^2+y^2))$ 的 α 扰动 *A. Hurwitz* 连分数。若 α 不是 $\mathbb{Z}$ 上某个二次多项式的根，则该系统不是偶然的（且有限值域条件不成立）。

证明。 该系统沿虚轴限制为实 α-CF 的一个副本，从而得到点 $(0,\ -\alpha)$ 的无穷多个不同像。此外，每个像都伴随着一条弧 $A_i = T^i((-\epsilon_i,\ \epsilon_i) \times \{-\alpha\})$，且每条弧都具有 $\epsilon_i > 0$。由于ι 是保角的（见 [20]中的引理 2.14），并且保持虚轴不变，因此每条弧 A_i 都垂直于虚轴。由于一个圆与虚轴至多相交两次，集合 $\{A_i\}$ 实际上是无限的，不可能在构造并集 $E = \cup T^i \partial K$ 的有限阶段产生。□

[3]先验地，有限值域条件仅能将柱集分类到零测度的意义下；但我们的柱集始终由有限个 HAS 界定，因此取其闭包后，这种零测度歧义便消失了。

4. 主定理的证明

在本节中，我们始终假设论文的一般假设（见第1.1节）成立，并说明何时需要主定理1.4的任何附加假设。

我们先概述证明思路。

我们从条件 (A)、(C) 和 (D) 入手，它们关联了映射 T、其迭代逆分支 T_s^{-1} 及其雅可比行列式 ω_s 的性质。我们注意到，T_s 是由平移和反演复合而成的；平移是等距变换，雅可比行列式为 1，而反演是保角的，并受反演恒等式的约束

$$d(\iota y, \iota z) = \frac{d(y,z)}{|y|\,|z|}.$$

保角性意味着，在无穷小尺度上，各个方向上的距离畸变程度相同，因此我们可以利用距离恒等式计算 ι 的雅可比行列式。这样便可以用点 $\{T^i x\}_{i=0}^{n-1}$ 显式写出 $\omega_s(T^n x)$。条件 (A)、(C)、(D) 可由上述考虑推出。条件 (G) 则是反演恒等式的直接推论。

接着，我们通过考察狄利克雷区域 K 的边界的像，研究柱集的结构以及条件 (B)、(E) 和 (H)。我们通过证明偶然性的等价条件，证明有限值域性质 (B) 得以满足：我们将证明，集合序列 E_i 最终为常数，并且实际上是一个有限球面复形 (FSC)。在我们的假设下，K 的边界由形如 $x \cdot z = 1/2$ 的超平面（的子集）构成，其中 $z \in \mathcal{Z}$ 的范数为 1。我们将这些超平面组成的集合称为类型 1 对象。我们证明，在 T 作用下，∂K 的迭代可以分解为类型 1 对象的子集，以及某些经过原点的超平面（类型 2 对象）或某些单位球面（类型 3 对象）。由于类型 1、类型 2 和类型 3 对象的总数有限，因此可由它们构造的 FSC 也只有有限多个，所以序列 $\{\bigcup_{i=0}^{j} T^i(\partial K)\}_j$ 最终稳定。由此可知，对于任意柱集 C_s，$T^{|s|}C_s$ 必定由这些对象所界定，因此 $T^{|s|}C_s$ 只有有限种可能，从而得到有限值域性质 (B)。(E) 和 (H) 也可由上述考虑得出。

最后，我们考察条件 (F)。证明该条件时，我们将前面的论证与一种颇为出人意料的有理逼近用法结合起来。

下面每个结果中，我们都会说明证明所用的假设；这些假设并不总是与定理 1.4 的全部假设相对应。具体而言，有限范围性质 (B) 的证明适用于某些基本域 K：它们不是给定格的狄利克雷域，但其边界由类型 1、类型 2 和类型 3 区域构成。图 3 展示了其中的一些。

4.1. 雅可比行列式的性质：条件 (A)、(C)、(D)、(G)。

引理 4.1. 条件 *(A)* 得以满足。

证明。映射 $T_a : C_a \to K$ 是一一对应且连续的，这一点可直接由 T_a 和 C_a 的定义得出。任意反演 ι 都可以看作

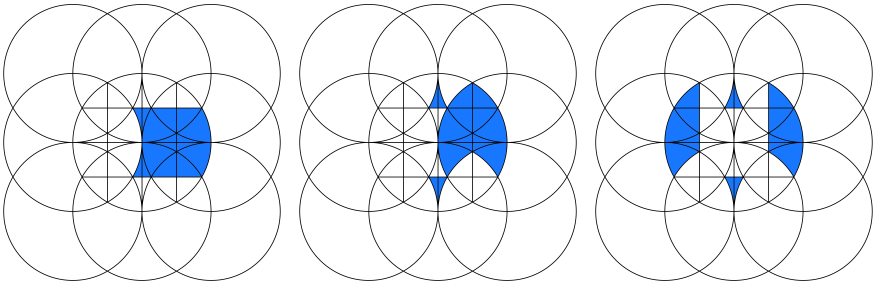


图 3. 除狄利克雷区域 $[-.5,.5)\times[-.5,.5)$ 外，对于任何由类型 1、类型 2 和类型 3 区域围成的基本区域，也可以得到有限值域性质 (B)。我们展示了三个这样的区域 K (蓝色子集)，对应于 $\mathcal{Z}=\mathbb{Z}^2$，其中包括与人字形连分数对应的区域（左图） [20]。图中所有圆的半径均为 1，且各图均以原点为中心。

一个正交变换与反演 $x\mapsto x/|x|^2$ 的复合，因此 T_a 具有连续的一阶偏导数。$\det DT_a$ 非零这一事实是下一个引理的一个特例。□

引理 4.2. 设 s 是一个字符串，满足 $|s|=n$。对于 $x\in C_s$，有

$$\omega_s(T^n x)=\prod_{i=1}^{n}|T^{i-1}x|^{2d}$$

其中 d 是 $\mathbb{R}$ 上环境空间的维数。

证明。 注意， $\omega_s=\left|\det DT_s^{-1}\right|$ 衡量映射 T_s^{-1} 的体积畸变。该映射由平移和反演构成；平移不会改变体积。根据反演恒等式 1.1，对于任意点 y， $\iota(B(y,\epsilon))$ 可由 $B(\iota(y)\ |y|^{-2}\epsilon)$ 近似，畸变因子为 $|y|^{-2d}$。因此，对于单个数字 a，有 $D_yT_a^{-1}=|y+a|^{-2d}=|\iota(y+a)|^{2d}=\left|T_a^{-1}(y)\right|^{2d}$。若 $s=a_1a_2\dots a_n$，则由链式法则可得：

$$\begin{aligned}|\det D_{T^n x}T_s^{-1}| &= |\det D_{T^n x}(T_{a_1}^{-1}T_{a_2}^{-1}\dots T_{a_n}^{-1})|\\ &=\prod_{i=1}^{n}|\det D_{T^i x}T_{a_i}^{-1}|\\ &=\prod_{i=1}^{n}|T^{i-1}x|^{2d},\end{aligned}$$

正如所期望的。 □

引理 4.3。 假设 $\mathcal{Z}$ 是范数欧几里得的。则条件 *(C)*，即 *R´enyi* 条件，得以满足。

证明。设 s 是一个满足 $|s| = n$ 的字符串，并且 x， $y \in C_s$。通过对引理 4.2 重新编号，我们得到

$$\frac{\omega_s(T^n x)}{\omega_s(T^n y)} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{|T^i x|}{|T^i y|} \right)^{2d}.$$

根据三角不等式，我们有：

$$\frac{|T^i x|}{|T^i y|} \leq 1 + \frac{d(T^i x, T^i y)}{|T^i y|}.$$

此外，对于 $i \neq n$，我们反复应用反演公式 (1.1)，得到

$$\begin{aligned} d(T^i x, T^i y) &= d(\iota T^i x, \iota T^i y)|T^i x||T^i y| \qquad (4.1) \\ &= d(\iota T^i x - a_{i+1}, \iota T^i y - a_{i+1})|T^i x||T^i y| \\ &= d(T^{i+1} x, T^{i+1} y)|T^i x||T^i y| \\ &= d(T^{i+2} x, T^{i+2} y)|T^i x||T^i y||T^{i+1} x||T^{i+1} y| \\ &= \cdots \\ &= d(T^n x, T^n y) \prod_{j=i}^{n-1} |T^j x||T^j y|. \qquad (4.2) \end{aligned}$$

因此我们有

$$\frac{d(T^i x, T^i y)}{|T^i y|} \leq d(T^n x, T^n y) \mathrm{rad}(K)^{2(n-i)-1} \leq 2\mathrm{rad}(K)^{2(n-i)}.$$

回到雅可比行列式，我们有

$$\begin{aligned} \frac{\omega_s(T^n x)}{\omega_s(T^n y)} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{|T^i x|}{|T^i y|} \right)^{2d} &\leq \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + 2\mathrm{rad}(K)^{2(n-i)} \right)^{2d} \\ &\leq \exp\left(2d \sum_{i=0}^{n-1} 2\mathrm{rad}(K)^{2(n-i)} \right) = \exp\left(4d \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rad}(K)^{2i} \right) \\ &\leq \exp\left(4d \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{rad}(K)^{2i} \right) = \exp\left(\frac{4d\mathrm{rad}(K)^2}{1 - \mathrm{rad}(K)^2} \right), \end{aligned}$$

这是有限的，并且在所有 s 上一致，正如所需。 □

引理4.4。假设 $\mathcal{Z}$ 是范数欧几里得的，则条件 *(G)* 成立。

证明。设 s 是一个满足 $|s| = n$的字符串，并设 x， $y \in C_s$。如 (4.2) 中那样反复应用反演公式，可得

$$d(x, y) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} |T^i x||T^i y| \right) d(T^n x, T^n y) < d(T^n x, T^n y),$$

正如所需。 □

引理 4.5。假设 $\mathcal{Z}$ 是范数欧几里得的。则条件 *(D)* 成立，其中

$$\sigma(m) \leq 2\,\mathrm{rad}(K)^{2m+1}$$

证明。 对于 x， $y \in C_s$ 且满足 $|s| = n$，将 (4.2) 用于 $i = 0$ 可得

$$d(x, y) \le 2 \operatorname{rad}(K)^{2n+1}.$$ □

4.2. **柱集的结构：条件 (B)、(E) 和 (H)**。我们在引理 3.6 中证明了，偶然性蕴含有限值域条件 (B)。

接下来，我们运用 Conway-Sloane 的结果 [5]，证明在我们的假设下， K 的狄利克雷区域 $\mathcal{Z}$ 是与 $\mathcal{Z}$的单位范数生成元相对应的半空间的交集，从而得到 K的具体描述。

首先，我们需要一个有用的事实。

引理 4.6。设 $\mathcal{Z}$ 是一个整格。那么对于任意 z、 $w \in \mathcal{Z}$，都有$2z \cdot w \in \mathbb{Z}$。

由此得到一个有趣的几何推论：任意两个单位元之间的夹角都是 60 度或 90 度的整数倍。特别地，由两个不共线单位元生成的格的截面应当是 $\mathbb{R}^2$上的两种经典整格之一，即正方晶格或三角格。

证明。 这源于以下事实：对于任意 z， $w \in \mathcal{Z}$，都有

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2z \cdot w + |w|^2,$$

以及以下事实：对于任意整格，所有范数平方都是整数。 □

引理 4.7。 设 $\mathcal{Z}$ 是一个整的、由单位元生成的格。则 ∂K 由超平面 $\{x : x \cdot z = 1/2\}$ 的子集组成，其中 $z \in \mathcal{Z}$ 遍历 $\mathcal{Z}$的单位范数元素。

证明。 对于每个 $r \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，令 $\Lambda_r = \{z \in \mathcal{Z} : \ z \cdot z = r\}$。根据 [5], 的定理 9，如果我们能够证明 $\Lambda_r \subset \Lambda_1 + \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_1$（其中求和中有 r 项），则所需结论成立。（对于整格而言， [5] 的定理 9 的第二个条件是显然的。）

固定 $r > 0$ 并考虑 $z \in \Lambda_r$。由于 $\mathcal{Z}$ 由单位元生成且为阿贝尔的，我们知道可以将其表示为

$$z = \sum_{i=1}^{\ell} c_i u_i, \qquad c_i \in \mathbb{Z}, \qquad u_i \in \Lambda_1$$

作为 $\mathbb{Z}$个线性无关的单位元的线性组合。我们将以一种特定方式选取这些向量。首先，不妨假设所有 c_i 均为非负数：如果某个 c_i 为负数，则可以将 c_i 替换为 $-c_i$，并将 u_i 替换为 $-u_i$。

此外，我们声称可以选择 u_i，使得当 $c_i c_j > 0$ 时， $u_i \cdot u_j \ge 0$ 。首先注意到，根据引理 4.6， $u_i \cdot u_j \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$，而 $\mathbb{Z}$- 线性无关性进一步意味着，对于 $i \ne j$，我们有 $u_i \cdot u_j \in \{-1/2, 0, 1/2\}$。因此，我们只需处理 $u_i \cdot u_j = -1/2$ 的情形。在这种情况下，我们有 $u_i + u_j$ 再次是单位向量，并按以下方式用 $u_i + u_j$ 替换 u_i 或 u_j （回想一下， $c_i c_j > 0$）：

$$c_i u_i + c_j u_j = \begin{cases} c_i(u_i + u_j) + (c_j - c_i)u_j, & \text{if } c_j \ge c_i, \\ c_j(u_i + u_j) + (c_i - c_j)u_i, & \text{if } c_i \ge c_j. \end{cases} \tag{4.3}$$

我们注意到，这一过程不会改变这组单位向量的线性无关性。此外，这一过程会将乘积 c_ic_j 缩减为 $c_ic_j - c_i^2$ 或 $c_ic_j - c_j^2$，视情况而定。

只要找到满足 $u_i \cdot u_j = -1/2$ 和 $c_ic_j > 0$的情形，我们就可以反复应用上一段中的替换过程。由于乘积 c_ic_j 是非负整数，并且每次迭代替换过程时都会变小，因此该过程最终必定终止。

现在，假设 $z = \sum_{i=1}^{\ell} c_iu_i$ 和 $c_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，且当$c_ic_j > 0$时 $u_i \cdot u_j \geq 0$。于是我们有

$$\begin{aligned} r = z \cdot z &= \left(\sum_{i=1}^{\ell} c_iu_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\ell} c_iu_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} c_i^2 + \sum_{i \neq j} 2c_ic_ju_i \cdot u_j \\ &\geq \sum_{i=1}^{\ell} c_i^2 \geq \sum_{i=1}^{\ell} c_i, \end{aligned}$$

最后一行成立，是因为对于非负整数 $c_i^2 \geq c_i$。由于每个 u_i 都是单位，因此 $\sum_{i=1}^{\ell} c_i$ 表示若干个单位向量，将它们相加即可得到 z。因此，既然 $r \geq \sum_{i=1}^{\ell} c_i$，每个 $z \in \Lambda_r$ 都可以写成至多r 个单位向量之和，正如所需。□

现在我们可以证明性质 (B)：

引理 4.8. *假设格 $\mathcal{Z}$ 是整的，相对于反演 ι良好可逆、范数欧几里得、由单位元生成，且为 3-远。则有限值域性质成立。*

证明。 由于 K 是某个离散群的狄利克雷区域，它由超平面围成；引理 4.7 告诉我们，这些超平面具有 $x \cdot z = 1/2$ 的形式，其中$z \in \mathcal{Z}$为单位元。根据引理 3.5 和 3.6，我们只需证明集合 E_i 最终会稳定为一个有限球面复形（FSC）（见定义 3.3）。

事实上，我们将证明， E_i包含于 K 与下列对象之并的交集中（可能是严格包含，如 Hurwitz 连分数的情形，见图 1a）：

- （类型 1）范数为 1 的 $z \in \mathcal{Z}$ 所对应的超平面 $x \cdot z = 1/2$，
- （类型-2）范数为 1 的超平面 $x \cdot z = 0$，其中 $z \in \mathcal{Z}$
- （类型-3）范数为 1 或 $\sqrt{2}$ 的球面 $S_1(z)$，其中 $z \in \mathcal{Z}$

此外，我们将由此证明，每个 E_i 都将是由上述 HAS 构成的有限球面复形。

根据引理 4.7，集合 $E_0 = \partial K$ 由 1 型对象界定。因此，只需证明：若将 T 作用于这些对象中任意一点，所得结果都包含在所有这些对象的并集中。我们将再次在单点紧化 $\mathbb{R}^d \cup \infty$上进行讨论，使得 ι 交换 0 和 ∞。我们还将利用 ι是保角的这一事实，因此它将 HAS 映射为 HAS。

首先，考虑范数为 1 的 $z \in \mathcal{Z}$ 和超平面 $x \cdot z = 1/2$。该超平面上距离原点最近的点是 $z/2$。若通过施加 ι 对此超平面作反演，所得必定是一个经过原点的球面，且其上距离原点最远的点为 $2\iota(z)$。换言之，该球面是 $S_1(\iota(z))$；根据良好可逆性的假设，$\iota(z)$ 属于 $\mathcal{Z}$。因此，给定超平面$x \cdot z = 1/2$上的一点 x，有 $\iota(x) \in S_1(\iota(z))$，于是对某个 $z' \in \mathcal{Z}$，有 $T(x) \in S_1(z')$。现在，3-远离性意味着，若 $|z'| \geq 3$，则 $K \cap S_1(z')$ 在 ∂K中至多是一个点。在这种情况下，$T(x)$ 属于一个类型 1 对象。否则，$|z'| = 1$ 或 $|z'| = \sqrt{2}$，且 $T(x)$ 属于一个类型 3 对象。

接下来考虑一个球面 $S_1(z)$，其中 $z \in \mathcal{Z}$ 的范数为 $\sqrt{2}$。（我们稍后会回到范数为 1 的情形。）设 $z^* = z/|z|$。$S_1(z)$上距离原点最近的点是 $(\sqrt{2}-1)z^*$，距离原点最远的点是 $(\sqrt{2}+1)z^*$。注意，$(\sqrt{2}-1)^{-1} = \sqrt{2}+1$。因此，$\iota S_1(z)$是一个球面，其距离原点最近的点是 $(\sqrt{2}-1)\iota(z^*)$，距离原点最远的点是 $(\sqrt{2}+1)\iota(z^*)$。换言之，$\iota S_1(z) = S_1(|z|^2\iota(z))$，此外，可良好求逆的假设给出$|z|^2\iota(z) \in \mathcal{Z}$。因此，依据上一段中的同样论证，$S_1(z) \cap K$ 中的点经由 T映射到类型 1 或第3类对象中的点。

接下来考虑一个超平面 $x \cdot z = 0$，其 $z \in \mathcal{Z}$ 的范数为 1，并且它是 z 与 $-z$ 之间的垂直平分超平面。具体而言，该超平面垂直于连接 z 与 $-z$ 的直线，且在 0 和 ∞ 处都如此。由于 ι 保持单位球面以及单位球面上各点之间的距离不变，因此 $\iota(z)$ 与 $\iota(-z)$ 互为对跖点，故 $\iota(-z) = -\iota(z)$。此外，经过 z 与 $-z$ 的直线（以及经过 0 与 ∞ 的直线）会映射为连接 $\iota(z)$ 与 $-\iota(z)$ 的直线。由于 ι 是保角的，我们可以得出，该超平面会映射为超平面 $x \cdot \iota(z) = 0$。现在，我们要考虑如何将反演后的超平面P（其法向量为 $\iota(z)$）的各部分按 $\mathcal{Z}$ 中的元素平移，从而回到 K。对于任意 $w \in \mathcal{Z}$，只有沿法向量的移动会影响超平面的位置，因此有 $d(P, w+P) = \iota(z) \cdot w$。根据引理 4.6，该距离是 $1/2$ 的倍数。因此，超平面的平移像具有形式 $x \cdot \iota(z) = a/2$，其中$a \in \mathbb{Z}$。必要时将 $\iota(z)$ 取反，我们可以假设 $a \geq 0$。这样剩下的可能性是：一个经过原点的类型 2 超平面，或一个沿着 K 边界的类型 1 超平面。更大的 a 值可以排除，因为它们对应于 K 之外的点。

最后，考虑一个范数为 1 的球面 $S_1(z)$ $z \in \mathcal{Z}$。这是一个经过原点的球面，因此其逆像是一个超平面。此外，由于球面上距离最远的点是 $2z$，超平面上的最近点是点 $\iota(z)/2$，因此该超平面为 $x \cdot \iota(z) = 1/2$。沿用上一段的方法，我们得出 $T(S_1(z))$ 必须由平面对象 $x \cdot \iota(z) = 1/2$, $x \cdot \iota(z) = 0$或 $x \cdot (-\iota(z)) = 1/2$ 构成。

因此，我们已经证明，E 是所有类型 1、类型 2 和类型 3 对象之并的子集。接下来只需证明，E 实际上是一个有限球面复形（FSC）。为此，我们进行归纳。根据假设，$E_0 = \partial K$ 是一个有限球面复形。对于 $i \geq 1$，我们可以写成$E_i = E_{i-1} \cup \bigcup_{z \in \mathcal{Z}} K \cap (z + \iota E_{i-1})$。分别考察每个 $z \in \mathcal{Z}$，我们发现，$K \cap (z + \iota E_{i-1})$是由类型 1、类型 2 和类型 3 对象生成的有限多个 FSC 之一（引理 3.5）。因此，在构造 E_i 时，实际上是对由相同超平面和球面生成的有限多个不同 FSC 取并，故再次得到一个由这些对象生成的 FSC

相同的 HAS。因此，特别地，根据引理 3.5，E_i 可能的取值只有有限种；又因为 $E_{i-1} \subset E_i$，E_i最终必然稳定下来，正如所需。□

注 4.9。在引理 4.8 中，类型 2 对象出现的唯一情形是存在 $z_1, z_2 \in \mathcal{Z}$，且满足 $z_1 \cdot z_2 \notin \mathbb{Z}$。这解释了为什么图 1a 中没有出现类型 2 对象。

我们可以将上述推理推广，以得到条件 (E)：每个 U_i 都包含一个完整圆柱。

引理 4.10。设格 $\mathcal{Z}$ 是整的，关于反演 ι良好可逆，且范数欧几里得、由单位生成并且 *3*-远。那么条件 *(E)* 成立。

证明。我们借鉴引理 4.8 证明中的关键思路。该证明从范数为 1 的 z 的超平面 $x \cdot z = 1/2$ 出发，因为 ∂K 属于这些超平面的并集。现在我们将从范数为 1 的 z 的半空间 $x \cdot z < 1/2$ 出发，因为 K 是这些半空间的交集（忽略边界）。像之前那样分析T 如何映射这些对象，可知任意集合 U_j （忽略边界）都是有限多个如下形式的集合的非空交集

- 半空间 $x \cdot z < 1/2$ 满足 $z \in \mathcal{Z}$ 的范数为 1，
- 半空间 $x \cdot z < 0$ 满足 $z \in \mathcal{Z}$ 的范数为 1，
- 球外部 $\{x : d(x, z) > 1\}$ 满足 $z \in \mathcal{Z}$ 的范数为 1 或 $\sqrt{2}$。

我们要证明给定的 U_j 包含一个完整圆柱。因此，考虑 ιU_j。

首先注意到，根据上面的描述，U_j 的闭包包含原点，并且对于任意 $r > 0$，$\lambda(B_r(0) \cap U_j) > 0$。因此，$\iota U_j$ 在 ∞的邻域上具有正测度，我们现在将利用这一点。

接下来注意到，ιU_j 由超平面或 $S_1(z)$围成，其中 $|z| = 1$ 或 $|z| = \sqrt{2}$。在 ∞ 附近（特别是球 $B_3(0)$之外），球面不会限制属于 ιU_j的条件，因此我们可以设想，ιU_j 由形如 $x \cdot z < 1/2$和 $x \cdot z < 0$的半空间的交集构成，其中 $z \in \mathcal{Z}$取遍各种取值。根据上面关于 ∞邻域的论证，这个交集具有正测度。因此，我们可以取一个（足够大的）数字 $a \in \mathcal{Z}$，使得 $(a + K) \cap \iota U_j$具有正测度；此外，$(a + K) \cap \iota U_j$实际上只是 $a + K$ 与形如 $x \cdot z < 1/2$ 和 $x \cdot z < 0$ 的半空间的交集，其中 $z \in \mathcal{Z}$ 取遍各种取值。

如果 $a + K \subset \iota U_j$，那么 $T_a^{-1} K = \iota(a + K) \subset U_j$，这就意味着 C_a 是一个完整圆柱，且包含于 U_j 中。然而，由于 ιU_j 可能被夹在两个相近的半超平面 $1/2 \geq x \cdot z \geq 0$ 之间，我们无法保证这一点。若发生这种情况，令 $K' = K \cap (\iota U_j - a) \subset K$，使得 $a + K' = a + K \cap \iota U_j$。那么 K' 是形如 $x \cdot z < 1/2$ 或 $x \cdot z < 0$ 的半平面的交，其中 $z \in \mathcal{Z}$ 的范数为 1。特别地，K' 的定义无需使用任何球外部。

对 K' 进行反演后，我们得到集合 $\iota K'$，它的定义中不含任何形如 $x \cdot z < 1/2$ 的半空间；也就是说，它是球外部与有限多个经过原点的半空间 $x \cdot z < 0$ 的交集。再次考察集合 $B_3(0)$ 外部时，我们会看到一个锥体，其中包含任意大的开球。特别地，存在一个

（较大的）数字 b，使得 $b+K\subset \iota K'$。因此，

$$C_{ab}=T_a^{-1}C_b\subset T_a^{-1}K'\subset U_j,$$

因此， C_{ab} 是 U_j内部的一个完整圆柱，符合预期。 □

根据上述关于柱集的结果，条件 (H) 可直接由其边界的结构推出。

引理 4.11. *设格 $\mathcal{Z}$ 是整的、相对于反演 ι良好可逆的、范数欧几里得的、由单位生成的，并且是 3-远的。那么条件 (H) 成立。*

证明。 回顾一下，条件 (H) 表示 $\lim_{n\to\infty}\gamma(n)=0$，其中 $\gamma(n)$ 是秩为 n 、且未被完整包含在任何胞腔 $F\in\mathcal{F}$ 内的柱集的勒贝格测度总和。这不超过边界集 $E=\bigcup_{F\in\mathcal{F}}\partial F$ 的 $\sigma(n)$-邻域的体积，其中 $\sigma(n)$ 是条件 (D) 中出现的柱集直径，我们已在引理 4.5 中证明了这一点。正如命题 4.8 的证明中所见，这个边界区域自然分解为一系列光滑非连通流形 $M_{d-1},\dots,M_0$ 的并集；这些流形由维数为 $k-1$ 的余维一球面和平面的相对开子集，以及它们的闭包在较低维数下的交集构成。通过在坐标图中考察这些嵌入流形，可以证明 E 的 $\sigma(n)$-邻域体积至多为 $\sum_{i=0}^{d-1}\mu_i(M_i)\sigma(n)^{k-i}$，相差一个与 $\sigma(n)$ 无关的乘法常数。由于 $\sigma(n)\to 0$，我们也有 $\gamma(n)\to 0$，符合预期。□

注 4.12。 在本节中，任何要求 $\mathcal{Z}$ 为范数欧几里得的条件（即 $\mathrm{rad}(K)<1$）都可以替换为 $\mathrm{rad}(K)\le 1$这一条件。

4.3. **条件 (F)**。

引理 4.13。 *设格 $\mathcal{Z}$ 是整的，相对于反演 ι良好可逆、范数欧几里得、由单位生成且 3-远。则条件 (F) 成立。*

证明。 回顾一下，条件 (F) 表示，对于任何满足 C_s非空的字符串 $s=a_1a_2\dots a_n$，都有

$$|\omega_s(T^nx)-\omega_s(T^ny)|\le R_1\lambda(C_s)d(T^nx,T^ny).$$

对所有 $x,\ y\in C_s$。

在引理 4.10 的证明中，我们提到，所有 U_j （忽略边界）都是半空间 $x\cdot z<1/2$ 或 $x\cdot z<0$ 与范数为 1 的 $z\in\mathcal{Z}$ 以及球外部 $\{x$ 的交集： $d(x,z)>1\}$，其中 $z\in\mathcal{Z}$ 的范数为 1，或 $\sqrt{2}$。由于 0 位于这些空间内或其边界上，因此对所有 j，都有 $0\in U_j$。我们可以将所有相关函数连续地延拓到 U_j 的边界上：特别地，可以定义 $\omega_s(0)$。令 $s'=a_1a_2\dots a_{n-1}$和 $r=T_{s'}^{-1}0$。

由于满足 ´enyi 条件，对于任意 $z\in C_s$，我们有 $\omega_s(T^nz)\asymp\omega_s(0)$。根据 ω 的定义，我们有：

$$\begin{aligned}\lambda(C_s)&=\int_{C_s}d\lambda=\int_{T^nC_s}\omega_s(z)\,d\lambda(z)\asymp\omega_s(0)\int_{T^nC_s}d\lambda(z)\\&=\omega_s(0)\lambda(T^nC_s)\asymp\omega_s(0)\end{aligned}\tag{4.4}$$

其中，最后一个渐近关系成立，是因为 $T^n C_{a_1 \dots a_n}$ 必定是某个 U_j，而这样的集合只有有限多个，且它们的测度均为正。因此，我们有

$$\omega_s(T^n z) \asymp \lambda(C_s) \tag{4.5}$$

对任意 $z \in C_s$。

由引理 4.2，得

$$\omega_s(T^n x) = \prod_{i=0}^{n-1} |T^i x|^{2d}, \tag{4.6}$$

其中 d 是环境空间的维数。由于乘积中的所有项都严格小于 1，因此有

$$\omega_{s'}(0) \geq \omega_s(0). \tag{4.7}$$

将重复反演公式 (4.2) 与公式 (4.6) 结合，得

$$\begin{aligned} d(r,x) &= d(0, T^{n-1}x) \left(\prod_{i=0}^{n-2} |T^i r||T^i x| \right) = \prod_{i=0}^{n-2} |T^i r| \prod_{i=0}^{n-1} |T^i x| \\ &= \omega_{s'}(0)^{1/2d} \omega_s(T^n x)^{1/2d}. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\omega_s(T^n x) = \omega_{s'}(0)^{-1} d(r,x)^{2d} \tag{4.8}$$

对所有 $x \in C_s$ 均成立。此外，由 (4.5) 可得

$$d(r,x) \asymp \omega_{s'}(0)^{1/2d} \lambda(C_s)^{1/2d}. \tag{4.9}$$

最后，利用重复反演公式 (4.2) 以及 (4.5) 和 (4.6)，我们得到

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} |T^i x||T^i y| \right) d(T^n x, T^n y) \\ &= \omega_s(T^n x)^{1/2d} \omega_s(T^n y)^{1/2d} d(T^n x, T^n y) \\ &\asymp \lambda(C_s)^{1/d} d(T^n x, T^n y). \end{aligned} \tag{4.10}$$

综合我们目前得到的所有结果，可得

$$\begin{aligned} &|\omega_s(T^n x) - \omega_s(T^n y)| \\ &\quad = \omega_{s'}(0)^{-1} |d(r,x)^{2d} - d(r,y)^{2d}| && \text{by (4.8)} \\ &\quad = \omega_{s'}(0)^{-1} |d(r,x) - d(r,y)| \times \\ &\qquad \times |d(r,x)^{2d-1} + d(r,x)^{2d-2} d(r,y) + \cdots + d(r,y)^{2d-1}| \\ &\quad \asymp \omega_{s'}(0)^{-1} \max\{d(r,x)^{2d-1}, d(r,y)^{2d-1}\} |d(r,x) - d(r,y)| \\ &\quad \asymp \omega_{s'}(0)^{-1/2d} \lambda(C_s)^{(2d-1)/2d} |d(r,x) - d(r,y)| && \text{by (4.9)} \\ &\quad \leq \omega_{s'}(0)^{-1/2d} \lambda(C_s)^{(2d-1)/2d} d(x,y) \\ &\quad \asymp \omega_{s'}(0)^{-1/2d} \lambda(C_s)^{(2d+1)/2d} d(T^n x, T^n y) && \text{by (4.10)} \\ &\quad \leq \omega_s(0)^{-1/2d} \lambda(C_s)^{(2d+1)/2d} d(T^n x, T^n y) && \text{by (4.7)} \\ &\quad \asymp \lambda(C_s) d(T^n x, T^n y) && \text{by (4.4),} \end{aligned}$$

正如所需。 □

4.4. 7-远情形。 到目前为止，我们假设格是3-远的。现在说明，如果改为假设具有7-远性（这也包括 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}^3$ 的情形，因为 $\mathbb{Z}^3$ 中没有范数为 $\sqrt{7}$ 的点），证明需要如何调整。

唯一需要大幅修改的证明是引理 4.8 的证明。在这里，我们可以像之前一样进行，但除了类型 1、类型 2 和类型 3 对象之外，还需要以下对象：

- （类型 4）具有范数为 $\sqrt{3}$ 的 $z \in \mathcal{Z}$ 的球面 $S_1(z)$，
- （类型 5）具有范数为 1，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$ 的 $z \in \mathcal{Z}$ 的球面 $S_{1/2}(z/2)$。

注意，在引理 4.8 中，我们可以根据 3-远条件排除第4类对象，但现在必须考虑它们。

继续之前，我们先更仔细地考察反演对球面的作用。考虑满足 $|z| > r$ 的 $S_r(z)$。球面上距离 0 最近的点是 $\frac{|z|-r}{|z|} z$，而球面上距离 0 最远的点是 $\frac{|z|+r}{|z|} z$。因此，在 $\frac{|z|}{|z|+r}\iota(z)$ 处，$\iota S_r(z)$ 上距离 0 最近的点为 $\frac{1}{|z|+r}\frac{\iota(z)}{|\iota(z)|}$，而 $\iota S_r(z)$ 上距离 0 最远的点位于 $\frac{|z|}{|z|-r}\iota(z) = \frac{1}{|z|-r}\frac{\iota(z)}{|\iota(z)|}$。由此可以很快计算出新的球面为

$$\iota S_r(z) = S_{\frac{r}{|z|^2-r^2}}\left(\frac{1}{|z|^2-r^2}|z|^2\iota(z)\right),$$

其中，这个新球面的中心范数为 $|z|/(|z|^2 - r^2)$。注意，根据良好可逆性的假设，若 $z \in \mathcal{Z}$，则 $|z|^2\iota(z) \in \mathcal{Z}$。

因此，若 $S_1(z)$ 是一个类型 4 对象，则对于某个 $z' \in \mathcal{Z}$ with $|z'| = \sqrt{3}$，$\iota(S_1(z))$ 是 $S_{1/2}(z'/2)$。和之前一样，我们可以平移这个新球面，观察它可能与 K 相交的位置。所得球心将位于 $z'/2+w$，其中某个 $w \in \mathcal{Z}$。已知 $|z'|^2 = 3$，我们有

$$\left|\frac{z'}{2} + w\right|^2 = \frac{3}{4} + z' \cdot w + w \cdot w.$$

由于 $2z' \cdot w \in \mathbb{Z}$，我们有 $|z'/2 + w|^2$ 必须是一个分母为 4 的奇整数。让我们考察各种可能性。假设 $|z'/2 + w|^2 \geq 9/4$。那么，球面 $S_{1/2}(z'/2 + w)$ 不可能与开单位球相交，因此根据范数-欧几里得条件，它也不会与 K 相交。接着假设 $|z'/2 + w|^2 = 7/4$，并且 $S_{1/2}(z'/2 + w)$ 与 K 有非平凡交集。于是存在一点 $-z' + 2w \in \mathcal{Z}$，其范数为 $\sqrt{7}$，使得 $d(z'/2 + w,\ K) < 1/2$。根据我们的假设，7-远性排除了这种可能。因此，$\iota S_1(z) + w = S_{1/2}(z'/2 + w)$ 是一个类型 5 对象。

因此，现在考虑第5类对象。

首先，如果 $|z| = \sqrt{3}$，那么对于 $z' \in \mathcal{Z}$，$\iota S_{1/2}(z/2)$ 将是 $S_1(z')$。因此，与 $K \subset B_1(0)$ 相交的其平移像必然是第3类或第4类对象。

如果 $|z| = \sqrt{5}$，那么对于某个 $z' \in \mathcal{Z}$，$\iota S_{1/2}(z/2)$ 将是 $S_{1/2}(z'/2)$。我们在上文已经证明，与 K 相交的这类球面的平移像全都是第5类对象。

最后，我们有球面 $S_{1/2}(z/2)$，其中 $|z| = 1$。该球面包含原点，且其距原点最远的点位于 z。因此，$\iota S_{1/2}(z/2)$ 将是

超平面 $x \cdot \iota(z) = 1$。与 K相交的这些超平面的平移像将是类型 1 或类型 2 对象。

至此，修订版引理 4.8 的证明完成。
同样，引理 4.10 的证明实质上没有变化。

5. 证明测度是实解析的

本节将研究 T 的不变测度，并拓展 Hensley [12], 的一个论证；该论证又以 Bandtlow–Jenkinson [2] 和 Mayer [21] 的工作为基础。我们调整了一些技巧并补充了若干细节，证明如下：

定理 5.1。 *在定理 1.4 的假设下， T 的不变测度具有密度 $d\mu/d\lambda$，且该密度在 $K \setminus \bigcup_n T^n \partial K$ 的每个连通分支上均为解析函数。*

证明。 我们采用 Hensley 的方法，将计算留到后续引理中。
首先，回顾 K 的偶然分解记号。引理 4.8 的证明及其在第 4.4 节中的类似结果表明，边界 $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n \partial K$ 的正向轨道可以写成有限个超平面对象和球面对象的并，它们将 K 划分为有限个开连通分支 B_i，其指标集为 $\mathcal{I}$，因此 $K = E \cup \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i$。对于每个 i， j，令 $G_{i,\ j} = \{a \in \mathcal{Z} : T_a^{-1}(B_j) \cap B_i \neq \emptyset\}$。注意，对于固定的 j，集合 $G_{i,\ j}$ 两两不相交。由于 E 已包含 ∂K 的所有像，因此立即可得（引理 5.2），对于每个 $a \in G_{i,\ j}$，事实上都有 $T_a^{-1}(B_j) \subset B_i$。

接下来，我们将定理改写为一个特征值问题。具体而言，考虑实 $K \setminus E$维空间 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 上的有界局部解析函数空间 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$。将 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$中的函数视为有限测度的密度，我们可以定义一个转移算子 $L_{\mathbb{R}}$，它将密度 f 映射为推前密度

$$L_{\mathbb{R}} f(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{a \in G_{i,j}} f(T_a^{-1}(x)) w_a(x), \qquad \text{if } x \in B_j$$

其中， $w_a(x) = |a + x|^{-2d}$ 是 T_a^{-1}在 x处的雅可比行列式。

我们需要证明两件事：存在一个子空间 $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$，使得 $L_{\mathbb{R}}$定义了一个良定义的算子 $L_{\mathbb{R}} : \mathcal{B}'_{\mathbb{R}} \to \mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$；并且对于 $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$ 上的某个适当范数，转移算子是紧的。然后，我们将应用正算子理论，找到 $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$的一个1-特征函数。

我们需要构造若干中间空间，它们之间的关系如下：

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} H^{\infty} D_i \supset \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i \xrightarrow{I} I\left(\prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i\right) = \mathcal{B}'_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

现在我们将涉及的所有对象复化，首先将 $\mathbb{R}^d$ 扩展到 $\mathbb{C}^d$。回想一下，反演 ι由正交线性变换$\mathcal{O}$ 与映射 $x \mapsto x/|x|^2$的复合给出。对于 $z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d$，取 $Q(z) = \sum z_i^2$，将 ι扩展到复坐标，写作 $\iota(z) = \mathcal{O}(z)/Q(z)$，并定义 $T_a^{-1}(z) = \iota(a + z)$（注意，我们不将 T 扩展到 $\mathbb{C}^d$）。我们还将雅可比行列式扩展为 $w_a(z) = Q(z)^{-d}$。这不再是 $T_a^{-1}(z)$ 的雅可比行列式，除非在实部 $\mathbb{R}^d$上。

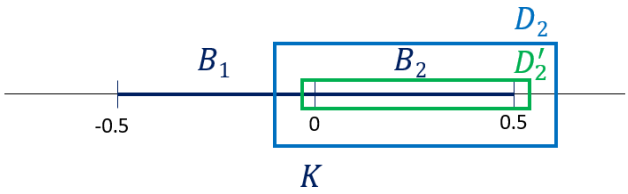


图 4. 通过反演 $x \mapsto 1/x$ 加厚最近整数连分数系统的偶然分解。在这里，$E = \{-0.5, 0, 0.5\}$ 将 $K = (-0.5,\ 0.5]$ 分成两个区域 B_1 和 B_2。当在 $\mathbb{C}$ 中加厚 B_2 以构造 D_2 时，其在 T_a^{-1} 下的像，对于 $a \in G_{2,\ 2} = \{a \geq 2\}$，包含于一个更小的区域 D_j' 中。

设 $U \subset \mathbb{C}^d$ 为单位球，$\epsilon < 1$ 将在后文确定。对于 $a \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$和充分小的 ϵ，我们有 T_a^{-1}在远离原点的 $\mathbb{R}^d + \epsilon U$上有定义且为压缩的（引理5.4），并将每个集合 $D_i = B_i + \epsilon U$ 映射到集合$D_j' = B_j + \delta U \subset D_j$，其中 $\delta < \epsilon$（且 δ 不依赖于 a）。

加厚我们的函数空间，对于每个指标 $i \in \mathcal{I}$，令 $H^\infty D_i$ 表示定义在 D_i 上的有界全纯函数空间，并赋予上确界范数，同时类似地定义 $H^\infty D_i'$。定义复化转移算子 $L_{i,\ j}$：$H^\infty D_i \to H^\infty D_j$ 为

$$L_{i,j} f(z) = \sum_{a \in G_{i,j}} f(T_a^{-1}(z)) w_a(z).$$

接下来我们证明 $H^\infty D_i \overset{L_{i,\ \cdot}}{\to} H^\infty D_j$ 是良定义的，并且是一个紧算子。事实上，根据 D_i' 的定义，算子 $H^\infty D_i \overset{L_{i,\ \cdot}}{\to} H^\infty D_j$ 只使用 $f|_{D_i'}$ 的值，因此它可分解为

$$H^\infty D_i \xrightarrow{J} H^\infty D_i' \xrightarrow{L_{i,j}|_{H^\infty D_i'}} H^\infty D_j,$$

作为典范嵌入 $J\colon\ H^\infty D_i \to H^\infty D_i'$（将 D_i 上的全纯函数视为 D_i' 上的全纯函数；根据蒙特尔定理，有界的全纯函数序列存在子列在紧集上一致收敛，且 D_i' 在 D_i 中有紧闭包，因此该嵌入是紧的）与限制 $L_{i,\ j}|_{H^\infty D_i'}$ 的复合。我们证明（引理 5.5）$L_{i,\ j}(1)$ 是有界函数，然后利用维塔利收敛定理证明（引理 5.6）$L_{i,\ j}|_{H^\infty D_i'}$ 有界。

接下来，令 $\mathcal{B}_i = \{f \in H^\infty D_i\colon\ f(B_i) \subset \mathbb{R}\} \subset H^\infty D_i$ 为一个闭子空间。注意到 $L_{i,\ j}(\mathcal{B}_i) \subset \mathcal{B}_j$，我们将 $L_{i,\ j}\colon H^\infty D_i \to H^\infty D_j$ 限制到 $L_{i,\ j}\colon \mathcal{B}_i \to \mathcal{B}_j$，所得算子仍为紧算子。

将这一构造应用于所有指标 i，取 $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$，并将转移算子 $L_{\mathbb{C}}$ 定义为转移算子矩阵 $L_{i,\ j}$。也就是说，若 $f = (f_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \mathcal{B}_i$，则

$$L_{\mathbb{C}} f = \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} L_{i,j} f_i \right)_{j \in \mathcal{I}}.$$

回到实坐标，定义映射 I，将 $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ 映入 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$：将每个多值函数 $(f_i) \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ 限制在 B_i上，从而共同得到定义在 $K \setminus E$上的分段定义的局部解析函数。令 $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$ 为此算子的像。注意，I是线性且单射的：若 $f \in$Ker I 由 (f_i)给出，则每个 f_i 都必须在开集 B_i上恒等于零，因此沿着 B_i的所有导数都必须为零，幂级数展开也必须在 B_i的某个邻域内恒等于零；由恒等定理可知，这意味着 f_i 在 D_i上恒等于零。因此，$I: \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$ 是向量空间同构。赋予 $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$ 诱导范数：也就是说，对于 $f \in \mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$，$\|f\| = \left\|I^{-1}(f)\right\|_{\infty}$ 是将 f 分段延拓至复化区域 D_i后所得函数的上确界范数。最后，注意 I 在 $L_{\mathbb{R}}$ 与 $L_{\mathbb{C}}$之间建立了共轭关系，因此 $L_{\mathbb{R}} : \mathcal{B}'_{\mathbb{R}} \to \mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$ 是紧算子。

接下来，我们应用正算子理论，为$L_{\mathbb{R}}$得到唯一的特征值，并证明所有正密度都指数收敛到该特征值。为此，令 $P \subset B'_{\mathbb{R}}$ 为非负函数的子集。

以下结论显然成立：(1) P 在加法和正数倍运算下封闭；(2) P 的内部非空（特别是，对函数 $f(x) = 1$作足够小的扰动后，所得函数仍属于 P）；(3) P是闭集；(4) $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$中的任意元素都可表示为 P中两个元素之差（注意，f有上界）；(5) $L_{\mathbb{R}}$ 将 P映入P。

要应用该理论，还需证明：(6) 对任意非零的 $f \in P$，存在一个 n 使得 $L^n_{\mathbb{R}}(f) \asymp 1$。由于 f是 $K \setminus E$上的连续函数，它必在某个开集上为正；而该开集又包含一个深度为 n 的 T 完整圆柱，这是由引理 5.7 得出的。因此，转移算子迭代 n 次后，会将这一正值区域扩展至整个 K，同时还会增加一些其他非负值，从而得到一致下界 $0 < \inf_{x \in K} L^n_{\mathbb{R}}(f)(x)$。由于 $L^n_{\mathbb{R}} f \in \mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$，它是 $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$中一个有界多值函数的限制，因此其上界一致不超过 $\|f\|_{B'_{\mathbb{R}}}$，即扩展后的多值函数的上确界。

上述条件由此根据 [18]，的定理 2.5 推出，$L_{\mathbb{R}}$ 具有正特征值 ρ，其特征函数为 $f \in P$。此外，由于 $L_{\mathbb{R}}$ 是转移算子且保持 L^1 范数不变，我们有 $\|f\|_1 = \|L_{\mathbb{R}} f\|_1 = \|\rho f\|_1 = \rho \|f\|_1$，因此 $\rho = 1$。根据空间 $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$ 的定义，f 在 $K \setminus E$ 上是局部解析的（并且还可以从每个 B_i 复解析地延拓到 D_i）。

将转移算子的特征方向视为概率密度函数，我们便在 K 上得到一个 T-不变测度。由于定理 1.4 已经给出了一个与勒贝格测度等价的唯一不变测度 μ，因此我们得出，μ实际上由我们的密度给出；根据构造，该密度在 $K \setminus E$ 上是局部解析的。

最后，我们指出，定理 1.4 的部分内容（包括精确性）也可以通过稠密性论证得到，如 [2] 中所述。□

5.1. 技术引理。 这里我们证明用于证明定理 5.1 的引理。

引理 5.2。 对于任意 i、$j \in \mathcal{I}$ 和任意 $a \in \mathcal{Z}$，我们有以下结论：要么 $T_a^{-1}(B_j) \subset B_i$，要么 $T_a^{-1}(B_j) \subset B_i^c$。

证明。 首先注意，根据构造，T_a^{-1}将 B_j 映射到 E的补集：否则，就会存在 E 中的一点，其在 T 下的像属于 $B_j \subset K \setminus E$，

但 T将 E中的点映射到 E，这就产生了矛盾。由于 T_a^{-1}连续，且 B_i，B_j都是 E 的连通分支，这意味着 $T_a^{-1}(B_j) \cap B_i \neq \emptyset$ 蕴含$T_a^{-1}(B_j) \subset B_i$，证毕。□

引理 5.3. 设 $b \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|b| > 1$。设 $0 < \epsilon < 1$ 和 $c \in \mathbb{C}^d$ 满足$|c| < \epsilon$。当 $\epsilon/|b|$ 足够小时，有

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^d (b_i + c_i)^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^d b_i^2}\left(1 + O\left(\frac{\epsilon}{|b|}\right)\right) \tag{5.1}$$

其中一致隐含常数。

证明。 我们有如下结果，在第二步中应用柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^d (b_i + c_i)^2}{\sum_{i=1}^d b_i^2} &= 1 + \frac{2\sum_{i=1}^d b_i c_i}{|b|^2} + \frac{\sum_{i=1}^d c_i^2}{|b|^2} = 1 + O\left(\frac{2|b||c|}{|b|^2}\right) + O\left(\frac{|c|^2}{|b|^2}\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{2\epsilon}{|b|}\right) + O\left(\frac{\epsilon^2}{|b|^2}\right) = 1 + O\left(\frac{\epsilon}{|b|}\right).\end{aligned}$$

Thus

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^d (b_i + c_i)^2} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^d b_i^2\right)\left(1 + O\left(\frac{\epsilon}{|b|}\right)\right)}.$$

注意到当 $|f(x)|$ 小于 1 且与 1 保持正距离时，$(1 + f(x))^{-1} = 1 + O(f(x))$，且一致隐含常数，即可得出结论。□

下面的引理以另一种证明方式推广了 [12], 的引理 5.2。

引理5.4。 当 ϵ 足够小时，存在 $0 < \delta < \epsilon$ ，使得对所有 $a \in G_{i,\ j}$，都有 $T_a^{-1}($ $B_j + \epsilon U) \subset B_i + \delta U$，其中 U 是 $\mathbb{C}^d$ 中的单位球。

证明。 令 $x_0 \in B_j$, $a \in G_{i,\ j}$ 和 $z \in \epsilon U$。记 $x = a + x_0$，使得 $T_a^{-1}(x_0 + z) = \iota(x + z)$ 且 $|x| >$ (覆盖半径 K)$^{-1} > 1$。反演 ι 是映射 $x \mapsto x/|x|^2$ 与某个正交映射 $\mathcal{O}$ 的复合。

如果 U 是 $\mathbb{R}^d$ 的子集，那么只要 $\epsilon <$ (覆盖半径(K)$^{-1} - 1$)，由 K 的真性和反演恒等式 (1.1) 即可立即得到结论。对于 a 的较大和较小取值，我们分别用两种方法将问题化归到这种情形。

对于较小的数字，注意到 (1.1) 意味着微分$D\iota$ （无论将其视为实映射还是沿 $\mathbb{R}^d$的复映射）的奇异值在严格位于单位球外的点处都严格小于 1。由微分的连续性， ι 的复解析延拓在任意点的某个邻域内仍是压缩映射，因此对于 $x = a + x_0$ 可能所在的任意紧区域也成立。这为任意有限的数字集合 a提供了统一估计，但我们无法对完整集合$G_{i,\ j}$进行控制。

对于足够大的数字 a，我们可以利用引理 5.3 调整反演中的分母：

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{O}(x+z)}{Q(x+z)} &= \frac{\mathcal{O}(x+z)}{|x|^2}\left(1+O\left(\frac{\epsilon}{|x|}\right)\right)\\ &= \frac{\mathcal{O}(x)}{|x|^2}+\frac{\mathcal{O}(x)}{|x|^2}\cdot O\left(\frac{\epsilon}{|x|}\right)+\frac{\mathcal{O}(z)}{|x|^2}\left(1+O\left(\frac{\epsilon}{|x|}\right)\right).\end{aligned}$$

第一项属于 B_i，正如所需。对于充分大的 x（对应于较大的 a），还需对其余各项作一致有界：

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\mathcal{O}(x)}{|x|^2}\cdot O\left(\frac{\epsilon}{|x|}\right)+\frac{\mathcal{O}(z)}{|x|^2}\left(1+O\left(\frac{\epsilon}{|x|}\right)\right)\right|\\ &\quad\le\left|\frac{\mathcal{O}(x)}{|x|^2}\cdot O\left(\frac{\epsilon}{|x|}\right)\right|+\left|\frac{\mathcal{O}(z)}{|x|^2}\left(1+O\left(\frac{\epsilon}{|x|}\right)\right)\right|\\ &\quad\le\left|O\left(\frac{\epsilon}{|x|^2}\right)\right|+\left|\frac{\epsilon}{|x|^2}\left(1+O\left(\frac{\epsilon}{|x|}\right)\right)\right|=O\left(\frac{\epsilon}{|x|^2}\right)<\delta<\epsilon,\end{aligned}$$

对于充分大的 x，存在某个不依赖于 x 的 δ。 □

引理 5.5。对于任意 i、$j\in\mathcal{I}$，有

$$S_{i,j}:=\sup_{z\in D_j}\sum_{a\in G_{i,j}}|w_a(z)|<\infty. \tag{5.2}$$

证明。令 $z\in D_j$ 和 $a\in G_{i,\,j}$。暂且假设 $|a|$ 很大，比如大于某个较大的正数 R。然后，将（5.1）的一个变体应用于$b=a$ 和 $c=z$，得到

$$\begin{aligned}w_a(z)&=\left(\sum_{i=1}^{d}(a_i+z_i)^2\right)^{-d}=\left(\left(\sum_{i=1}^{d}a_i^2\right)(1+O(|a|^{-1}))\right)^{-d}\\ &=|a|^{-2d}(1+O(|a|^{-1}))=O\left(|a|^{-2d}\right).\end{aligned}$$

大 O 记号中的隐含常数对于所有较大的 a都是一致的，因此我们可以写出如下结果：

$$\sum_{|a|>R}w_a(z)=\sum_{|a|>R}O\left(|a|^{-2d}\right)=O\left(\sum_{|a|>R}|a|^{-2d}\right).$$

现在我们估计满足 a 且 $|a|^2=n$ 的项数（由于 $\mathcal{Z}$ 是整数，因此只有这些可能）。考虑环形区域 $\{x\in\mathbb{R}^d:\sqrt{n}-\mathrm{rad}(K)\le|x|\le\sqrt{n}+\mathrm{rad}(K)\}$，其体积为 $O(\sqrt{n}^{d-1})$，因为它是在 $\mathbb{R}^{d-1}$ 中将半径为 $\sqrt{n}$ 的球面加厚所得。另一方面，对于每个这样的 a，平移后的狄利克雷域 $a+K$ 必须包含在该环形区域内，因此环形区域的体积至少为 $\left|\{a\in\mathcal{Z}:\ |a|^2=n\}\right|\mathrm{vol}(K)$。

综合以上结果，我们得到估计 $\left|\{a\in\mathcal{Z}:\ |a|^2=n\}\right|=O(n^{(d-1)/2})$。由此

我们得到

$$\sum_{|a|>R} w_a(z) = O\left(\sum_{|a|>R} |a|^{-2d}\right) = O\left(\sum_{n>R^2} \frac{n^{(d-1)/2}}{n^d}\right) \quad = O\left(\sum_{n>R^2} \frac{1}{n^{(d+1)/2}}\right),$$

如果维数 d 满足 $d > 1$，则该级数收敛且一致有界。当 $d = 1$时，我们转而通过以下事实分析 $O\left(\sum_{|a|>R} |a|^{-2}\right)$： $\mathcal{Z}$是一个格，因此 $|a|$ 将属于一个等差数列，而 $\sum_{|a|>R} |a|^{-2}$的收敛方式类似于 $\sum_{m>0} m^{-2}$的尾项。

对于满足 $|a| \leq R$的其余 a，我们令 x 为位于B_j中的 z 的最近点。因此 $d(x,\ z) < \epsilon$。接着，我们对 $b = a + x$ 和 $c = z - x$使用（5.1）。于是得到

$$\begin{aligned}\sum_{|a|\leq R} w_a(z) &= \sum_{|a|\leq R} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^d (a_i + z_i)^2}\right)^d \\ &= \left(\sum_{|a|\leq R} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^d (a_i + x_i)^2}\right)^d\right)(1 + O(\epsilon)).\end{aligned}$$

由于 $|a + x| \geq$ 覆盖半径$(K)^{-1}$，这现在是有界项的有限和，因而是有界的，正如所要求的那样。□

引理 5.6. $L_{i,j}$ 是一个从 $H^\infty D_i'$ 到 $H^\infty D_j$的有界线性算子。

证明。 固定 $f \in H^\infty D_i'$，对于 $R \in \mathbb{N}$，考虑有界数字和

$$g_R(z) = \sum_{|a|\leq R, a\in G_{i,j}} w_a(z) f(T_a^{-1} z).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}|g_R(z)| &\leq \sum_{|a|\leq R, a\in G_{i,j}} |w_a(z)| \cdot \left|f(T_a^{-1} z)\right| \\ &\leq \left(\sum_{|a|\leq R, a\in G_{i,j}} |w_a(z)|\right) \cdot \sup_{a\in G_{i,j}} \left|f(T_a^{-1} z)\right| \\ &\leq S_{i,j} \cdot \|f\|_{H^\infty D_i'},\end{aligned}$$

其中 $S_{i,j}$ 的定义见引理 5.5。因此，序列 $\{g_R\}$ 在 D_j上一致有界。必要时参照引理 5.5 的证明，我们还可以证明，对于任意点 $z \in D_j$，序列 $\{g_R(z)\}$ 是柯西序列，因此 $\lim_{R\to\infty} g_R(z)$ 收敛到某个值，我们将其记为 $g(z)$。根据维塔利收敛定理 [26, 命题 7]，g_R 在 D_j 的紧子集上一致收敛到 g，因此 g 在整个 D_j上都是解析的。此外，由于 $|g_R(z)| \leq S_{i,j} \cdot \|f\|_{H^\infty D_i'}$，我们也有$|g(z)| \leq S_{i,j} \cdot \|f\|_{H^\infty D_i'}$。因此 $g = L_{i,j} f$ 且 $\|L_{i,j} f\|_{H^\infty D_j} \leq S_{i,j} \cdot \|f\|_{H^\infty D_i'}$，证明完毕。□

引理 5.7。 每个 B_i、 $i \in \mathcal{I}$ 内的开圆盘都包含一个完整圆柱。

证明。 由于满足条件 (D)（引理 4.5），我们知道任何这样的开圆盘都必须包含一个柱集 $C_{a_1 \ldots a_n}$ （不一定是完整圆柱）。此外，

$T^n C_{a_1 \dots a_n} = U_j$ 对于某个 U_j，且根据条件 (E)（引理 4.10），U_j 包含一个完整圆柱 $C_{b_1 \dots b_m}$。因此，$C_{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m}$ 包含于我们的开圆盘中，并且是完整的，正如所要求的那样。□

参考文献

1. Pierre Arnoux 和 Thomas A Schmidt。测地流的截面与 α 连分数。Nonlinearity, 26(3):711，2013年。2. Oscar F Bandtlow 和 Oliver Jenkinson。实解析扩张映射的不变测度。伦敦数学会杂志，75(2):343–368，2007年。3. Adriana Berechet。针对一类纤维系统、具有指数收敛性的 Kuzmin 型定理。遍历理论与动力系统，21(3):673–688，2001。4. J´erˆome Chaubert。中心除代数中极大序的最小欧几里得范数。技术报告，洛桑联邦理工学院，2007年。5. John Conway 和 Neil Sloane。格的 Voronoi 区域、多胞体的二阶矩与量化。IEEE 信息论汇刊，28(2):211–226，1982年。6. John H Conway 和 Derek A Smith。论四元数与八元数：其几何、算术与对称性。AK Peters/CRC Press，2003年。7. Harold Scott Macdonald Coxeter。正多胞体。Courier Corporation，1973年。8. Karma Dajani 和 Cor Kraaikamp。数论遍历论，第29卷。美国数学会，2002年。9. Hiromi Ei、Shunji Ito、Hitoshi Nakada 和 Rie Natsui。论 Hurwitz 复连分数映射自然扩张的构造。Monatshefte f ¨ur Mathematik，188(1):37–86，2019年。10. Manfred Einsiedler 和 Thomas Ward。遍历论。施普林格，4(4):4–5，2013年。11. Robert W. Fitzgerald。范数欧几里得四元数阶。《整数》，12(2):197–208，2012年。12. Doug Hensley。连分数。世界科技出版公司，2006年。13. Ghaith Hiary 和 Joseph Vandehey。Hurwitz 连分数不变测度的计算。《实验数学》，31(1):324–336，2022年。14. Adolf Hurwitz。复数在连分数中的展开。《数学学报》，11:187–200，1900年。15. Marius Iosifescu 和 Cor Kraaikamp。连分数的度量理论，第547卷。施普林格科学与商业媒体，2002年。16. Svetlana Katok 和 Ilie Ugarcovici。（a, b）-连分数变换吸引子的结构。arXiv 预印本 arXiv:1004.4200，2010年。17. Cor Kraaikamp。新型连分数展开。《算术学报》，57 39，1991 1 1( ): – 。18. M. A. Krasnoselskiĭ。算子方程的正解。P. Noordhoff Ltd.，格罗宁根，1964年。由 Richard E. Flaherty 从俄文译出；Leo F. Boron 编。19. Anton Lukyanenko 和 Joseph Vandehey。海森堡群上的连分数。《算术学报》，1(167):19–42，2015年。20. Anton Lukyanenko 和 Joseph Vandehey。通过可标记双曲测地线研究岩泽连分数的遍历性。遍历理论与动力系统，第1–46页，2022年。21. Dieter H. Mayer。实d维空间 $\mathbb{R}^k$ 中局部扩张映射的趋近平衡。《数学物理通讯》，95(1):1–15，1984年。22. Carminda Margaretha Mennen。带整数四元数系数的连分数的代数与几何。博士论文，Citeseer，2015年。23. Hitoshi Nakada。论复连分数的 Kuzmin 定理。《庆应工程报告》，29，1976年。24. Hitoshi Nakada。一类连分数变换及其自然扩张的度量理论。《东京数学杂志》，4(2):399–426，1981年。25. Hitoshi Nakada 和 Rie Natsui。论连分数混合纤维系统的度量理论及其在 Jacobi-Perron 算法中的应用。Monatshefte f ¨ur Mathematik，138(4):267–288，2003年。26. Raghavan Narasimhan。多复变数。芝加哥大学出版社，1971年。27. Hans Peter Rehm。整数 Cayley 八元数的素因数分解。载于《图卢兹数学科学学院年刊：数学》，第2卷，第271–289页，1993年。

28. Alfr´ed R´enyi。实数的表示及其遍历性质。匈牙利科学院数学学报，8(3-4):477–493，1957年。29. Georg Johann Rieger。最近整数连分数的混合与遍历性。纯粹与应用数学杂志，1979年。30. F Schweiger 和 M Waterman。关于 f-展开的 Kuzmin 定理的一些评述。数论杂志，5(2):123–131，1973年。31. Fritz Schweiger。重新审视 Kuzmin 定理。遍历理论与动力系统，20(2):557–565，2000年。32. Shigeru Tanaka 和 Shunji Ito。论一族连分数变换及其遍历性质。《东京数学杂志》，4(1):153–175，1981年。33. Michael Waterman。一类数论自同态的 Kuzmin 定理。《算术学报》，19(1):31–41，1971年。34. Yoji Yoshii。高斯整数。富山数学杂志，39:9–18，2017年。35. Roland Zweim¨uller。Kuzmin 定理、耦合、锥与指数混合。数学论坛，16(3):447–457，2004年。

乔治·梅森大学数学系，4400 University Drive, MS: 3F2, 费尔法克斯，弗吉尼亚州 22030

电子邮箱地址：alukyane@gmu.edu

德克萨斯大学泰勒分校数学系，泰勒，德克萨斯州 75799电子邮箱地址：
jvandehey@uttyler.edu